

ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑΚΈΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΟ ΧΑΟΣ

Υπό

Κώστα Σηριόπουλου
Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

Κώστα Σηριαντζή
Εθνική Τράπεζα της Ελλάδος

Abstract

This article (Stock Market and Deterministic Chaos) presents the results of tests for nonlinear dependence and low dimensional chaos in the daily returns of the General Index of the Athens Stock Exchange (ASE) from October 1986 to February 1994. We use the "rescaled range" R/S(H) statistic proposed by Hurst (1951) and explored by Mandelbrot (1972), and we provide some evidence that the returns of the ASE Index may exhibit long-range (or strong) dependence. We also investigate long-range dependence using Lo's (1991) extension of the classic R/S analysis, in which short-run dependence is incorporated into R/S(L) statistic. The acceptance of the null hypothesis is not conclusive. These results are not in conflict with previous research (Sirlantzis, Siriopoulos, 1993). (JEL C22, G10)

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται τα εμπειρικά αποτελέσματα ελέγχων για την ύπαρξη μη γραμμικότητας και χαμηλής διάστασης χαοτικού ελκυστή στις ημερήσιες αποδόσεις του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΓΔΧΑΑ) για την χρονική περίοδο από τον Οκτώβριο 1986 μέχρι τον Φεβρουάριο 1994. Εφαρμόσαμε την ανάλυση R/S(H) του Hurst (1951), η οποία αναπτύχθηκε περισσότερο από τον Mandelbrot (1972), και βρήκαμε ότι οι αποδόσεις του ΓΔΧΑΑ παρουσιάζουν μακροχρόνια μνήμη. Για τον έλεγχο της μακροχρόνιας (ή ισχυρής) εξάρτησης εφαρμόσαμε επίσης, την διορθωμένη R/S(L) στατιστική του Lo (1991), η οποία λαμβάνει υπ' όψη τη βραχυχρόνια εξάρτηση. Τα αποτελέσματα της στατιστικής αυτής οριακά μόνον καταλήγουν στην αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης. Ακόμα, τα παραπάνω συμπεράσματα δεν έρχονται σε αντίθεση με προηγούμενη έρευνα (Σηριαντζής και Σηριόπουλος, 1993).

1. Εισαγωγή

Οι μέχρι σήμερα επικρατέστερες απόψεις που διαιρούν το σύνολο των χρηματοοικονομικών αναλυτών, σχετικά με την διαχρονική εξέλιξη των απο-

δόσεων στα χρηματιστήρια μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: την τεχνική ανάλυση που υποστηρίζει την ύπαρξη κύκλων από την μια και την ποσοτική οικονομική ανάλυση που δεν δέχεται την ύπαρξη κύκλων, αλλά μάλλον την παρουσία ενός τυχαίου περιπάτου στην εξέλιξη των αποδόσεων ως χρονοσειρά, από την άλλη. Η ύπαρξη ενός τέτοιου υποδείγματος στη χρονοσειρά των αποδόσεων συνεπάγεται την αποτελεσματικότητα της αγοράς, αν και το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκην.

Η υπόθεση της αποτελεσματικότητας της αγοράς αποδεικνύει την χρήση του λογισμού των πιθανοτήτων στην ανάλυση των κεφαλαιαγορών. Ωστόσο, αν οι αγορές αυτές είναι μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, τότε η χρήση της κλασσικής στατιστικής ανάλυσης μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα, ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιείται το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου. Τέλος, η υπόθεση της αποτελεσματικότητας της αγοράς, αντιτίθεται τόσο στην τεχνική ανάλυση όσο και την οικονομική ανάλυση.

Οι μέχρι σήμερα γνωστές εμπειρικές μελέτες δεν έχουν καταλήξει σε ένα συγκεκριμένο συμπέρασμα όσον αφορά την ικανότητα των παραπάνω υποδειγμάτων να εξηγήσουν την κίνηση των τιμών των μετοχών ή νομισματικών ισοτιμιών ή εμπορευμάτων.

Η λύση, πιθανόν να βρίσκεται μεταξύ των δύο αυτών ακραίων απόψεων. Η εμφανιζόμενη τυχειότητα μπορεί να είναι το αποτέλεσμα ύπαρξης ενός προσδιοριστικού δυναμικού συστήματος, όπως υποστηρίζεται από τις πρόσφατα αναπτυσσόμενες μεθόδους της ανάλυσης μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες.

Σχετικές εφαρμογές για την ύπαρξη μη γραμμικής δυναμικής στα οικονομικά έχουν γίνει από διάφορους ερευνητές. Οι Brock και Sayers (1988) βρήκαν μη γραμμική δυναμική στην αγορά εργασίας των ΗΠΑ και τις επενδύσεις. Οι Barnett και Chen (1988) αποκάλυψαν χαμηλή διαστατικότητα σε αρκετά νομισματικά μεγέθη. Άλλες μακροοικονομικές εφαρμογές έχουν παρουσιασθεί από τους Frank και Stengos (1988), Boldrin και Mantrucchio (1986) και άλλους. Όσον αφορά τις διακυμάνσεις των συναλλαγματικών ισοτιμιών, επίσης έχει αποδειχθεί η ύπαρξη μη γραμμικής εξάρτησης (Hsieh 1989, 1993, Kugler και Lenz 1993 κ.ά.).

Στα χρηματοοικονομικά έχουν δημοσιευθεί και άλλες εργασίες που αφορούν τις αποδόσεις δεικτών των μετοχών από τους Scheikman και LeBaron (1989), οι οποίοι βρήκαν μη γραμμική εξάρτηση στις εβδομαδιαίες αποδόσεις του δείκτη των μετοχών του CRSP, τους Brock, Hsieh και LeBaron (1992), οι

οποίοι κατέληξαν και αυτοί σε παρόμοια συμπεράσματα όσον αφορά τις εβδομαδιαίες αποδόσεις των δεικτών CRSP και S&P 500, τον Peters (1991), που απορρίπτει την υπόθεση του τυχαίου περιπάτου στις μηνιαίες αποδόσεις του S&P 500 και δείχνει την ύπαρξη χαοτικής δυναμικής στις διακυμάνσεις του δείκτη, τους Hinich και Patterson (1985) κ.ά.

Στις παραπάνω έρευνες, δύο κυρίως μεθοδολογίες ακολουθούνται για να ανιχνεύσουν την ύπαρξη μη γραμμικών συσχετίσεων στις υπό μελέτη χρονοσειρές. Πρώτη, η μέθοδος που αναπτύχθηκε από τους Grassberger και Procaccia (1983), η οποία στηρίζεται στον προσδιορισμό της διάστασης συσχέτισης, και δεύτερη η μέθοδος των Brock, Dechert και Scheikman (Brock, Hsieh and LeBaron, 1992 - BDS) στην οποία μελετάται η απόκλιση του δείκτη BDS από την μηδενική υπόθεση ανεξαρτησίας και ομομορφης κατανομής (iid).

Εκτεταμένη συζήτηση σχετικά με την σύγκριση των μεθόδων Grassberger-Procaccia και BDS γίνεται από τον Hsieh (1991). Ο τελευταίος, αναπτύσσει μία κριτική ορμόμενος από την κλασική στατιστική αντίληψη έναντι της πιο γεωμετρικής προσέγγισης των Grassberger και Procaccia.

Η μέθοδος των Grassberger-Procaccia είναι μία αξιόπιστη και σχετικά απλή μέθοδος για την εκτίμηση της κλασματικής διάστασης όταν είναι γνωστή μία μόνον μεταβλητή. Η διάσταση συσχέτισης είναι ένας ικανοποιητικός εκτιμητής της κλασματικής διάστασης, διότι ένα fractal διατηρεί την πραγματική του διάσταση όταν εμβυθίζεται σε ανώτερη, λόγω της συσχέτισης μεταξύ των σημείων του.

Μεταξύ άλλων ελέγχων για την ύπαρξη χαοτικής δυναμικής είναι η ανάλυση R/S Hurst-Mandelbrot (1972, βλ. Lo, 1991), R/S(H), ή η διορθωμένη R/S ανάλυση του Lo (1991), R/S(L), η ανακατασκευή του χώρου φάσεων, ο εκθέτης Lyapunov και η εντροπία Kolmogorov.

Στο άρθρο αυτό ελέγχεται η ύπαρξη ενός χαοτικού ελκυστή για τον Γενικό Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Η ύπαρξή του σημαίνει ότι υπάρχει ένας μη-περιοδικός ελκυστής που εξηγεί ένα μεγάλο μέρος της κίνησης των τιμών του ΓΔΧΑΑ. Μια τέτοια κίνηση τιμών μοιάζει να είναι τυχαία όταν αναλύεται με την κλασική στατιστική ανάλυση.

Εφαρμόσαμε κατ' αρχήν την ανάλυση Hurst (ή Rescaled Range analysis), η οποία μας επιτρέπει να διακρίνουμε αν μία χρονοσειρά έχει τάσεις ή ακολουθεί το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου, ακόμα και στην περίπτωση που δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή (non-Gaussian).

Αν και έχει αποδειχθεί (βλ. Lo, 1991) ότι η R/S(H) ανάλυση είναι ικανή να ανιχνεύσει μακροχρόνια ή ισχυρή εξάρτηση στα στοιχεία μιας χρονοσειράς είναι, ωστόσο, ευαίσθητη στην βραχυχρόνια εξάρτηση. Μπορεί, δηλαδή, η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης (ότι υπάρχει ισχυρή εξάρτηση) να είναι απλά το σύμπτωμα της βραχυχρόνιας μνήμης του συστήματος (Lo, 1991).

Ο Lo το 1991 πρότεινε την διορθωμένη R/S(L) ανάλυση, η οποία ελέγχει την ύπαρξη ισχυρής εξάρτησης λαμβάνοντας υπ' όψη την βραχυχρόνια εξάρτηση. Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε συγκριτικά τα αποτελέσματα και των δύο αυτών στατιστικών, για κάποιες υποπεριόδους του δείγματος.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των Grassberger και Procaccia για την ανάλυση των ημερησίων αποδόσεων του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΓΔΧΑΑ) από τον Οκτώβριο του 1986 μέχρι και τον Φεβρουάριο του 1994. Τέλος, εκτιμήθηκε ο μεγαλύτερος εκθέτης Lyapunov, ο οποίος αποτελεί μέτρο της απόκλισης δύο σημείων του ελκυστή που απέχουν μεταξύ τους τουλάχιστον μία μέση τροχιακή περίοδο στην εξέλιξη του χρόνου.

Στόχος της μελέτης αυτής είναι να διερευνηθεί η ύπαρξη ενός μη γραμμικού δυναμικού συστήματος που δημιουργεί τις διακυμάνσεις στις αποδόσεις του ΓΔΧΑΑ και να προσδιοριστεί η μορφή του χαοτικού ελκυστή που αναπαριστά την κίνηση του συστήματος.

Τα αποτελέσματα έδειξαν την ύπαρξη μη γραμμικής συσχέτισης στη χρονοσειρά που μελετήσαμε και ενός ελκυστή μικρής κλασματικής διάστασης. Τα συμπεράσματα αυτά απορρίπτουν τόσο την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς όσο και την ύπαρξη κανονικών κύκλων.

Από πρακτικής πλευράς τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι κάθε πληροφορία επηρεάζει την διαμόρφωση των μελλοντικών διακυμάνσεων των τιμών του ΓΔΧΑΑ και μάλιστα σε ένα ποσοστό που μειώνεται σε κάθε χρονικό βήμα.

Στην δεύτερη παράγραφο παρουσιάζεται η ακολουθούμενη μεθοδολογία για την ανάλυση των στοιχείων της χρονοσειράς. Στην τρίτη παράγραφο παρουσιάζονται τα δεδομένα και τα εμπειρικά αποτελέσματα των αναλύσεων. Στην τέταρτη και τελευταία παράγραφο του άρθρου παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και οι μελλοντικές κατευθύνσεις της έρευνας.

2. Μεθοδολογία

2. 1. Ανάλυση R/S

Η πρώτη εφαρμογή της R/S ανάλυσης σε αποδόσεις μετοχών παρουσιάστηκε από τους Greene και Fielitz το 1977. Πιο πρόσφατα, όμως, η κλασσική R/S(H) ανάλυση έγινε γνωστή από τον Peters (1991) ο οποίος την εφάρμοσε τόσο σε χρηματιστηριακούς δείκτες όσο και ισοτιμίες νομισμάτων. Για τις μηνιαίες και ημερήσιες διακυμάνσεις του ΓΔΧΑΑ μία συγκριτική εφαρμογή της στατιστικής R/S(H) παρουσιάστηκε πρόσφατα από τους Σιρλαντζής και Συριόπουλος (1993). Μετά την διόρθωση του Lo (1991), η εφαρμογή της R/S(L) σε χρηματιστηριακές αποδόσεις έγινε από μερικούς συγγραφείς, μεταξύ των οποίων ο Mills (1993), ο Goetzmann (1993), οι Ambrose et al (1993).

Συγκριτικές εφαρμογές των δύο στατιστικών παρουσιάζονται από τους Lo (1991), Ambrose et al (1993) και Goetzmann (1993). Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τις δύο αυτές στατιστικές και στην παράγραφο 3.2 αποτιμούμε συγκριτικά τα αποτελέσματά τους για τις ημερήσιες αποδόσεις του ΓΔΧΑΑ.

Η εφαρμογή της ανάλυσης R/S δίνει την δυνατότητα της διάκρισης χρονοσειρών σε τυχαίες και μη. Με βάση την υπόθεση της αύξησης της διακύμανσης από τον μέσο της σειράς ανάλογα του $N^{1/2}$ στις τυχαίες χρονοσειρές, η εκτίμηση του εκθέτη του Hurst (H) αποτελεί ένα μέτρο της τάσης που υπάρχει στην χρονοσειρά. Σύμφωνα με τον Mandelbrot ο εκθέτης H παίρνει τιμές από το 0 έως το 1, και δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$H = \log(R/S) / \log(N), \quad H \in [0, 1] \quad (1)$$

R είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελαχίστης αθροιστικής απόκλισης των στοιχείων $\{x_t\}$ της χρονοσειράς από τον μέσο της και είναι συνάρτηση του μήκους του χρόνου (δηλαδή του πλήθους των στοιχείων της χρονοσειράς). Ορίζεται δε, από την παρακάτω σχέση:

$$R_N = \{ \max_{1 \leq i \leq N} [X_{i, N}] - \min_{1 \leq i \leq N} [X_{i, N}] \} \quad (2)$$

όπου $X_{i, N}$ είναι η αθροιστική απόκλιση των στοιχείων της χρονοσειράς από τον μέσο μ , δηλαδή:

$$X_{i, N} = \sum_{t=1}^N (X_t - \mu_N), \quad t = 1, N \quad (3)$$

R/S είναι ο λόγος της σχέσης (2) με την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ($\hat{\sigma}_N$) και δίνεται από τον εμπειρικό νόμο του Hurst $R/S = (N/2)^H$ ή $R/S = N^H$, όταν εκτιμάται για διάφορα N, σύμφωνα με τον Mandelbrot.

Έτσι, ο εκθέτης H μπορεί να εκτιμηθεί από την παλινδρόμηση μεταξύ των $\log(R/S)$ και $\log(N)$ για διάφορα N :

$$\log(R/S) = H * \log(N) + \log(a) \quad (4)$$

όπου a είναι μία σταθερά. Το R/S στην παραπάνω παλινδρόμηση είναι ο μέσος όρος των R/S των υποσειρών που δημιουργούνται από την διαίρεση της αρχικής χρονοσειράς. Το πλήθος των στοιχείων της κάθε υποσειράς αυξάνεται σε κάθε επανάληψη της ανάλυσης μέχρι να γίνει ίσο με το πλήθος των στοιχείων της αρχικής χρονοσειράς.

Όταν $H=0.5$, έχουμε τυχαίο περίπατο, ενώ για τιμές $0.5 \geq H \geq 0$ συνεπάγεται η ύπαρξη αντίθετων τάσεων σε δύο διαδοχικές παρατηρήσεις. Τέλος, για τιμές του H στο διάστημα $[0.5, 1]$ υπονοείται η ύπαρξη της ίδιας τάσης στις διαδοχικές παρατηρήσεις με μέτρο της εμμονής (persistence) της τάσης το πόσο μεγαλύτερη από την τιμή 0.5 είναι η τιμή του H . Μία τιμή του εκθέτη H που είναι σημαντικά διάφορη του 0.5 μπορεί να σημαίνει ότι η χρονοσειρά έχει μεγάλη μνήμη, και ότι κάθε παρατήρηση συσχετίζεται με την επόμενη της.

Για να διακρίνουμε μεταξύ μακροχρόνιας και βραχυχρόνιας εξάρτησης ο Lo (1991) διαιρεί την σχέση (2) με την τετραγωνική ρίζα της ποσότητας:

$$\hat{\sigma}_q^2 = \hat{\sigma}_0^2 + 2N \sum_{j=1}^q \omega_{qj} \hat{\rho}_j \quad (5)$$

όπου $\omega_{qj} = 1 - j(q+1)^{-1}$, $q < N$ και $\hat{\rho}_j$ είναι οι αυτοσυσχετίσεις $N^{-1} \sum_{t=1}^N (R_t - \bar{R})(R_{t-j} - \bar{R}) / \hat{\sigma}_0^2$. Έτσι, προκύπτει η στατιστική $R/S(L)$, η οποία στον παρονομαστή ενσωματώνει την βραχυχρόνια εξάρτηση. Πρόβλημα, πάντως, παραμένει η επιλογή του q . Σημειωτέον ότι για $q=0$ παίρνουμε την κλασσική $R/S(H)$ στατιστική. Ο Lo κανονικοποιεί τις δύο στατιστικές με τον αριθμό των παρατηρήσεων και δημιουργεί την ασυμπτωματική κατανομή V_N και $V_N(q)$ για την κλασσική και την διαφοροποιημένη R/S ανάλυση, αντίστοιχα: $V_N = (N)^{-1/2} R/S(H)$ και $V_N(q) = (N)^{-1/2} R/S(L)$.

Μία τιμή της $V_N(q)$ μεγαλύτερη από την κριτική τιμή (βλ. Lo 1991, εξ. 3.9 και Πίνακα II) δείχνει την πιθανότητα ισχυρής εξάρτησης στα στοιχεία της χρονοσειράς. Για διάστημα εμπιστοσύνης 95% δεχόμαστε την μηδενική υπόθεση για την μη ύπαρξη ισχυρής εξάρτησης όταν η υπολογισθείσα τιμή $V_N(q)$ βρίσκεται εντός του διαστήματος $[0.809, 1.862]$.

2.2. Ανακατασκευή Χώρου Φάσεων

Στην συνέχεια ανακατασκευάστηκε ο χώρος φάσεων, που αποτελεί και την πρώτη συνθήκη ελέγχου ύπαρξης ενός χαοτικού ελκυστή του συστήματος (Packard et al 1980). Η ανακατασκευή του χώρου φάσεων του συστήματος από μία μεταβλητή, συνίσταται στην δημιουργία μίας επιπλέον μεταβλητής για κάθε διάσταση, με χρονική υστέρηση (1) της αρχικής.

Ο υπολογισμός της κατάλληλης χρονικής υστέρησης για κάθε m- διάστατο χώρο γίνεται με την επίλυση της εξίσωσης του Wolf (1985), όπου:

$$Q = m * I \quad (6)$$

Q είναι η μέση τροχιακή περίοδος, m είναι ο αριθμός διαστάσεων και I είναι η χρονική υστέρηση.

Ένας αποτελεσματικός τρόπος για να ελεγχθεί η ύπαρξη χάους είναι να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα συσχέτισης (correlation integral), το οποίο εκφράζει την πιθανότητα σημείων του ελκυστή του συστήματος να βρίσκονται εντός υπερσφαιράς ακτίνας r από κάθε άλλο σημείο του. Το ολοκλήρωμα συσχέτισης δίνεται από την σχέση (7):

$$C_{m, N}(r) = \sum_{t < s} I_r(X_t^m, X_s^m) * [2/N_m(N_m - 1)] \quad (7)$$

όπου: $N_m = N - (m-1)$, $X_t^m = (X_t, \dots, X_{t+m-1})$

και $I_r(X_t^m, X_s^m) = 1$ εάν $\|X_t^m - X_s^m\| < r$ και 0 σε κάθε άλλη περίπτωση.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για αυξανόμενα r κατά σταθερό διάστημα, δώδεκα φορές σε κάθε m-διάστατο χώρο από $m = 2$ μέχρι $m = 6$. Η τιμή του r δεν μπορεί να είναι πολύ μεγάλη γιατί το ολοκλήρωμα συσχέτισης θα έχει πολλές παρατηρήσεις. Οι Barnett και Chen (1988) προτείνουν μία πολύ μικρή αρχική τιμή του r διάφορη του μηδενός. Ο Hsieh (1989) ορίζει το r σε συνάρτηση με την τυπική απόκλιση της χρονοσειράς. Ως κατάλληλη αρχική τιμή r, τέλος, προτείνεται από τον Wolf το 10% της διαφοράς μεγίστης και ελαχίστης τιμής των παρατηρήσεων και ως διάστημα αύξησης το 10% της αρχικής τιμής της ακτίνας r.

Για σχετικά μικρές τιμές του r έχει αποδειχθεί ότι $C_{m, N}(r) \approx r^D$, όπου D είναι η διαστατικότητα του συστήματος, η οποία υπολογίζεται από την σχέση (8):

$$D_m = \lim_{r \rightarrow 0} [\log C_{m,N}(r) / \log r] \quad (8)$$

εάν το παραπάνω όριο υπάρχει. Εναλλακτική εκτίμηση της fractal διάστασης του συστήματος αποτελεί και η πληροφορική διάσταση (capacity dimension), που υπολογίζεται με την μέθοδο των υπερκύβων (box counting, βλ. Tsolis, 1992, σ. 89-90).

Στη συνέχεια, δημιουργούμε μία σειρά των ολοκληρωμάτων συσχέτιση από την παλινδρόμηση (9) και υπολογίζουμε την D για κάθε m -διάστατο χώρο:

$$\log(C_m, N) = D * \log(r) + \text{σταθερά} \quad (9)$$

Η τιμή στην οποία συγκλίνει η D για αυξανόμενο αριθμό διαστάσεων αποτελεί και ικανοποιητική εκτίμηση της διάστασης του ελκυστή. Κατά συνέπεια, εάν η D είναι κλασματική αποδεικνύεται η ύπαρξη χαοτικού ελκυστή και ο επόμενος ακέραιος της D εκφράζει τον αριθμό των μεταβλητών που υποδειγματοποιούν ικανοποιητικό το υπό μελέτη σύστημα.

Τέλος, η D^m χρησιμοποιείται για την διάκριση μεταξύ προσδιοριστικού χάους και στοχαστικών συστημάτων. Εάν το όριο της σχέσης (8) δεν υπάρχει, τότε το σύστημα θεωρείται «μεγάλης διάστασης», δηλαδή στοχαστικό. Η διαστατικότητα είναι ένα μέγεθος της πολυπλοκότητας του συστήματος.

Οι Brok και Sayers (1988) θεωρούν την διάσταση ενός συστήματος σαν μία ένδειξη του αριθμού των μή γραμμικών «παραγόντων» που περιγράφουν τα δεδομένα. Για παράδειγμα, μία γραμμή έχει διάσταση ένα, ενώ μία διαδικασία λευκού θορύβου έχει άπειρη διάσταση.

Η ανακατασκευή του χώρου φάσεων είναι ο πρώτος τρόπος προσδιορισμού εάν ένα σύστημα έχει χαοτικό ελκυστή και η διαστατικότητα του συστήματος είναι το πρώτο κριτήριο που πρέπει να ικανοποιεί ο χώρος φάσεων. Ένα δεύτερο κριτήριο είναι η ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες.

2.3. Εκθέτης Lyapunov

Ένας χαοτικός ελκυστής χαρακτηρίζεται από την ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες. Ένα μέτρο της ευαίσθητης εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες είναι ο εκθέτης Lyapunov (L_i), ο οποίος εκφράζει και την εντροπία του συστήματος, δηλαδή την απώλεια μνήμης (πληροφορίας) σε κάθε χρονικό βήμα. Ο εκθέτης L ορίζεται από την σχέση:

$$L_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r(0) > 0} \sum (1/t) \log^2 [r_i(t) / r_i(0)] \quad (10)$$

Η ύπαρξη ενός εκθέτη L μεγαλύτερου του μηδενός σημαίνει την ύπαρξη ενός χαοτικού ελκυστή.

Με βάση τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε από τον Wolf (1985), γίνεται ο υπολογισμός της σχέσης (10) για τον m -διάστατο χώρο φάσεων. Η επιλογή της διάστασης m βασίζεται, στην πράξη, στους εμπειρικούς κανόνες του Wolf που προτείνει διάσταση εμπύθισης (m) μεγαλύτερη του αμέσως επόμενου ακέραιου της D , ώστε η επιφάνεια του ελκυστή να γίνει ομαλότερη. Ωστόσο, η επιλογή πολύ μεγάλης m είναι δυνατόν να προκαλέσει μεγάλη διασπορά των σημείων στο χώρο φάσεων, με αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση των εναλλακτικών σημείων κατά τον υπολογισμό του εκθέτη L_t της σχέσης (10).

Η ύπαρξη σύγκλισης στις τιμές των υπολογισθέντων L_t σε θετικό αριθμό συνεπάγεται την ύπαρξη χαοτικού ελκυστή. Επίσης, η παραπάνω εκτίμηση του εκθέτη του Lyapunov ως μέτρο απώλειας της πληροφορίας, ελέγχει τον αρχικό υπολογισμό για την μέση τροχιακή περίοδο ως μέσο όρο του χρόνου απώλειας της μνήμης του συστήματος.

3. Περιγραφή Δεδομένων και Αποτελέσματα

3.1. Τα Δεδομένα

Αν και θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι η χρήση των αποδόσεων των τιμών δεν είναι ικανοποιητική για μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών διότι υπάρχει πιθανότητα να καταστραφούν ευαίσθητες συσχετίσεις από την αρχική σειρά των πραγματικών τιμών, τελικά η σειρά των διαφορών εκφράζει πληρέστερα την δυναμική του συστήματος της αγοράς που μελετάμε.

Άλλοι συγγραφείς, πάλι (Peters 1991), χρησιμοποιούν αποπληθωρισμένες τιμές, αλλά αυτό μάλλον αφαιρεί από την δυναμική του συστήματος έναν βασικό παράγοντα που επηρεάζει τις αποφάσεις των επενδυτών. Επομένως, σπερείται τουλάχιστον μιας σημαντικής συνιστώσας η δομή που μελετάμε.

Στην μελέτη αυτή επιλέχθηκαν ως χρονοσειρά αρχικών παρατηρήσεων οι ημερήσιες λογαριθμικές αποδόσεις του ΓΔΧΑΑ από τον Οκτώβριο του 1986 μέχρι το Φεβρουάριο του 1994, συνολικά 1810 παρατηρήσεις. (Διάγραμμα 1).

Από την άλλη, θα μπορούσαμε να μεγαλώσουμε το δείγμα μας τεχνητά, αν θεωρούσαμε, για παράδειγμα, δεκαπεντάλεπτες έναντι ημερησίων αποδό-

σεων. Τότε όμως θα είχαμε μεροληψία των εξωτερικών περιορισμών της δομής της μικρο-αγοράς (Hsieh 1991, p. 1848).

Οι αποδόσεις υπολογίστηκαν από την παρακάτω σχέση:

$$S_i = \log (P_{i+1} / R_i) \quad (11)$$

όπου S_i είναι η λογαριθμική απόδοση της ημέρας i και P_i είναι η τιμή του ΓΔΧΑΑ την ημέρα i .

Ο λόγος που προτιμήθηκαν οι λογαριθμικές αποδόσεις έναντι των εκατοστιαίων, βασίστηκε στο γεγονός ότι αυτές είναι καταλληλότερες για την R/S ανάλυση, η οποία στηρίζεται στην αθροιστική απόκλιση από τον μέσο της σειράς (Peters 1991).

3.2. Τα Εμπειρικά Αποτελέσματα της Μελέτης

Στο πρώτο στάδιο εφαρμόσαμε την ανάλυση R/S και τα αποτελέσματα για την εκτίμηση των R/S(H) και R/S(L) παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 (α και β).

Στον Πίνακα 1α έχουν υπολογισθεί οι στατιστικές V_N και $V_N(q)$ για διάφορα q . Η % Μεροληψία στην τελευταία στήλη του πίνακα υπολογίστηκε από την σχέση $[(V_N / V_N(q)) - 1] * 100$ και αποτελεί μία εκτίμηση της μεροληψίας της κλασσικής R/S ανάλυσης παρουσία της βραχυχρόνιας εξάρτησης των στοιχείων της σειράς. Τα ποσοστά αυτά κινούνται μεταξύ του -11.96% μέχρι του +58.14%, που δεν θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν ιδιαίτερα υψηλά. Επίσης, δεν παρατηρείται κάποιο συστηματικό pattern όσο το q αυξάνει, ούτε κάποια σταθερότητα της $V_N(q)$ για τις διάφορες τιμές του q .

Ωστόσο, όπως προκύπτει από τον Πίνακα 1β η τιμή του H για κάθε υποπερίοδο βρίσκεται εντός του διαστήματος (0.5, 1) με μέγιστη τιμή 0.633313 για $N=780$ ημέρες, δείχνοντας ότι υπάρχει θετική ισχυρή εξάρτηση στην χρονοσειρά με μέσο όρο μνήμης ενός γεγονότος περίπου 37 μήνες.

Από την άλλη, η στατιστική $V_N(q)$ αν και δεν είναι στατιστικά σημαντική για όλες τις τιμές της, μόνον οριακά θα μπορούσε κανείς να απορρίψει την υπόθεση για την μη ύπαρξη ισχυρής εξάρτησης των ημερησίων αποδόσεων του ΓΔΧΑΑ.

Στο δεύτερο στάδιο υπολογίστηκε το ολοκλήρωμα συσχέτισης $C(r)$ για αριθμό διαστάσεων από 2 μέχρι και 6 και ακτίνα $r=0.0405$, αυξανόμενο κατά 0.00405 σε κάθε βήμα.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι υπολογισθείσες τιμές της διάστασης D (correlation dimension) από την παλινδρόμηση μεταξύ του $C(r)$ ως εξαρτημένη μεταβλητή και της ακτίνας r ως ανεξάρτητης μεταβλητής, για κάθε διάσταση m . Αξιοσημείωτη, εδώ, είναι η σαφής σύγκλιση των τιμών της D , για αυξανόμενο αριθμό διαστάσεων στην τιμή 2.10 ± 0.2 .

Στην παραπάνω τιμή συμφωνεί και ο υπολογισμός της πληροφορικής διάστασης (capacity dimension), ο οποίος έδωσε προσεγγιστικά την διάσταση του συστήματος ίση με 2.143 ± 0.35 .

Στο τελευταίο στάδιο υπολογίστηκαν οι τιμές του μεγαλύτερου εκθέτη του Lyapunov (L_1), για κάθε χρονικό βήμα. Παρατηρούμε ότι συγκλίνουν σταθερά στην εξέλιξη του χρόνου στην τιμή 0.0013 (Πίνακας 3 και Διάγραμμα 2). Ο υπολογισμός έγινε για 4-διάστατο χώρο φάσεων με βάση την εκτιμηθείσα $D=2.10$.

Ως αρχικό βήμα T χρησιμοποιήθηκε η τιμή $T = 60$ ημέρες (ικανοποιητικά μικρή περίοδος στο σύνολο των 1810 παρατηρήσεων του δείγματος, ώστε να μην προκύπτουν αναδιπλώσεις στο χώρο). Ακόμα, ως μεγίστη απόκλιση προσδιορίστηκε η τιμή 0.0405, σύμφωνα με τους κανόνες του Wolf.

Τέλος, η ύπαρξη ενός θετικού εκθέτη L είναι χαρακτηριστικό της ευαίσθητης εξάρτησης του συστήματος από τις αρχικές συνθήκες και επιβεβαιώνει την ύπαρξη ενός χαοτικού ελκυστή, ο οποίος παρουσιάζεται στο Διάγραμμα 3.

4. Συμπεράσματα και Μελλοντικές Κατευθύνσεις

Είναι αδιαμφισβήτητο γεγονός η αδυναμία των μέχρι σήμερα εφαρμοζόμενων υποδειγμάτων να εξηγήσουν την κίνηση των τιμών στα χρηματιστήρια. Ένας σημαντικός λόγος για το ενδιαφέρον που υπάρχει για την χαοτική συμπεριφορά, είναι ότι δύναμι μπορεί να εξηγήσει τις διακυμάνσεις στην οικονομία και τις χρηματαγορές που φαίνεται να είναι τυχαίες. Επομένως, υπάρχει αναγκαιότητα να εξεταστεί η παρουσία χάους σε αυτές.

Τα αποτελέσματα της μελέτης που παρουσιάστηκε στο άρθρο αυτό έρχονται σε αντίθεση με την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς (EMH), μιας από τις επικρατέστερες αντιλήψεις, που υποστηρίζει την πλήρη και άμεση ενσωμάτωση κάθε πληροφορίας στις μεταβολές των χρηματιστηριακών τιμών.

Από την ανάλυση R/S προέκυψε μία τιμή του εκθέτη H, η οποία δείχνει την ύπαρξη μιας μη γραμμικής συσχέτισης στις αποδόσεις του ΓΔΧΑΑ. Ακόμα, η ύπαρξη του φαινομένου της μακροχρόνιας μνήμης που προσδιορίστηκε στους 37 μήνες κατά μέσο όρο, καταρρίπτει την υπόθεση EMH και συνεπάγεται την επίδραση των γεγονότων του παρελθόντος στην διαμόρφωση των μελλοντικών αποδόσεων του ΓΔΧΑΑ.

Η επίδραση αυτή μειώνεται στην εξέλιξη του χρόνου σε βαθμό που προσδιορίστηκε από την τιμή του εκθέτη του Lyapunov (L_t) σε 0.0013 bit πληροφορίας ανά μήνα.

Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί απόλυτα με την μνήμη των 37 μηνών, αφού $1/0.0013 = 37$ μήνες περίπου (ή 770 ημέρες), που εκφράζει τον χρονικό ορίζοντα της πλήρους απώλειας πληροφορίας.

Θα πρέπει επιπλέον, να σημειωθεί ότι η ύπαρξη ενός θετικού εκθέτη L είναι χαρακτηριστικό της ύπαρξης χαοτικού ελκυστή στο σύστημα. Η κύρια όμως συνθήκη για την ύπαρξή του είναι η διάστασή του. Πράγματι, η υπολογισθείσα διάσταση για τον ελκυστή των αποδόσεων του ΓΔΧΑΑ είναι 2.10. Η χαμηλή αυτή τιμή θέτει επιπλέον το όριο των ελάχιστων μεταβλητών που θα μπορούσαν να υποδειγματοποιήσουν ικανοποιητικά το σύστημα στον αμέσως επόμενο ακέραιο, δηλαδή τον αριθμό 3. Το γεγονός αυτό δίνει πολλές ελπίδες στην προοπτική υποδειγματοποίησης και αποτελεσματικής πρόβλεψης των αποδόσεων του ΓΔΧΑΑ.

Τελικώς, η θεωρία του χάους και της μη γραμμικής ανάλυσης έρχεται και προτείνει μία ενδιάμεση λύση στις δύο αντίπαλες σχολές σκέψης, την τεχνική και την ποσοτική-οικονομική ανάλυση.

Ενδιαφέρον θα είχε, λοιπόν, η ανάπτυξη υποδειγμάτων που εφαρμόζουν την μη γραμμική δυναμική και θα συνδύαζαν τόσο την τεχνική όσο και την οικονομική προσέγγιση:

$$S_i = f(S_{i-1}) + g(Z) \quad (12)$$

όπου $Z = \{\text{οικονομικές μεταβλητές}\}$, Στο μη γραμμικό υπόδειγμα (12) —γνωστό και σαν K-Z map— ο πρώτος όρος του αθροίσματος αποτελεί το τεχνικό υπόδειγμα και ο δεύτερος όρος το οικονομικό υπόδειγμα.

Τέτοιες εφαρμογές —αν και ελάχιστες προς το παρόν— ήδη έχουν δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα προβλεψιμότητας (Larrain 1991).

Appendix

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Υπολογισμός των V_N και $V_N(q)$ στις Ημερήσιες Αποδόσεις του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών για την Περίοδο Οκτωβρίου 1986 έως Φεβρουαρίου 1994.

Αρ. Υποπερ.	Μέγεθος Δείγματος	V_N	q	$V_N(q)$	% Μεροληψία
1	1810	2.0375	120	1.42014	43.43
1	1810	2.0375	240	1.33881	52.18
1	1810	2.0375	780	1.67739	21.46
1	905	2.4253	90	1.82764	32.70
1	905	2.4253	120	1.84113	31.72
1	905	2.4253	240	1.68408	44.01
1	452	1.9215	60	1.53997	24.77
1	452	1.9215	90	1.61448	19.01
1	452	1.9215	120	1.70562	12.65
2	905	1.8687	90	1.55550	20.13
2	905	1.8687	120	1.81899	2.73
2	905	1.8687	240	2.00649	-6.86
2	452	1.7692	60	1.19835	47.63
2	452	1.7692	90	1.14750	54.17
2	452	1.7692	120	1.11872	58.14
3	452	1.6180	60	1.18937	36.03
3	452	1.6180	90	1.41353	14.46
3	452	1.6180	120	1.83979	-11.96
4	452	1.6848	60	1.30274	29.32
4	452	1.6848	90	1.42228	18.45
4	452	1.6848	120	1.55765	8.16

(Τα επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας για 95% είναι [0.809, 1.862] και για 90% [0.861, 1.747].

ΠΙΝΑΚΑΣ 2
Υπολογισμός του Εκθέτη H του Hurst για τις Ημερήσιες Αποδόσεις του ΓΛΧΑΑ

Αρ. Υποπερ.	N	R/S(H)	log(N)	log R/S(H)	H
15	120	16.2182	4.7874	2.7861	0.581962
10	180	21.0536	5.1929	3.0470	0.586771
7	240	25.6190	5.4806	3.2433	0.591780
6	300	26.6991	5.7037	3.2846	0.575869
5	360	30.2633	5.8861	3.4099	0.579320
4	420	37.3512	6.0402	3.6203	0.599373
3	480	40.5112	6.1737	3.7015	0.599564
3	540	41.3113	6.2915	3.7211	0.591448
3	600	48.9885	6.3969	3.8915	0.608352
2	660	57.5693	6.4922	4.0529	0.624282
2	720	58.9457	6.5792	4.0766	0.619617
2	780	67.8580	6.6592	4.2174	0.633313
2	840	65.5495	6.7334	4.1828	0.621203
2	900	65.2652	6.8023	4.1784	0.614263

ΠΙΝΑΚΑΣ 3
Υπολογισθείσες Τιμές της Διάστασης Συσχέτισης (D) με την Αντίστοιχη Διάσταση του Χώρου Φάσεων m

Διάσταση m	Διάσταση Συσχέτισης D
2	0.364810
3	0.702668
4	1.155917
5	1.639533
6	2.196360

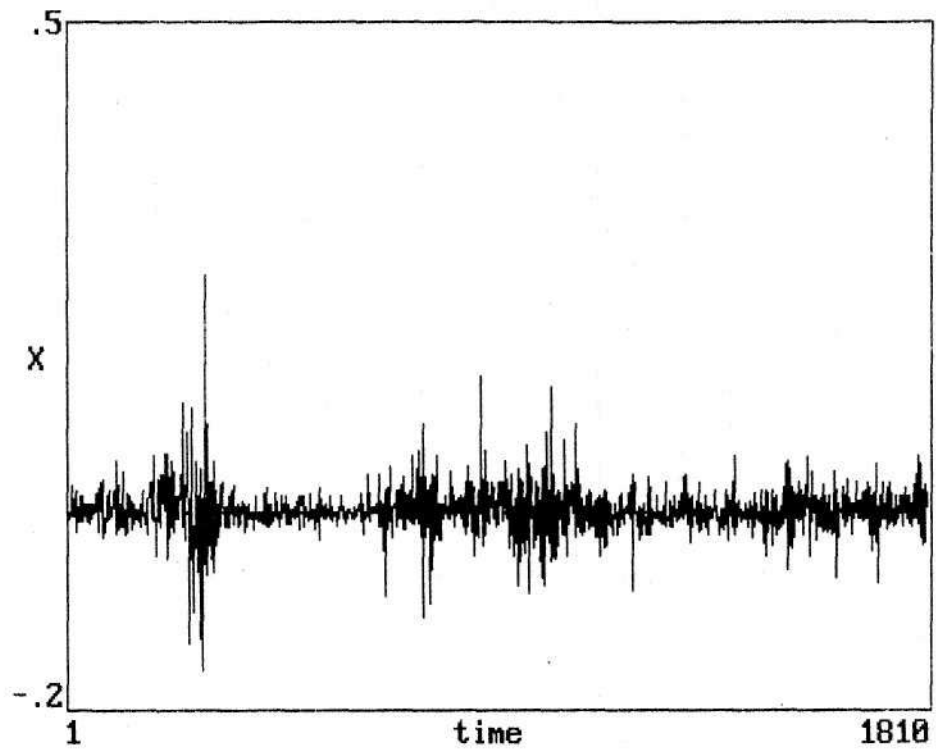
ΠΙΝΑΚΑΣ 4

Εκτίμηση του Μεγαλύτερου Εκθέτη του Lyapunov (L)

L	T	DI	DF
0.012664	60	0.0088	0.0149
0.023070	120	0.0149	0.0601
0.018736	180	0.0408	0.0620
0.013100	240	0.0639	0.0546
0.008113	300	0.0546	0.0334
0.008414	360	0.0334	0.0504
0.005429	420	0.0504	0.0300
0.005487	480	0.0300	0.0383
0.006403	540	0.0383	0.0678
0.003026	600	0.0678	0.0217
0.004578	660	0.0217	0.0501
0.003563	720	0.0501	0.0365
0.001286	780	0.0365	0.0124
0.001289	840	0.0255	0.0270
0.001441	900	0.0270	0.0313
0.002339	960	0.0313	0.0604
0.002000	1020	0.0352	0.0305

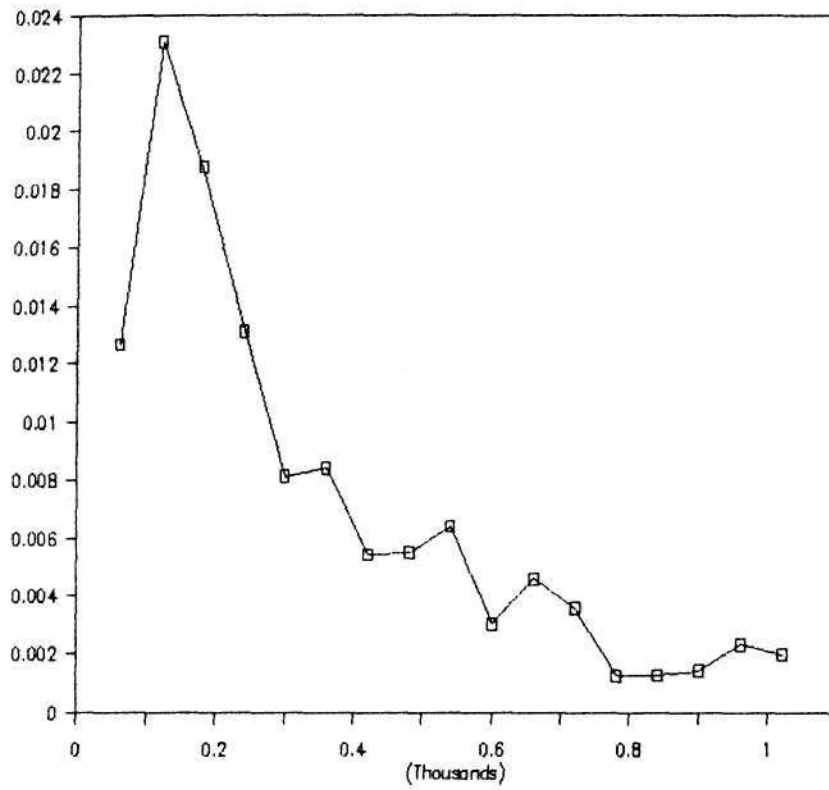
T: Χρονικό Βήμα, DI: Αρχική Απόσταση Σημείων, DF: Τελική Απόσταση Σημείων.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1
Ημερήσιες Λογαριθμικές Αποδόσεις του ΓΔΧΑΑ την Περίοδο Οκτωβρίου 1986 -
Φεβρουαρίου 1994



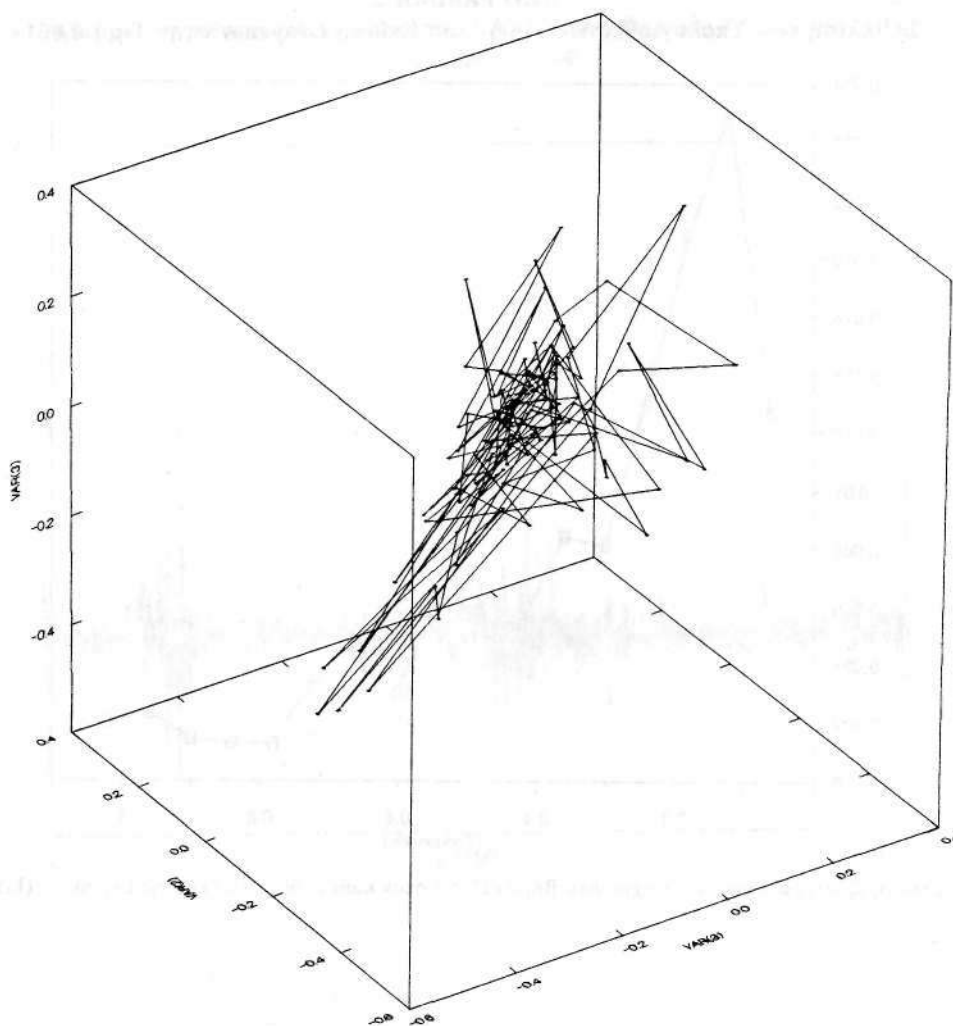
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2

Σύγκλιση των Υπολογισθισίων Τιμών του Εκθέτη Lyapunov στην Τιμή 0.0013



Στον οριζόντιο άξονα είναι το χρονικό βήμα (T) και στον κάθετο άξονα ο εκθέτης Lyapunov (L_i).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3



References

- Barnett W., Chen P.* (1988), The aggregation-theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors: An econometric application of mathematical chaos. In *Dynamic Econometric Modelling*, W. Barnett, E. Berndt, and H. White eds., Cambridge University Press, p.p. 199-246.
- Boldin M., Montrucchio L.* (1986), On the Indeterminacy of capital accumulation paths, *Journal of Economic Theory*, 40, p.p. 26-39.

- Brock W., Hsieh D. and LeBaron B.* (1992), *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. Massachusetts: The MIT Press.
- Brock W., Sayers C.* (1988), Is the business cycle characterized by deterministic chaos? *Journal of Monetary Economics*, 22, p.p. 71-90.
- Frank M. and Stengos T.* (1988), Some evidence concerning Macroeconomic Chaos, *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 423-438.
- Grassberger P. and Procaccia I.* (1983), Measuring the strangeness of Strang Attractors, *Physica* 9D, pp. 189-208.
- Greene M., Fielitz B.* (1977), Long-term dependence in common stock returns, *Journal of Financial Economics*, 4 p.p. 339-349.
- Goetzmann W.* (1993), Patterns in three centuries of stock market prices, *Journal of Business*, 66 (2), p.p. 249-270.
- Hinsh M. and Patterson D.* (1985), Evidences of Nonlinearity in daily Stock Returns, *Journal of Business and Economic Statistics*, 3, pp. 69-77.
- Hsieh* (1989), Testing for Nonlinear dependence in daily Foreign Exchange Rates, *Journal of Business*, 62, pp. 339-368.
- , (1991), Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets, *The Journal of Finance*, Vol. XLVI (5), pp. 1839-1877.
- , (1993), Implications of Nonlinear Dynamics for Financial Risk Management, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(1), pp. 41-64.
- Kugler P. and Lenz C.* (1993), Chaos, ARCH, and the Foreign Exchange Market: Empirical results from weekly data, *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali*, 40, pp. 127-140.
- Larrain M.* (1991), Testing for Nonlinearities in R-bill Rates, *Financial Analysts Journal*, September-October, pp. 52-61.
- Lo, A.* (1991) "Long Term Memory in Stock Price's ", *Econometrica*, 59, pp. 1279-1314.
- Mills T.* (1993), Is there long-memory in Uk stock returns? *Applied Financial Economics*, 3, p.p. 303-306.
- Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R.* (1980), Geometry from a time series, *Phys. Rev. Lett.*, 45, p.p. 712-716.
- Peters E.* (1991), *Chaos and Order in Capital Markets*, J. Wiley and Sons, NY.
- Sheikman J. and LeBaron B.* (1989), Nonlinear Dynamics and Stock Returns, *Journal of Business*, 6@, p.p. 311-337.
- Σιρλαντζής K., Συριόπουλος K.* (1993), Χαοτική δυναμική στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών, 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μη Γραμμικής Δυναμικής, Πάτρα 1993.
- Tsonis A.* (1992), *Chaos: From theory to applications*, Plenum Press.
- Wolf A., Swift H., Swinney H., Vastano J.* (1985), Determining Lyapunov Exponents from a time series, *Physica D* 16, pp. 285-317.