Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ Κ. Κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

Καλοῦμεν ***Μαθηματικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν***, τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μαθηματικῆς μεθόδου εἰς τὴν λύσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων καὶ εἰς τὴν ἐπεξεργασίαν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων.

Ἡ χρησιμοποίησις τῆς μαθηματικῆς μεθόδου εἰς τὴν Οἰκονομικὴν ἐπιστήμην δὲν εἶναι μόνον δυνατὴ ἀλλὰ καὶ ἀπαραίτητος. Τὰ οἰκονομικὰ εἶναι ἡ πλέον ἀκριβὴς ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας κοινωνικὰς ἐπιστήμας. Ἐπιπροσθέτως, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ Οἰκονομικὴ ἐπιστήμη εὑρίσκεται σήμερον εἰς ἐπίπεδον ἀναπτύξεως τὸ ὁποῖον καθιστᾶ ἀπαραίτητον τὴν συγκεκριμένην περιγραφὴν ὡρισμένων ἐννοιῶν της, ἐκείνων τουλάχιστον ἐπὶ τῶν ὁποίων ὑπάρχει γενικὴ συμφωνία.

Ἐπιστήμη ὡς ἡ Οἰκονομική, τῆς ὁποίας τὰ δεδομένα, αἱ ὑποθέσεις, οἱ ὁρισμοὶ καὶ οἱ κανόνες χρησιμοποιοῦνται διὰ τὸν σχηματισμὸν θεωρητικῶν προτύπων, εἶναι αὐτονόητον ὅτι πρέπει νὰ καταφεύγῃ συχνάκις εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μαθηματικῆς μεθόδου, καὶ τοῦτο διότι τὰ Μαθηματικὰ εἶναι ὁ πλέον ἀκριβής, ἀντικειμενικὸς καὶ ἑνιαῖος τομεὺς τῆς ἀνθρωπίνης γνώσεως. Χάρις εἰς τὰς ἰδιότητας ταύτας τὰ Μαθηματικὰ ἐχαρακτηρίσθησαν ὡς «ὁ ὑπηρέτης τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν».

Ὡς εἶναι γνωστόν, τὰ Οἰκονομικὰ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐπιστήμη, ἔχουσα ὡς κύριον θέμα τὰς σχέσεις αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν ἢ ὑποτίθεται ὅτι ὑπάρχουν μεταξὺ ποσοτήτων δυναμένων νὰ μετρηθοῦν ἀριθμητικῶς ἢ ἀλγεβρικῶς. Ὡς παράδειγμα μεταβλητῶν ποσοτήτων μὲ τὰς ὁποίας ἀσχολεῖται ἡ Οἰκονομικὴ ἐπιστήμη θὰ ἠδύνατο νὰ ἀναφέρῃ τις τὰς τιμάς, τοὺς τόκους, τὰ εἰσοδήματα, τὸ κόστος τῆς παραγωγῆς, τὸ σύνολον τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ἐκ τῶν ὁποίων ἐξαρτᾶται ἑκάστη βιομηχανία κ.τ.λ. Μερικὰς τῶν ποσοτήτων αὐτῶν δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν εἰς φυσικὰς μονάδας καὶ ἄλλας εἰς χρηματικάς. Ἀλλ' ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον μᾶς ἐνδιαφέρει ἐπὶ τοῦ παρόντος εἶναι ὅτι αἱ περὶ ὧν ὁ λόγος ποσότητες εἶναι μετρήσιμοι καὶ ὅτι αἱ σχέσεις μεταξὺ αὐτῶν δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ μαθηματικῶν παραστάσεων. Ἑπομένως, ἡ χρησιμοποίησις τῆς μαθηματικῆς μεθόδου ἀποτελεῖ βασικὴν καὶ ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν διὰ τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν, τὴν συστηματοποίησιν καὶ τὴν συγκεκριμένην περιγραφὴν τῶν ἐννοιῶν τῆς Οἰκονομικῆς ἐπιστήμης.

Εἰς τὴν πατρίδα μας, ἡ συστηματικὴ καὶ ἐμπεριστατωμένη μελέτη τῆς Μαθηματικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως καθυστερεῖ. Ὅπως δ' ὀρθότατα τονίζει ὁ καθηγητὴς κ. Καλλιτσουνάκις: «ἐὰν δὲν θέλωμεν καὶ ἡμεῖς ἐν Ἑλλάδι νὰ παραμείνωμεν καθυστερημένοι εἰς μίαν ἐπιστημονικὴν οἰκονομικὴν ἐξέλιξιν, ἡ ὁποία λαμβάνει χώραν εἰς ὅλον τὸν προηγμένον κόσμον, πρέπει νὰ προσδώσωμεν εἰς τὴν ποσοτικὴν ἀνάλυσιν τὴν ἐμπρέπουσαν εἰς αὐτὴν κεντρικὴν θέσιν, κατὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς Οἰκονομικῆς. Τοῦτο ὅμως προϋποθέτει τὴν κατανόησιν ὡρισμένων μαθηματικῶν ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπαραίτητοι διὰ τὴν ποσοτικὴν διαπραγμάτευσιν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Πολλὰ τῶν μαθηματικῶν τούτων διδάσκονται εἰς τὰ Λύκεια, ἰδίως. Εἰς τὰ ἀλλοδαπὰ Πανεπιστήμια, δι' ἑνὸς καταλλήλου εἰσαγωγικοῦ μαθήματος εἰς τὰ Μαθηματικὰ δι' οἰκονομολόγους καὶ στατιστικούς, ἀνανεοῦνται καὶ διευρύνονται αἱ γνώσεις αὐταί, διότι, βέβαια, καθαρῶς μαθηματικαὶ παραδόσεις προοριζόμεναι διὰ μαθηματικοὺς δὲν ὑποβοηθοῦν τοὺς οἰκονομολόγους. Δι' ἡμᾶς, τὰ μαθηματικὰ δὲν εἶναι κύριος σκοπός· τὰ μεταχειριζόμεθα ὡς βοηθητικὸν ὄργανον τῆς σκέψεως καὶ τῆς περιγραφῆς καὶ ἀναλύσεως ποσοτικῶν συσχετίσεων, αἱ ὁποῖαι ἄνευ αὐτῶν θὰ ἦσαν ἐντελῶς ἀνεπισκόπητοι ἢ δυσχερῶς συλλήψιμοι» *.

Ἡ Μαθηματικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις ἔχει πλουσίαν παράδοσιν. Ἡ μαθηματικὴ μέθοδος πολὺ ἐνωρὶς ἤρχισε νὰ εἰσδύῃ εἰς τὴν Οἰκονομικὴν ἐπιστήμην. Τὸ ἔτος 1711 ἡ Γαλλὶς οἰκονομολόγος Joanne Cevà, διεπίστωσε τὴν ἀνάγκην τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μαθηματικῆς μεθόδου διὰ τὴν λύσιν ὡρισμένων νομισματικῶν προβλημάτων. «Θὰ τοποθετήσωμεν τὸ πρόβλημα κατὰ τοιοῦτον τρόπον», γράφει ἡ Cevà, «ὥστε ἐὰν αἱ προϋποθέσεις μας ἐπαληθεύσουν θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ λυθῇ μαθηματικῶς τὸ ἐρώτημα ἀπὸ ποῦ προέρχεται ἡ ἀξία τοῦ νομίσματος». Τὸ 1765, ὁ Ἰταλὸς Beccaria ἐχρησιμοποίησε τὴν ποσοτικὴν μέθοδον εἰς μίαν τελείως μαθηματικὴν πραγματείαν ἐπὶ τῶν φόρων. Ὀλίγον ἀργότερον, ὁ Γάλλος Canard, τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον παραμένει οὐσιαστικῶς ἄγνωστον, ἐφήρμοσε καὶ αὐτὸς τὴν μαθηματικὴν μέθοδον διὰ τὴν ἀκριβεστέραν ἑρμηνείαν οἰκονομικῶν ἐννοιῶν. Τὴν ἰδίαν ἐποχήν, οἱ Lange, Kroneke καὶ Buquoy εἰσήγαγον τὰς ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις εἰς τὴν Οἰκονομικὴν ἐπιστήμην. Ὁ von Thünen, εἰς τὸ σύγγραμμά του «Τὸ Ἀπομεμονωμένον Κράτος», ἐφαρμόζει τὴν μαθηματικὴν μέθοδον διὰ «τὴν ἀνακάλυψιν τῆς ἀληθείας», ὡς λέγει. Αἱ ἐπὶ τῶν μισθῶν μελέται του, κατὰ τὰς ὁποίας χρησιμοποιεῖ εὐρέως τὰ μαθηματικά, εἶναι ὁμολογουμένως ἐνδιαφέρουσαι· ἀλλ' εἶναι ἐξ ἴσου βέβαιον ὅτι ἡ κοινὴ λογικὴ θὰ ἠδύνατο νὰ τὸν ὁδηγήσῃ εἰς τὰ ἴδια συμπεράσματα. Ὁ von Thünen ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος, ἴσως, ἐκπρόσωπος τῆς φορμαλιστικῆς τάσεως εἰς τὴν μαθηματικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν, τάσεως ἡ ὁποία οὐδόλως ὑποβοηθεῖ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Οἰκονομικῆς ἐπιστήμης.

Ἀλλ' ὁ ἱδρυτὴς τῆς συστηματικῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως εἶναι ὁ Cournot. Τὸ σημαντικώτερον τούτου ἔργον εἶναι αἱ «Ἔρευναι ἐπὶ τῶν Μαθηματικῶν Ἀρχῶν καὶ τῆς Θεωρίας τοῦ Πλούτου», τὸ ὁποῖον ἐτυπώθη ἐν ἔτει 1838. Ὁ Cournot εἶναι ὁ πρῶτος ὅστις ἔδειξε πῶς ὁ λογισμὸς τῶν συναρτήσεων δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς τὴν Οἰκονομικὴν ἐπιστήμην. Ὁ ἴδιος χρησιμοποιεῖ ἐκτενέστατα τὰ διαγράμματα καὶ τὰς ἀναλυτικὰς μεθόδους καὶ δεικνύει τὴν σπουδαιότητα τὴν ὁποίαν ἔχει ἡ ἀνάλυσις τῶν συναρτήσεων διὰ τὴν Οἰκονομικὴν ἐπιστήμην. Ἐπίσης εἰς τὸν Cournot ὀφείλει ἡ Οἰκονομικὴ ἐπιστήμη τὴν ἀνάλυσιν τῆς ἰσορροπίας εἰς τὰς διεθνεῖς συναλλαγὰς καὶ τὸν καθορισμὸν τῆς τιμῆς ὅταν τὸ μονοπώλιον κυριαρχῇ εἰς τὴν ἀγοράν.

Τὸ ἔργον τοῦ Cournot ἐπηρέασεν εἰς μεγάλον βαθμὸν τοὺς Marshall καὶ Edgeworth, οἵτινες βασίζουν τὴν θεωρίαν των διὰ τὸ μονοπώλιον, ἐπὶ τῶν εὑρημάτων τοῦ ρηθέντος ἱδρυτοῦ τῆς Μαθηματικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως. Ὅταν ἡ θεωρία τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος ἤρχισε νὰ κυριαρχῇ, ἡ Μαθηματικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις προσηρμόσθη πρὸς τὴν κατεύθυνσιν αὐτῆς, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον, ἴσως, ἀνέστειλε τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξίν της.

---

* Δ. Καλλιτσουνάκι : «Μία τριακονταετία τοῦ Ἀρχείου Οἰκονομικῶν καὶ Κοινωνικῶν Ἐπιστημῶν». Ἀρχεῖον Οἰκονομικῶν καὶ Κοινωνικῶν Ἐπιστημῶν, Τόμος 30.

'Από τὰς ἐρεύνας τῆς περιόδου ταύτης εἰς τὴν Μαθηματικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν πρέπει νὰ ἀναφέρωμεν τὴν τοῦ de Hagen, τοῦ de Torer καὶ τοῦ μηχανικοῦ Dupuit. Τὴν ἰδίαν ἐποχήν, δηλ. περὶ τὸ 1850, ὡρισμένοι οἰκονομολόγοι, διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὴν Οἰκονομικὴν ἐπιστήμην, προβαίνουν εἰς εὐρεῖαν χρῆσιν τῶν συναρτήσεων. Ἀλλ' ὡς ἐτονίσθη ἀνωτέρω, ἡ διείσδυσις τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὰ Οἰκονομικὰ συγκεντροῦται μόνον περὶ τὴν θεωρίαν τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος. Ἀπὸ τοῦ ἔτους 1854 διακρίνομεν δύο τάσεις εἰς τὰ Μαθηματικὰ Οἰκονομικά· ἡ πρώτη τούτων ἀντιπροσωπεύεται γενικῶς ἀπὸ τοὺς Ἀγγλοσάξωνας καὶ Ἰταλοὺς οἰκονομολόγους, οἱ ὁποῖοι ἀσχολοῦνται κυρίως μὲ τὴν ἀτομικὴν καταμέτρησιν τῆς χρησιμότητος τῶν ἀγαθῶν, ἡ δὲ δευτέρα ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὴν Γαλλικὴν Σχολήν, ἥτις διὰ τῆς μαθηματικῆς μεθόδου προσπαθεῖ νὰ δείξῃ τὰς σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν ἀνάμεσα εἰς τὰ οἰκονομικὰ καὶ γενικώτερον εἰς τὰ κοινωνικὰ φαινόμενα. Οὕτω, τὰ τέλη τοῦ δεκάτου ἐννάτου αἰῶνος μᾶς εὑρίσκουν μὲ δύο κυριάρχους τάσεις εἰς τὰ Μαθηματικὰ Οἰκονομικά: τὴν ψυχολογικὴν (ὑποκειμενικὴν) καὶ τὴν κοινωνικὴν (ἀντικειμενικήν).

Θὰ εἶναι ἔλλειψις ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω πλουσίαν παράδοσιν τῶν Μαθηματικῶν Οἰκονομικῶν δὲν ἀναφέρωμεν τὰ ὀνόματα τῶν Jevons καὶ Walras. Ὁ πρῶτος τούτων προσεπάθησε νὰ δείξῃ ὅτι τὰ οἰκονομικὰ ἔχουσιν οὐσιαστικῶς μαθηματικὸν χαρακτῆρα, δικαιολογῶν τὴν ἄποψιν ταύτην διὰ τοῦ μαθηματικοῦ χαρακτῆρος τὸν ὁποῖον ἔχουν τὰ Οἰκονομικὰ δεδομένα. Ὁ Walras ἐβάσισε τὸ σύστημά του ἐπὶ τῆς ὑποθετικῆς σπανιότητος τῶν ἀγαθῶν. Ὅπως οἱ περισσότεροι οἰκονομολόγοι οἱ ἀκολουθοῦντες τὴν θεωρίαν τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος, οὕτω καὶ ὁ Walras ἀρχίζει τὴν θεωρίαν του ἀπὸ τὸν τομέα τῆς ἀνταλλαγῆς καὶ ἐξετάζει αὐτὴν ὑπὸ πνεῦμα κοινωνικόν· δημιουργεῖ ἓν γενικὸν σύστημα ἐξισώσεων, μὲ τὸ ὁποῖον προσπαθεῖ νὰ καθορίσῃ τὴν τιμὴν ἀριθμοῦ τινος ἐμπορευμάτων, τὰ ὁποῖα ἀνταλλάσσονται κατὰ ἕνα ἀντίστοιχον ἀριθμὸν ἀνταλλαγῶν. Ὁ Walras ἐξετάζει τὴν συμπεριφορὰν τῶν ἀτόμων εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ τὰς συνθήκας ποὺ ἐπηρεάζουν τὴν διαμόρφωσιν τῆς ἀξίας (τιμῆς) κατὰ τὴν ἀνταλλαγήν.

Εἶναι ἀληθῶς μακροχρόνιος καὶ πλουσία ἡ παράδοσις ἢ προϊστορία τῶν Μαθηματικῶν Οἰκονομικῶν.

Ἀπὸ τὴν ἐποχὴν τῆς «Νεοκλασικῆς Σχολῆς» ἕως σήμερον, δὲν ὑπάρχει οἰκονομολόγος μὴ χρησιμοποιῶν τὴν ποσοτικὴν καὶ ἑπομένως τὴν μαθηματικὴν μέθοδον κατά τινα βαθμόν, μικρὸν ἢ μεγάλον. Παρὰ τὸ γεγονὸς τοῦτο, πολλοὶ οἰκονομολόγοι ἐξακολουθοῦν νὰ ἀντιτίθενται εἰς τὴν εὐρεῖαν χρησιμοποίησιν τῆς μαθηματικῆς μεθόδου. Εἰς τὰς περισσοτέρας τῶν περιπτώσεων, αἱ σχετικαὶ ἀντιρρήσεις ὀφείλονται μᾶλλον εἰς ὑποκειμενικὰ παρὰ εἰς ἀντικειμενικὰ αἴτια. Ἐν τούτοις, οἱ ἐναντιούμενοι εἰς τὴν εὐρεῖαν χρησιμοποίησιν τῆς μαθηματικῆς μεθόδου πολλάκις τονίζουν εἰς τὴν κριτικήν των ἓν ὀρθότατον σημεῖον, ὅτι δηλαδὴ δὲν καταλήγει τις εἰς τίποτε τὸ συγκεκριμένον καὶ ἄξιον λόγου ἐπιστημονικῶς, ὅταν ἀρχίσῃ νὰ χρησιμοποιῇ τύπους, συναρτήσεις καὶ διαφορικὰς καμπύλας διὰ τὴν καταμέτρησιν ὑποκειμενικῶν ἐννοιῶν οἷαι αἱ ἀτομικαὶ ῥοπαί, αἱ τάσεις καὶ αἱ ὁριακαὶ χρησιμότητες.

Τοιούτου εἴδους ἀκαθόριστον ὑποκειμενισμὸν περιεῖχον αἱ ἔρευναι καὶ τὰ συγγράμματα τοῦ Pareto, τὰ ὁποῖα ἐξακολουθοῦν νὰ ἐπηρεάζουν πολλοὺς διεθνοῦς φήμης οἰκονομολόγους. Τὴν τάσιν αὐτήν, ἥτις ἀναχαιτίζει καὶ δὲν ὑποβοηθεῖ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Οἰκονομικῆς ἐπιστήμης, καλοῦμεν «**φορμαλισμόν**». Τουναντίον, ὁ ἀκριβὴς καθορισμός, διὰ τῆς μαθηματικῆς μεθόδου, οἰκονομικῶν ἐννοιῶν οἷαι ἡ τῆς ζητήσεως καὶ προσφορᾶς, ἡ τοῦ κόστους παραγωγῆς, τῆς προσόδου, τῆς θέσεως τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν κ.λ.π. ἔχει ὡς βασικὴν προϋπόθεσιν τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μαθηματικῆς μεθόδου καὶ ἀποβαίνει ἀπαραίτητος διὰ τὴν συγκεκριμένην διαμόρφωσιν τῆς ἐπιστήμης.

Ὡς γράφουν ὁ von Neumann καὶ ὁ Oskar Morgenstern: «Εἶναι οὐσιώδες νὰ ἀναγνωρισθῇ ὅτι οἱ οἰκονομολόγοι δὲν πρέπει νὰ ἀναμένουν τὴν μοῖραν των εὐκολωτέραν ἀπὸ τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστημόνων. Εἶναι λογικὸν νὰ ἀναμένῃ τις ὅτι ἔχουν πρωτίστως νὰ μελετήσουν τὰ πλέον ἁπλᾶ γεγονότα τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς, προσπαθοῦντες νὰ δημιουργήσουν θεωρίας διὰ τὴν ἐξήγησίν των, αἱ ὁποῖαι νὰ ἀνταποκρίνωνται εἰς αὐστηρὰ ἐπιστημονικὰ κριτήρια. Πρέπει νὰ ἔχωμεν τὴν πεποίθησιν ὅτι, ἐὰν ἡ ἀρχὴ αὕτη πραγματοποιηθῇ, ἡ ἐπιστήμη τῶν Οἰκονομικῶν βαθμηδὸν θὰ δύναται νὰ ἐξετάσῃ ἐπιστημονικῶς ζητήματα ζωτικωτέρας σπουδαιότητος ἀπὸ ἐκεῖνα μὲ τὰ ὁποῖα πρέπει τις νὰ ἀρχίσῃ» *.

Ὁ Ἀμερικανὸς Evans, ὁ Ἄγγλος Allen καὶ ἄλλοι συγκεντρώνουν τὰς προσπαθείας των μᾶλλον πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῆς εὐρείας χρησιμοποιήσεως τῆς μαθηματικῆς μεθόδου. Ἡ ἀρχὴ ἡ διέπουσα τὴν παροῦσαν «***Εἰσαγωγὴν εἰς τὴν Μαθηματικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν***» εἶναι ὁ ἀκριβὴς διὰ τῆς μαθηματικῆς μεθόδου καθορισμὸς τῶν γενικῶς παραδεδεγμένων καὶ ἀπαραιτήτων διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν ἐννοιῶν.

Εἰς τὸ σημερινὸν στάδιον τῆς Οἰκονομικῆς ἐπιστήμης, ὅπου τὰ δεδομένα δὲν εἶναι ἀρκετά, οἱ ὁρισμοὶ ὄχι πολὺ σαφεῖς καὶ οἱ κανόνες ἀμφισβητήσιμοι, ὅταν θεωροῦνται ὑπὸ τὸ πρῖσμα τῆς ἀντικειμενικῆς πραγματικότητος, ὁ ἀκριβὴς καθορισμὸς ὑποκειμενικῶν ἐννοιῶν εἶναι ἐξαιρετικὰ δύσκολος, ἂν ὄχι ἀκατόρθωτος. Ἕνεκα τούτου, ἡ χρησιμοποίησις τῆς μαθηματικῆς μεθόδου εἰς τὴν ἐπεξεργασίαν ὑποκειμενικῶν ἐννοιῶν ὁδηγεῖ, πολλάκις, εἰς συμπεράσματα ἀπομεμακρυσμένα τῆς ἀντικειμενικῆς πραγματικότητος. Αὐτὴ εἶναι ἡ φορμαλιστικὴ τάσις, ἥτις δικαίως ἔχει γίνει ἀντικείμενον αὐστηροτάτης κριτικῆς.

Ἀκολουθοῦμεν εἰς ὡρισμένα σημεῖα τὴν θεωρίαν τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος, ὄχι διότι εἶναι ἡ μόνη τοιαύτη ἀλλ' ἐπειδὴ τυγχάνει ἡ περισσότερον γνωστή. Πιστεύομεν ὅτι, διὰ νὰ διέλθουν τὰ Οἰκονομικὰ ἀπὸ τὸ στάδιον τῆς ἀλχημίας εἰς τὸ πραγματικῶς ἐπιστημονικόν, ὡς συνέβη μὲ τὰ φυσικά, πρέπει πρωτίστως νὰ ὑπάρχῃ ἀκριβὴς καθορισμὸς τῶν γενικῶς ἀποδεδεγμένων ἐννοιῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

I. Εἰσαγωγὴ εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν

Ἡ εἰσαγωγὴ αὕτη παρέχει σύντομον ἰδέαν τῆς ἐπεκτάσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καθὼς καὶ τῶν βασικῶν λόγων οἵτινες προεκάλεσαν τὴν ἐπέκτασιν μέχρι τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁποίου συνετάχθη τὸ παρὸν βιβλίον. Τὴν λογικὴν

* Von Neumann and Oskar Morgenstern: «Theory of Games and Economic Behaviour».

καὶ φιλοσοφικὴν πλευρὰν τῆς ἐν λόγῳ ἐπεκτάσεως θὰ παραλείψωμεν, δεδομένου ὅτι αὕτη ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τοῦ παρόντος.

Οἱ ἀκέραιοι ἢ φυσικοὶ ἀριθμοὶ μὲ τοὺς ὁποίους ἀρχίζομεν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἔχουν τὴν ἰδιότητα ὅτι δύνανται νὰ γραφοῦν εἰς μίαν συνέχειαν, δηλ. 1, 2, 3, 4, κτλ. χωρὶς τέλος. Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν ἀρίθμησιν. Ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ὑπὸ τοὺς συνήθεις στοιχειώδεις ὁρισμοὺς δίδουν ἀντιστοίχως, ὡς ἄθροισμα καὶ ὡς γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀκεραίων, ἀριθμὸν ἀκέραιον· τὸ πηλίκον ὅμως δύο ἀκεραίων δὲν εἶναι πάντοτε ἀκέραιος ἀριθμός. Διὰ νὰ καταστήσωμεν δὲ τὴν διαίρεσιν δυνατὴν εἰσάγομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ κλάσματος, ὡς ἀριθμοῦ νέου τύπου. Τὸ οὕτω προκῦπτον σύστημα ὀνομάζομεν σύστημα **τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν**.

Τὸ σύστημα τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμοιόμορφον κατὰ τὴν πρόσθεσιν, τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν, δηλαδὴ τὸ ἐξαγόμενον οἱασδήποτε ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν πράξεων εἶναι ἀριθμὸς ἀνήκων εἰς τὸ σύστημα τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν· δὲν εἶναι ὅμως ὁμοιόμορφον κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωγικῆς ῥίζης. Οὕτω π.χ. αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀριθμῶν, 4, 9, $\frac{16}{49}$, εἶναι ῥητοὶ ἀριθμοί· αἱ ῥίζαι ὅμως τῶν 2, 3, 5 δὲν ἀνήκουσιν εἰς τὸ ἴδιον σύστημα.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸ σύστημα ὁμοιόμορφον εἰσάγομεν τοὺς **ἀῤῥήτους** ἀριθμούς. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ ἀῤῥήτου ἀριθμοῦ εἶναι ἀρκετὰ δύσκολος καὶ δὲν πρόκειται νὰ δοθῇ ἐδῶ. Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ ἄρρητοι ἀριθμοὶ περικλείουν τὰ τετράγωνα τῶν μὴ τελείων τετραγώνων τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν, ἤτοι ἀριθμοὺς ὅπως ὁ π καὶ e, καθὼς καὶ τὰς ῥίζας πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Αἱ πράξεις αἱ ἰσχύουσαι διὰ τοὺς ῥητοὺς ἀριθμοὺς ἐπεκτείνονται, μὲ ἀρκετὴν δυσκολίαν, καὶ εἰς τοὺς ἀρρήτους ἀριθμούς. Ἡ ἐπακολουθοῦσα ἐπέκτασις εἶναι μᾶλλον ἀλγεβρικὴ παρὰ ἀριθμητική. Ὁ λόγος ὅστις ἐπιβάλλει τὴν ἐπέκτασιν αὐτὴν εἶναι ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἀρρήτων δὲν εἶναι ὁμοιόμορφον εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀφαιρέσεως ὅταν ὁ μειωτέος εἶναι μικρότερος τοῦ ἀφαιρετέου.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν τὸ σύστημα γενικώτερον ὁμοιόμορφον εἰσάγομεν τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς καθὼς καὶ τὸ μηδέν. Ἡ διάκρισις μεταξὺ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν γίνεται διὰ τῶν σημείων $+$ καὶ $-$ τοποθετουμένων ἔμπροσθεν οἱουδήποτε ἀρρήτου ἀριθμοῦ. Οὕτω τὸ σύστημα αὐτό, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ***σύστημα πραγματικῶν ἀριθμῶν***, σύγκειται ἐκ τοῦ μηδενὸς καὶ τῶν ἀρρήτων λαμβανομένων διττῶς, εἴτε ὡς θετικῶν εἴτε ὡς ἀρνητικῶν.

Τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμοιόμορφον ὡς πρὸς τὰς τέσσαρας στοιχειώδεις πράξεις, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ μηδενός. Ἡ ὁμοιομορφία αὐτὴ δὲν ἰσχύει ὅταν ἐξετάζωμεν τὰς ῥίζας ἐξισώσεων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου. Ἡ ὁμοιομορφία, ὅθεν, ἀποκαθίσταται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν φανταστικῶν ἢ μιγάδων ἀριθμῶν, μὲ τοὺς ὁποίους δὲν πρόκειται νὰ ἀσχοληθῶμεν ἐνταῦθα.

Θεωροῦντες ὅλας τὰς πράξεις ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὡς γνωστὰς ἐκ τῶν γυμνασιακῶν βιβλίων, θὰ ἀναφέρωμεν μόνον τὰς βασικὰς ἰδιότητας τοῦ συστήματος, στηριζομένας ἐπὶ τῶν ἐργασιῶν τῶν Dedekind καὶ Cantor. Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι :

α) Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ τοποθετηθοῦν κατὰ μίαν ὡρισμένην τάξιν μεγέθους, δηλαδὴ δοθέντων δύο ἀριθμῶν πάντοτε δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος καὶ ποῖος ὁ μεγαλύτερος.

β) Ἡ ἀρίθμησις εἶναι ἀπεριόριστος πρὸς δύο κατευθύνσεις, δηλαδὴ οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἓν διττῶς ἀπεριόριστον σύστημα. Ἡ ἰδιότης αὐτή, ἥτις δίδει ἁπλῆν ἰδέαν τοῦ ἀπείρου, ἐπιτρέπει τὴν χρῆσιν τοῦ ἀπείρως μεγάλου ἀριθμοῦ.

γ) Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τελείως πυκνὸν σύστημα, δηλαδὴ δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν πάντοτε ὑπάρχει ἕτερος πραγματικὸς ἀριθμὸς μεταξύ των καὶ ἑπομένως γεννῶνται ἀριθμοὶ ἄπειροι μεταξὺ ἀλλήλων. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐπιτρέπει νὰ χρησιμοποιῶμεν ἀριθμοὺς τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι πολὺ μικρὰ (ἀπειροστή), καθὼς καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρως μικροῦ ἀριθμοῦ. Αἱ βασικαὶ αὐταὶ ἰδιότητες τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀποτελοῦσι τὰ θεμέλια τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως.

2. Ἀλγεβρικὸς συμβολισμός—Ἡ ἔννοια τῆς μεταβλητῆς

Ἡ ἀντικατάστασις τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς διὰ γραμμάτων τῆς ἀλφαβήτου ἀποτελεῖ μαθηματικὸν συμβολισμόν, ὅστις ὁδηγεῖ ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν εἰς τὴν Ἄλγεβραν, ἤτοι εἰς ἀνωτέραν μορφὴν τῆς Ἀριθμητικῆς, κατὰ τὸν Newton. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ συμβόλου π. χ. τοῦ 5 καὶ τοῦ συμβολικοῦ γράμματος x συνίσταται εἰς τὸ ὅτι τὸ μὲν γράμμα x δύναται νὰ λάβῃ διαδοχικῶς ὅλας τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς ἓν «διάστημα» τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐνῷ τὸ σύμβολον 5 δεικνύει ἀκριβῶς τὸν ἀριθμὸν πέντε. Οὕτω, τὸ γράμμα x ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, ἥτις συνδέεται μὲ τὸ διάστημα τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ τὸ x.

Τὸ διάστημα αὐτὸ δύναται νὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἢ ἓν «τμῆμα» τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω, δυνάμεθα νὰ περιορίσωμεν τὸ x μόνον εἰς θετικὰς ἢ ἀρνητικάς, εἰς ἀκεραίας ἢ μικρὰς τιμὰς μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ 1. Τὸ γράμμα x θὰ ὀνομάζεται ***μεταβλητὸς ἀριθμὸς ἢ μεταβλητή***. Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνῃ τὰς τιμὰς μεταξὺ τοῦ 2 καὶ τοῦ 5 τότε γράφομεν $2 < x < 5$, ἐὰν τὸ x δὲν λαμβάνῃ τὰς τιμὰς 2 καὶ 5, γράφομεν $2 \leqslant x \leqslant 5$, ἢ ἐὰν τὸ x λαμβάνῃ καὶ τὰς τιμὰς 2 καὶ 5. Χάριν συντομίας, ἐὰν τὸ x μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, θὰ παριστῶμεν τὸ διάστημα διὰ τοῦ (α,β).

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ γράμματα x,y,z διὰ τὴν παράστασιν τῶν μεταβλητῶν καὶ τὰ γράμματα α,β,γ, a,b,c διὰ τὴν παράστασιν ὡρισμένων ἀριθμῶν ἢ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν παραμέτρων, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

3 Θεμελιώδεις οἰκονομικαὶ μονάδες—Μέτρησις

Εἰς τὴν Φυσικήν, ὡς εἶναι γνωστόν, χρησιμοποιοῦμεν τρεῖς θεμελιώδεις μονάδας ἤτοι: τὸ δευτερόλεπτον, ὡς μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου, τὸ γραμμάριον, ὡς μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τῆς μάζης, καὶ τὸ ἑκατοστόμετρον, ὡς μονάδα διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ μήκους (ἀποστάσεως). Αἱ μονάδες αὗται εἶναι ἀρκεταὶ διὰ τὴν περιγραφὴν τῶν φυσικῶν φαινομένων, δεδομένου ὅτι ἡ μονὰς τοῦ μήκους δίδει τὴν περιγραφὴν τοῦ χώρου, ἡ μονὰς τῆς μάζης δίδει τὴν περιγραφὴν τῆς ἐνεργείας καὶ ἡ μονὰς τοῦ χρόνου δίδει τὸ χρονικὸν διάστημα κατὰ τὸ ὁποῖον τὰ φυσικὰ φαινόμενα λαμβάνουν χώραν.

Ἀναλόγως τοῦ φαινομένου τὸ ὁποῖον ἐξετάζομεν, χρησιμοποιοῦμεν πολλαπλάσια ἢ ὑποπολλαπλάσια (ὑποδιαιρέσεις) μιᾶς μονάδος· π. χ. διὰ τὴν μέτρησιν ἀποστάσεων χρησιμοποιοῦμεν τὸ μέτρον ἢ καὶ τὸ χιλιόμετρον, τὰ ὁποῖα εἶναι πολλαπλάσια τῆς θεμελιώδους μονάδος, διὰ τὴν μέτρησιν μικρῶν ἀποστάσεων χρησιμοποιοῦμεν τὸ χιλιοστόμετρον ἢ τὸ μυριοστόμετρον, τὰ ὁποῖα εἶναι ὑποδιαιρέσεις τῆς θεμελιώδους μονάδος.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν αὐτῶν μονάδων παράγονται ἄλλαι μονάδες, αἵτινες χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν περιγραφὴν ὅλων σχεδὸν τῶν φυσικῶν φαινομένων. Συνήθως αἱ νέαι μονάδες παράγονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως μονάδων ὁμοιοειδῶν ἢ ἑτεροειδῶν. Π.χ. διὰ τὴν μέτρησιν ἐμβαδῶν ἔχομεν τὸ γινόμενον δύο μονάδων μήκους, διὰ δὲ τοὺς ὄγκους τὸ γινόμενον τριῶν μονάδων μήκους. Διὰ τὴν ταχύτητα ἔχομεν τὸ πηλίκον τοῦ μήκους διαιρουμένου διὰ τοῦ χρόνου. Τὸ σύστημα αὐτὸ τῆς μετρήσεως, γνωστὸν ὡς C. G. S. δὲν εἶναι ἑνιαῖον διὰ παγκόσμιον χρῆσιν· οἱ ἀγγλοσαξωνικοὶ λαοὶ χρησιμοποιοῦν διὰ τὴν μέτρησιν μηκῶν τὸν πόδα καὶ διὰ τὴν μέτρησιν βαρῶν τὴν λίτραν (pound). Ἐν τούτοις, ἡ ἀλλαγὴ τῶν μονάδων μετρήσεως δὲν μεταβάλλει τὴν ποιοτικὴν μελέτην τῶν φαινομένων ἀλλ' ἁπλῶς μόνον ἀλλάζει τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῶν ἀποτελεσμάτων. Ἡ ἀλλαγὴ τῶν μετρήσεων ἐκ τοῦ ἑνὸς συστήματος εἰς τὸ ἄλλο εἶναι ἁπλῆ καὶ ἐπιτυγχάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα σταθερὸν συντελεστήν, ὅστις εἶναι ἡ ἀναλογία τῆς δευτέρας μονάδος μετρήσεως ὡς πρὸς τὴν πρώτην. Διὰ μεγαλυτέραν σαφήνειαν, ἂς θεωρήσωμεν ὅτι ἓν ποσὸν μετρηθὲν διὰ δύο διαφορετικῶν μονάδων ἔχει μέτρα x καὶ y. Ἐὰν ἡ δευτέρα μονὰς μετρηθεῖσα διὰ τῆς πρώτης ἔχῃ μέτρον μ τότε $x = \mu y$. Δηλαδή, ἐὰν ἔχωμεν ἓν μῆκος x μέτρων εἶναι τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς ὡς ἐὰν γράψωμεν 100x ἑκατοστόμετρα. Γενικώτερον, ὁ λόγος τῶν μέτρων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, μετρηθέντος διὰ δύο μονάδων, ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν μονάδων τούτων πρὸς ἀλλήλας.

Τὰ οἰκονομικὰ προβλήματα βασικῶς παρουσιάζουν μετρήσεις ἐπὶ νομίσματος, ἐπὶ ποσότητος παραγωγῆς καὶ ἐπὶ χρόνου, λ. χ. ἔγγειος πρόσοδος κατ' ἔτος, μηνιαῖοι μισθοί, τόννοι ὑλικοῦ, ἀξία κατὰ μονάδα παραγωγῆς κ.τ.λ. Ἑπομένως, ἀπαιτοῦνται τρεῖς θεμελιώδεις μονάδες : μετρήσεως τοῦ νομίσματος, π.χ. δραχμή, μονάδες μετρήσεως τῶν διαφόρων εἰδῶν παραγωγῆς καὶ μία μονὰς χρόνου. Πρὸς τὸ παρὸν θὰ περισρισθῶμεν μόνον εἰς ἓν εἶδος παραγωγῆς καὶ ὡς ἐκ τούτου χρειαζόμεθα μόνον μίαν μονάδα τοῦ δευτέρου εἴδους. Ὁ χρόνος εἰς τὸν ὁποῖον λαμβάνουν χώραν τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, ἅτινα θὰ περιγράψωμεν εἰς τὸ παρὸν βιβλίον, συνήθως δίδεται εἰς σταθερὰ χρονικὰ διαστήματα, λ.χ. εἰς ἑβδομάδας, ἢ εἰς μῆνας ἢ εἰς ἔτη.

Ὡς ἐκ τούτου ἡ ἔννοια τοῦ χρόνου ἔχει μόνον περιγραφικὴν σημασίαν ὡς πρὸς τὴν χρονικὴν περίοδον εἰς τὴν ὁποίαν ἐξελίσσεται τὸ φαινόμενον, χωρὶς νὰ εἰσέρχεται εἰς τὴν ἐσωτερικὴν μορφὴν τοῦ φαινομένου. Ἡ ἀλλαγὴ τῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἴδους γίνεται ὡς εἰς τὸ παράδειγμα τῆς Φυσικῆς, τὸ ὁποῖον ἀνεφέραμεν προηγουμένως.

Ἐκ τῶν τριῶν αὐτῶν θεμελιωδῶν μονάδων, παράγονται ἄλλαι οἰκονομικαὶ μονάδες, ὡς καὶ εἰς τὴν Φυσικήν. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ χρηματικὸν ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐχρειάσθη διὰ νὰ ἀγοράσωμεν ἕνα ἀριθμὸν μονάδων ἀγαθοῦ τινος, διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ.

4. Διαστάσεις τῶν οἰκονομικῶν ποσῶν

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἓν ὡρισμένον σύστημα θεμελιωδῶν μονάδων, λ. χ. δραχμὰς διὰ τὸ νόμισμα, ὀκάδας διὰ τὴν ποσότητα τοῦ παραγομένου ἀγαθοῦ καὶ ἑβδομάδας διὰ τὴν μέτρησιν τοῦ χρόνου. Ἐάν, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ συστήματος αὐτοῦ, δημιουργήσωμεν τὴν μαθηματικὴν διατύπωσιν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων, γεννᾶται τὸ ἐρώτημα κατὰ πόσον ἡ μαθηματικὴ διατύπωσις παραμένει ἀναλλοίωτος ἐν περιπτώσει ἀλλαγῆς τῶν θεμελιωδῶν μονάδων, δηλαδὴ ἐὰν ἀντὶ τῆς μιᾶς δραχμῆς λάβωμεν ὡς μονάδα χιλίας δραχμάς, ἢ ἂν λάβωμεν ξένον νόμισμα, ἐὰν ἀντὶ τῆς ὀκᾶς λάβωμεν ὡς μονάδα τὸν τόννον καὶ ἀντὶ τῆς ἑβδομάδος λάβωμεν ὡς μονάδα τὸν μῆνα. Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπίδρασις ἐπὶ τῆς μαθηματικῆς διατυπώσεως;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ εἶναι ὅτι ὁλόκληρον τὸ μαθηματικὸν σύστημα παραμένει ἀναλλοίωτον καὶ μόνον τὰ ἀριθμητικὰ ἀποτελέσματα μεταβάλλονται. Διὰ νὰ καταστήσωμεν τὴν ἀπάντησιν αὐτὴν σαφεστέραν θὰ ἐξετάσωμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ μέτρου ἑνὸς ποσοῦ ὡς πρὸς δύο διαφορετικὰ συστήματα μονάδων.

Κατ' ἀρχήν, ἂς λάβωμεν τὸ παράδειγμα τῆς ἰσοταχοῦς κινήσεως ἐκ τῆς Φυσικῆς. Ἡ ὁμαλὴ ταχύτης εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ διανυθέντος διαστήματος διὰ τοῦ χρόνου, δηλαδή:

$$v = \frac{s}{t}$$

Ἐὰν $v=1$ τότε $s=t$ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $s=t=1$, ἔχομεν τὴν μονάδα τῆς ταχύτητος εἰς τὸ ἐν λόγῳ σύστημα.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸ νέον σύστημα ἡ μονὰς τῶν διαστημάτων εἶναι λ φορὰς ἡ προηγούμενη καὶ ὅτι ἡ μονὰς τοῦ χρόνου εἶναι μ φορὰς ἡ προηγουμένη καὶ ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τόννων τὰ μέτρα εἰς τὸ νέον σύστημα, $v'=1=$ὅταν $s'=t'$ $=1$ ὅπερ σημαίνει $s=\lambda$, $t=\mu$ καὶ $v=\frac{\lambda}{\mu}$. Ἑπομένως:

$$(\text{μονὰς τοῦ } v') = \frac{\lambda}{\mu}\,(\text{μονὰς τοῦ } v)$$

Ἄρα, ἡ νέα μονὰς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ γινόμενον $\lambda^1\ \mu^{-1}$.

Ὡς ἐκ τούτου λέγομεν ὅτι ἡ ὁμαλὴ ταχύτης εἶναι διαστάσεως $+1$ ὡς πρὸς τὸ διάστημα καὶ -1 ὡς πρὸς τὸν χρόνον.

Λαμβάνομεν τώρα ὡς θεμελιώδεις μονάδας τοῦ οἰκονομικοῦ μετρικοῦ συστήματος τὰς N, Π, T, ἀντιστοίχως διὰ τὸ νόμισμα, διὰ τὴν ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ καὶ διὰ τὸν χρόνον. Ἐὰν αἱ θεμελιώδεις μονάδες πολλαπλασιασθοῦν ἀντιστοίχως ἐπὶ λ, ν, μ, τὸ μέτρον ἑνὸς ποσοῦ θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν $\alpha = \lambda^l \nu^n \mu^m$ ὅπου l, n, m, εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ καὶ παριστοῦν τὰς διαστάσεις τοῦ ποσοῦ ὡς πρὸς τὰς θεμελιώδεις μονάδας. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $\mathbf{x}$ τὸ ἐν λόγῳ ποσὸν τότε γράφομεν συμβολικῶς:

$$[x] = N^l \Pi^n T^m.$$

Δύο ποσὰ ἅτινα πολλαπλασιάζονται πάντοτε ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν α, δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν λ, ν, μ, λέγονται ποσὰ τῆς αὐτῆς διαστάσεως. Εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν ὅτι ἐὰν

$$[x] = N^{l}\,\Pi^{n}\,T^{m}$$

καὶ
$$[y] = N^{l'}\,\Pi^{n'}\,T^{m'}$$

τότε
$$[xy] = N^{l+l'}\,\Pi^{n+n'}\,T^{m+m'}$$

καὶ
$$\left[\frac{x}{y}\right] = N^{l-l'}\,\Pi^{n-n'}\,T^{m-m'}$$

Θὰ παρατηρήσωμεν ὅμως ὅτι τὸ ἄθροισμα $x+y$ τότε μόνον εἶναι μετρήσιμον ὅταν καὶ τὰ δύο ποσὰ x καὶ y εἶναι τῆς αὐτῆς διαστάσεως. Ἐὰν τὰ ποσὰ εἶναι διαφορετικῶν διαστάσεων τὸ ἄθροισμα $x+y$ δὲν εἶναι μετρήσιμον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι:

1) Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ποσοῦ εἶναι ἀναλλοίωτοι ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν μονάδων καὶ μόνον τὸ μέτρον τοῦ ποσοῦ μεταβάλλεται.

2) Αἱ ἀλγεβρικαὶ ἢ ἀναλυτικαὶ σχέσεις τὰς ὁποίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν περικλείουν μεταβλητὰ ποσὰ τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις παραμένουν ἀναλλοίωτοι ὡς πρὸς τὰς ἐκτελουμένας πράξεις. Οὕτω, αἱ διαστάσεις τοῦ μέσου κόστους καὶ τοῦ διαφορικοῦ κόστους, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἶναι αἱ αὐταί, ἀφοῦ αἱ πράξεις αἱ χρησιμοποιούμεναι διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁρίου ἀφήνουν ἀναλλοιώτους τὰς διαστάσεις τῶν μεταβλητῶν ποσῶν.

3) Ἰσότητες ἀλγεβρικαὶ ἢ ἀναλυτικαί, περικλείουσαι οἰκονομικὰ ποσά, πρέπει νὰ εἶναι τῶν αὐτῶν διαστάσεων ὡς πρὸς τὰ δύο μέλη, διὰ νὰ ἔχουν ἔννοιαν.

Τὸ τρίτον συμπέρασμα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐλέγξωμεν τὴν ἀκρίβειαν ἑνὸς οἰκονομικοῦ τύπου διὰ τῆς θεωρίας τῶν διαστάσεων.

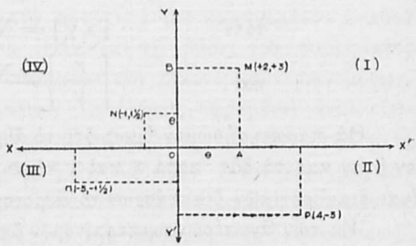
5. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν—Γεωμετρικοὶ χῶροι

Ἔστω X μία συνεχὴς ἀπεριόριστος εὐθεῖα γραμμή. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς λαμβάνομεν ἓν σταθερὸν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον, τὸ 0 καὶ μίαν μονάδα μετρήσεως μήκους, ἔστω τὴν μονάδα 5 ἑκατοστομέτρων. Κατόπιν,

$$\begin{array}{ccccc} -2 & & {}^{1}/_{3} & 1 & 4 \\ \hline B & 0 & \Gamma & M & A \end{array} \;(X)$$

συμφωνοῦμεν ὅτι αἱ ἀποστάσεις πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 0 εἶναι θετικαί, αἱ δὲ πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἀρνητικαί. Τότε ἕκαστον σημεῖον τῆς εὐθείας ὁρίζεται δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ ὅστις εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ σημείου 0 ὡς πρὸς τὴν ὁρισθεῖσαν μονάδα. Τὸ μέτρον θὰ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἀναλόγως ἐὰν τὸ σημεῖον κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0. Οὕτω, εἰς τὸν ἀριθμὸν $+4$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον A, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν 4 μονάδων πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 0: Εἰς τὸν ἀριθμὸν -2 ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον B τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν 2 μονάδων πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ 0, εἰς τὸν ἀριθμόν $+{}^{1}/_{3}$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 0 εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς τρίτου τῆς μονάδος. Διὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς ἐπιτυγχάνομεν μίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν σημείων τῆς εὐθείας καὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ εἶναι πλήρης, δηλαδὴ εἰς ἕνα ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον καὶ τανάπαλιν. Ἡ εὐθεῖα X ὀνομάζεται ***χῶρος τῆς μιᾶς διαστάσεως ἢ μονοδιάστατος χῶρος***.

Ἐὰν θεωρήσωμεν ὅλα τὰ ζεύγη τῆς μορφῆς (x, y), ὅπου x καὶ y εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ πραγματικοί, καὶ δύο καθέτως τεμνομένας εὐθείας, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν μίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ τοῦ συνόλου τῶν ζευγῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὡς ἀκολούθως :



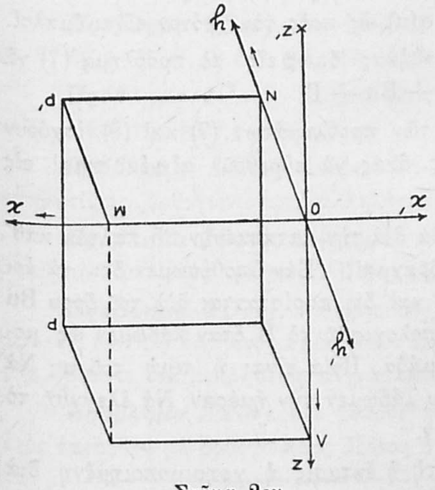
Σχῆμα 1ον

Χάριν εὐκολίας λαμβάνομεν τὰς δύο καθέτως τεμνομένας εὐθείας ὑπὸ μορφὴν ὁριζοντίας καὶ κατακορύφου καὶ ὁρίζομεν ἀφ' ἑνὸς μὲν μίαν μονάδα μετρήσεως μήκους ἀφ' ἑτέρου δὲ ὡς ἀρχὴν μετρήσεως τῶν μηκῶν τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν.

Ἡ θέσις τοῦ σημείου M εἰς τὸ ἐπίπεδον καθορίζεται πλήρως διὰ τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ BM καὶ AM ἀπὸ τὰς δύο εὐθείας. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν ἀποστάσεων BM, ἢ OA, καλεῖται ***τετμημένη*** καὶ παρίσταται διὰ τοῦ x. Ἡ δευτέρα AM, ἢ OB, παρίσταται διὰ τοῦ y καὶ καλεῖται ***τεταγμένη*** Καὶ αἱ δύο μαζὶ λέγονται ***ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι*** τοῦ σημείου M. Ἡ εὐθεῖα XX καλεῖται ***ἄξων τῶν τετμημένων*** ἡ δὲ εὐθεῖα YY ***ἄξων τῶν τεταγμένων***. Καὶ αἱ δύο μαζὶ λέγονται ***ὀρθογώνιοι ἄξονες τῶν συντεταγμένων***, τὸ δὲ σημεῖον O ***ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων***. Ὥστε, δοθέντος τοῦ σημείου M, εὑρίσκομεν ἓν ζεῦγος (x,y) ὡς συντεταγμένας τοῦ σημείου. Ὁμοίως, ἐὰν δοθῇ τὸ ζεῦγος εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον. Αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου γράφονται ἐντὸς παρενθέσεως μετὰ τὸ γράμμα τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ σημεῖον καὶ πάντοτε ἡ τετμημένη εἶναι πρώτη, λ. χ. M (+2,+3). Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον M (+2, +3) λαμβάνομεν δύο μονάδας πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ O ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων καὶ τρεῖς μονάδας πρὸς τὰ ἄνω ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων. Ἡ τομὴ τῶν παραλλήλων τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν A καὶ B ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἄξονας yy' καὶ xx' ὁρίζουν τὸ σημεῖον M. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν τὰ σημεῖα N (—1, $1^1/_2$), Π (—3,—$1^1/_2$) P (4,—3). Ἡ τετμημένη x εἶναι θετικὴ ὅταν τὸ σημεῖον κεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ yy' καὶ ἡ τεταγμένη εἶναι θετικὴ ὅταν τὸ σημεῖον κεῖται πρὸς τὰ ἄνω τοῦ **xx'**. Οὕτω, τὸ ἐπίπεδον χωρίζεται εἰς τέσσαρα τεταρτημόρια ὑπὸ τῶν ἀξόνων, αἱ δὲ συντεταγμέναι τοῦ σημείου M, ἐὰν αὐτὸ κεῖται εἰς τὸ I, εἶναι καὶ αἱ δύο θετικαί, ἐὰν κεῖται εἰς τὸ III καὶ αἱ δύο ἀρνητικαί, ἐὰν κεῖται εἰς τὸ II ἡ μὲν τετμημένη εἶναι ἀρνητικὴ ἡ δὲ τεταγμένη θετική. Ἐὰν τέλος κεῖται εἰς τὸ IV ἡ τετμημένη εἶναι θετικὴ καὶ ἡ τεταγμένη ἀρνητικὴ (ἴδε σχῆμα 1ον). Τὸ ἐπίπεδον ὀνομάζεται ***χῶρος τῶν δύο διαστάσεων*** ἡ δὲ μέθοδος τοποθετήσεως σημείων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς δύο ἄξονας ἀποτελεῖ τὸν συνδετικὸν κρίκον μεταξὺ Γεωμετρίας καὶ Ἀναλύσεως.

Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν περισσότερον τὸ σημεῖον αὐτό, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἕνα πίνακα ἀντιστοίχων ἀριθμητικῶν τιμῶν διὰ δύο μεταβλητὰς ποσότητας, τὴν x καὶ τὴν y. Ἐὰν ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν τοποθετηθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου εἰς τὸ ὁποῖον ἔχουν ὁρισθῆ ἄξονες μὲ καταλλήλως ἐκλεγείσας μονάδας καὶ κλίμακας, τὸ σύνολον τῶν σημείων αὐτῶν μᾶς δίδει ἓν διάγραμμα. Ἡ μελέτη τοῦ διαγράμματος δίδει τὴν εἰκόνα μεταβολῆς τῆς μιᾶς μεταβλητῆς ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἄλλην. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχωμεν τὴν ἰδίαν μονάδα μετρήσεως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας. Καθὼς ἐπίσης δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καταλλήλους κλίμακας διὰ τὴν ὅσον τὸ δυνατὸν καλυτέραν ἀπεικόνισιν τῶν μεταβλητῶν ποσῶν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Ο τὸ ὁποῖον καλεῖται καὶ ***ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων*** εἶναι (0, 0). Ἡ τετμημένη τῶν σημείων τοῦ ἄξονος yy′ εἶναι 0 καὶ ἑπομένως εἷς μόνον ἀριθμός. Ἡ τεταγμένη y ὁρίζει τὴν θέσιν τῶν σημείων ἐπὶ τοῦ ἄξονος yy′. Ἄρα τὸ ζεῦγος (0, y) παριστᾷ τὸν ἄξονα yy′. Ὁμοίως τὸ ζεῦγος (**x**, 0) παριστᾷ τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων.

Ἡ ἐπέκτασις τῆς μεθόδου τῶν συντεταγμένων διὰ τὸν ὁρισμὸν σημείων εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων γίνεται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὡς ἀνωτέρω, χωρὶς καμμίαν σοβαρὰν δυσκολίαν. Λαμβάνομεν τρεῖς ὀρθογωνίως τεμνομένους ἄξονας εἰς τὸ σημεῖον Ο τῶν ὁποίων τὴν θετικὴν διεύθυνσιν ὁρίζουν τὰ βέλη, ὡς φαίνεται εἰς τὸ διάγραμμα 2. Δι᾽ εὐκολίαν, λαμβάνομεν τὸ ἐπίπεδον xy ὡς ὁριζόντιον, τὸν δὲ ἄξονα z ὡς κατακόρυφον. Ἐκ τοῦ σημείου P φέρομεν καθέτους πρὸς τὰ ἐπίπεδα Oxy, Oyz, Ozx, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν ***ἐπίπεδα τῶν συντεταγμένων*** καὶ συμπληρώνομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις OM, ON, OΛ, περιέχουν x, y, z μονάδας τότε τὸ σημεῖον P ὁρίζεται διὰ τῶν τριῶν αὐτῶν ἀριθμῶν γραφομένων κατὰ τὴν τάξιν (**x**, y, z). Ἀντιστρόφως,



Σχῆμα 2ον

ἐὰν μᾶς δοθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ (x, y, z) ὁρίζομεν τὸ σημεῖον P (**x**, y, z) ὡς καὶ προηγουμένως. Οὕτω, εἰς ἑκάστην τριάδα ἀριθμῶν (x, y, z) ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον καὶ τανάπαλιν. Εἰς τὰ οἰκονομικά, δεδομένου ὅτι ἐν γένει διαπραγματευόμεθα θετικὰ ποσά, χρησιμοποιοῦμεν τὸ πρῶτον «τέταρτον» τοῦ ἐπιπέδου ἢ τὸ πρῶτον «ὄγδοον» τοῦ χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων.

6. Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν

Πρόβλημα 1ον). Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλλαγὴ τοῦ μέτρου ἑνὸς ποσοῦ διὰ τῆς μετατροπῆς 3544 ἑκατοστομέτρων εἰς μέτρα καὶ χιλιόμετρα, 548 ὀκάδων εἰς στατῆρας καὶ τόννους, 0,255 ὡρῶν εἰς λεπτὰ καὶ δευτερόλεπτα.

Πρόβλημα 2ον). Δεδομένου ὅτι 1 ποῦς=30,48 ἑκ., νὰ εὑρεθῇ, κατὰ προσέγγισιν, τὸ μέτρον ἑνὸς ἑκατοστοῦ εἰς δακτύλους. Νὰ ἐκφρασθοῦν 8 δάκτυλοι εἰς ἑκατοστά, $5\,^1/_2$ ὑάρδες εἰς μέτρα καὶ 2000 πόδες εἰς χιλιόμετρα.

Πρόβλημα 3ον). Δεδομένου ὅτι 1 λίβρα=453,6 γραμμάρια, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον ἑνὸς γραμμαρίου εἰς οὐγγίας. Νὰ ἐκφρασθοῦν 4 οὐγγίαι εἰς γραμμάρια καὶ 24 λίβραι εἰς χιλιόγραμμα.

Πρόβλημα 4ον). Δεδομένου ὅτι 1 χιλιόγρ.=312,5 δράμια νὰ ἐκφρασθῇ 1 γραμμάριον εἰς ὀκάδας, καὶ νὰ μετατραποῦν $13\,{}^1/_2$ χιλιόγραμμα εἰς ὀκάδας.

Πρόβλημα 5ον). Νὰ ἐκφρασθοῦν 832 τετρ. ἑκ. εἰς τετραγωνικὰ μέτρα καὶ 0,48 κυβ. μέτρα εἰς κυβικὰ ἑκατοστά.

Πρόβλημα 6ον). Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ταχύτης 10 ἑκ. ἀνὰ δευτερόλεπτον εἰς ταχύτητα χιλιομέτρων ἀνὰ ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τῆς ταχύτητος 72 χιλιομέτρων ἀνὰ ὥραν εἰς ἑκατοστόμετρα ἀνὰ δευτερόλεπτον καὶ εἰς μέτρα ἀνὰ δευτερόλεπτον.

Πρόβλημα 7ον). Ἐὰν τὸ σύμβολον **u** παριστᾷ τὴν παραγομένην ποσότητα ἑνὸς ἀγαθοῦ εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, καὶ τὸ σύμβολον q(u) παριστᾷ τὴν νομισματικὴν ἀξίαν εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, νὰ ὁρισθοῦν αἱ διαστάσεις τῶν Α, Β, Γ ὥστε ἡ ἰσότης $q(u) = Au^2 + Bu + \Gamma$ νὰ ἔχῃ οἰκονομικὴν ἔννοιαν. Ὑποτίθεται ὅτι οἱ λόγοι μεταβολῆς τοῦ **u** καὶ q(u) ὡς πρὸς τὸν χρόνον εἶναι ὁμαλοί.

Πρόβλημα 8ον). Ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ὅπως εἰς τὸ πρόβλημα (7) νὰ εὑρεθῇ τὸ [Δ] ἐὰν $q(u) = \Delta u^3 + Au^2 + Bu + \Gamma$

Πρόβλημα 9ον). Ἐὰν αἱ ἰσότητες τῶν προβλημάτων (7) καὶ (8) ἰσχύουν διὰ τὸ θεμελιῶδες σύστημα : μηνός, δραχμῆς, ὀκᾶς, νὰ εὑρεθοῦν αἱ νέαι τιμαὶ εἰς τὸ σύστημα : ἔτος, 1000 δραχμαί, τόννος.

Πρόβλημα 10ον). Τὰ ἐργατικὰ ἔξοδα διὰ τὴν κατασκευὴν 25 παλτῶν καθ' ἡμέραν ὑπὸ ἐργοστασίου τινὸς εἶναι 1000 δραχμαί. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ἐργατικὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὴν παραγωγὴν καὶ ὅτι παρίστανται διὰ τοῦ ὅρου **Bu** εἰς τὴν ἰσότητα τοῦ προβλήματος (7), νὰ ὑπολογισθῇ τὸ Β ὅταν λάβωμεν ὡς μονάδας, τὸ ἓν παλτό, τὴν δραχμήν, τὴν ἑβδομάδα. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ **u** ; Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ Β ὅταν ὡς μονάδα τοῦ χρόνου λάβωμεν τὴν ἡμέραν. Νὰ ἐλεγχθῇ τὸ ἀποτέλεσμα διὰ τῆς μεθόδου τῶν διαστάσεων.

Πρόβλημα 11ον). Ἐὰν εἶναι γνωστὴ ἡ ἔκτασις ἡ χρησιμοποιημένη διὰ τὴν παραγωγὴν σταφίδος εἰς στρέμματα, ἡ ποσότης τῆς παραγωγῆς σταφίδος εἰς λίβρας καὶ τὸ ὁλικὸν κόστος παραγωγῆς, διατυπώσατε τὴν ἔννοιαν τῆς «μέσης» παραγωγῆς κατὰ στρέμμα καὶ τοῦ «μέσου» κόστους κατὰ λίβραν.

Πρόβλημα 12ον). Δείξατε ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἁπλοῦ τόκου ἐκφράζεται μόνον εἰς μονάδας τοῦ χρόνου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔκφρασις τοῦ ἐπιτοκίου ὅταν ὡς χρονικὴ μονὰς λαμβάνεται ἡ ἑβδομὰς ἀντὶ τοῦ ἔτους. Εἰς ποῖον ποσὸν ἀνέρχονται 10 000 δραχμαὶ μὲ ἐπιτόκιον $\alpha\,^0/_0$ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν ;

Πρόβλημα 13ον). Ἐργοστάσιον χαρτοποιίας χρησιμοποιεῖ 45 ἐργάτας μὲ μέσον μισθὸν 135 δραχμὰς τὴν ἑβδομάδα. Τὰ ἑβδομαδιαῖα ἔξοδα τῆς ἑταιρείας διὰ ἀγορὰν ὑλικοῦ καὶ χρῆσιν μηχανῶν εἶναι 12 500 δραχ. ἡ δὲ ἐτησία παραγωγὴ εἶναι 102 τόννοι. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση παραγωγὴ εἰς ὀκάδας καὶ τὸ μέσον κόστος κατ' ὀκᾶν.

Πρόβλημα 14ον). Μεταπωλητὴς ἀγοράζει 150 ὀκάδας εἴδους τινὸς πρὸς δρχ. 20 τὴν ὀκᾶν. Ἐὰν προσθέσῃ εἰς τὴν τιμὴν αὐτὴν $20\,^0/_0$ δι' ἔξοδα καὶ κέρδη, εἰς ποίαν τιμὴν θὰ πωλήσῃ ;

Πρόβλημα 15ον). Ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος

Περιφέρεια	Γῆ εἰς στρέμματα	Παραγωγὴ εἰς τόννους	Κόστος παραγωγῆς
Ἠλείας	165 000	45 000	185 000
Αἰγιαλείας	140 000	38 000	162 500
Κορινθίας	152 000	37 000	175 000

Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση τιμὴ τῆς παραγωγῆς κατὰ στρέμμα καθὼς καὶ τὸ κόστος παραγωγῆς κατὰ λίτραν δι' ἑκάστην περιφέρειαν. Νὰ χρησιμοποιηθοῦν τὰ ἐξαγόμενα διὰ τὴν σύγκρισιν τῆς παραγωγῆς κατὰ περιφέρειαν.

Πρόβλημα 16ον). Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα (3,—1), ($3^1/_2$,—2), (4, 7, 1), (0, 6, 8), (—1, 8, 0) ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου δεδομένων ἀξόνων.

Πρόβλημα 17ον). Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Α (—3,4), Β (—$^1/_2$, 4) καὶ (1,4) κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Πρόβλημα 18ον). Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Α (1,2), Β (4,2), Γ (4,1), Δ (1,1) σχηματίζουν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Πρόβλημα 19ον). Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Α (4,3) Β (5,2) Γ (—2,—4) σχηματίζουν ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ποῖαι εἶναι αἱ ἴσαι πλευραί;

Πρόβλημα 20όν). Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα (—4.—5), (—8,3), (—6,—3), (2,—7), (—6,9) ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἐὰν τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ γνωστῆς γραμμῆς ὁρίσατε διὰ μετρήσεως τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς γραμμῆς ταύτης.

Πρόβλημα 21ον). Νὰ τοποθετηθοῦν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῶν x καὶ y ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου μὲ ὀρθογωνίους ἄξονας ἀφοῦ ἐκλεγοῦν κατάλληλοι κλίμακες.

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	720	360	240	180	144	120	;	90	80

Νὰ εὑρεθῇ ὁ νόμος μεταβολῆς τοῦ y ὡς πρὸς x καὶ νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ y κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ ὅταν x = 7.

Πρόβλημα 22ον). Δίδεται ὁ πίναξ τῶν τιμῶν καὶ

x	— 8	— 6	— 4	— 2	— 1	0	1	3	5	7	9
y	;	2.57	1.71	0.86	0,43	0	— 0.43	— 1,28	—2 14	2	— 3,86

Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ νὰ χαραχθῇ ἡ γραμμὴ ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὸ x καὶ y καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ y διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x = 7, x = — 8.

Κατὰ ποίαν προσέγγισιν ἔχουν εὑρεθῆ αἱ τιμαὶ τοῦ y εἰς τὸν πίνακα;

Πρόβλημα 23ον). Εἰς τὸν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων νὰ εὑρεθῇ: α) Ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα $x = 2$.
β) $y = x$, γ) $y = z$, δ) $x = z$.

Πρόβλημα 24ον). Ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα: (0, 2, 3), (2, 0, 3), (2, 3, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

1. Ἡ Ἔννοια τῆς Συναρτήσεως

Ἕκαστος ἐξ ἡμῶν εἶναι ἀρκετὰ ἐξοικειωμένος μὲ τὴν πρακτικὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως, ἀφοῦ τὴν χρησιμοποιεῖ εἰς τὴν καθ' ἡμέραν ζωήν του. Οὕτως, ὅταν πηγαίνωμεν εἰς τὴν ἀγοράν, τὸ ποσὸν τῶν εἰδῶν τὰ ὁποῖα θὰ προμηθευθῶμεν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰ χρήματα τὰ ὁποῖα διαθέτομεν καὶ ἀπὸ τὰς τιμὰς τῶν εἰδῶν τὰ ὁποῖα θὰ ἀγοράσωμεν. Ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος χρειάζεται διὰ νὰ διαβάσωμεν ἓν βιβλίον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν σελίδων καὶ τὴν ταχύτητα μὲ τὴν ὁποίαν διαβάζομεν.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐξαρτᾶται, ὡς εἶναι γνωστόν, ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα του καὶ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=\pi\rho^2$. Ἐπομένως, δι' ἑκάστην θετικὴν τιμὴν τοῦ ρ ἀντιστοιχεῖ ἓν ἐμβαδόν. Ἡ σχέσις $5x + 6y = 13$ εἶναι τοιαύτη ὥστε δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἔχομεν μίαν τιμὴν τοῦ y. Γενικώτερον, μία σχέσις μεταξὺ δύο μεταβλητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζει μίαν συνάρτησιν. Ἡ μεταβλητὴ ἥτις λαμβάνει αὐθαιρέτους τιμὰς λέγεται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***, ἡ δὲ ἄλλη λέγεται ***ἐξηρτημένη μεταβλητὴ ἢ συνάρτησις.***

Τὴν ἔκφρασιν «y εἶναι συνάρτησις τοῦ x» τὴν παριστῶμεν συμβολικῶς γράφοντες $y=f(x)$. Ἐπίσης χρησιμοποιοῦμεν τὰ σύμβολα $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Ἐὰν πρόκειται νὰ διερευνήσωμεν μίαν εἰδικὴν συνάρτησιν π. χ. x^2-5x+6 τότε γράφομεν $f(x)=x^2-5x+6$, ἡ δὲ διερεύνησις καθίσταται ἁπλουστέρα ἀπὸ λογικῆς πλευρᾶς καθὼς καὶ ἀπὸ μαθηματικῆς.

Ἐὰν $f(x)$ παριστᾷ κάποιαν συνάρτησιν, τότε παριστῶμεν μὲ $f(\alpha)$ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως διὰ $x=\alpha$. Οὕτως, ἐὰν $f(x)=x^2-4x+6$ εἶναι $f(2)=4-8+2=2$, $f(0)=0^2-4.\ 0+6=6$, $f(4)=16-16+6=6$.

Ἡ ἀνωτέρω δοθεῖσα ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀρκετὰ εὐρεῖα καὶ δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὰς συναρτήσεις αἵτινες ἔχουν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν προϋποθέτει ὅμως περιορισμοὺς ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή.

Οἱ περιορισμοὶ αὐτοὶ ἢ εἶναι ἐπακόλουθον τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, ἢ διατυπώνονται εἰς τὸν ἀναλυτικὸν ὁρισμὸν τῆς συναρτήσεως. Οὕτως, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς $E=\pi\rho^2$, τὸ ρ ὡς ἀκτὶς κύκλου λαμβάνει μόνον θετικὰς τιμάς. Ἡ ἰσότης $y=\sqrt{x-5}$ δίδει πραγματικὰς τιμὰς τοῦ y μόνον ὅταν $x \geqslant 5$. Ἐπομένως, ὁρίζει τὸ y ὡς συνάρτησιν τοῦ x (εἰς τὸ πεδίον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) μόνον διὰ τὰς τιμὰς τοῦ $x \geqslant 5$. Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸ x ὀνομάζεται ***διάστημα ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.***

2. Ἡ Ἀντίστροφος Συνάρτησις. Μονότιμοι καὶ Πλειονότιμοι Συναρτήσεις.

Ἡ σχέσις $5x + 6y = 13$, ἐὰν λυθῇ ὡς πρὸς y ὁρίζει τὴν συνάρτησιν

$y=\frac{13-5x}{6}$, ἥτις δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ x λαμβάνει μίαν, καὶ μόνον μίαν, τιμήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνάρτησις λέγεται ***μονότιμος***. Ἐὰν λύσωμεν τὴν σχέσιν αὐτὴν ὡς πρὸς **x** ἔχομεν $x=\frac{13-6y}{5}$ ἥτις, ἐὰν λάβωμεν τὸ y ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, ὁρίζει τὴν συνάρτησιν τοῦ x δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ y. Ἡ συνάρτησις αὐτὴ ὀνομάζεται ***ἀντίστροφος συνάρτησις*** τοῦ y. Γενικώτερον, ἐὰν $y=f(x)$, ἡ συνάρτησις $x=\varphi(y)$, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς λύσεως τῆς $y=f(x)$, ὡς πρὸς x λέγεται ***ἀντίστροφος συνάρτησις*** τῆς $y=f(x)$.

Θεωρήσωμεν τώρα τὴν ἐξίσωσιν $x^2+y^2=9$. Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὸ x, τὸ διάστημα ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀπὸ -3 ἕως $+3$ συμπεριλαμβανομένων ἀμφοτέρων τούτων.

Δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ διαστήματος αὐτοῦ ἔχομεν δύο τιμὰς τοῦ y καὶ x· ἡ συνάρτησις λέγεται ***δίτιμος***. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν συναρτήσεις μὲ περισσοτέρας τῶν δύο τιμῶν τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν ***πλειονοτίμους***. Μία πλειονότιμος συνάρτησις δύναται ἐνίοτε νὰ σχισθῇ (μερισθῇ) εἰς μονοτίμους συναρτήσεις διὰ καταλλήλου μεθόδου. Οὕτως, ἐὰν τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ παριστᾷ τὴν θετικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις σχίζεται εἰς τὰς $y=\sqrt{q-x^2}$ $y=-\sqrt{q-x^2}$. Αἱ μονότιμοι συναρτήσεις αἵτινες προκύπτουν ἀπὸ τὴν πλειονότιμον συνάρτησιν λέγονται καὶ ***κλάδοι τῆς συναρτήσεως***.

3. Συναρτησιακαὶ σχέσεις καὶ ἀναλυτικοὶ τύποι.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς συναρτήσεως δὲν προκύπτει ὅτι πᾶσα συνάρτησις ἔχει ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν ἢ ἐξίσωσιν, μολαταῦτα εἶναι ἀναγκαῖον νὰ καθορίζεται ἡ τιμὴ (ἢ αἱ τιμαὶ) τῆς συναρτήσεως διὰ μίαν δεκτὴν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Οὕτως ἡ σχέσις, $T(\nu)=$ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῶν μετοχῶν ἑταιρίας τινος π. χ. τῆς Πειραϊκῆς—Πατραϊκῆς κατὰ τὴν νυοστὴν ἡμέραν τοῦ ἔτους 1952 ἀποτελεῖ μίαν συνάρτησιν. Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως δὲν εὑρίσκεται ἁπλῶς ἐὰν τὸ ν εἶναι γνωστόν, ὡς συνήθως, διὰ ἀντικαταστάσεως, ἀλλὰ ἀπὸ τὰ λογιστικὰ βιβλία τῆς Ἑταιρείας. Τὸ διάστημα τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἶναι 1—365, συμπεριλαμβανομένων ἀμφοτέρων τῶν ἡμερομηνιῶν, ἡ δὲ συνάρτησις εἶναι ἀόριστος διὰ τὰς τιμὰς τὰς κειμένας ἐκτὸς τοῦ διαστήματος αὐτοῦ.

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ συνάρτησις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ἀναλυτικῶς εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ χρειάζωνται μία ἢ καὶ περισσότεραι σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη ὁρίζει τὴν συνάρτησιν δι' ἓν ὡρισμένον διάστημα τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ζητοῦμεν τὴν συνάρτησιν ἥτις ἐκφράζει ἀναλυτικῶς τὴν ἀξίαν εἰσιτηρίων σιδηροδρόμων ὑπὸ τοὺς ἀκολούθους ὅρους: Ἐὰν ἐπὶ διαδρομῆς ἑνὸς χιλιομέτρου ἢ ὀλιγωτέρου τὸ εἰσιτήριον τιμᾶται 50 δρ. καὶ ἐὰν ἐπὶ διαδρομῆς μεγαλυτέρας τοῦ ἑνὸς χιλιομέτρου ἡ τιμὴ τοῦ εἰσιτηρίου αὐξάνεται κατὰ 30 δραχμὰς δι' ἕκαστον ἐπὶ πλέον χιλιόμετρον, ἕπεται ὅτι ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν ἀπόστασιν α καὶ ὀνομάσωμεν T τὴν τιμὴν τῶν εἰσιτηρίων ἔχομεν δύο ἐξισώσεις διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως T.

$$T=50 \qquad 0<\alpha\leqslant 1$$
$$T=20+30\alpha \qquad \alpha>1$$

Εἶναι ἐνδεχόμενον ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῆς συναρτήσεως νὰ μὴ δίδεται λελυμένη· ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς $x^2 + y^2 = q$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ y ὀνομάζεται ***πεπλεγμένη συνάρτησις***. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν λάβωμεν τὸ y ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τότε τὸ **x** εἶναι μία πεπλεγμένη συνάρτησις τοῦ y. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις εἶναι δύσκολον νὰ λυθῇ ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἐπιτευχθῇ, ἡ λύσις δὲν διευκολύνει τὴν μελέτην τῆς συναρτήσεως ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς $x^3 + 5x^2 + x^2 y - 5y^2 = 0$.

Παραδείγματα συναρτήσεων :

Αον) Ἡ $y = x^2 - 6x - 3$ εἶναι δευτεροβάθμιος συνάρτησις τοῦ x τὴν ὁποίαν συνήθως καλοῦμεν ***τριώνυμον***. Ἡ συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἀλλὰ ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις ἥτις δίδεται ὑπὸ τῆς $x = 3 \pm \sqrt{12 + y}$ εἶναι ὡρισμένη μόνον ὅταν $y > -12$. Ἐπίσης, ἐνῷ ἡ συνάρτησις εἶναι μονότιμος, ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις εἶναι δίτιμος.

Βον) Διάστημα πρὸς διάστημα σταθεραὶ συναρτήσεις :

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ὁρίζεται ἀπὸ τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

x	$0 < x \leqslant 5$	$5 < x \leqslant 8$	$8 < x \leqslant 13$	$13 < x \leqslant 18$
y	3	5	9	12

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα (0,18). Μια πρακτικὴ συνάρτησις τῆς μορφῆς αὐτῆς εἶναι καὶ ἡ συνάρτησις τῶν ταχυδρομικῶν τελῶν, ὅταν λάβωμεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὸ βάρος τῶν ἐπιστολῶν.

Γον) Ἡ ἐξίσωσις $8y - x^2 = 0$ ὁρίζει μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν ἥτις ὑπὸ τὴν λελυμένην μορφήν της εἶναι $y = x^2/_8$. Ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις, δηλαδὴ ὅταν y εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή, εἶναι ἐπίσης πεπλεγμένη συνάρτησις. Μία ἐξίσωσις μὴ λελυμένη ὡς πρὸς y ἢ x ὁρίζει δύο πεπλεγμένας συναρτήσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἀντίστροφος συνάρτησις ἔναντι τῆς ἄλλης.

Δον) Ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις ἥτις ὁριζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x^2 + y^2 = q$ δύναται νὰ σχισθῇ, ὡς εἴδομεν καὶ προηγουμένως εἰς δύο κλάδους, $y = \sqrt{q - x^2}$ $y = -\sqrt{q - x^2}$. Οὕτως, ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ διακρίνωμεν δύο γραφικὰς παραστάσεις ἀντιστοιχούσας εἰς τοὺς δύο κλάδους, ὁπότε τὸ πρόβλημα τῆς παραγώγου, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, καθίσταται δυσκολώτερον λόγῳ τῶν ριζικῶν τῶν περιεχομένων εἰς τοὺς κλάδους. Ὥστε εἶναι προτιμώτερον νὰ διερευνήσωμεν τὴν πεπλεγμένην συνάρτησιν ὡς τοιαύτην ἀποφεύγοντες τὴν λύσιν.

Εον) Ἡ ἐξίσωσις $xy = 4$ δίδει δύο λελυμένας συναρτήσεις $y = 4/x$, $x = y/_4$ ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη εἶναι ἀντίστροφος τῆς ἄλλης. Αἱ συναρτήσεις αὐταὶ εἶναι ὡρισμέναι δι' ὅλας τὰς τιμὰς ἐκτὸς τοῦ 0.

4. Μονοτόνως αὔξουσαι καὶ φθίνουσαι συναρτήσεις :

Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα (α, β) τοῦ ἄξονος τῶν x. Ἐὰν διὰ δύο οἱασδήποτε τιμὰς x_1, x_2 τοῦ διαστήματος (α, β) $f(x_1) < f(x_2)$, ὅταν $x_1 < x_2$, τότε ἡ συνάρτησις λέγεται ***μονοτόνως αὔξουσα***. Ἐὰν $f(x_1) > f(x_2)$

ὅταν ἡ $x_1 < x_2$, τότε ἡ συνάρτησις λέγεται ***μονοτόνως φθίνουσα***. Ἐὰν μία συνάρτησις εἶναι πάντοτε μονότιμος, ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις δύναται νὰ μὴ εἶναι μονότιμος (παράδειγμα Αον). Ἐὰν ὅμως ἡ συνάρτησις εἶναι μονότιμος καὶ μονοτόνως αὔξουσα ἢ μονοτόνως φθίνουσα, τότε καὶ ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις εἶναι μονότιμος καὶ μονοτόνως αὔξουσα ἢ μονοτόνως φθίνουσα, ὡς καὶ ἡ δοθεῖσα. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι χαρακτηριστικὴ τῶν μονοτόνως αὐξουσῶν ἢ φθινουσῶν συναρτήσεων. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι πέραν τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος, ἀλλὰ εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ γίνῃ μία γραφικὴ ἀπόδειξις ἥτις ἐπαφίεται εἰς τὸν ἀναγνώστην.

5. Αἱ βασικαὶ οἰκονομικαὶ συναρτήσεις

Ἡ Συνάρτησις τοῦ Κόστους

Τὸ κόστος τῆς παραγωγῆς ἑνὸς ἀγαθοῦ, ἔστω Χ, ἐξαρτᾶται ἀπό:

1) Τὸ σύνολον τῶν ἐξόδων διὰ τὰς παραγωγικὰς ὑπηρεσίας τὰς χρησιμοποιουμένας διὰ τὴν κατασκευὴν (παραγωγὴν) τοῦ ἀγαθοῦ.

2) Τὰ πάγια ἔξοδα τῆς ἐπιχειρήσεως.

3) Τὸ τεχνικὸν ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς.

4) Τὴν ἀποδοτικότητα μὲ τὴν ὁποίαν χρησιμοποιοῦνται οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς.

Διὰ νὰ καταστήσωμεν τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τοῦ κόστους ἁπλουστέραν κάμνομεν τὰς ἀκολούθους ὑποθέσεις:

α) Ὅτι μία ἐπιχείρησις, χρησιμοποιοῦσα ὡρισμένον τι σύνολον παραγωγικῶν ὑπηρεσιῶν, παράγει τὸ ἀγαθὸν Χ.

β) Ὡρισμένοι ἀπὸ τοὺς συντελεστὰς παραγωγῆς, λ.χ. ἡ γῆ ἢ τὸ κτίριον ἑνὸς ἐργοστασίου, διατηροῦν τὴν ἀρχικήν των τιμήν, ἀνεξαρτήτως τοῦ συνόλου τῆς παραγωγῆς, (π. χ. ἐνοίκιον ἐργοστασίου). Τοὺς ὑπολοίπους συντελεστὰς παραγωγῆς λ.χ. τὴν ἐργατικὴν δύναμιν, τὰς μηχανάς, κτλ. λαμβάνομεν ὡς μεταβλητούς, μὲ γνωστὴν νομισματικὴν ἀξίαν.

γ) Τὸ τεχνικὸν ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς λαμβάνεται ὡς ἀμετάβλητον.

δ) Ἡ ἀποδοτικότης τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς θεωρεῖται καὶ αὐτὴ ἀμετάβλητος.

ε) Ἐπειδὴ ἑκάστη ἐπιχείρησις προσπαθεῖ νὰ παράγῃ τὰ ἀγαθά της εἰς τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἐπιχείρησις παράγει τὴν ποσότητα x ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Χ ἥτις ἔχει τὸ ἐλάχιστον συνολικὸν κόστος παραγωγῆς.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων, τὸ συνολικὸν κόστος παραγωγῆς, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π, ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς ποσότητος x καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις μιᾶς μόνον μεταβλητῆς, $\Pi = F(x)$.

Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐφθάσαμεν εἰς τὴν συνάρτησιν αὐτὴν κατόπιν περιορισμῶν ἐπὶ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς· ἡ μεταβολὴ ἑνὸς ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς, λ.χ. τοῦ τεχνικοῦ ἐπιπέδου, συνεπάγεται τὴν ἀλλαγὴν τῆς συναρτήσεως τοῦ συνολικοῦ κόστους διὰ τὴν ἐπιχείρησιν. Ἐπίσης ἡ συνάρτησις εἶναι «**στατική**» ὡς πρὸς τὸν χρόνον, δηλαδὴ διὰ μίαν χρονικὴν περίοδον ἡ συνάρτησις τοῦ συνολικοῦ κόστους εἶναι ἀναλλοίωτος ὡς πρὸς τὸν χρόνον. (Βλ. Κεφ, 1. § 3).

Αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις Π καθὼς καὶ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x πρέπει νὰ εἶναι θετικαὶ καὶ ὡς ἐκ τούτου εἰς σύστημα ἀξόνων καταλλήλων διὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς Π περιοριζόμεθα μόνον εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον.

Ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους διὰ μίαν ἐπιχείρησιν εἶναι ἀποτέλεσμα στατιστικῶν μελετῶν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τρόπου λειτουργίας τῆς ἐπιχειρήσεως. Ὡς ἐκ τούτου, ἡ συνάρτησις, εἰς τὴν πρᾶξιν, πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαί της εἰς ἕνα διάστημα τοῦ x, δηλαδὴ τῶν μονάδων παραγωγῆς. νὰ εἶναι αἱ μᾶλλον προσεγγίζουσαι πρὸς τὴν πραγματικότητα.

Αἱ περισσότερον εὔχρηστοι συναρτήσεις διὰ τὴν προσέγγισιν αὐτὴν εἶναι τῆς μορφῆς :

1) $\Pi = \alpha x + \beta$ 4) $\Pi = \sqrt{\alpha x + \beta + \gamma}$

2) $\Pi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 5) $\Pi = \alpha e^x$

3) $\Pi = \alpha x^3 - \beta x^2 + \gamma x + \delta$ 6) $\Pi = \alpha x \dfrac{x + \beta}{x + \gamma} + \delta$

ὅπου α, β, γ, καὶ δ εἶναι παράμετροι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

6. Ἡ Συνάρτησις τῆς Ζητήσεως

Ἡ ζήτησις ἀγαθοῦ τινος ἐνδεικνύεται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν διαφόρων ποσοτήτων τοῦ ἀγαθοῦ αἵτινες θὰ ἀγορασθοῦν εἰς διαφόρους τιμάς, ἀναλόγως τῆς προσφορᾶς τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τὴν ἀγοράν. Ἡ ζήτησις ἑνὸς ἀγαθοῦ εἰς τὴν ἀγορὰν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοὺς κάτωθι παράγοντας :

1) Τὸν ἀριθμὸν τῶν καταναλωτῶν.
2) Τὸ εἰσόδημα τὸ ὁποῖον διαθέτει ἕκαστος ἐξ αὐτῶν.
3) Τὰς ἰδιαιτέρας προτιμήσεις ἑκάστου καταναλωτοῦ.
4) Τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων ἀγαθῶν τὰ ὁποῖα προσφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν ἀγοράν.
5) Τὴν τιμὴν τοῦ ἀγαθοῦ.

Ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ πρῶτοι τέσσαρες παράγοντες εἶναι σταθεροὶ καὶ ἀριθμητικῶς γνωστοὶ καὶ ὅτι ἡ ποσότης x τοῦ ἀγαθοῦ ἥτις θὰ πωληθῇ εἰς τὴν ἀγορὰν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν τιμὴν ρ τοῦ ἀγαθοῦ. Τότε ἡ ζήτησις εἶναι ἡ συνάρτησις μόνον τοῦ ρ καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν : $x = \varphi(\rho)$.

Ἡ συνάρτησις x ἔχει τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα ὅτι εἶναι μονοτόνως φθίνουσα καὶ μονότιμος εἰς τὸ διάστημα τῶν δεκτῶν τιμῶν τοῦ ρ.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι συμπέρασμα τῆς λογικῆς μεταβολῆς μιᾶς ἀγορᾶς λειτουργούσης ὑπὸ ὁμαλὰς συνθήκας, ἥτις συνεπάγεται τὴν μείωσιν τῆς ζητήσεως ὅταν ἡ ἀξία τοῦ ἀγαθοῦ αὐξάνει. Ἐκ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς συνάγεται ὅτι ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις $p = \psi(x)$ εἶναι μονοτόνως φθίνουσα καὶ μονότιμος (βλ.ΙΙ § 4).

Πολλάκις, ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις εἶναι περισσότερον χρήσιμος ἀπὸ τὴν συνάρτησιν τῆς ζητήσεως, εἰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς. Ἡ χρῆσις τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ πρὸς λύσιν προβλήματος. Μία οἱαδήποτε μονοτόνως φθίνουσα συνάρτησις θεωρητικῶς δύναται νὰ ληφθῇ ὡς συνάρτησις ζητήσεως.

Εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς ἐπιχειρήσεως, ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως λαμβάνει συγκεκριμένην μορφὴν καὶ εἶναι τοιαύτη, ὥστε αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ αὐτῆς νὰ εἶναι αἱ μᾶλλον προσεγγίζουσαι πρὸς τὴν πραγματικότητα. Αἱ κάτωθι συναρτήσεις ἀποτελοῦν τὰς μᾶλλον εὐχρήστους διὰ τὴν ζήτησιν :

1) $x = \frac{\alpha - p}{\beta}$ 4) $x = \alpha e^{-\beta p}$

2) $x = \frac{\alpha}{p + \gamma} - \beta$ 5) $x = \frac{\alpha - \sqrt{p}}{\beta}$

3) $x = \sqrt{\frac{\alpha - p}{\beta}}$ 6) $x = \beta p^{-\alpha} + \gamma$

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ p πρέπει νὰ εἶναι θετικαί. Αἱ παράμετροι α,β,γ, εἶναι σταθεροὶ καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

7. Ἡ Συνάρτησις τῆς Προσφορᾶς

Ἡ τιμὴ ἑνὸς ἀγαθοῦ τείνει πάντοτε πρὸς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο ὅπου ἡ προσφερομένη ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ ὑπὸ τῶν πωλητῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ζητουμένην ποσότητα πρὸς ἀγορὰν ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν. Ἡ τιμὴ ἑνὸς ἀγαθοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) ὅταν ἡ ζητουμένη ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν ποσότης εἶναι μεγαλυτέρα (ἢ μικροτέρα) ἐκείνης ἥτις προσφέρεται ὑπὸ τῶν πωλητῶν. Αὐτὴ εἶναι ἡ λογικὴ ἔκφρασις τοῦ νόμου τῆς ζητήσεως καὶ προσφορᾶς. Ἡ προσφορὰ εἶναι αἱ διάφοροι ποσότητες ἀγαθοῦ τινος αἱ ὁποῖαι πωλοῦνται εἰς τὴν ἀγορὰν εἰς διαφόρους τιμὰς ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι εἷς μόνον πωλητὴς δὲν ἔχει τὴν δύναμιν νὰ αὐξήσῃ τὴν τιμήν.

Ἡ ἀνωτέρω σύντομος ἀνάλυσις τοῦ νόμου τῆς ζητήσεως καὶ προσφορᾶς ἰσχύει μόνον ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ ζήτησις καὶ ἡ προσφορὰ εἶναι συνδεδεμέναι μεταξύ των καὶ τὰ προβλήματα τῆς προσφορᾶς εἶναι παρόμοια πρὸς τὰ τῆς ζητήσεως. Οὕτως, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μία ἀγορὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄτομα τὰ ὁποῖα φέρουν εἰς αὐτὴν σταθεράν τινα προμήθειαν ἀγαθῶν (ὄσπρια, ἔπιπλα, ἐργατικὴν δύναμιν, συνάλλαγμα κ.λ.), διὰ νὰ τὰ ἀνταλλάξουν μεταξύ των. Ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου (ἢ καθαροῦ) ἀνταγωνισμοῦ καὶ μὲ τὰς τιμὰς τῶν ἀγαθῶν αὐτῶν γνωστάς, ἕκαστον ἄτομον καθορίζει ἐὰν πρέπει νὰ αὐξήσῃ ἢ νὰ ἐλαττώσῃ τὴν προμήθειάν του ἀπὸ τὰ διάφορα ἀγαθά. Ἐὰν τὸ ἄτομον Α προβλέπει ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγαθοῦ Χ θὰ ὑψωθῇ εἶναι πιθανὸν νὰ θελήσῃ νὰ αὐξήσῃ τὴν προμήθειάν του ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Χ. Ἐὰν ὅμως τὸ ἄτομον Α ἀποφασίσῃ νὰ ἐλαττώσῃ τὴν προμήθειάν του ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Χ τότε αὐτομάτως καθίσταται πωλητὴς τοῦ ἀγαθοῦ Χ καὶ ἑπομένως ἀποτελεῖ μέρος τῆς προσφορᾶς. Τοιουτοτρόπως, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν ὑπολοίπων ἀγαθῶν παραμένουν σταθεραὶ καὶ γνωσταὶ ἐπί τινα χρονικὴν περίοδον, ἡ ὁλικὴ ζήτησις καὶ προσφορὰ τοῦ ἀγαθοῦ Χ κατὰ τὴν χρονικὴν αὐτὴν περίοδον ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ x. Ὡς ἐκ τρύτου, ἡ προσφορὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀρνητικὴ ζήτησις, καὶ αἱ συναρτήσεις διὰ τὴν προσφορὰν εἶναι ἀκριβῶς ὅμοιαι πρὸς τὰς συναρτήσεις τῆς ζητήσεως, δηλαδὴ μονότιμοι καὶ μονότονοι. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ζήτησις αὐξάνει ἡ δὲ προσφορὰ ἐλαττοῦται ὅταν ἡ τιμὴ ἐλαττοῦται.

8. Ἡ Συνάρτησις τῆς Προσόδου.

Ὁ ὅρος **ἐπιχείρησις** σημαίνει οἰκονομικὴν μονάδα, ἥτις προσφέρει ἀγαθὰ ἢ ὑπηρεσίας εἰς τὴν ἀγορὰν καὶ ἔχει ὡς σκοπὸν τὸ κέρδος. Οὕτω, μία ἑταιρεία ὑφασμάτων, ὁ ἰατρός, ὁ ἐκδοτικὸς οἶκος, ὁ ἔμπορος, ἀποτελοῦν ἐπιχειρήσεις.

Ἡ πρόσοδος μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἶναι τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων τὸ ὁποῖον λαμβάνει διὰ τὴν πώλησιν τῶν ἀγαθῶν ἢ τῶν ὑπηρεσιῶν της εἰς μίαν ὡρισμένην τιμήν. Ἐὰν ἡ ζήτησις τοῦ ἀγαθοῦ X εἰς τὴν τιμὴν p εἶναι x τότε ἡ πρόσοδος ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν τιμὴν γ εἶναι $R = xp$. Ἡ συνάρτησις R δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ x ἢ p δύναται νὰ γραφῇ $R = p\varphi(\gamma) = x\psi(x)$.

Ἡ μᾶλλον εὔχρηστος μορφὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἡ δευτέρα, διότι περιέχει τὴν ζήτησιν καὶ τὸ κόστος παραγωγῆς. Ἡ πρώτη δίδει τὴν πρόσοδον ὡς συνάρτησιν τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ.

Τὴν συνάρτησιν $R = x\psi(x)$ ὀνομάζομεν ***συνάρτησιν τῆς ὁλικῆς προσόδου*** ὡς πρὸς τὴν δεδομένην συνάρτησιν τῆς ζητήσεως. Ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως καθὼς καὶ τῆς προσόδου προϋποθέτουν ἐλεύθερον ἀνταγωνισμὸν μεταξὺ τῶν καταναλωτῶν.

9. Ἡ Συνδετικὴ Συνάρτησις τῆς Παραγωγῆς

Εἰς τὰς προηγουμένας συναρτήσεις ὑπεθέσαμεν ὅτι ἡ ἐπιχείρησις παράγει μόνον ἓν ἀγαθόν. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ ἰδία ἐπιχείρησις παράγει δύο ἀγαθά, τὸ ἀγαθὸν X καὶ τὸ ἀγαθὸν Ψ. Ἐπίσης ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐπιχείρησις ἔχει τὸν ἴδιον τεχνικὸν ἐξοπλισμὸν καὶ ὅτι χρησιμοποιεῖ τὸ αὐτὸ σύνολον συντελεστῶν παραγωγῆς. Π.χ. ἡ ἐπιχείρησις Παπαστράτου δύναται νὰ παράγῃ μόνον σιγαρέττα NoI ἢ σιγαρέττα No 1 καὶ No 4, ἀπασχολοῦσα τὸ αὐτὸ σύνολον συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ τὸν ἴδιον τεχνικὸν ἐξοπλισμόν. Ἑπομένως, διὰ μίαν χρονικὴν περίοδον κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς παραμένουν σταθεροί, ἐξετάζομεν τὰς δυνατὰς ποσότητας τὰς ὁποίας μία ἐπιχείρησις δύναται νὰ παράγῃ ἐξ ἑκάστου τῶν ἀγαθῶν X καὶ Ψ καὶ τὴν ἀναλυτικὴν σχέσιν ἥτις συνδέει τὰς ποσότητας αὐτὰς μεταξύ των.

Ἐὰν ἡ ἐπιχείρησις παράγει τὴν ποσότητα x ἀπὸ τὸ ἀγαθὸν X χρησιμοποιοῦσα μέρος τῶν παραγωγικῶν δυνατοτήτων της, αἱ ὑπόλοιποι δυνατότητες διατίθενται διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς ποσότητος y ἐκ τῶν ἀγαθοῦ Ψ. Ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ παραγωγὴ τῆς ποσότητος y δὲν ἐμποδίζει τὴν παραγωγὴν τῆς ποσότητος x τοῦ ἀγαθοῦ X, τότε ἡ μεταβλητὴ εἶναι μία συνάρτησις τοῦ x. Δεδομένου ὅτι αἱ παραγωγικαὶ δυνατότητες μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἶναι πάντοτε περιωρισμέναι, μία αὔξησις τῆς παραγωγῆς τοῦ ἀγαθοῦ X συνεπάγεται ἐλάττωσιν τῆς παραγωγῆς τοῦ Ψ καὶ μία ἐλάττωσις τῆς παραγωγῆς τοῦ X συνεπάγεται αὔξησιν τῆς παραγωγῆς τοῦ Ψ. Ἑπομένως, ἡ συνάρτησις y εἶναι μονότιμος καὶ μονοτόνως φθίνουσα ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x. Διὰ τοῦ ἰδίου συλλογισμοῦ, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ x ὡς συνάρτησιν τοῦ y, ἡ συνάρτησις x εἶναι μονότιμος καὶ μονοτόνως φθίνουσα συνάρτησις τοῦ y. Ἑκάστη τῶν συναρτήσεων εἶναι ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ἄλλης, ἡ δὲ ἀναλυτικὴ αὐτῶν σύνδεσις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς παραγωγικὰς ἱκανότητας τῆς ἐπιχειρήσεως.

Διὰ τὴν ὡρισμένην ἐπιχείρησιν τῆς ὁποίας αἱ παραγωγικαὶ δυνατότητες εἶναι γνωσταὶ καὶ ἡ ὁποία παράγει τὰ ἀγαθὰ X καὶ Ψ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν συμβολικῶς ὡς συνάρτησιν τῆς συνδετικῆς παραγωγῆς : $F(x, y) = 0$ ὅπου x καὶ y, παριστοῦν τὰς ποσότητας παραγωγῆς ἐκ τῶν ἀγαθῶν X καὶ Ψ. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν $F(x, y) = 0$ ὡς πρὸς x ἢ y π. χ. $x = f(y)$, $y = g(x)$ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ δύο αὐταὶ συναρτήσεις, συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἀνάλυσιν, εἶναι μονότιμοι καὶ μονοτόνως φθίνουσαι καὶ ἑκάστη ἀντίστροφος τῆς ἄλλης. Ἐὰν ἡ συνδετικὴ συνάρτησις τῆς παραγωγῆς εἶναι γνωστὴ διὰ μίαν ἐπιχείρησιν, τότε γεννᾶται τὸ ἐρώτημα ποῖος συνδυασμὸς παραγωγῆς ἐκ τῶν ἀγαθῶν X καὶ Ψ δίδει τὸ μεγαλύτερον κέρδος εἰς τὴν ἐπιχείρησιν κατὰ τὴν χρονικὴν περίοδον καθ' ἣν ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἰσχύει; Τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ θὰ δώσωμεν παρακατιόντες, διὰ τῆς θεωρίας τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου.

10. Γενικὴ Παρατήρησις

Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις διὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν βασικῶν οἰκονομικῶν συναρτήσεων ἰσχύει μόνον ὑπὸ «ὁμαλὰς συνθήκας». Διὰ τοῦ ὅρου ὁμαλαὶ συνθῆκαι ἐννοοῦμεν τὸ λογικῶς ἀναμενόμενον νὰ συμβῇ ἐάν τις τῶν παραγόντων τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν μεταβάλλεται. Π.χ. Ἐθεωρήσαμεν ὡς γεγονὸς τὸ ὅτι ἡ ὕψωσις τῆς τιμῆς ἀγαθοῦ τινος συνεπάγεται τὴν ἐλάττωσιν τῆς ζητήσεως, τοῦθ' ὅπερ εἶναι λογικῶς ἀναμενόμενον, ὄχι ὅμως πάντοτε ἀληθές. Λ.χ. διὰ τὰ εἴδη πολυτελείας ὡς οἱ ἀδάμαντες, ὅπου οἱ καταναλωταὶ ἀνήκουν εἰς κοινωνικὴν τάξιν ἥτις ἔχει τὸ μεγαλύτερον εἰσόδημα, ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ μὴ ἐπηρεάσῃ τὴν ζήτησιν καὶ εἶναι περισσότερον ἐνδεχόμενον νὰ τὴν αὐξήσῃ. Τὰς περιπτώσεις αὐτὰς θὰ τὰς θεωρήσωμεν ἐξαιρέσεις καὶ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν θὰ πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν συνάρτησιν ἰδιαιτέρως, διότι εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ μὴ εἶναι μονότιμος καὶ μονοτόνως φθίνουσα.

11. Κατάταξις συναρτήσεων :

Α) ***Πολυώνυμα.***

Πολυώνυμον λέγεται ἡ συνάρτησις τῆς μορφῆς :

$$y = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + , \ldots + \alpha_n$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ **n** εἶναι θετικὸς ἀκέραιος. Ὁ ἀριθμὸς n λέγεται ***βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου.***

Β) ***Ρηταὶ συναρτήσεις :***

Ἡ συνάρτησις λέγεται ***ρητὴ*** ὅταν εἶναι πηλίκον δύο πολυωνύμων π.χ. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

ὅπου $P(x)$ καὶ $Q(x)$ δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα.

Γ) ***Ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις :***

Συνάρτησις y τοῦ x λέγεται ***ἀλγεβρικὴ*** ἐὰν εἶναι ρίζα μιᾶς μὴ ἀναγομένης ἐξισώσεως nστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς y μὲ συντελεστὰς ρητὰς συναρτήσεις τοῦ x π. χ.

$$y^n + R_1 y^{n-1} + \ldots + R_n = 0$$

Δ) ***Ὑπερβατικαὶ συναρτήσεις :***

Αἱ συναρτήσεις αἵτινες δὲν εἶναι οὔτε ρηταὶ οὔτε ἀλγεβρικαὶ λέγονται ***ὑπερβατικαί.***

Αἱ συναρτήσεις 1, 2, 3 τοῦ Κεφ. II § 4 εἶναι πολυώνυμα. Ἡ 4 εἶναι ἀλγεβρική, ἡ 5 ὑπερβατικὴ καὶ ἡ 6 ρητή. Αἱ συναρτήσεις τὰς ὁποίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς θὰ εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον πολυώνυμα καὶ ρηταί. Ὅταν πρόκειται νὰ χρησιμοποιηθῇ μία ἀλγεβρικὴ ἢ ὑπερβατικὴ συνάρτησις θὰ γίνεται ἰδιατέρα μνεία.

12. Προβλήματα καὶ ἀσκήσεις

Πρόβλημα 1ον). Ἐὰν ν εἶναι ἀκέραιος θετικὸς μεγαλύτερος τοῦ 1, ὁρίζομεν τὴν σχέσιν, f (ν) = ὁ μεγαλύτερος πρῶτος παράγων τοῦ ν. Νὰ δειχθῇ α) ὅτι ἡ f (ν) εἶναι συνάρτησις. β) Ἐὰν δύναται ἡ συνάρτησις νὰ ἐκφρασθῇ ἀναλυτικῶς. γ) Διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ν = 2 ἕως ν = 12 νὰ εὑρεθοῦν ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως, νὰ χρησιμοποιηθῇ γραμμικὸς χάρτης διὰ τὴν τοποθέτησιν τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν καὶ νὰ ἑνωθοῦν τὰ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα διὰ μιᾶς συνεχοῦς γραμμῆς.

Πρόβλημα 2ον). Ἐὰν ν εἶναι θετικὸς ἀκέραιος, ὁρίζομεν τὴν ἰσότητα: φ (ν) = ὁ ἀριθμὸς τῶν θετικῶν ἀκεραίων μὴ μεγαλυτέρων τοῦ ν καὶ πρώτων πρὸς τὸν ν. Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ αὐταὶ ἐρωτήσεις ὡς εἰς τὸ πρόβλημα 1ον. Εἰς τὴν ἐρώτησιν (γ) νὰ ληφθῇ ν = 1 ἕως ν = 15.

Πρόβλημα 3ον). Ἔστω f (x) ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος μὴ ὑπερβαίνων τὸν x δι᾽ οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ x. Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ αὐταὶ ἐρωτήσεις ὡς καὶ προηγουμένως διὰ τὴν f (x). Εἰς τὴν ἐρώτησιν (γ) νὰ ληφθῇ x=0 ἕως x=6.

Πρόβλημα 4ον). Ἑταιρεία αὐτοκινήτων ρυθμίζει τὴν τιμὴν τῶν εἰσιτηρίων πρὸς 36 δραχμὰς κατὰ μίλιον δι᾽ ἀποστάσεις ὑπερβαινούσας τὸ μίλλιον, προστιθεμένην εἰς τὴν ἐλαχίστην τιμὴν (πάγιον) 45 δραχμῶν δι᾽ ἀποστάσεις μικροτέρας τοῦ μιλλίου. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ τιμὴ τοῦ εἰσιτηρίου ὡς συνάρτησις τῆς ἀποστάσεως καὶ νὰ σχεδιασθῇ ἡ συνάρτησις.

Πρόβλημα 5ον). Ἡ εἴσοδος εἰς τι θέατρον ρυθμίζεται ὡς ἑξῆς: Οἱ ἡλικίας 13 ἐτῶν καὶ ἄνω πληρώνουν 60 λεπτά. Τὰ παιδιὰ ἡλικίας 1—12 ἐτῶν, περιλαμβανομένων ἀμφοτέρων, πληρώνουν 20 λεπτά. Τὰ παιδιὰ ἡλικίας μικροτέρας τοῦ ἑνὸς ἔτους ἔχουν ἐλευθέραν εἴσοδον. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ τιμὴ εἰσόδου ὡς συνάρτησις τῆς ἡλικίας καὶ νὰ σχεδιασθῇ ἡ συνάρτησις.

Πρόβλημα 6ον). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς ἔναντι ἑκάστης τούτων σημειουμένας τιμάς.

1)	$x^2 - 3x + 3$	διὰ	$x = 0, 1, 2, 3$
2)	$x^{-2} + 3x^{-1} + 3$	»	$x = 1, 1/2, 1/3$
3)	$\dfrac{16}{x^2 + 4}$	»	$x = 2, 4$
4)	$\sqrt{2x} + x$	»	$x = 2, 8$
5)	$\dfrac{x}{x^2 + 1}$	»	$x = -2\,1/2, -3\,1/3$
6)	$x^3 - 3x^2 + 1/x$	»	$x = -1, 0, 5$
7)	$x^3 + x^2/3 - x/2 + 1/4$	»	$x = 0$
8)	$\dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 + x + 1}$	»	$x = 0, 1, 2$

ΠΡΟ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΙΝ*

ΥΠΟ ΤΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΣΙΔΕΡΗ
Διευθυντοῦ Βιομηχανίας εἰς τὸ Υ. Β.

Ἡ Βιοτεχνικὴ κατάστασις τῆς Ἑλλάδος πρὸ τῆς ἀπελευθερώσεως τοῦ 1821 καὶ ἡ ἐξέλιξίς της καὶ εἰς βιομηχανίαν μετ' αὐτὴν μέχρι σήμερον

Ἑκατὸν τριάκοντα τέσσαρα χρόνια ἔχουν κυλίσει μὲ τὸ ταχὺ πέρασμά τους ἀπὸ τὴν ἱστορικὴν ἐκείνην ἡμέραν ποὺ τὸ σάλπισμα τῆς ἐθνεγερσίας ἀντήχησεν σὲ στεριὲς καὶ θάλασσες τῆς Ἑλληνικῆς Πατρίδος. Τὸ γένος τῶν Ἑλλήνων ὑπερήφανον διὰ τὴν ἱστορίαν του καὶ τὸν πολιτισμόν του πανηγυρίζει ἀκόμη μίαν φορὰν τὴν ἱστορικὴν ἐπέτειον τῶν ἐλευθεριῶν του.

Ὁ λαμπρὸς ἑορτασμὸς τῆς Ἐθνικῆς μας Ἐπετείου δὲν ἀποτελεῖ μόνον χρέος ὅλων τῶν Ἑλλήνων πρὸς τὴν ἡρωϊκὴν γενεὰν τοῦ ἱεροῦ ἀγῶνος τοῦ 1821—1828 ἀλλὰ καὶ παρέχει διὰ τῆς ἀναπολήσεως τῶν σκληρῶν ἀγώνων καὶ θυσιῶν τῆς μεγάλης καὶ ἱστορικῆς ἐκείνης γενεᾶς σπουδαιοτάτην ἀφορμὴν πρὸς ἠθικήν, πνευματικὴν καὶ ἰδεολογικὴν τόνωσιν τοῦ Ἔθνους.

Κατὰ τὴν κρίσιμον μάλιστα αὐτὴν ὥραν τῆς ἀδυσωπήτου πάλης ποὺ διεξάγεται μεταξὺ τῶν σκοτεινῶν δυνάμεων τοῦ τυφλοῦ ὑλισμοῦ ἀφ' ἑνὸς καὶ τῶν πολυτιμοτέρων ἀνθρωπίνων ἰδανικῶν: τῆς ἀνθρωπίνης ἀξιοπρεπείας καὶ τῆς ἀνθρωπίνης ἐλευθερίας ἀφ' ἑτέρου, ὄχι μόνον ἡ ἀναπόλησις τῶν ἀγώνων καὶ θυσιῶν τοῦ Ἔθνους εἶναι ἐπιβεβλημένη πρὸς φρονηματισμὸν ἀλλὰ καὶ ἡ ἀνασκόπησις τῆς ὅλης δραστηριότητος ποὺ ἀνέπτυξε τοῦτο, ὡς ἐν συνεχείᾳ θὰ εἴπωμεν, κατὰ τὴν μακραίωνα δουλείαν ἐνδείκνυται πρὸς παραδειγματισμὸν διὰ τὴν ἠθικὴν καὶ ὑλικὴν ἀνασυγκρότησιν ἡμῶν.

Ἀναπολοῦμεν λοιπὸν κατὰ τὴν ἐπίσημον αὐτὴν ὥραν τὰς ἡμέρας κατὰ τὰς ὁποίας ἔπιπτον ἡ μία μετὰ τὴν ἄλλην αἱ ἑλληνικαὶ πόλεις τῆς Μικρᾶς Ἀσίας, τῆς Θράκης καὶ τῆς Μακεδονίας.

Μᾶς ἐνθυμίζει ἡ 25η Μαρτίου τὴν ἀποφράδα ἐκείνην Τρίτην, τὴν ἀλησμό-

* Τὸ ἄρθρον ἐδόθη ὑπὸ τύπον ὁμιλίας εἰς τὴν Ἀνωτέραν Σχολὴν Βιομηχανικῶν Σπουδῶν, κατὰ τὴν ἑορτὴν τῆς 25ης Μαρτίου 1955.

Πρόβλημα 7ον). Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συναρτήσεις συνολικοῦ κόστους ;

1) $x - 1/2$ 2) $x^2 + 3x + 3$ 3) $\sqrt{x+2} + 3$

4) $x^3 + 3x^2 + 2$ 5) $\dfrac{5}{x+5}$ 6) $5 + 4x - x^3$

Πρόβλημα 8ον). Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς $y = \dfrac{\alpha x + 6}{\gamma x + \delta}$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτὴ εἶναι μονότιμος.

Πρόβλημα 9ον). Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς $y = x + \dfrac{1}{x}$ δὲν εἶναι μονότιμος.

(Συνεχίζεται)