ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΕΩΣ *

Ὑπὸ τοῦ κ. Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗ

ΓΕΝΙΚΑ

Ἡ θεωρία τῆς ***γραμμικῆς παλινδρομήσεως*** ἔχει ἐκτεθῆ παρ' ἡμῖν ***ἀπολύτως πεπλανημένη*** ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως, δι' ὃ καὶ θεωρῶ ὑποχρέωσίν μου νὰ ἐκθέσω ταύτην ὡς σήμερον ἰσχύει. Πράττω τοῦτο δι' ἐκείνους τῶν ἀναγνωστῶν οἱ ὁποῖοι θὰ ἐπεθύμουν νὰ ἀποκτήσουν σαφῆ, ὀρθὴν καὶ ἀπολύτως ἐπιστημονικὴν γνῶσιν τοῦ θέματος, ἐφ' ὅσον μάλιστα τοῦτο τόσον μεγάλην σημασίαν ἔχει ἰδίᾳ διὰ τὴν οἰκονομετρίαν, σήμερον.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΙΣ

Ἐὰν δοθοῦν **n** ζεύγη τιμῶν (x_i , y_i) τίθεται τὸ ἐρώτημα: ***ποῖος ὁ βαθμὸς ἀλληλουχίας ἢ συσχετίσεως μεταξὺ τῶν x καὶ τῶν ἀντιστοίχων y, ἐπειδὴ οὗτος ἐμφαίνει τὴν σημαντικότητα τῆς μεταξὺ τούτων ἐξαρτήσεως.*** Τὸ πεδίον ἐν ᾧ παρουσιάζεται ἡ συσχέτισις ἐμφανίζει δυὸ ἀκραίας περιπτώσεις, ὧν ἡ μία εἶναι ἡ ***τελεία συναρτησιακὴ ἐξάρτησις***, ἡ δ' ἄλλη ***ἡ ἀπόλυτος ἀνεξαρτησία***, κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς πιθανότητος. Κάθε ὡρισμένη μαθηματικὴ συνάρτησις τῆς μορφῆς: $y = f(x)$, οὐδὲν πρόβλημα ἀπολύτως, ἀπὸ στατιστικῆς ἀπόψεως, ἐγείρει· ὅπως, ἐπίσης, ἡ ἐπίδοσις τῶν σπουδαστῶν σχολῆς τινὸς εἴς τι μάθημα καὶ τὸ ἀνάστημα τῶν πατέρων αὐτῶν, ἐπειδὴ ταῦτα, φύσει, εἶναι ἀπολύτως ἀνεξάρτητα, οὐδὲν πρόβλημα στατιστικῆς γεννοῦν: Τὸ πρόβλημα στατιστικῶς τίθεται ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν μεταβλητῶν x ἢ y γεννᾷ ἢ παρέχει τὴν ὑπόνοιαν ὅτι συμβάλει διὰ τὴν μόρφωσιν τῆς τιμῆς τῆς ἑτέρας ἐξ αὐτῶν, χωρὶς μεταξὺ τούτων νὰ ὑφίσταται συναρτησιακὸς σύνθεσμος, ἀλλὰ ***στοχαστικὸς*** τοιοῦτος.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ὑφίσταται ***γραμμικὴ παλινδρόμησις*** μεταξὺ Χ καὶ Ψ τῆς μορφῆς:

$$\Psi = \alpha + \beta X = f(X) \qquad (1)$$

* Linear regression and coefficient of correlation.

ἀδαπάνου, ἑλληνικοῦ, σωστικοῦ, τέρποντος παιδιά, γονεῖς καὶ διδασκάλους, τὰ ἐλαττώματα τῆς Φυλῆς δύνανται νὰ ἐλαττωθοῦν.

Ἂν τὸ ὄνειρον καὶ κήρυγμα ἀπὸ 2500 ἐτῶν περίπου τοῦ Πυθαγόρου καὶ τοῦ Πλάτωνος, τ. ἔ. ὅτι ***σκοπὸς τῆς ἀγωγῆς εἶναι ἡ ἄσκησις, μόρφωσις τοῦ χαρακτῆρος***, δύναται, ἂν τὸ θελήσωμεν, νὰ πραγματοποιηθῇ, ***τότε ἔλθετε*** μαζί μας, ἀγαπητοί μας φίλοι καὶ φίλοι τῆς Ἑλληνικῆς νεότητος, πλαισιώσατε καὶ ὑποστηρίξατε τὰς προσπαθείας ἐγκρίτων Ἑλλήνων, τῶν μελῶν τῆς Ο.Η.Ε.Ν., ἀγωνισθῆτε εἰς τὰ Παραρτήματα αὐτῆς, συνεργασθῆτε μεθ' ἡμῶν, ἵνα, ἐπιτυγχανομένης τῆς ἠθικῆς ἀνασυγκροτήσεως τῆς Νεότητος καὶ τοῦ ὅλου Ἔθνους, πρωτοπορήσῃ ἡ Ἑλλάς, ἡ αἰωνία διδάσκαλος τῶν Ἐθνῶν, καὶ διαλάμψῃ καὶ πάλιν εἰς τὴν νέαν ἐξόρμησίν της, ποὺ ἡ ἱστορία της, τὸ ἔνδοξον παρελθὸν καὶ τὰ πεπρωμένα της ἐπιβάλλουν πρὸς δημιουργίαν μεταξὺ τῶν Ἐθνῶν πρῶτον τῆς Ἀνατολικῆς λεκάνης τῆς Μεσογείου ἑνὸς νέου Ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ.

ἢ μεταξὺ Ψ καὶ **X** τῆς μορφῆς : $X = \alpha' + \beta' \Psi = \phi(\Psi)$ (2)
χωρὶς αἱ σχέσις (1) καὶ (2) νὰ εἶναι ***ἀμοιβαίως ἀντίστροφοι***, ὅπερ θὰ ἠδύνατο νὰ ἰσχύσῃ μόνον, ἂν ἡ ἐξάρτησις, μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν, ἦτο συναρτησιακή.

Συνήθως ὑφίσταται n ζεύγη τιμῶν (Ψ_i , Ψ_i) ($i = 1, 2, \ldots n$) δι' ὧν ἐπιδιώκεται νὰ προσδιορισθοῦν αἱ παράμετροι τῶν (1) καὶ (2), κεχωρισμένως διότι

$$\alpha \neq \alpha' \quad \text{καὶ} \quad \beta \neq \beta'.$$

Πρὸς τοῦτο προκειμένης τῆς μορφῆς (1) γίνεται δεκτὴ ἡ ὑπόθεσις Α'.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ Α'.

Αἱ τιμαὶ τῆς Χ εἶναι ἢ θεωροῦνται ὅτι εἶναι ἀπηλλαγμέναι τῶν σφαλμάτων παρατηρήσεως, ***τυχαίων*** ἢ ***συστηματικῶν***, ἐνῶ αἱ τιμαὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς Ψ θεωροῦνται ἀπηλλαγμέναι μὲν τῶν συστηματικῶν σφαλμάτων, ἐνέχουν ὅμως τυχαῖα σφάλματα. Δηλ. ἡ πρώτη σχέσις θὰ ἠδύνατο πληρέστερον νὰ γραφῇ ὡς κάτωθι :

$$\Psi_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \tag{3}$$

ὅπου ε_i τὰ σφάλματα παρατηρήσεως τῶν Ψ_i ἅτινα ὑποτίθενται ***ἀνεξάρτητα ἀλλήλων*** καὶ κατανεμόμενα συμμόρφως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Gauss - Laplace, μὲ μέσον τὸ μηδὲν καὶ διακύμανσιν σταθεράν : $\sigma_1^2 = \Sigma\varepsilon_i^2/n$.

Τὰ σφάλματα ταῦτα λογίζονται ***παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα τῶν*** **y**, δηλ. κατακορύφως καὶ δίδονται ὑπὸ

$$\varepsilon_i = \Psi_i - (\alpha + \beta X_i)$$

ὅπου ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ β' μέλους παριστᾷ τὰς ἐκ παρατηρήσεως τιμὰς τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς καὶ ὁ δεύτερος τὰς ἀληθεῖς ἢ ἐξ ὑπολογισμοῦ τοιαύτας.

Ἐὰν νῦν μεταθέσωμεν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων παραλλήλως πρὸς ἑαυτούς, οὕτως ὥστε ἡ νέα ἀρχὴ Ο' νὰ ἔχῃ συντεταγμένας τὰς ($\bar{x}$, $\bar{y}$), δηλ. τοὺς μέσους τῶν X_i καὶ Ψ_i, τότε αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου Μ ὡς πρὸς τοὺς παλαιοὺς ἄξονας θὰ συνδέωνται πρὸς τὰς συντεταγμένας τοῦ αὐτοῦ σημείου ὡς πρὸς τοὺς νέους ἄξονας διὰ τῶν σχέσεων

$$X_i = x_i + \bar{x} \quad \text{καὶ} \quad \Psi_i = y_i + \bar{y} \tag{4}$$

ἑπομένως ἐπειδὴ ἡ (1) θὰ διέρχεται διὰ τοῦ ***κέντρου βαρύτητος*** τῶν X_i καὶ Ψ_i, τοῦ $O'(\bar{x}, \bar{y})$, δηλ. τῆς νέας ἀρχῆς, θὰ ἐπαληθεύεται ὑπ' αὐτῶν δηλ.

$$\bar{y} = \alpha + \beta\bar{x} \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \bar{y} - \beta\bar{x}$$

ἀντικαθιστῶντες νῦν τὰς X_i καὶ Ψ_i τῆς (4) εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν

$$y_i + \bar{y} = \alpha + \beta(x_i + \bar{x}) = \alpha + \beta x_i + \beta\bar{x}$$

$$\text{ἢ} \quad y_i = \alpha - (\bar{y} - \beta\bar{x}) + \beta x_i = \beta x_i, \quad \text{ἐπειδὴ} \quad \alpha = \bar{y} - \beta\bar{x}$$

δηλ. τελικῶς $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν β ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῶν ***ἐλαχίστων***

τετραγώνων, καθιστῶντες ἐλάχιστον τὸ $\Sigma\varepsilon_i^2 = \Sigma(y_i - \beta x_i)^2$ ἢ τὴν τοιαύτην τῶν ροπῶν, ὁπόταν κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν

$$\frac{\partial \Sigma \varepsilon_i^2}{\partial x_i} = -2\Sigma x_i\,(y_i - \beta x_i) = 0$$

$$\text{ἤτοι} \qquad \Sigma x_i y_i = \beta \Sigma x_i^2 \qquad \text{δηλ.} \quad \beta = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2} \tag{5}$$

κατὰ δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν

$$\Sigma x_i y_i = \beta \Sigma x_i^2 + \Sigma \varepsilon_i x_i = \beta \Sigma x_i^2, \qquad \text{διότι} \quad \Sigma \varepsilon_i x_i = 0$$

δηλ. ἀμφότεραι αἱ μέθοδοι ἄγουν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, πρᾶγμα ὅπερ ἀνεμένετο, διότι ἡ ἐξάρτησις τοῦ Ψ ἀπὸ τοῦ Χ εἶναι γραμμική.

$$\text{Ἡ σχέσις} \quad \beta = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2} = \frac{\Sigma x_i y_i}{n\sigma_x^2} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x^2} \quad (6) \quad \text{καθ' ὅσον} \quad \frac{\Sigma x_i^2}{n} = \sigma_x^2 \,.$$

ΥΠΟΘΕΣΙΣ Β'

Αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς Ψ_i (ἐξίσωσις 2) εἶναι ***ἀκριβεῖς*** ἤτοι, ὁμοίως, ἀπηλλαγμέναι τυχαίων καὶ συστηματικῶν σφαλμάτων, ἐνῷ αἱ τοιαῦται τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς X_i, ἐνέχουν μόνον ***τυχαῖα σφάλματα***, διὸ καὶ ἡ ἐξίσωσις (2) δύναται πληρέστερον νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$X_i = \alpha' + \beta'\Psi_i + \eta_i \tag{7}$$

ὅπου τὰ η_i εἶναι τὰ τυχαῖα σφάλματα τῆς X_i, ***ἀνεξάρτητα ἀλλήλων*** καὶ τὰ ὁποῖα κατανέμονται συμμόρφως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Gauss - Laplace, μὲ μέσον τό μηδὲν καὶ διακύμανσιν: $\sigma_2^2 = \dfrac{\Sigma \eta_i^2}{n}$.

Mutatis mutandis πρὸς τὰ εἰς τὴν ὑπόθεσιν Α, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως:

$$x_i = \beta' y_i$$

$$\text{ἤτοι} \quad \beta' = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma y_i^2} = \frac{\Sigma x_i y_i}{n\sigma_y^2} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_y^2} \quad (8) \quad \text{διότι} \quad \sigma_y^2 = \frac{\Sigma y_i^2}{n}$$

Τούτου τιθέντος ὁ βαθμὸς τῆς ἐξαρτήσεως μεταξὺ Χ καὶ Ψ ἢ Ψ καὶ Χ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως:

$$\rho = \sqrt{\beta.\,\beta'} = \frac{\Sigma x_i y_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2}\sqrt{\Sigma y_i^2}} = \frac{\Sigma x_i x_i}{n\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{8}$$

δηλ. ***τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ τῶν συντελεστῶν κατευθύνσεως τῶν δύο γραμμῶν ἢ μᾶλλον εὐθειῶν παλινδρομήσεως.***

ἐπειδὴ δὲ $\rho = \dfrac{\Sigma x_i y_i}{n\sigma_x \sigma_y}$ (α) ἢ $\rho \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = \dfrac{\Sigma x_i y_i}{n\sigma_x^2} = \beta, \ \beta = \rho \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ (10)

ὁμοίως εὑρίσκομεν: $\beta' = \rho \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ (11)

Κατ' ἀκολουθίαν αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καὶ (2) γράφονται τελικῶς:

$$\Psi_i = \alpha + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} X_i, \text{ ἀλλὰ } \alpha = \bar{y} - \beta\bar{x} = \bar{y} - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\bar{x}$$

ἢ $\Psi_i - \bar{y} = \rho \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} (X_i - \bar{x})$.

ἢ καὶ ἁπλῶς $y_i = \rho \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} x_i = \beta x_i$ (12)

ὁμοίως εὑρίσκομεν: $X_i - \bar{x} = \rho \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} (\Psi_i - \bar{y})$

ἢ καὶ ἁπλῶς: $x_i = \rho \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} y_i = \beta' y_i$ (13)

Γεννᾶται τὸ ἐρώτημα ποίας τιμὰς δύναται νὰ λάβῃ ὁ ρ;

Ὡς γνωστὸν y_i παριστᾷ τὰς ἀποκλίσεις (διαφορὰς) τῶν ἐκ παρατηρήσεων τιμῶν τῶν Ψ_i ἀπὸ τοῦ μέσου των $\bar{y}$, ἐνῷ βx_i ἢ $\rho \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} x_i$, ὁμοίως, τὰς θεωρητικὰς τοιαύτας. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τούτων θὰ ἐμφαίνῃ τὴν ἀσυμφωνίαν μεταξὺ τιμῶν παρατηρήσεως καὶ τιμῶν ὑπολογισμοῦ (θεωρητικῶν). Ἡ διακύμανσις ἑπομένως τῶν τιμῶν παρατηρήσεως περὶ τὴν γραμμὴν παλινδρομήσεως, θεωρουμένην, ὡς ***μέσην*** τοιαύτην, θὰ δίδεται ὑπό:

$$s_y^2 = \frac{\Sigma (y_i - \beta x_i)^2}{n} = \frac{\Sigma y_i^2 - 2\beta \Sigma x_i y_i + \beta^2 \Sigma x}{n} = \sigma_y^2 - 2\beta \frac{\Sigma x_i y_i}{n} + \beta^2 \sigma_x^2$$

ἀλλὰ $\beta = \rho \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ καὶ $\dfrac{\Sigma x_i y_i}{n} = \rho \sigma_x \sigma_y$ ὅθεν

$$s_y^2 = \sigma_y^2 - 2\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \rho \sigma_y \sigma_x + \rho^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \sigma_x^2 = \sigma_y^2 - \rho^2 \sigma_y^2 = \sigma_y^2 (1 - \rho^2) \quad (14)$$

ὁμοίως εὑρίσκομεν διὰ τὴν δευτέραν εὐθεῖαν παλινδρομήσεως:

$$s_x^2 = \sigma_x^2 (1 - \rho^2) \quad (15)$$

Ἐπειδὴ δὲ s_x^2, σ_x^2, s_y^2 καὶ σ_y^2 οὐδέποτε εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, ἕπεται ὅτι:

$$(1-\rho^2) \geqslant 0 \qquad \text{δηλ.} \qquad -1 \leqslant \rho \leqslant +1. \tag{16}$$

Ἐὰν νῦν $\rho = 1$, τότε $y_i = \rho \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} x_i$ γράφεται $\dfrac{y_i}{\sigma_x} = \dfrac{x_i}{\sigma_x}$ δηλ. εἶναι ἐντὸς τῆς τῆς πρώτης θετικῆς γωνίας ΧΟΨ ἢ τῆς τρίτης Χ΄ΟΨ΄ τῶν ἀξόνων καὶ ὁμοίως ἢ $x_i = \rho \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} y_i$ γράφεται $\dfrac{x_i}{\sigma_x} = \dfrac{y_i}{\sigma_y}$ δηλ. αἱ δύο εὐθεῖαι παλινδρομήσεως ***συμπίπτουν εἰς μίαν***, ὅτε καὶ $s_x^2 = s_y^2 = 0$, δηλ. αἱ διακυμάνσεις περὶ τὰς γραμμὰς παλινδρομήσεως εἶναι μηδέν. Ἐὰν $\rho = -1$, ἐπίσης αἱ δύο εὐθεῖαι παλινδρομήσεως συμπίπτουν εἰς μίαν, ἐντὸς τῆς γωνίας Χ΄ΟΨ ἢ τῆς ΧΟΨ΄ τῶν ἀξόνων. Ἐὰν τυχὸν $\sigma_x = \sigma_y$, τότε, εἰς τὰς ἄνω περιπτώσεις αἱ συμπίπτουσαι εὐθεῖαι παλινδρομήσεως καθίστανται διχοτόμοι τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν τῶν ἀξόνων. Ἐὰν $\rho = 1$, τότε εἰς τὰς ὑψηλὰς τιμὰς τοῦ X_i ἀντιστοιχοῦν, ἐπίσης, ὑψηλαὶ τιμαὶ τοῦ Ψ_i καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν $\rho = -1$, εἰς τὰς ὑψηλὰς τοῦ X_i τιμὰς ἀντιστοιχοῦν χαμηλαί τοῦ Ψ_i τιμαὶ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐὰν νῦν $\rho = 0$, τότε αἱ δύο εὐθεῖαι καθίστανται $\Psi_i = \bar{y}$ καὶ $X_i = \bar{x}$ δηλ. παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἄξονας, διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου βαρύτητος $O'(\bar{x}, \bar{y})$, ἢ ταυτιζόμεναι πρὸς τοὺς νέους ἄξονας, ὡς πρὸς ἀρχὴν τὴν $O'(\bar{x}, \bar{y})$. Κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ δύο μεταβλητὰ λέγονται ***ἀσυσχέτιστα*** χωρὶς τό τοιοῦτον νὰ συνεπάγεται ὅτι εἶναι καὶ ***ἀνεξάρτητα*** ἀλλήλων, ἐνῶ τὸ ἀντίστροφον πάντοτε ἀληθεύει.

ΥΠΟΘΕΣΙΣ Γ΄

Ἐκτὸς ὅμως τῶν δύο ἄνω ὑποθέσεων δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ τρίτη τοιαύτη, καθ' ἣν ἀμφότερα τὰ μεταβλητὰ X_i καὶ Ψ_i ἐνέχουν ***τυχαῖα*** σφάλματα, ὅτε αἱ ἀποκλίσεις τῶν τιμῶν παρατηρήσεως θὰ μετρηθοῦν ***καθέτως*** ἀπὸ τῆς εὐθείας παλινδρομήσεως καὶ οὐχὶ παραλλήλως πρὸς τοὺς ἄξονας, ὡς ἄχρι τοῦδε.

Ἐὰν ὅθεν κληθῇ $M_i\,(x_i, y_i)$ τυχὸν ἐκ παρατηρήσεως σημεῖον (x_i, y_i παριστάνουν ἀποκλίσεις τῶν X_i, Ψ_i ἀπὸ τῶν ἀντιστοίχων αὐτοῖς μέσων $\bar{x}$, $\bar{y}$), τότε ἡ ἀπόστασις του ἀπὸ τῆς εὐθείας $y = \beta x$ ἢ $y - \beta x = 0$, θὰ δίδεται κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ὑπό:

$$d_i = \frac{y_i - \beta x_i}{\sqrt{1+\beta^2}}. \tag{17}$$

Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν τοιούτων ἀποστάσεων θὰ εἶναι:

$$\Sigma d_i^2 = \frac{\Sigma (y_i - \beta x_i)^2}{1+\beta^2} \tag{18}$$

καὶ ἄρα ἡ διακύμανσις αὐτῶν : $S_1^2 = \dfrac{\Sigma(y_i - \beta x_i)^2}{n(1+\beta^2)}$, $\left(S_1^2 = \dfrac{\Sigma d_i^2}{n}\right)$

ἢ $$S_1^2 = \frac{\Sigma y_i^2 - 2\beta\Sigma x_i y_i + \beta^2\Sigma x_i^2}{n(1+\beta^2)} = \frac{\sigma_y^2 - 2\beta\rho\sigma_x\sigma_y + \beta^2\sigma_x^2}{1+\beta^2}$$

δηλ. τὸ $S_1^2 = f(\beta)$. Τὸ ἐλάχιστον τοῦ S_1^2 εὑρίσκεται, ἂν τὴν πρὸς β παράγωγον αὐτοῦ ἐξισώσωμεν πρὸς τὸ μηδὲν δηλ. :

$$\frac{(-2\rho\sigma_x\sigma_y + 2\beta\sigma_x^2)(1+\beta^2) - 2\beta(\sigma_y^2 - 2\beta\rho\sigma_x\sigma_y + \beta^2\sigma_x^2)}{(1+\beta^2)^2}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων λαμβάνομεν

$$\beta\rho^2\sigma_x\sigma_y + \beta(\sigma_x^2 - \sigma_y^3) - \rho\sigma_x\sigma_y = 0$$

ἢ $$\beta^2\rho\sigma_x\sigma_y - \beta(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) - \rho\sigma_x\sigma_y = 0$$

δηλ. $$\beta = \frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) \pm \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2}}{2\rho\sigma_x\sigma_y} \tag{19}$$

πρὸ τοῦ ριζικοῦ ληφθήσεται τὸ σημεῖον +, διότι τοῦτο καθιστᾷ τὸ β ἐλάχιστον. Κατὰ ταῦτα ἡ ἐξίσωσις (12) γράφεται :

$$\Psi_i - \bar{y} = \frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) + \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\rho^2\sigma_y^2\sigma_y^2}}{2\rho\sigma_x\sigma_y}(X_i - \bar{x}) \tag{20}$$

οὐχ ἧττον ἡ ἄνω μέθοδος οὐδεμίαν πρακτικὴν ἔχει σημασίαν, δι' ὃ καὶ οὐδέποτε ἐν τῇ πράξει ἐφαρμόζεται.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δυνάμεθα νὰ καταλήξωμεν καὶ ἄλλως. Πράγματι ἡ ἐξίσωσις $y = \beta x$ γράφεται καὶ $y = \text{ἐφ}\,\theta x$, ὅπου θ ἡ γωνία ἣν σχηματίζει ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως μετὰ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος τῶν **x**. Ἀλλὰ

$$y = \text{ἐφ}\,\theta x \quad \text{ἢ} \quad y = \frac{\text{ἡμ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta}x \quad \text{ἢ} \quad y\,\text{συν}\,\theta - x\,\text{ἡμ}\,\theta = 0\,.$$

Ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου Μ $(x_i \,.\, y_i)$ ἀπὸ τῆς ὡς εἴρηται εὐθείας θὰ εἶναι, ὅταν αὕτη μετρεῖται καὶ πάλιν ***καθέτως***, $\delta_i = y_i \,.\, \text{συν}\,\theta - x_i \,.\, \text{ἡμ}\,\theta$ καὶ **mutatis mutandis** : $\Sigma\delta_i^2 = \Sigma(y_i\ \text{συν}\ \theta - x_i\ \text{ἡμ}\ \theta)^2 = \text{συν}^2\theta\Sigma y_i^2 - 2\ \text{ἡμ}\ \theta$

$$\text{συν}\ \theta\ \Sigma x_i y_i + \text{ἡμ}^2\theta\ \Sigma x_i^2$$

ἄρα καὶ $S_2^2 = \frac{\Sigma\delta_i^2}{n} = \sigma\upsilon\nu^2\theta\, \sigma_y^2 - 2\acute{\eta}\mu\,\theta\, \sigma\upsilon\nu\,\theta\, \rho\, \sigma_x\sigma_y + \acute{\eta}\mu^2\,\theta\, \sigma_x^2$

ὅθεν $S_2^2 = f(\theta)$. Ἑπομένως τὸ ἐλάχιστον τοῦ S_2^2 θὰ εὑρίσκεται ὅταν ἡ πρώτη αὐτοῦ παράγωγος πρὸς θ ἐξισωθῇ πρὸς τὸ μηδέν.

ὄντως ἔχομεν : $-2\acute{\eta}\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\sigma_y^2 - 2\,\sigma\upsilon\nu^2\,\theta\,\rho\,\sigma_x\sigma_y + 2\,\acute{\eta}\mu^2\,\theta\,\rho\,\sigma_x\sigma_y + 2\,\acute{\eta}\mu\,\theta$

$$\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\sigma_x^2 = O.$$

ἢ $\quad 2\,\rho\,\sigma_x\sigma_y\,(\sigma\upsilon\nu^2\theta - \acute{\eta}\mu^2\theta) = 2\,\acute{\eta}\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\,(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$

ἢ $\quad 2\,\rho\,\sigma_x\sigma_y\,\sigma\upsilon\nu\,2\,\theta = (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)\,\acute{\eta}\mu\,2\theta$

δηλ. $\quad \acute{\epsilon}\varphi\,2\,\theta = \frac{2\,\rho\,\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$

ἀλλά, εἶναι γνωστὸν ὅτι, $\acute{\epsilon}\varphi\,2\theta = \frac{2\,\acute{\epsilon}\varphi\,\theta}{1 - \acute{\epsilon}\varphi^2\,\theta} = \frac{2\,\rho\,\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$

ἢ $\quad \acute{\epsilon}\varphi\,\theta\,(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) = \rho\,\sigma_x\sigma_y - \acute{\epsilon}\varphi^2\,\theta\,\rho\,\sigma_x\sigma_y$

καὶ τέλος $\quad \acute{\epsilon}\varphi^2\,\theta\,\rho\,\sigma_x\sigma_y + \acute{\epsilon}\varphi\,\theta\,(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) - \rho\,\sigma_x\sigma_y = O$

ἢ $\quad \acute{\epsilon}\varphi^2\theta\,\rho\,\sigma_x\sigma_y - \acute{\epsilon}\varphi\,\theta\,(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) - \rho\,\sigma_x\sigma_y = O$

δηλ. $\quad \acute{\epsilon}\varphi\,\theta = \frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2) \pm \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2}}{2\rho\sigma_x\sigma_y} = \beta$

δηλ. ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα σχέσις,

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι διὰ τὴν ἄλλην γραμμὴν παλινδρομήσεως $x = \beta' y = \acute{\epsilon}\varphi\,\omega\,.\,x$

εὑρίσκομεν, **mutatis mutandis** : $\quad \acute{\epsilon}\varphi\,2\omega = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}$ καὶ τέλος

$$\acute{\epsilon}\varphi\,\omega = \beta' = \frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \pm \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2}}{2\rho\sigma_x\sigma_y}$$

ὅτε ἡ ἐξίσωσις παλινδρομήσεως γράφεται :

$$X_i - \bar{x} = \frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2}}{2\rho\sigma_x\sigma_y}\,(\Psi_i - \bar{y}) \quad (21)$$

Ὡς εἰκὸς αἱ (20) καὶ (21) οὐδεμίαν σχέσιν ἔχουν πρὸς τὰς (12) καὶ (13).

ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΕΩΣ

Ἐθέσαμεν προηγουμένως $y_i = ἐφθ\, x_i$ καὶ $x_i = ἐφ\,\omega \cdot y_i$, ὅπου θ ἡ γωνία τῆς πρώτης εὐθείας μετὰ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ ω, ὁμοίως, τῆς δευτέρας εὐθείας μετὰ τῆς θετικῆς φορᾶς τοῦ ἄξονος τῶν y. Ἂν νῦν κληθῇ φ ἡ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν σχηματιζομένη γωνία, τότε

$$\phi + (\theta + \omega) = \pi/2 \quad δηλ. \quad \phi = \pi/2 - (\theta + \omega)$$

καὶ ἄρα
$$ἐφ\,\phi = ἐφ\,[\pi/2 - (\theta + \omega)] = \frac{1 - ἐφ\,\theta \,.\, ἐφ\,\omega}{ἐφ\,\theta + ἐφ\,\omega}$$

ἀλλὰ
$$ἐφ\,\theta = \beta = \rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad ἐφ\,\omega = \beta' = \rho\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ὡς ἄνω σχέσιν ἔχομεν τέλος:

$$ἐφ\,\phi = \frac{1 - \rho^2}{\rho\,\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} + \rho\,\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}} = \frac{1 - \rho^2}{\rho} \cdot \frac{\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma^2_x + \sigma^2_x} \tag{22}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ἐφαρμόσωμεν πάντα τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἐπὶ τῶν κάτωθι (ἄσκησις πρὸς ἐπίλυσιν ἐκ τοῦ Introduction to Statistical Method τῶν Yule - Kendall).

X	Ψ	XΨ	X²	Ψ²
1	2	2	1	4
2	5	10	4	25
3	3	9	9	9
4	8	32	16	64
5	7	35	25	49
15	25	88	55	154

(Σημειοῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ζευγῶν τῶν τιμῶν X, Ψ εἶναι πολὺ μικρός, συνεπῶς τὸ παράδειγμα ἔχει ἐνδεικτικὸν χαρακτῆρα, ἀφορῶν μόνον τὸν τρόπον ἐφαρμογῆς τῶν ἐκτεθεισῶν μεθόδων καὶ τίποτε περισσότερον).

θὰ ἔχωμεν: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma X}{n} = \dfrac{15}{5} = 3, \qquad \bar{y} = \dfrac{\Sigma \Psi}{n} = \dfrac{25}{5} = 5$

$$\sigma^2_x = \frac{\Sigma (X - \bar{x})^2}{n - 1}, \text{ διότι } n < 30 \text{ ἢ } (n-1)\sigma^2_x = \Sigma X - 2\bar{x}\Sigma X + n\bar{x}^2 = \Sigma X^2 - n\bar{x}$$

$$ἢ \quad (n - 1)\,\sigma^2_x = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} \quad ἢ \text{ τέλος } \sigma^2_x = \frac{\Sigma X^2}{n - 1} - \frac{(\Sigma X)^2}{n(n-1)} = \frac{55}{5} - \frac{(15)^2}{5\,.\,4}$$

ἤτοι $\quad \sigma^2_x = 13{,}75 - 11{,}25 = 2{,}5 \quad δηλ. \quad \sigma_x = 1{,}841$

ὁμοίως $\quad \sigma^2_x = \dfrac{\Sigma \Psi^2}{n - 1} - \dfrac{(\Sigma \Psi)^2}{n\,(n - 1)} = \dfrac{151}{4} - \dfrac{(25)^2}{5\,.\,4} = 37.75 - 31{,}25 = 6{,}5$

δηλ. $\quad \sigma_y = 2{,}549$

ὁμοίως $\Sigma xy = \Sigma(X-\bar{x})(\Psi-\bar{y}) = \Sigma X\Psi - \bar{x}\Sigma\Psi - \bar{y}\Sigma X + n\bar{x}\bar{y} = \Sigma X\Psi - n\bar{x}\bar{y}$

ἤτοι $\Sigma xy = \Sigma X\Psi - n\frac{(\Sigma X)(\Sigma\Psi)}{n \cdot n} = \Sigma X\Psi - \frac{(\Sigma X)(\Sigma\Psi)}{n} = 88 - \frac{15 \cdot 25}{5} = 13$

ἄρα $\rho = \frac{\Sigma xy}{(n-1)\sigma_x\sigma_y} = \frac{13}{4 \cdot 1{,}581 \cdot 2{,}549} = \frac{13}{16{,}12} = 0{,}802$

Ἑπομένως $\beta = \rho\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}805\,\frac{2{,}549}{1{,}581} = 1{,}299$

καὶ $\beta' = \rho\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{,}806\,\frac{1{,}581}{2{,}549} = 0{,}500$

Κατ᾽ ἀκολουθίαν αἱ ἐξισώσεις παλινδρομήσεως εἶναι:

$\Psi - 5 = 1{,}299\,(X-3)$ ἢ $\Psi = 1{,}103 + 1{,}299X$ (α)

καὶ $X - 3 = 0{,}500\,(\Psi - 5)$ ἢ $X = 0{,}500 + 0{,}500\Psi$ (α′)

Ἡ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν παλινδρομήσεως σχηματιζομένη γωνία φ εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\,\varphi = \frac{1-0{,}650}{0{,}806} \cdot \frac{1{,}581 \cdot 2{,}549}{2{,}5+6{,}5} = \frac{0{,}350}{0{,}806} \cdot \frac{4{,}03}{9} = \frac{1{,}4105}{7{,}254} = 0{,}1944$$

δηλ. $\varphi = 11^{\circ}\,00'$

Τὰ σφάλματα ἐκτιμήσεως τῶν εὐθειῶν παλινδρομήσεως εἶναι:

$$S_y = \sigma_y\sqrt{1-\rho^2} = 2{,}546\sqrt{1-(0{,}806)^2} = 2{,}549\sqrt{0{,}350} = 2{,}549 \cdot 0{,}591 = 1{,}406$$

καὶ $S_x = \sigma_x\sqrt{1-\rho^3} = 1.581 \cdot 0{,}591 = 0{,}934$.

Ἐὰν νῦν ὑπολογίσωμεν τὸ β διὰ τοῦ τύπου (19), ἔχομεν:

$$\beta = \frac{(6{,}5-2{,}5) + \sqrt{(6{,}5-2{,}5)^2 + 4 \cdot 0{,}650 \cdot 2{,}5 \cdot 6{,}5}}{2 \cdot 0{,}806 \cdot 1{,}581 \cdot 2{,}549} = \frac{4 + \sqrt{16+42{,}25}}{6{,}49}$$

ἢ $\beta = \frac{4 + 6{,}945}{6.496} = 1{,}685$

καὶ τότε ἡ πρώτη ἐξίσωσις παλινδρομήσεως εἶναι:

$\Psi - 5 = 1{,}685\,(X-3)$ ἢ $\Psi = -\,0{,}055 + 1{,}685X$ (β)

Ἀλλὰ ἡ (β) οὐδεμίαν σχέσιν ἔχει πρὸς τὴν (α) καὶ τοῦτο αὐτονόητον, διότι εἶναι διάφορος ἡ ἀρχὴ ἐφ᾽ ἧς στηρίζεται ὁ προσδιορισμὸς ἑκατέρας.

Ἐκ τῆς ἐκτεθείσης θεωρίας καὶ ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς, τὰ ἀλλαχοῦ ἐκτιθέμενα οὐδεμίαν σχέσιν ἔχουν πρὸς τὴν αὐστηρὰν ἐπιστημονικὴν ἀλήθειαν. Σαφῶς δὲ καταφαίνεται ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις παλινδρομήσεως (α) καὶ (α′) δὲν εἶναι **ἀντιστρεπταί**, καθ᾽ ὃ μὴ συναρτησιακαί, ἀλλὰ στοχαστικαὶ ἐξαρτήσεις τῶν μεταβλητῶν.

Βιβλιογραφία: Κ. Ἀθανασιάδου «Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς χρήσεως τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως» Ἀρχεῖον Οἰκ. καὶ Πολ. Ἐπιστημῶν, τόμος 16 (1936).

H. Cramer : «Mathematical Methods of Statistics»

A. Hald : «Statistical Theory» etc.

J. Kenney : «Mathematical of Statistics» τόμος Α′

Κ. Ἀθανασιάδου : «Οἰκονομετρία».