Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ κ. κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

2. (Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

Πρόβλημα 10ον). Αἱ πλευραὶ κυτίου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι x, $(x+1)$, $(x+2)$ ἑκατοστ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ὡς συνάρτησις τοῦ x καὶ νὰ ὁρισθῇ τί εἴδους συνάρτησις εἶναι;

Πρόβλημα 11ον). Ἐὰν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα αἱ πλευραὶ εἶναι, x, $(x+\alpha)$, $(x+\beta)$ ἑκατοστ. νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ εἶδος τῆς συναρτήσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν παραμέτρων α, β.

Πρόβλημα 12ον). Νὰ δειχθῇ ὅτι δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ α, $f(-\alpha)=+f(\alpha)$ διὰ τὴν συνάρτησιν $f(x)=x^4-3x^2+1$. Δείξατε ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἀληθεύει δι' ὅλα τὰ πολυώνυμα ἅτινα περιέχουν μόνον δυνάμεις ἀρτίας τάξεως τοῦ x. Ἐπὶ πλέον νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ τὸ πολυώνυμον $f(x)=3x-5x^3+4x^5$, $f(-\alpha)=-f(\alpha)$ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ α. Ποῖα πολυώνυμα ἔχουν τὴν τελευταίαν ἰδιότητα;

Πρόβλημα 13ον) Δεδομένου ὅτι ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων $x^3+1=0$.

$$x^3-4x^2+6x-4=0\,,\quad x^3+4x^2+4x+3=0$$

ἔχει μίαν ἀκεραίαν ρίζαν, νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι ρίζαι.

Πρόβλημα 14ον). Δι' ἑκάστην τῶν συναρτήσεων:

$$f(x)=x^3,\qquad f(x)=\frac{1}{x}\qquad f(x)=1-x,\qquad f(x)=\frac{x-1}{3x-1}$$

νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς $f(\alpha+\varepsilon)$ καὶ κατόπιν τὸ πηλῖκον, $\dfrac{f(\alpha+\varepsilon)-f(\alpha)}{\varepsilon}$.

Πρόβλημα 15ον). Ἐπιχείρησίς τις παράγει δύο προϊόντα, τὸ Χ καὶ τὸ Ψ. Αἱ παραγόμεναι ποσότητες x καὶ y ἐκ τῶν Χ καὶ Ψ εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου t. Ἐὰν

$$1)\qquad x=\frac{3t}{1+t^3}\,,\qquad y=\frac{3t^2}{1+t^3}$$

$$2)\qquad x=6t+t^2\,,\qquad y=2t+3\,.$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι συνδετικαὶ συναρτήσεις τῆς παραγωγῆς τῆς ἐπιχειρήσεως.

Πρόβλημα 16ον) Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τῆς παραμέτρου α ἡ συνάρτησις $y=x^2+3x+\alpha$ εἶναι συνάρτησις ζητήσεως.

βασμὸ πρὸς τὴ μηχανή, μαθαίνοντάς το νὰ τὴν κατασκευάζει, νὰ τὴν ἐπισκευάζει, νὰ τὴν συντηρεῖ, πρὶν καὶ μετὰ τὴ χρησιμοποίησή της. Ἀκόμη, μιὰ ἱστορικὴ συνείδηση τῆς προοδευτικῆς ἐφεύρεσης τῶν διατάξεων ποὺ χρησιμοποιήθηκαν σὲ μιὰ μηχανὴ μπορεῖ νὰ δώσει ἕνα ζωηρὸ συναίσθημα τῆς ἀνθρώπινης παρουσίας ποὺ ἀντιπροσωπεύει ἡ δομὴ μιᾶς μηχανῆς. Χωρὶς ἀμφιβολία, δὲν πρέπει νὰ πέσουμε σὲ εἰδωλολατρεία τῆς μηχανῆς. Ἀλλά, ἀνάμεσα στὴν εἰδωλολατρεία καὶ στὴν περιφρόνηση, ὑπάρχει ἡ ὑγιὴς γνώση, θεμελιωμένη πάνω σὲ μιὰ προσεχτικὴ ἐπικοινωνία ...

Πρόβλημα 17ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνδετικὴ συνάρτησις μιᾶς ἐπιχειρήσεως ἥτις παράγει τὰ προϊόντα X καὶ Ψ, ἐκ τοῦ κάτωθι πίνακος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν ποσοτήτων x καὶ y.

x	3	6	7	10	12
y	9	18	21	30	36

Πρόβλημα 18ον) Ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς ἑνὸς εἴδους καπνοῦ εἶναι p δραχ. Ἡ ζήτησις εἰς τὴν ἀγορὰν καθ' ἑβδομάδα εἶναι x εἰς χιλιάδας ὀκάδων. Ἐὰν

p	18	21	25	28	30	32	35	37
x	96,5	81,8	76,6	66,7	62,4	54,6	47,0	39,5

νὰ δειχθῇ γραφικῶς ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως δίδεται κατὰ προσέγγισιν ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $x = 150 - 3p$ Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη δυνατὴ πρόσοδος καὶ διὰ ποίαν τιμὴν ἡ ζήτησις τείνει νὰ γίνῃ μηδέν ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1. Στοιχειώδης ἔννοια τοῦ ὁρίου

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, 4, 5, ...

Ἡ ἀκολουθία αὐτὴ ἔχει τὰς κάτωθι δύο ἰδιότητας :

α) Οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀκολουθίας δύνανται νὰ γραφοῦν κατὰ τὴν ὡς ἀνωτέρω αὔξουσαν τάξιν χωρὶς τέλος καί,

β) Δοθέντος ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μεγάλου, πάντοτε ὑπάρχει ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας ὅστις εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ καὶ ἑπομένως ἄπειροι ἀριθμοὶ τῆς ἀκολουθίας μεγαλύτεροι τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν φθίνουσαν ἀκολουθίαν :

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -4, \quad -5, \ldots .$$

μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς βλέπομεν ὅτι αὕτη τείνει πρὸς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον. Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν :

$$1 + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{2}{3}, \quad 1 + \frac{3}{4}, \quad 1 + \frac{4}{5}, \ldots .$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς βαίνουν συνεχῶς αὐξανόμενοι, ἀλλὰ δὲν δύνανται νὰ ὑπερβοῦν οἱονδήποτε δοθέντα ἀριθμὸν π.χ. τὸν 4. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ὁποῖον τείνει ἡ ἀτελεύτητος αὐτὴ ἀκολουθία εἶναι μικρότερος τοῦ 4. Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι, ἐὰν δοθῇ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ 2 πάντοτε ὑπάρχει ὅρος τῆς ἀκολουθίας ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀλλὰ μικρότερος τοῦ 2.

Ἑπομένως, οἱ ἀριθμοὶ τῆς ἀκολουθίας πλησιάζουν ὅσον θέλομεν τὸν ἀριθμὸν 2 ἀλλὰ ποτὲ δὲν τὸν φθάνουν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ***ἡ ἀκολουθία τείνει*** πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2.

Γενικώτερον, ἂς θεωρήσωμεν τὴν μεσαβλητὴν x, ἥτις λαμβάνει διαδοχικῶς τὰς τιμὰς μιᾶς ἀκολουθίας. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ μεταβλητὴ x τείνει πρὸς ἕνα σταθερὸν ἀριθμὸν α, ἐὰν δοθέντος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ ὁσῳδήποτε μικροῦ, ἡ ἀριθμητικὴ διαφορὰ $x - \alpha$ ἢ $[x - \alpha]$ δύναται νὰ γίνῃ καὶ παραμείνῃ μικροτέρα τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, ὅταν τὸ X λαμβάνει συνεχῶς τὰς τιμὰς τῆς ἀκολουθίας. Συμβολικῶς γράφομεν ὁρ $x = \alpha$ ἢ $x \to \alpha$ δηλαδὴ τὸ x τείνει «πρὸς τὸ α».

Ἐὰν τὸ α εἶναι ο τότε $x \to \alpha$ ἢ ὁρ. $x = 0$ καὶ τὸ x ὀνομάζεται ἀπειροστόν. Ἐὰν ὁρ. $x = \alpha$ τότε ὁρ. $(x - \alpha) = 0$ καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ μιᾶς μεταβλητῆς καὶ τοῦ ὁρίου της εἶναι ἓν ἀπειροστόν.

Αἱ κάτωθι προτάσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀρκετὰ ἁπλῆ, ἰσχύουν διὰ τὰ ἀπειροστά.

α) Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ν ἀπειροστῶν εἶναι ἓν ἀπειροστὸν ὅταν ν εἶναι δοθεὶς σταθερὸς ἀριθμός.

β) Τὸ γινόμενον ἑνὸς σταθεροῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἓν ἀπειροστὸν εἶναι ἀπειροστόν.

γ) Τὸ γινόμενον ν ἀπειροστῶν εἶναι ἓν ἀπειροστὸν ὅταν ν εἶναι δοθεὶς σταθερὸς ἀριθμός.

δ) Ἐὰν $\alpha \neq 0$ καὶ ὁρ. $x = \alpha$ τότε τὸ πηλίκον ἑνὸς ἀπειροστοῦ διὰ x εἶναι ἐπίσης ἀπειροστόν.

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως τίθεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω μία συνάρτησις $f(x)$, τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Ἐὰν $x \to \alpha$ τότε ἐξετάζομεν ἐὰν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς β πρὸς τὸν ὁποῖον τείνει ἡ συνάρτησις $f(x)$. Ἐὰν ὑπάρχῃ ὁ ἀριθμὸς β τότε γράφομεν

$$\underset{x \to \alpha}{\text{ὁρ}}\, f(x) = \beta$$

δηλαδή, τὸ ὅριον τῆς συναρτήσεως εἶναι β ὅταν τὸ x τείνει πρὸς τὸ α. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως τὰ κάτωθι θεωρήματα ἔχουν ἐξαιρετικὴν σπουδαιότητα.

Ἐὰν y, φ, ω εἶναι συναρτήσεις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ

τότε $\underset{x \to \alpha}{\text{ὁρ}}\, y = A$, $\underset{x \to \alpha}{\text{ὁρ}}\, \varphi = B$, $\underset{x \to \alpha}{\text{ὁρ}}\, \omega = \Gamma$

1) $$\underset{x \to \alpha}{\text{ὁρ}}\, (y + \varphi - \omega) = A + B - \Gamma$$

2) $$\underset{x \to \alpha}{\text{ὁρ}}\, (y \varphi \omega) = AB\Gamma$$

3) $$\underset{x \to \alpha}{\text{ὁρ}}\, \frac{y}{\varphi} = \frac{A}{B} \qquad \text{ἐὰν } B \neq 0$$

δηλαδή, τὸ ὅριον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος, τοῦ γινομένου, καὶ τοῦ πηλίκου, ἰσοῦται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα, τὸ γινόμενον, καὶ τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ὁ παρονομαστὴς εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ον). Νὰ δειχθῇ ὅτι :
$$\underset{x\to 2}{\text{ὁρ}}\,(x^2+3x)=10$$

Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι ἄθροισμα τῶν x^2 καὶ $3x$.

$$\underset{x\to 2}{\text{ὁρ}}\,x^2=4 \quad \text{ἐπειδὴ} \quad x\,.\,x=x^2 \qquad (2)$$

$$\underset{x\to 2}{\text{ὁρ}}\,3x=3\,\text{ὁρ}\,x=6 \qquad (2)$$

ἑπομένως
$$\underset{x\to 2}{\text{ὁρ}}\,(x^2+3)=4+6=10 \qquad (1)$$

Παράδειγμα 2ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι
$$\underset{x\to 1}{\text{ὁρ}}\,\frac{x^2-4}{x^2+3}=-\frac{3}{4}$$

Τὸ ὅριον τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι
$$\underset{x\to 1}{\text{ὁρ}}\,(x^2-4)=-3$$

καὶ τὸ ὅριον τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι
$$\underset{x\to 1}{\text{ὁρ}}\,(x^2+3)=4$$

ἑπομένως
$$\underset{x\to 1}{\text{ὁρ}}\,\frac{x^2-4}{x^2+3}=-\frac{3}{4} \qquad (3)$$

2. Συνεχεῖς Συναρτήσεις

Ὁ κατωτέρω ὁρισμὸς καθὼς καὶ ἡ ἀνάλυσις τῆς ἐννοίας τῆς συνεχείας μιᾶς συναρτήσεως ἀφορᾷ μόνον μονοτίμους συναρτήσεις. Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι πλειονότιμος τότε σχίζεται εἰς κλάδους μονοτίμων συναρτήσεων (Κεφ. II § 1) καὶ δι' ἕνα ἕκαστον κλάδον ἡ ἀνάλυσις αὐτὴ ἰσχύει.

Ἐὰν ἀναλύσωμεν τὴν ἰσότητα :
$$\underset{x\to \alpha}{\text{ὁρ}}\,f(x)=\beta$$

σύμφωνα πρὸς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς τῶν ὁρίων θὰ πρέπει δι' οἱονδήποτε ἐκλεγέντα ἀριθμὸν ε, ὁσονδήποτε μικρόν, νὰ δύναται νὰ εὑρεθῇ εἷς ἄλλος θετικὸς ἀριθμὸς δ, τοιοῦτος ὥστε
$$[\,f(x)-\beta\,]<\varepsilon$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἥτις ἀληθεύει τὴν ἀνισότητα $o<[\,\alpha-x\,]<\delta$.

Ἐὰν ἡ ὁριακὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως β ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $f(\alpha)$ τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως ἕπεται ὁ ὁρισμὸς τῆς συνεχείας μιᾶς συναρτήσεως :

Ἐὰν ὑπάρχει ἀριθμός τις Α τοιοῦτος ὥστε
$$[\,f(x)-A\,]<\varepsilon \quad \text{ὅταν} \quad [\,x-\alpha\,]<\delta$$

τότε ὁ ἀριθμὸς Α ὀνομάζεται ὅριον τῆς $f(x)$ ὅταν $x\to\alpha$ καὶ ἐὰν ἐπὶ πλέον $f(\alpha)=A$ ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=\alpha$.

Ἐὰν ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δὲν ἀληθεύῃ, τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι **ἀσυνεχής**. Ὁ ἀριθμὸς δ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ε καὶ ἡ τιμή του εὑρίσκεται ἐνίοτε εὐκόλως. Θὰ λέγωμεν ὅτι μία συνάρτησις $f(x)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα $(\alpha,\ \beta)$ ἐὰν εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα αὐτό.

Οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ ἰσχύουν διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη. Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις εἶναι ἀόριστος ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ συνάρτησις νὰ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν· π.χ. ἔστω ἡ συνάρτησις :

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Ἡ συνάρτησις εἶναι ἀόριστος διὰ $x = 3$· ἀλλὰ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x,

$$f(x) = x + 3 \quad \text{καὶ} \quad \underset{x\to 3}{\text{ὅρ}}\, f(x) = 6$$

Ἐπομένως διὰ νὰ καταστήσωμεν τὴν συνάρτησιν συνεχῆ διὰ $x = 3$ ὁρίζομεν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $f(3) = 6$.

Ἡ συνάρτησις δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x εἶναι συνεχὴς διότι ἡ ὁριακή της τιμὴ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀριθμητικήν, π.χ. διὰ $x = 1$.

$$\underset{x\to 1}{\text{ὅρ}}\, \frac{x^2 - 9}{x + 3} = 4 \quad \text{καὶ} \quad f(1) = 4$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὴν συνάρτησιν συνεχῆ εἰς τὸ σημεῖον ἀσυνεχείας της. Ἀλλ' ὑπάρχουν καὶ συναρτήσεις τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἀσυνεχείας δὲν δύνανται νὰ ἀπομονωθοῦν (βλ. προβλήματα 14, 15).

Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως τείνει νὰ ὑπερβῇ οἱονδήποτε ἀριθμόν, ὁσονδήποτε μεγάλον ὅταν $x \to \alpha$, τότε λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον καὶ γράφομεν $\underset{x\to \alpha}{\text{ὅρ}}\, f(x) = \infty$. Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ ἀπολύτως αὔξουσαι τότε $\underset{x\to \alpha}{\text{ὅρ}}\, f = -\infty$. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου τῆς συναρτήσεως ὅταν $x \to \alpha$ μᾶς δίδει τὴν «εἰκόνα τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως» ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς προσεγγιζούσας τὸ α. Μὲ περισσότερον μαθηματικὴν γλῶσσαν, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς εἰς τὸ γραμμικὸν διάστημα $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, ὅπου ε εἶναι ἀριθμὸς ἀρκετὰ μικρός, τὸ διάστημα αὐτὸ ὀνομάζεται ***γραμμικὴ περιοχὴ*** ἢ ἁπλῶς ***περιοχὴ*** τοῦ σημείου x. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x αὐξάνεται συνεχῶς τότε δύο τινὰ εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ συμβοῦν : α) Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως νὰ πλησιάζῃ συνεχῶς ἕνα πεπερατωμένον ἀριθμὸν β, ὁπότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις ἔχει τὴν ὁριακὴν τιμὴν τὸν β ὅταν τὸ x τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον καὶ γράφομεν $\underset{x\to \infty}{\text{ὅρ}}\, f(x) = \beta$, ἢ β) αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως νὰ αὐξάνωνται συνεχῶς καθὼς αὐξάνει τὸ x· τότε λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον καὶ γράφομεν

$$\underset{x\to \infty}{\text{ὅρ}}\, f(x) = \infty$$

Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ αὔξουσαι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τότε ἡ συνάρτησις τείνει πρὸς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον καὶ γράφομεν $\underset{x\to \infty}{\text{ὅρ}}\, f(x) = -\infty$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως ὅταν τὸ x τείνει πρὸς $-\infty$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ον). Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\underset{x\to\infty}{\text{όρ}} \dfrac{2x^3-4x^2+5}{5x-x^2-6x^3}$

Διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν διὰ τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ x εἰς τὸ κλάσμα. Τότε

$$\underset{x\to\infty}{\text{όρ}} \frac{2x^3-4x^2+5}{5x-x^2-6x^3} = \underset{x\to\infty}{\text{όρ}} \frac{2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x}-6}$$

Ἐπειδὴ ἕκαστος ὅρος τοῦ ἀριθμητοῦ ἢ τοῦ παρονομαστοῦ ὅστις περιέχει τὸ x τείνει τὸ μηδέν.

Παράδειγμα 2ον). $\underset{x\to\infty}{\text{όρ}} (x^4-1)=\infty$ ἐπειδὴ διὰ $x\to\infty$ ἡ συνάρτησις δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν, ὁσφδήποτε μεγάλον.

Παράδειγμα 3ον). Νὰ δειχθῇ ὅτι $\underset{x\to\infty}{\text{όρ}}\, 3^{1/x}$ καὶ $\underset{x\to-\infty}{\text{όρ}}\, 3^{1/x}=1$

Ἐπειδὴ ὁ ἐκθέτης καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἡ δύναμις τείνει πρὸς τὴν μονάδα.

Παράδειγμα 4ον). Ὁμοίως, νὰ δειχθῇ ὅτι : $\underset{x\to\infty}{\text{όρ}} (x^3-4x-2)=\infty$ καὶ $\underset{x\to-\infty}{\text{όρ}} (x^3-4x-2)=-\infty$

Παράδειγμα 5ον). Νὰ δειχθῇ ὅτι : $\underset{x\to\infty}{\text{όρ}} (2-1/x)=2$ καὶ $\underset{x\to-\infty}{\text{όρ}} (2-1/x)=2$

3. Ἐκθετικαὶ συναρτήσεις

Ἔστω α δοθείς τις πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ν ἀλγεβρικὸς ἀκέραιος ἢ μηδέν. Τότε ὡς γνωστόν, τὸ σύμβολον α^{ν}, παριστᾷ τὴν νυοστὴν δύναμιν τοῦ α, ἡ ὁποία ἐπίσης εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μ εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀκέραιος, παριστῶμεν τὴν θετικὴν μυοστὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ α μὲ τὸ σύμβολον $\alpha^{1/\mu}$. Τὸ σύμβολον αὐτὸ παριστᾷ πραγματικὸν ἀριθμὸν δι' ὅλας τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τοῦ μ ὅταν $\alpha > 0$. Εἰς ἣν περίπτωσιν $\alpha < 0$, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ συμβόλου εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς μόνον ὅταν μ εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀκέραιος περιττός.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $\alpha > 0$· τότε τὸ σύμβολον $\alpha^{\nu/\mu}$ θὰ παριστᾷ τὴν νυοστὴν δύναμιν τῆς μυοστῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ α.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ἡ συνάρτησις α^{x} ὁρίζεται, ἄνευ συγχύσεως τῶν ἀριθμητικῶν της τιμῶν, δι' ὅλας τὰς ρητὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x.

Διὰ νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ πεδίον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, περιλαμβανομένων τῶν ἀσυμμέτρων, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις ἔχει μίαν ὡρισμένην τιμήν, ὅταν τὸ x εἶναι ἀσύμμετρος, χωρὶς νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν· π.χ. $2^{\sqrt{2}}$ ἔχει μίαν ὡρισμένην τιμὴν μεταξὺ $2^{1.41}$ καὶ $2^{1.42}$. Ἡ οὕτως ὁρισθεῖσα συνάρτησις ὀνομάζεται ***ἐκθετική***· Ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις εἶναι συνεχής, μονότιμος καὶ μονοτόνως αὔξουσα ἐὰν $\alpha > 1$, μονοτόνως φθίνουσα ἐὰν $\alpha < 1$ καὶ εἶναι σταθερὰ ἐὰν $\alpha = 1$.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀντίστροφον συνάρτησιν, ἂς θεωρήσωμεν τήν ἰσότητα $\alpha^{y} = x$ δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς y εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς τὴν ὁποίαν ὑψούμενος ὁ α δίδει τὸν x. Ὥστε, ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις εἶναι λογαριθμικὴ συνάρτησις μὲ βάσιν τὸν α καὶ γράφεται συμβολικῶς : $y = \lambda o\gamma_{\alpha} x$

Ἡ λογαριθμὴ συνάρτησις, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὁρίζεται μόνον διὰ τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x εἰς τὸ πεδίον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἔχει ἀκριβῶς τὰς αὐτὰς ἰδιότητας ὡς καὶ ἡ ἐκθετική. Ἡ ἀπόδειξις τῆς ὑπάρξεως καὶ εὑρέσεως τοῦ ὁρίου, $\underset{x \to 0}{\acute{o}\rho}\,(1 + x)^{1/x}$ ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τοῦ παρόντος. Διὰ τοῦ κατωτέρω πίνακος δεικνύεται ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ὁρίου τείνει πρὸς τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν 2,718... τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος e. Ὁ ἀριθμὸς e ἔχει τήν αὐτὴν σπουδαιότητα μὲ τὸν ἀριθμὸν π εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ τὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν.

Πίναξ I

x	4	3	2	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$(1+x)^{1/x}$	1.4953	1.5872	1.7320	2.0000	2.2500	2.5937	2.7048	2.7169
x					−0,5	−0,1	−0,01	−0,001
$(1+1/x)^{1/x}$					4.0000	2.8680	2.7320	2.7195

Ἐὰν $x \to \infty$ τότε τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως εἶναι 1· καὶ ἐὰν $x \to -1$ ἐκ μεγαλυτέρων τιμῶν τότε τὸ ὅριον τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἂς λάβωμεν τώρα τὴν ἐκθετικὴν συνάρτησιν :

$$y = e^{x} \qquad (e=2{,}718..)$$

ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις $x = \lambda o\gamma_{e} y$ εἶναι ἡ συνάρτησις τῶν φυσικῶν λογαρίθμων. Αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων ὡς πρὸς οἱανδήποτε βάσιν εἶναι αἱ κάτωθι :

$$\lambda o\gamma_{\alpha}(AB) = \lambda o\gamma_{\alpha} A + \lambda o\gamma_{\alpha} B$$

$$\lambda o\gamma_{\alpha}\left(\frac{A}{B}\right) = \lambda o\gamma_{\alpha} A - \lambda o\gamma_{\alpha} B$$

$$\lambda o\gamma_{\alpha}(A)^{\nu} = \nu\, \lambda o\gamma_{\alpha} A$$

$$\alpha^{\lambda o\gamma_{\alpha} A} = A$$

Ὁ γενικὸς τύπος μετατροπῆς λογαρίθμων μιᾶς βάσεως β εἰς λογαρίθμους μὲ βάσιν α εἶναι :

$$\lambda o\gamma_{\alpha} A = \lambda o\gamma_{\beta} A\; \lambda o\gamma_{\alpha} \beta$$

Οἱ πλέον εὔχρηστοι λογάριθμοι εἰς τὰς ἐφαρμογὰς εἶναι οἱ φυσικοὶ ἢ Νεπέριοι καὶ οἱ δεκαδικοὶ ἢ κοινοί. Τὸν φυσικὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ x θὰ παριστῶμεν μὲ λγ x τὸν δεκαδικὸν μὲ λογ x. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω γενικοῦ τύπου λαμβάνομεν τὸν τύπον μετατροπῆς τῶν φυσικῶν λογαρίθμων εἰς κοινούς:

$$\lambda o\gamma\, A = \lambda o\gamma\, A\ \lambda o\gamma\, e$$

Δηλαδή, ὁ δεκαδικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος εὑρίσκεται ὅταν πολλαπλασιασθῇ ὁ φυσικὸς ἐπὶ λογ e. Ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma\, e = 0{,}4343 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{1}{\lambda o\gamma\, e} = 2{,}303$$

καὶ ἑπομένως:
$$\lambda o\gamma\, A = 2{,}303\ \lambda o\gamma\, A$$

Αἱ ἐκθετικαὶ καὶ λογαριθμικαὶ συναρτήσεις εἶναι αἱ μόναι ὑπερβατικαὶ συναρτήσεις τὰς ὁποίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τὸ παρὸν βιβλίον.

4) Γραφικαὶ παραστάσεις συναρτήσεων

Ἔστω y = f(x) μία μονότιμος συνάρτησις τοῦ x. Δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τοῦ x ἔχομεν μίαν τιμὴν τοῦ y. Ἐὰν λάβωμεν ἓν σύστημα ἀξόνων Oxy καὶ θεωρήσωμεν ὅλα τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν (x, y) ὡς σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων (x, y) εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως. Διὰ τὴν χάραξιν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου εὑρίσκομεν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα σημεῖα καὶ ἑνώνομεν αὐτὰ διὰ συνεχοῦς γραμμῆς. Συνήθως χρησιμοποιοῦμεν ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x καθὼς ἐπίσης καὶ κλασματικάς, σχηματίζοντες ἕνα πίνακα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ y. Ὁ στοιχειώδης αὐτὸς τρόπος τῆς εὑρέσεως τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως ὁδηγεῖ ἐνίοτε εἰς σφάλματα ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ x δὲν εἶναι ἀρκεταὶ καὶ καταλλήλως ἐκλελεγμέναι. Ὡς ἐκ τούτου ἐφιστᾶται ἡ προσοχὴ τῶν ἀναγνωστῶν εἰς τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου αὐτῆς ἕως ὅτου ἀναπτύξωμεν ἀκριβεστέραν μέθοδον εἰς τὸ Κεφάλ. V.

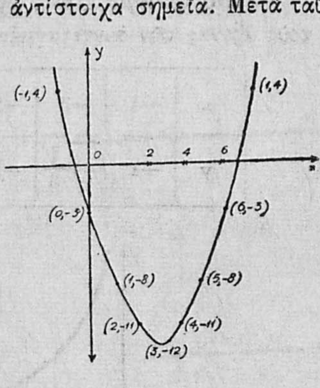
Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις εἶναι πλειονότιμος, τότε χαράσσομεν ἕκαστον κλάδον χωριστά, χρησιμοποιοῦντες τοὺς ἰδίους ἄξονας. Ἐὰν ἡ γραφικὴ παράστασις μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἀκριβής, τότε δυνάμεθα διὰ μετρήσεως νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τὸ σχετικὸν μέγιστον καὶ τὸ σχετικὸν ἐλάχιστον εἰς ἓν διάστημα, καθὼς ἐπίσης ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα εἰς ἓν διάστημα. Εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα περιλαμβάνονται καμπύλαι ἢ κλάδοι καμπυλῶν γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας, δηλαδὴ εὐθεῖαι, κύκλοι, ἐλλείψεις, παραβολαί, τὰς ὁποίας ὁ ἀναγνώστης δύναται, ἂν γνωρίζῃ τὰς μεθόδους τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας νὰ χρησιμοποιῇ ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν πινάκων.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

Παράδειγμα 1ον). Νὰ εὑρεθῇ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $y = x^2 - 6x - 3$. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

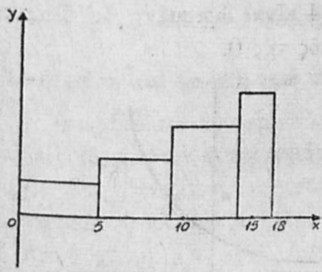
x	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4	−3	−8	−11	−12	−11	−8	−3	4

Κατόπιν ὁρίζομεν τοὺς ἄξονας καὶ τοποθετοῦμεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα. Μετὰ ταῦτα, σύρομεν μίαν ὁμαλὴν γραμμήν, διερχομένην διὰ τῶν σημείων. Ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως βλέπομεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς καὶ $\underset{\Delta x \to 0}{\text{ὅρ}}\ f(\alpha + \Delta x) - f(\alpha) = 0$.



Σχ. 3

Παράδειγμα 2ον). Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τοῦ πίνακος εἰς τὸ παράδ. 2ον τῆς § 2, 3 δίδεται ὑπὸ τοῦ παρακπλεύρως σχήματος 4 : Ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως συνάγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι συνεχὴς καὶ ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα, ἅτινα δὲν συνιστοῦν μίαν συνεχῆ ὁμαλὴν γραμμήν. Αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως διὰ τὰ σημεῖα 5 ,10, 15, 18, δὲν καθορίζονται.



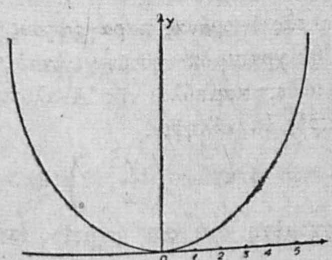
Σχ. 4

Παράδειγμα 3ον). $8y = x^2$. Ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ μίαν παραβολὴν μὲ ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν y. Ἡ χάραξίς της δύναται νὰ γίνῃ εἴτε ἐπὶ τῇ βάσει πίνακος εἴτε ἐπὶ τῇ βάσει τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας.

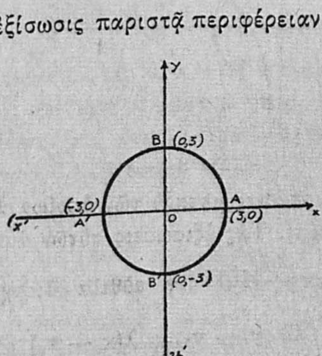
x	0	1	2	3	4	5
y	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{8}$	2	$3\frac{1}{8}$

Ἡ συνάρτησις εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ ἑπομένως ἔχει τὰς αὐτὰς τιμὰς διὰ δύο ἀντιθέτους τιμὰς τοῦ x.

Παράδειγμα 4ον). $x^2 + y^2 = 9$. Ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ περιφέρειαν κύκλου



Σχ. 5

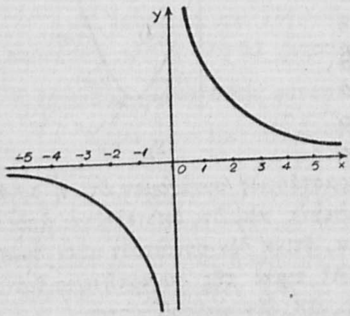


Σχ. 6

μὲ ἀκτῖνα καὶ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων· εἶναι δὲ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας.

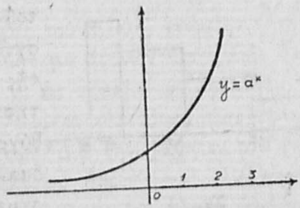
Παράδειγμα 5ον). xy = 4. Ἡ ἐξίσωσις παριστᾷ ἰσοσκελῆ ὑπερβολὴν μὲ τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων ἀσυμπτώτους.

x	—4	—3	—2	—1	1	2	3	4	5	6
y	—1	$-1\frac{1}{3}$	—2	—4	4	2	$1\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$



Σχ. 7

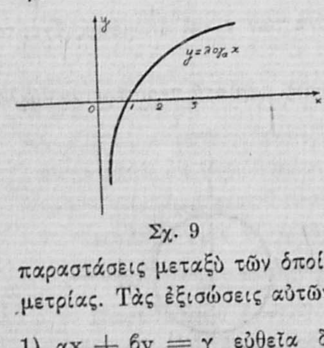
Ἡ συνάρτησις $y = \frac{4}{x}$ ἥτις ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως xy=4 εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἐκτὸς τῆς 0.



Σχ. 8

Παράδειγμα 6ον). $y = \alpha^x$. Ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις $y = \alpha^x$ $(\alpha > 1)$, εἶναι μία συνεχὴς καὶ αὔξουσα συνάρτησις καὶ ἡ γενική της γραφικὴ παράστασις δίδεται ὑπὸ τοῦ σχήματος 8.

Παράδειγμα 7ον). Ἡ λογαριθμικὴ συνάρτησις $y = \lambda o\gamma_\alpha x$ $(\alpha > 1)$. Ἡ λογαριθμικὴ συνάρτησις $y = \lambda o\gamma_\alpha x$ ὡρίσθη ὡς ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ἐκθετικῆς $\alpha^y = x$ διὰ θετικὰς τιμὰς τοῦ x. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γραφικήν της παράστασιν ἀρκεῖ προφανῶς νὰ ἐναλλάξωμεν τοὺς ἄξονας εἰς τὸ σχῆμα τῆς ἐκθετικῆς. Ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς μονότιμος καὶ πάντοτε αὔξουσα. Τὰ δύο αὐτὰ παραδείγματα ἀποτελοῦν μίαν μερικὴν γραφικὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως 2 - 4.



Σχ. 9

Εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους καὶ προβλήματα θὰ χρησιμοποιηθοῦν γενικαὶ γραφικαὶ παραστάσεις μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ στοιχειώδεις καμπύλαι τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Τὰς ἐξισώσεις αὐτῶν ἀναφέρομεν πρὸς ἐπανάληψιν.

1) $\alpha x + \beta y = \gamma$ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῶν σημείων $\left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$ καὶ $\left(0, \frac{\gamma}{\beta}\right)$

2) $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ σημείου (x_0, y_0) μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως λ.

3) $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$. Περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ σημεῖον (α, β) καὶ ἀκτῖνα ρ.

4) $y^2 = 2px$. Παραβολὴ μὲ κορυφὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

5) $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ σημεῖον : $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ καὶ ἀκτῖνα $\rho = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{4} - \Gamma}$

6) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ὑπερβολή.

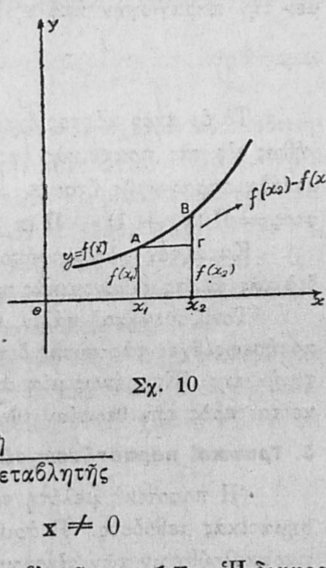
7) $xy = \alpha^2$ Ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας.

8) $x^2 - y^2 = \alpha^2$ Ἰσοσκελὴς ὑπερβολὴ μὲ ἀσυμπτώτους τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ἀξόνων.

9) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ Ἔλλειψις μὲ ἄξονας $(2\alpha, 2\beta)$.

5 — Ὁλική, μέση καὶ ὁριακὴ τιμὴ συναρτήσεως

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως $y = f(x)$ εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον. Δηλαδὴ ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ εἶναι μηδέν, ἀκεραία ἢ κλασματικὴ καὶ γενικώτερον θετικὴ πραγματική. Τὸ αὐτὸ ὑποθέτομεν καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν.



Σχ. 10

Ἔστω x μία τυχοῦσα τιμὴ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ἡ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ τῆς συναρτήσεως f(x) εἶναι ἡ ὁλικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως, δηλαδὴ ἡ ὁλικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι αὐτὴ αὕτη ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως. Ἡ μέση τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁλικῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ὥστε
$$\text{μέση τιμὴ} = \frac{\text{ὁλικὴ τιμὴ}}{\text{τιμὴ ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς}}$$

ἢ
$$f_m(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad x \neq 0$$

Ἔστωσαν τώρα δύο τιμαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς $x_1 < x_2$. Ἡ διαφορὰ $x_2 - x_1$ παριστᾷ τὴν σημειωθεῖσαν αὔξησιν ἐπὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ἡ διαφορὰ $f(x_2) - f(x_1)$ εἶναι ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως, ἥτις εἶναι ἀντιστοίχως θετικὴ ἢ ἀρνητική, καθόσον ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα. Ὁ λόγος

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

εἶναι ἡ ὁριακὴ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ διάστημα (x_1, x_2) δηλαδὴ

$$\text{ὁριακὴ τιμὴ} = \frac{\text{μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως}}{\text{μεταβολὴ ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς}}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον B κινῆται ἐπὶ τῆς καμπύλης πρὸς τὸ A τότε τὸ σημεῖον x_2 τοῦ ἄξονος τῶν x κινεῖται πρὸς τὸ σημεῖον x_1 καὶ ἡ ὁριακὴ τιμὴ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$. Τὴν ἀληθῆ τιμὴν τῆς συναρτήσεως, δηλαδὴ τὸ ὅρ $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ὀνομάζομεν ***διαφορικὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως*** εἰς τὸ σημεῖον x_1 καὶ τὴν παριστῶμεν διὰ $f_{\Delta}(x_1)$. Ἑπομένως ἡ διαφορικὴ τιμὴ μιᾶς συναρτήσεως εἶναι τὸ ὅριον τῆς ὁριακῆς τιμῆς εἰς τὸ σημεῖον x_1.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μαθηματικῶν ὁρισμῶν, δυνάμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν τὰς ἐννοίας τῆς ὁλικῆς, τῆς μέσης καὶ τῆς ὁριακῆς τιμῆς οἰκονομικῆς τινος ποσότητος, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς καταλλήλων οἰκονομικῶν μονάδων διὰ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν καθὼς καὶ τὴν συνάρτησιν. Οὕτως ὁρίζομεν μέσον καὶ ὁριακὸν κόστος ὡς ἀκολούθως :

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $\Pi(x)$ τοῦ ὁλικοῦ κόστους τῆς ἐπιχειρήσεως ἥτις παράγει τὸ ἀγαθὸν X (Κεφ. II § 2). Διὰ τὴν παραγωγὴν x_1 μονάδων τὸ ὁλικὸν κόστος εἶναι $\Pi(x_1)$. Τὸ μέσον εἶναι $\Pi_m(x_1) = \frac{\Pi(x_1)}{x_1}$. Ἐὰν τώρα αὐξήσωμεν τὴν παραγωγὴν ἀπὸ x_1 μονάδας εἰς x_2 τότε τὸ ὁριακὸν κόστος εἶναι,

$$\frac{\Pi(x_2) - \Pi(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Τὸ ὁριακὸν κόστος ἔχει τὰς αὐτὰς διαστάσεις ὡς καὶ τὸ μέσον κόστος. Συνήθως εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς ἡ διαφορὰ $x_2 - x_1$ λαμβάνεται ἴση πρὸς τὴν μονάδα παραγωγῆς ἤτοι $x_2 = x_1 + 1$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁριακὸν κόστος $= \Pi(x_1 + 1) - \Pi(x_1)$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν τὴν ἔννοιαν τῆς μέσης καὶ ὁριακῆς τιμῆς διὰ τὰς ἄλλας οἰκονομικὰς συναρτήσεις.

Τονίζομεν καὶ πάλιν, ὅτι ἡ μέση τιμὴ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς οἰκονομικῆς συναρτήσεως ἔχει τὰς αὐτὰς διαστάσεις πρὸς τὴν ὁριακὴν καθὼς καὶ τὴν διαφορικὴν τιμήν της. Ἑπομένως μία ἀναλυτικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν ποσῶν αὐτῶν δὲν ἀντίκειται πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν διαστάσεων.

6. Γραφικαὶ παραστάσεις τῶν οἰκονομικῶν συναρτήσεων

Ἡ ποσοτικὴ μελέτη τῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων ἀπαιτεῖ ὡρισμένας μαθηματικὰς μεθόδους. Ἡ ἀριθμητικὴ εἶναι σήμερον ἀνεπαρκὴς διὰ τὴν λύσιν καὶ παρακολούθησιν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων, καθόσον στηρίζεται εἰς ἀριθμητικὰ δεδομένα καὶ πίνακας, οἵτινες πολλάκις εἶναι ἀτελεῖς καὶ ἀνεπαρκεῖς, τόσον ὥστε ἡ γενίκευσις τῶν εἰδικῶν περιπτώσεων καθὼς καὶ ἡ ἐπέκτασις μιᾶς οἰκονομικῆς θεωρίας εἶναι δυσκολωτάτη, ἐνίοτε δὲ ὁδηγεῖ εἰς λελανθασμένα συμπεράσματα. Ἐκ τούτου, ἡ ἀριθμητικὴ μέθοδος συνεχῶς χάνει ἔδαφος ἐνῷ ἄλλαι μέθοδοι προοδευτικῶς ἀναπτύσσονται. Εἰδικῶς ἡ μέθοδος τῶν γραφικῶν παραστάσεων, ἡ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλύσεως, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως, ὁδηγεῖ εἰς γενικώτερα συμπεράσματα καὶ εἰς εὐκόλους λύσεις τῶν προβλημάτων.

Αἱ μαθηματικαὶ συναρτήσεις αἱ συνδέουσαι δύο ἢ περισσοτέρας οἰκονομικὰς ποσότητας ὑποτίθενται συνεχεῖς, δηλαδὴ εἰς μικρὰν μεταβολὴν ποσότητός τινος ἡ ἀντιστοιχοῦσα μεταβολὴ τῆς ἄλλης ποσότητος εἶναι ἐπίσης μικρά· π.χ. ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ἐλαίου ἐλαττωθῇ ἀπὸ 50 δρχ. εἰς 49,8 δρχ., τὸ ποσὸν τοῦ ἐλαίου τὸ ὁποῖον ὁ καταναλωτὴς ἀγοράζει ὀφείλει νὰ αὐξηθῇ ἀπὸ 2 ὀκ. εἰς π.χ. 2,1 ὀκ. Εἶναι τούτοις φανερόν, ὅτι ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ δὲν ἀνταποκρίνεται ἀπολύτως πρὸς τὴν π γματικότητα· παρὰ ταῦτα εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ τὴν παραδεχθῶμεν, διὰ τοὺς κάτωθι βασικοὺς λόγους : α) Ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως ἡ χρῆσις συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι ἀσυγκρίτως ἁπλουστέρα παρὰ ἡ χρῆσις ἀσυνεχῶν. β) Τὰ ἀριθμητικὰ σφάλματα τὰ προερχόμενα ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως μιᾶς ἀσυνεχοῦς συναρτήσεως ὡς συνεχοῦς, εἰς τὰς συνήθεις περιπτώσεις εἶναι ἀρκετὰ μικρὰ ὥστε ἡ ἐπιδιωκομένη προσέγγισις πλησιάζει τὴν πραγματικότητα. Εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ χρησιμοποίησις ἀσυνεχῶν συναρτήσεων εἶναι ἀπαραίτητος θὰ γίνεται ἰδιαιτέρα μνεία.

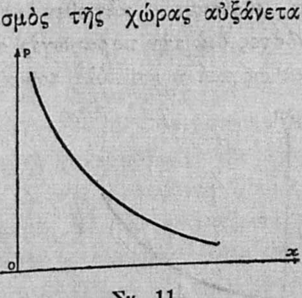
7. Ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως

Ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως καθορίζεται τότε μόνον ὅταν οἱ τέσσαρες παράγοντες εἶναι γνωστοὶ (Κεφ. II § 6). Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι γνωστή, τότε ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως εἶναι ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως. Ἐὰν εἷς τῶν θεμελιωδῶν παραγόντων μεταβληθῇ, τότε ἡ συνάρτησις ἀλλάζει καὶ ἑπομένως καὶ τὸ σχῆμα τῆς γραφικῆς της παραστάσεως ἀλλάζει.

Διὰ νὰ ἀναλύσωμεν τὴν ἀνωτέρω διαπίστωσιν λεπτομερέστερον, λαμβάνομεν τὸ κατωτέρω παράδειγμα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ χώρα ἐφαρμόζει συστηματικὸν σχέδιον ἀνοικοδομήσεως, περιλαμβάνον πρὸς ἐνίσχυσίν του τὴν προοδευτικὴν φορολογίαν. Οὕτως, ἡ μὲν φορολογία ἐπὶ τῶν πλουσίων καὶ τῶν ἑταιρειῶν εἶναι κατὰ πολὺ βαρυτέρα τῆς προπολεμικῆς, ἡ δὲ φορολογία ἐπὶ τῶν ἀτόμων μὲ χαμηλὸν εἰσόδημα εἶναι ἐλαχίστη. Ἑπομένως μεταπολεμικῶς ἡ διανομὴ τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος ἀλλάζει κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε οἱ μὲν «πτωχοὶ» νὰ ἔχουν περισσότερον εἰσόδημα διαθέσιμον διὰ νὰ ἐξοδεύσουν, ἐνῶ οἱ «πλούσιοι» ὀλιγώτερον ἢ προπολεμικῶς.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τώρα δύο ποιότητας ἐξ ἑνὸς ἀγαθοῦ π.χ. σουλτανίναν καὶ μαύρην σταφίδα· ἡ μὲν ζήτησις τῆς σουλτανίνας θὰ αὐξάνεται ἐνῶ τῆς μαύρης θὰ ἐλαττοῦται, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ὁ πληθυσμὸς τῆς χώρας αὐξάνεται καθὼς καὶ τὸ ἀτομικὸν εἰσόδημα. Ἄρα, βασιζόμενοι ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ ζήτησις τῆς σουλτανίνας σταφίδος, εἰς οἱανδήποτε τιμήν, εἶναι μεγαλυτέρα εἰς τὴν μεταπολεμικὴν περίοδον ἀπὸ τὴν τῆς προπολεμικῆς. Συνεπῶς, ἡ μεταπολεμικὴ καμπύλη τῆς ζητήσεως διὰ τὴν σουλτανίναν εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν προπολεμικήν. Ἡ νέα καμπύλη εὑρίσκεται δεξιώτερον καὶ ἄνωθεν τῆς πρώτης ἐὰν ἀμφότεραι χαραχθοῦν εἰς τὸ ἴδιον διάγραμμα. Ἐὰν τώρα παραστήσωμεν τὴν ζήτησιν τῆς σουλτανίνας εἰς τόννους διὰ x καὶ τὴν τιμὴν δι' ἕκαστον τόννον εἰς χιλιάδας δραχμῶν διὰ p, ἡ ἑκάστοτε ζητουμένη ποσότης x ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν τιμὴν p.

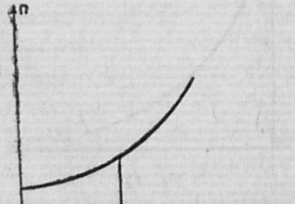


Σχ. 11

Ἑπομένως, ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύστημα ἀξόνων μὲ τὰς ἀνωτέρω καθορισθείσας μονάδας, ἤτοι μίαν σειρὰν μεμονωμένων τιμῶν τῆς σουλτανίνας μὲ διαφορὰν 500 δρ. κατὰ τόννον καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας ποσότητας εἰς τόννους, τότε δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὰ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα καὶ νὰ σχηματίσωμεν τὴν καμπύλην τῆς ζητήσεως, ἥτις σύγκειται ἀπὸ τὰ μεμονωμένα αὐτὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν περιορισθῶμεν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν τοποθέτησιν τῶν σημείων αὐτῶν, ἡ γεωμετρικὴ αὐτὴ παράστασις δὲν ἐξυπηρετεῖ τὴν θεωρητικὴν καὶ μαθηματικὴν ἀνάπτυξιν τοῦ προβλήματος τῆς ζητήσεως. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, εἰσάγομεν τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας, ὡς αὕτη διετυπώθη ἀνωτέρω, δηλαδὴ παραδεχόμεθα ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς ζητήσεως εἶναι συνεχὴς ὡς πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς τιμῆς τῆς σουλτανίνας. Ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ εἶναι φυσικὴ καθὼς καὶ λογική, διότι ἡ τιμὴ τῆς σουλτανίνας δύναται νὰ εἶναι 1,5 χιλ., 2 χιλ., 2.5 χιλ., 3 χιλ. κατὰ τόννον, ὡς ἐπίσης 1,25 χιλ., 1.5 χιλ. 1.75 χιλ.,... κατὰ τόννον κ.ο.κ. Δεδομένου δέ, ὅτι δὲν ὑπάρχει λογικὸν ἐπιχείρημα τὸ ὁποῖον ἐμποδίζει ὅπως εἰσαγάγωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι πραγματικαὶ συνθῆκαι αἱ ὁποῖαι διαμορφώνουν τὴν ζήτησιν ἐκφράζονται ἱκανοποιητικῶς διὰ μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως καὶ μιᾶς ἀντιστοιχούσης συνεχοῦς καμπύλης. Εἰς τὸ διάγραμμα δεικνύεται μία καμπύλη τῆς ζητήσεως. Εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀδαμάντων (Κεφ. II, § 10) ἡ καμπύλη παρουσιάζει σημεῖα ἀσυνεχείας, καὶ μάλιστα σημεῖα καμπῆς ἢ γωνιακὰ (βλ. Κεφ. V).

8. Ἡ καμπύλη τοῦ κόστους

Ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους ἐξαρτᾶται ἀπὸ τέσσαρας θεμελιώδεις παράγοντας καὶ εἶναι ἔννοια «στατικὴ» ὡς πρὸς τὸν χρόνον, δηλαδὴ ἡ ἀλλαγὴ ἑνὸς τῶν θεμελιωδῶν παραγόντων συνεπάγεται τὴν ἀλλαγὴν τῆς συναρτήσεως καὶ ἡ ἑκάστοτε ὁριζομένη συνάρτησις ἰσχύει διὰ μίαν χρονικὴν περίοδον, κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ὁποίας οἱ θεμελιώδεις παράγοντες εἶναι γνωστοὶ καὶ παραμένουν ἀμετάβλητοι. Ἑπομένως, ἡ καμπύλη τοῦ κόστους μεταβάλλεται ὅταν εἷς τῶν θεμελιωδῶν παραγόντων μεταβληθῇ· π.χ. ἐὰν ἀνέλθῃ τὸ τεχνικὸν ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς διὰ μιᾶς νέας μηχανικῆς ἐφευρέσεως, τότε ἡ συνάρτησις τοῦ κόστους μεταβάλλεται καθὼς καὶ ἡ καμπύλη. Μάλιστα, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ νέα καμπύλη θὰ εὑρίσκεται κάτωθεν τῆς προηγουμένης διὰ μακροχρόνιον περίοδον, διότι τὸ κόστος διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν αὐτῶν μονάδων θὰ εἶναι μικρότερον. Ἡ συνάρτησις καθὼς καὶ ἡ καμπύλη τοῦ κόστους εἶναι «ἐλάχισται ἔννοιαι», διότι χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς συναρτήσεως καθὼς καὶ τῆς καμπύλης τὸν ἀριθμὸν ἐκεῖνον τῶν μονάδων παραγωγῆς διὰ τὸν ὁποῖον τὸ κόστος εἶναι ἐλάχιστον. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν τὸ χρησιμοποιούμενον ποσὸν τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς μεταβάλλεται, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μονάδων παραγωγῆς θὰ παραχθῇ εἰς διαφορετικὸν κόστος: Εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς συναρτήσεως καθὼς καὶ τῆς καμπύλης χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος. Διὰ τοὺς ἰδίους λόγους τοὺς ὁποίους ἀνεπτύξαμεν ἀνωτέρω, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ καμπύλη τοῦ κόστους εἶναι συνεχής. Ἐκ

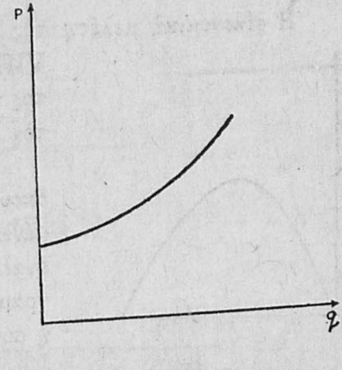


Σχ. 12

τοῦ τρόπου τῆς κατασκευῆς της συνάγεται ἀμέσως ὅτι ἡ καμπύλη εἶναι μονότιμος καὶ μονοτόνως αὔξουσα, ὑπὸ ὁμαλὰς συνθήκας. Ἡ τεταγμένη ἑνὸς σημείου τῆς καμπύλης παριστᾷ τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν ἀντιστοιχουσῶν μονάδων. Ἐὰν τὸ αὐτὸ ποσὸν μονάδων παραχθῇ εἰς μεγαλύτερον κόστο τότε τὰ ἀντιστοιχοῦντα σημεῖα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν Π (Κεφ. ΙΙ, § 5), καὶ ἄνωθεν τοῦ σημείου τῆς καμπύλης. Δεδομένου ὅτι ὑπάρχουν γενικὰ ἔξοδα διὰ πᾶσαν ἐπιχείρησιν, πρὶν ἢ ἀρχίσῃ αὕτη τὴν παραγωγήν, ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν Π (Κεφ. ΙΙ, § 5).

9. Ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς

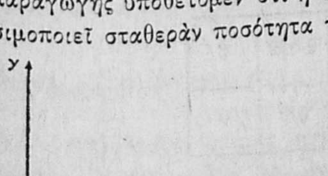
Ἡ συνάρτησις καὶ ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως δεικνύουν τὴν σχέσιν ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τῆς τιμῆς καὶ τοῦ συνόλου τῆς ποσότητος ἀγαθοῦ τινος, πωλουμένου εἰς τὴν ἀγορὰν εἰς τὴν τιμὴν ταύτην. Ἡ συνάρτησις καὶ ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς δεικνύουν τὴν σχέσιν ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ τῆς τιμῆς καὶ τοῦ συνόλου τῆς ποσότητος ἑνὸς ἀγαθοῦ, τὸ ὁποῖον οἱ παραγωγοὶ ἢ οἱ πωληταὶ διαθέτουν πρὸς πώλησιν εἰς τὴν ἀγοράν. Ἡ καμπύλη τῆς προσφορᾶς, ἀντιθέτως πρὸς τὴν καμπύλην τῆς ζητήσεως, στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὸν ἄξονα p, δηλαδὴ ἀνέρχεται ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ἐὰν ἡ καμπύλη τοῦ σχημ. 13 παριστᾷ τὴν καμπύλην προσφορᾶς ἐργοστασίου τινὸς σάπωνος ἢ ὁλοκλήρου τῆς βιομηχανίας τῆς χώρας, τότε ἡ καμπύλη δεικνύει ὅτι ὅταν ἡ τιμὴ αὐξάνεται τὸ ποσὸν παραγωγῆς σάπωνος, τὸ διατιθέμενον εἰς τὴν ἀγορὰν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησιν ἢ ἀπὸ τὴν βιομηχανίαν τῆς χώρας, εἶναι μεγαλύτερον. Οὕτω, ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς δίδει τὴν εὐκαιρίαν εἰς τὸν ἐπιχειρηματίαν ἢ τοὺς ἐπιχειρηματίας νὰ χρησιμοποιήσουν μεγαλυτέραν ποσότητα συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς.



Σχ. 13

10. Ἡ καμπύλη τῆς συνθετικῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς

Εἰς τὴν κατωτέρω ἀνάλυσιν τῆς καμπύλης τῆς συνθετικῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἐπιχείρησις ἥτις παράγει τὰ ἀγαθὰ Χ καὶ Ψ χρησιμοποιεῖ σταθερὰν ποσότητα τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς. Ἂς θεωρήσωμεν τοὺς ἄξονας Οxy καὶ τὴν συνάρτησιν $f(x,y)=0$ τῆς συνθετικῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς τῶν ἀγαθῶν Χ καὶ Ψ ὡς αὕτη διηρευνήθη εἰς τὴν § 9 (Κεφαλ. ΙΙ). Ἡ γραφική της παράστασις εἶναι καμπύλη τεμνομένη ὑπὸ τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας εἰς ἓν μόνον σημεῖον, δηλαδὴ εἶναι μονότιμος ὡς πρὸς τὰς δύο μεταβλητὰς x καὶ y. Ἐπὶ πλέον, ὑπὸ ὁμαλὰς συνθήκας, ὅταν ἡ παραγωγὴ τοῦ ἀγαθοῦ Ψ αὐξάνεται, ἡ παραγωγὴ τοῦ ἀγαθοῦ Χ μειοῦται ἀναλόγως. Ὅταν ἡ παραγωγὴ τοῦ ἀγαθοῦ Χ εἶναι μηδὲν ἡ ποσότης παραγωγῆς ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Ψ εἶναι μεγίστη καὶ τανάπαλιν διὰ τὸ ἀγαθὸν Χ. Ὡς ἐκ τούτου, ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς ἀμφοτέρους τοὺς ἄξονας καὶ τέμνει αὐτοὺς καθέτως. Ἡ

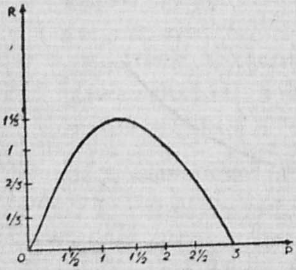


Σχ. 14

συνάρτησις καθὼς καὶ ἡ καμπύλη τῆς συνδετικῆς συναρτήσεως τῆς παραγωγῆς ἀποτελοῦν «μεγίστην ἔννοιαν» δηλαδὴ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ποσότητες x καὶ y τῶν ἀγαθῶν X καὶ Ψ συνιστοῦν τὸ μέγιστον τῶν παραγωγικῶν δυνατοτήτων τῆς ἐπιχειρήσεως. Οἱονδήποτε σημεῖον ἐντὸς τῆς καμπύλης ἐκπροσωπεῖ δυνατὴν παραγωγὴν ἐκ τῶν ἀγαθῶν X καὶ Ψ μὲ τοὺς προκαθορισμένους συντελεστὰς παραγωγῆς, ἐνῶ σημεῖα κείμενα ἐκτὸς τῆς καμπύλης δὲν δύνανται νὰ ἀντιπροσωπεύσουν ποσότητας ἐκ τῶν ἀγαθῶν X καὶ Ψ, δυναμένας νὰ παραχθοῦν ὑπὸ τῆς ὑπὸ ἐξέτασιν ἐπιχειρήσεως μὲ τὸ διατιθέμενον ποσὸν τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς.

11. Ἡ καμπύλη τῆς προσόδου

Ἡ οἰκονομικὴ μελέτη τῆς καμπύλης τῆς προσόδου θὰ γίνῃ εἰς τὸ Κεφ. VIII μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἐννοίας τῆς ἐλαστικότητος τῆς ζητήσεως. Πρὸς τὸ παρὸν θὰ θεωρήσωμεν τὸν μαθηματικὸν ὁρισμὸν (Κεφ. II § 6).



Σχ. 15

$$R = P\varphi(p) = x\psi(x)$$

ὅπου $\varphi(p)$ ἢ $\psi(x)$ εἶναι γνωσταὶ συναρτήσεις. Ἑπομένως, ἡ καμπύλη τῆς προσόδου δύναται νὰ χαραχθῇ ἀναλόγως τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος εἰς ἓν διάγραμμα ἀξόνων ORp ἢ ORx. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἶναι :

$$\varphi(p) = \frac{10}{p+2} - 2 \qquad 0 \leqslant p \leqslant 3$$

Τότε ἡ συνάρτησις τῆς προσόδου εἶναι :

$$R = p\left(\frac{10}{p+2} - 2\right) \qquad 0 \leqslant p \leqslant 3$$

Διὰ νὰ χαράξωμεν τὴν συνάρτησιν αὐτὴν εἰς ἓν διάγραμμα ORp, γράφομεν τὴν συνάρτησιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $R = \dfrac{6p-2p^2}{p+2}$ καὶ σχηματίζομεν τὸν κάτωθι πίνακα :

p	0	1/2	1	1 1/2	2	2 1/2	3
R	0	1	1 1/3	1 2/7	1	5/9	0

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς καμπύλης ἔγινεν ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς νομισματικῆς μονάδος, ἔστω τῆς δραχμῆς. Ἐὰν τὸ p δίδεται εἰς τι πολλαπλάσιον τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἔστω εἰς χιλιάδας δραχμῶν, τότε ὑποθέτομεν ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ 10 καὶ 2 τῆς συναρτήσεως παριστοῦν χιλιάδας δραχμῶν καὶ τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης παραμένει ἀναλλοίωτον, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ μονὰς μετρήσεως ἐπὶ τῶν ἀξόνων παριστᾷ χιλιάδας δραχμῶν.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Πρόβλημα 1ον) Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $x^2 + 1$ πλησιάζει τὴν τιμὴν 10 ὅταν τὸ x πλησιάζει τὸ 3. Νὰ καθορισθῇ τὸ γραμμικὸν διάστημα τοῦ x ὥστε ἡ διαφορὰ μεταξὺ $x^2 + 1$ καὶ 10 νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 0,001. Νὰ γίνῃ γραφικὴ ἐπεξήγησις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 2ον) Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $1 + \frac{1}{x^2}$, διὰ πολὺ μεγάλας τιμὰς τοῦ x, τείνει πρὸς τὸ 1. Πόσον μεγάλο πρέπει νὰ εἶναι τὸ x ὥστε ἡ διαφορὰ μεταξὺ $1 + \frac{1}{x^2}$ καὶ 1 νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 0,1 ; Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 3ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\alpha)\quad \underset{x \to \infty}{\text{ὅρ.}} \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

$$\beta)\quad \underset{x \to 0}{\text{ὅρ.}} \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n} = \frac{\alpha_n}{\beta}$$

Πρόβλημα 4ον) Ἐὰν $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\underset{h \to 0}{\text{ὅρ.}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2\alpha x + \beta$$

Πρόβλημα 5ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $y = \frac{3x+8}{x-8}$ διὰ τὰς τιμὰς $x = 8, 64, 512 \ldots$ Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις.

Πρόβλημα 6ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\underset{h \to 0}{\text{ὅρ}} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{καὶ} \quad \underset{h \to 0}{\text{ὅρ}} \frac{(x+h)^\mu - x^\mu}{h} = \mu x^{\mu 1}$$

Πρόβλημα 7ον) Ἐὰν $\varphi(x) = \sqrt{4+x}$, νὰ εὑρεθοῦν $\varphi(0)$, $\varphi(-3)$, $\varphi(9/16)$. (Τὸ σύμβολον $\sqrt{}$ παριστᾷ τὴν θετικὴν ῥίζαν). Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις.

Πρόβλημα 8ον). Ἐὰν $\varphi(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ νὰ δειχθῇ ὅτι $[\varphi(x)]^\nu = \varphi(\nu x)$ καὶ

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Πρόβλημα 9ον). Ἐὰν $f(x) = \lambda o\gamma_\alpha x$ νὰ δειχθῇ ὅτι $f(x^\nu) = \nu f(x)$.

$f(xy) = f(x) + f(y)$ ἐπίσης $\varphi[f(x)] = x$, $f[\varphi(x)] = x$ ὅπου $\varphi(x) = \alpha^x$

Πρόβλημα 10ον). Τὸ ἄθροισμα μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$S_\nu = \frac{\alpha(1 - \omega^\nu)}{1 - \omega} \qquad \omega \neq 1$$

Ἐὰν α καὶ ω εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοὶ τότε τὸ ἄθροισμα S_ν εἶναι συνάρτησις τοῦ ν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος ὅτα $|\omega| < 1$ καὶ $\nu \to \infty$.

Πρόβλημα 11ον). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν :

α) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ β) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$ γ) $\alpha_\nu = \frac{2^\nu - 1}{2^\nu}$

δ) $\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}}, \qquad \alpha_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$

Πρόβλημα 12ον). Νὰ μελετηθῇ ἡ συνάρτησις $y = \frac{\alpha x + 6}{\gamma x + \delta}$ καὶ νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα ἀσυνεχείας τῆς συναρτήσεως, ἐὰν ὑπάρχουν. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις ἔχει τὰς αὐτὰς ἰδιότητας μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Πρόβλημα 13ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x, ἐκτὸς τῆς τιμῆς $x = 2$. Ποία εἶναι ἡ κατάλληλος τιμὴ τῆς συναρτήσεως y διὰ τὴν τιμὴν $x = 2$, ὥστε νὰ εἶναι αὕτη συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ;

Πρόβλημα 14ον). Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $y = \frac{3}{1 + 5^{-\frac{1}{x}}}$ τείνει εἰς διαφορετικὰ ὅρια ὅταν τὸ $x \to 0$ ἐκ θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν τιμῶν. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως.

Πρόβλημα 15ον) Ἐὰν $\frac{y-2}{y-3} = 2^{\frac{1}{x-1}}$ τότε δείξατε ὅτι $y \to 1$ ὅταν $x \to 1$ ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς καὶ $y \to 3$ ὅταν $x \to 1$ ἀπὸ θετικάς.

Πρόβλημα 16ον). Νὰ γίνουν αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν κάτωθι συναρτήσεων εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον :

α) $y = x\sqrt{81 - x^2}$ β) $y = x^2 + \frac{1260}{x}$ γ) $y = 2^x$

Πρόβλημα 17ον) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 4 ἑκ. ἐγγράφομεν χορδὴν **x** ἑκ. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς χορδῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ὡς συνάρτησις τοῦ **x**. Ποῖον εἶναι τὸ ὅριον τῆς συναρτήσεως ὅταν $x \to 0$ καὶ ὅταν $x \to 8$.

Πρόβλημα 18ον) Σημεῖον τι Μ κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος ρ. Ἐὰν ΑΒ εἶναι μία σταθερὰ διάμετρος καὶ Γ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἐκφράσατε τὴν ἀπόστασιν ΜΓ ὡς συνάρτησιν τῆς ἀποστάσεως ΑΓ = x. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον τῆς συναρτήσεως ὅταν $x \to 0$ καὶ ὅταν $x \to p$.

Πρόβλημα 19ον) Ἑταιρεία ἀλαντικῶν πωλεῖ x ὀκάδας μηνιαίως ὅταν ἡ τιμὴ πωλήσεως **p** δρ. κατ' ὀκᾶν εἶναι $p = 10 - \frac{x}{8000}$.

Ἡ μηνιαία πρόσοδος τῆς ἑταιρείας εἶναι $R = xp = 10x - \frac{x^2}{8000}$.

α) Νὰ δειχθῇ γραφικῶς ὅτι ἡ ἑταιρεία ἔχει τὴν μεγαλυτέραν πρόσοδον ὅταν πωλῇ 50 τόν. μηνιαίως. β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριακὴ πρόσοδος ὅταν ἡ ἑταιρεία πωλῇ 49 τόννους, ἢ 51 τόννους μηνιαίως. γ) Νὰ εὑρεθῇ πόσους τόννους πωλεῖ ἡ ἑταιρεία ὅταν ἡ πρόσοδος εἶναι μηδὲν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁριακὴ πρόσοδος ὅταν ἡ ἑταιρεία αὐξήσῃ ἢ ἐλαττώσῃ κατὰ ἕνα τόννον τὴν πώλησιν.