ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ*

Ὑπὸ Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ παροῦσα ἐργασία ἀποτελεῖ εἰσαγωγὴν εἰς τὴν οἰκονομετρικὴν τεχνικὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (linear programming). Τὴν εἰσαγωγὴν ταύτην ἐθεωρήσαμεν σκόπιμον, ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν λόγῳ τῆς εὐρυτάτης πρακτικῆς χρησιμότητος τῆς ὡς ἄνω τεχνικῆς, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ λόγῳ τῆς πλήρους σχεδὸν ἐλλείψεως κειμένων τὰ ὁποῖα θὰ ἠδύνατο νὰ συμβουλευθῇ ὁ μὴ μαθηματικῶς κατηρτισμένος ἀναγνώστης, ὁ ἐνδιαφερόμενος διὰ τὴν ἐκμάθησιν τῶν βασικῶν ἀρχῶν τῆς τεχνικῆς.

Πρὸς κατανόησιν τῆς ἐννοιολογικῆς τοποθετήσεως τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ σημειοῦμεν κατωτέρω ὀλίγα τινὰ περὶ Προγραμματισμοῦ γενικῶς.

Ἡ ἀνεπάρκεια τῶν μέσων ἱκανοποιήσεως τῶν ἀνθρωπίνων ἀναγκῶν ἐπιβάλλει τὴν ἐφαρμογὴν ὀρθολογιστικῆς τινος διαδικασίας κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἑκάστοτε δεδομένων ποσοτήτων ἐκ τῶν μέσων αὐτῶν. Ὁ Προγραμματισμὸς ἀναφέρεται εἰς τὸ σύνολον τῶν οἰκονομικῶν σκέψεων αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τὴν μορφὴν τῆς ὀρθολογιστικῆς αὐτῆς διαδικασίας, ἤτοι τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν ἀνεπαρκῶν μέσων μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν χρήσεων βάσει προκαθωρισμένων κριτηρίων. Συνεπῶς, ὁ Προγραμματισμὸς δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ *διαδικασία καταστρώσεως τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς δράσεως*.

Ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω ἔννοιαν ὁ Προγραμματισμὸς εἶναι θεμελιῶδες φαινόμενον τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς, δύναται δὲ νὰ λεχθῇ ὅτι, κατ᾽ ἀρχήν, πᾶσαι αἱ οἰκονομικαὶ μονάδες, ἀνεξαρτήτως σκοποῦ καὶ μεγέθους, προγραμματίζουν. Ἡ κατάστρωσις ἐν τούτοις προγράμματος οἰκονομικῆς δράσεως ἀνταποκρινομένου ἐπιτυχῶς πρὸς τοὺς σκοποὺς καὶ τὰς συνθήκας τῆς προγραμματιζούσης οἰκονομικῆς μονάδος, ἐξαρτᾶται ἀπὸ πλείστους παράγοντας. Μεταξὺ τῶν παραγόντων αὐτῶν ἡ *μέθοδος ὑπολογισμοῦ* τοῦ προγράμματος ἐπέχει ἰδιαιτέραν σημασίαν (1). Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς εἶναι μία ἐκ τῶν διαφόρων μεθόδων ὑπολογισμοῦ τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς δράσεως. Ἐπιδιώκει, ὡς καὶ αἱ λοιπαὶ μέθοδοι οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, τὴν εὕρεσιν τοῦ προγράμματος ἐκείνου τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ περισσότερον πρὸς τὰ δεδομένα οἰκονομικὰ κριτήρια. Ὑπερέχει ἐν τούτοις τῶν ἄλλων μεθόδων ὡς πρὸς τὸν βαθμὸν προσαρμοστικότητος εἰς διαφόρους κατηγορίας προβλημάτων

---

* Ἡ ἐργασία αὕτη ἐδημοσιεύθη ἀρχικῶς εἰς τὴν Ἐπιθ. Οἰκον. καὶ Πολιτ. Ἐπιστημῶν τεῦχος 1—2, 1956. Ἡ ἐκ νέου δημοσίευσίς της εἰς τὰς «Σπουδάς», κατόπιν ὡρισμένων τροποποιήσεων καὶ τῆς προσθήκης ἑνὸς Παραρτήματος, γίνεται κυρίως πρὸς χάριν τῶν σπουδαστῶν τοῦ Κέντρου Ὀργανώσεως καὶ Διοικήσεως τῆς Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς.

1) Ἡ πληρότης καὶ ἀκρίβεια τῶν πληροφοριῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται, ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι ἐπίσης σημαντικοὶ παράγοντες διὰ τὴν κατάστρωσιν ἐπιτυχοῦς προγράμματος. Οἱ παράγοντες αὐτοὶ—ἐν πολλοῖς στατιστικῆς ἢ λογιστικῆς φύσεως—δὲν ἐξετάζονται ἐνταῦθα.

καὶ ὡς πρὸς τὰς δυνατότητας ἀντιμετωπίσεως πολυπλόκων περιπτώσεων. Ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικῆς θεωρίας ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς παρουσιάζει ἐπίσης ἐνδιαφέρον, καθόσον ἀκολουθεῖ γραμμὴν οὐσιωδῶς διάφορον τῆς ἐκ παραδόσεως ἀκολουθουμένης γραμμῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως.

Μολονότι ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἔχει ἤδη δοκιμασθῆ εἰς τὴν πρᾶξιν ἐπιτυχῶς (ἰδίως εἰς Η.Π.Α.) δὲν ἔτυχεν ἀκόμη εὐρείας ἀποδοχῆς. Τοῦτο ὀφείλεται, νομίζομεν, ἐν μέρει μὲν εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ τεχνικὴ εἶναι νέα [1], κυρίως δὲ εἰς τὸ ὑψηλὸν τεχνικὸν ἐπίπεδον τῶν σχετικῶν δημοσιευμάτων. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν κατεβλήθη προσπάθεια ἁπλουστεύσεως τῶν ἐκτιθεμένων ἐννοιῶν. Ἀπεφεύχθη σχεδὸν τελείως ἡ μαθηματικὴ ἐπιχειρηματολογία καὶ ἐδόθη ἰδιαιτέρα ἔμφασις εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἑρμηνείαν τῶν βασικῶν σημείων τῆς μεθόδου. Πρὸς κατανόησιν πάντως τῆς χρησιμοποιουμένης μαθηματικῆς ὁρολογίας, ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς ὑποβοήθησιν τῶν ἐνδιαφερομένων διὰ μίαν προκεχωρημένην μελέτην τοῦ θέματος, προσετέθη εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης Παράρτημα περὶ τῆς οἰκονομικῆς σημασίας βασικῶν τινων μαθηματικῶν ἐννοιῶν.

Πλὴν τῆς μαθηματικῆς θεωρίας, μερικαὶ ἄλλαι ἐνδιαφέρουσαι πλευραὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ δὲν ἦτο ἐπίσης δυνατὸν νὰ συζητηθοῦν ἐνταῦθα. Ἐλπίζομεν ὅτι τὰ κενὰ αὐτὰ θὰ συμπληρωθοῦν βαθμιαίως.

Τὸ κύριον τμῆμα τῆς ἐργασίας εἶναι τὸ τμῆμα III, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναλύεται ἡ διαδικασία ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου εἰς μίαν τυπικὴν περίπτωσιν προγραμματισμοῦ. Ἐλπίζομεν ὅτι ἡ κατανόησις τοῦ τμήματος αὐτοῦ θὰ καταστήσῃ τὸν ἀναγνώστην ἱκανὸν νὰ χρησιμοποιῇ τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν εἰς ὡρισμένας κατηγορίας προβλημάτων.

II. ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

1. *Θεμελιώδεις ἔννοιαι καὶ ὑποθέσεις*

Ὡς ἐλέχθη, ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ. Τὰ προβλήματα ταῦτα δύνανται νὰ καταταγοῦν εἰς δύο γενικὰς κατηγορίας. Ἡ πρώτη περιλαμβάνει «προβλήματα μεγιστοποιήσεως» ἤτοι ἐπιτεύξεως τοῦ *μεγίστου δυνατοῦ ἀποτελέσματος* διὰ *δοθέντων οἰκονομικῶν μέσων*. Ἡ δευτέρα περιλαμβάνει «προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως», ἤτοι ἐπιτεύξεως *ὡρισμένου οἰκονομικοῦ σκοποῦ* διὰ τῆς *ἐλαχίστης δυνατῆς θυσίας*. Ἀμφότεραι αἱ ὡς ἄνω κατηγορίαι προβλημάτων ἀποτελοῦν δύο διαφόρους ἐκδηλώσεις τοῦ Οἰκονομικοῦ Ἀξιώματος.

Αἱ δυνατότητες τῆς νέας τεχνικῆς εἶναι εὐρεῖαι ὄχι ὅμως καὶ ἀπεριόριστοι. Ποῖα ἀκριβῶς προβλήματα ἐμπίπτουν εἰς τὴν σφαῖραν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ θὰ καταφανῇ ἐκ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἐννοιολογικῶν βάσεων αὐτοῦ.

Μολονότι ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ὡς συγκεκριμένη τεχνικὴ ἀνεπτύχθη κατὰ τὴν τελευταίαν δεκαετίαν, αἱ κυριώτεραι ἔννοιαι καὶ ὑποθέσεις αὐτοῦ δὲν

1) Μετὰ τὸ 1950 ἤρχισε νὰ γίνεται γνωστή.

εἶναι νέαι. Ἀπαντῶνται συχνάκις εἰς τὰς συγγενεῖς θεωρίας αἱ ὁποῖαι ἠκολούθησαν τὴν παράδοσιν Quesnay, κυρίως δὲ εἰς τὰς θεωρίας γενικῆς ἰσορροπίας τῶν Walras (1), Cassel (2), Pareto (3), Leontief (4), καὶ von Neumann (5). Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἐπηρεάσθη ἰδιαιτέρως ἀπὸ τὰς ἐργασίας τῶν Leontief καὶ von Neumann. Ἡ τεχνικὴ τῶν «εἰσροῶν - ἐκροῶν» (τοῦ Leontief) ἦτο ἡ ἀφετηρία τῶν πρώτων ὑποδειγμάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, τὸ δὲ «ὑπόδειγμα» von Neumann ὑπέδειξε τὸ εἶδος τῶν ἀπαιτουμένων μαθηματικῶν μέσων διὰ τὸν χειρισμὸν «γραμμικῶν» συναρτήσεων καὶ γενικῶς μὴ διαφορισίμων παραστάσεων (6). Τέλος, ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς χρησιμοποιεῖ τὴν ἔννοιαν τῆς «παραγωγικῆς δραστηριότητος» καὶ τὴν ὑπόθεσιν τῶν «σταθερῶν ἀναλογιῶν» αἱ ὁποῖαι ἐχρησιμοποιήθησαν ἐπίσης εἰς τὰς προαναφερθείσας ἐργασίας.

Ἀναλύομεν ἐν συνεχείᾳ τὴν ἔννοιαν τῆς «παραγωγικῆς δραστηριότητος» καὶ τὰς μετ' αὐτῆς συνδεομένας θεμελιώδεις ὑποθέσεις τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

«Παραγωγικὴ δραστηριότης» (productive process, activity), εἶναι ἡ συγκεκριμένη μέθοδος ἐκτελέσεως ἑνὸς οἰκονομικοῦ ἔργου, π.χ. ἡ χρησιμοποίησις 3,5 καὶ 4 μονάδων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, καὶ γ ἀντιστοίχως, διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Α (7). Ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς οἱονδήποτε (θετικὸν) ἐπίπεδον —ἐὰν βεβαίως ἐπιτρέπουν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν. Τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος μετρᾶται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων (8) τοῦ παραγομένου οἰκονομικοῦ ἔργου.

Ὑποθέσεις: Α. *Σταθεραὶ ἀναλογίαι* (Fixed Coefficients of Production). Αἱ ὑφ' ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος χρησιμοποιούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν παραγομένην ποσότητα τῶν ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Οὕτω ἡ παραγωγὴ 3, 4, 6... ν μονάδων ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ Α, εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἀπαιτεῖ 3, 4, 6.. ν φορὰς τὰς ἀρχικὰς ποσότητας 3, 4, 5, τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ, οὕτως ὥστε:

$$\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{6}{18}=\frac{\nu}{3\nu}=\frac{1}{3}=\frac{\text{ποσότης Α}}{\text{ποσότης } \alpha}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

$$\frac{3}{15}=\frac{4}{20}=\frac{6}{30}=\frac{\nu}{5\nu}=\frac{1}{5}=\frac{\text{ποσότης Α}}{\text{ποσότης } \beta}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

$$\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\frac{6}{24}=\frac{\nu}{4\nu}=\frac{1}{4}=\frac{\text{ποσότης Α}}{\text{ποσότης } \gamma}=\text{σταθερὸς ἀριθμὸς}$$

---

1) Eléments d'Économie Politique Pure, Paris 1926 (4 ἔκδοσις).
2) Theory of Social Economy, London 1932.
3) Manuel d'Économie Politique, Paris 1907.
4) The Structure of American Economy, N. Y. 1941.
5) A Model of General Economic Equilibrium. Review of Economic Studies. Vol. 13, 1945 46.
6) Βλ. παρ. 2 παρόντος τμήματος καὶ παρ. 1 τμήματος III.
7) Βλ. καὶ παράρτημα (τμ. I).
8) Ὁ καθορισμὸς τῆς μονάδος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

Εἰς τὴν οἰκονομικὴν φιλολογίαν ἡ ἀνωτέρω ὑπόθεσις ἀπαντᾶται συνήθως ὡς ὑπόθεσις «σταθερᾶς κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως», (constant returns to scale).

B. *Πεπερασμένος ἀριθμὸς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων* (finiteness). Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν *δὲν* ἀποκλείει τὴν ἀντικατάστασιν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ὡς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ νομισθῇ ἐκ πρώτης ὄψεως. Ἁπλῶς ἀποκλείει τοιαύτην ἀντικατάστασιν *ἐντὸς τῆς αὐτῆς* παραγωγικῆς δραστηριότητος, ἅπαξ καθορισθείσης. Πᾶσα ἀντικατάστασις μεταξὺ συντελεστῶν παραγωγῆς δέον συνεπῶς νὰ θεωρῆται ὡς καθορίζουσα *νέαν* παραγωγικὴν δραστηριότητα. Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ὑποθέτει ἐν τούτοις—ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ὁριακὴν ἀνάλυσιν—ὅτι αἱ δυνατότητες ἀντικαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς εἶναι περιωρισμέναι. Συνεπῶς καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, τῶν προσδιοριζομένων ἐκ διαφόρου μίξεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἶναι ἐπίσης περιωρισμένος.

Γ. *Προσθετικότης* (additivity). Δύο ἢ καὶ περισσότεραι παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθοῦν *ταυτοχρόνως* εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον (προϋποτιθεμένου ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες συντελεστῶν τὸ ἐπιτρέπουν)· τότε ἡ συνολικῶς χρησιμοποιουμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ ἐχρησιμοποιοῦντο ἂν ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης ἐλάμβανε χώραν ἐντὸς διαφόρου χρονικῆς περιόδου. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν. Ἔστω π.χ. ὅτι δύο παραγωγικαὶ δραστηριότητες Π_1 καὶ Π_2 χρησιμοποιοῦνται ταυτοχρόνως εἰς ἐπίπεδα 3 καὶ 2 ἀντιστοίχως. Ἂν ἡ Π_1 ἀπαιτεῖ 2, $^1/_2$, 1 μονάδας ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ, ἀντιστοίχως διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ A, ἡ δὲ Π_2 ἀπαιτεῖ 3, 1, 1 μονάδας ἐκ τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ B, τότε θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ σημειούμενα ἐπίπεδα δράσεως:

Ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς:

$2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$ μονάδες ἐκ τοῦ συντ. α
$^1/_2 \times 3 + 1 \times 2 = 3\,^1/_2$ » » » » β
$1 \times 3 + 1 \times 2 = 5$ » » » » γ

καὶ σύνολον παραγομένων ἀγαθῶν: 3 μονάδες A καὶ 2 μονάδες B.

Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ὑποθέσεως περὶ προσθετικότητος εἶναι ὅτι ἡ ταυτόχρονος διεξαγωγὴ διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δὲν ἐπηρεάζει εὐνοϊκῶς ἢ δυσμενῶς τὸ συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ τὸ συνολικὸν κόστος.

Δ. *Διαιρετότης* (divisibility). Ὑποτίθεται ὅτι ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ διεξαχθῇ ὄχι μόνον εἰς οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀλλὰ καὶ εἰς οἱονδήποτε [1] κλασματικὸν ἐπίπεδον δράσεως, ἄνευ καταστρατηγήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Οὕτω ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης Π_1 (τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος) ὑποτίθεται ὅτι δύναται νὰ διεξαχθῇ εἰς ἐπίπεδα δράσεως 1/10, 1/500 κλπ. μὲ ἀποτέλεσμα τὴν δαπάνην 1/10, 1/500 κλπ. ἐκ τῶν ποσοτήτων 2,

1) Θετικόν.

$^1/_2$, 1 τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ παραγωγὴν 1/10, 1/500 κλπ. ἐκ τῆς μονάδος τοῦ προϊόντος Α.

Ε. *Μεγιστοποίησις ἢ ἐλαχιστοποίησις* (optimisation). Ὑποτίθεται ὅτι αἱ οἰκονομικαὶ μονάδες δύνανται νὰ ἔχουν εἰς τὴν διάθεσίν των δύο ἢ περισσοτέρας παραγωγικὰς δραστηριότητας ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁδηγεῖ εἰς διάφορον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα, οὕτως ὥστε νὰ συμφέρῃ ἡ ἐπιλογὴ μιᾶς ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν διαδικασιῶν αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν μέγιστον τὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἐκ δοθέντων παραγωγικῶν μέσων. Ὁμοίως, ὑποτίθεται ὅτι τὸ αὐτὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ὁπότε τίθεται τὸ ζήτημα τῆς ἐκλογῆς τῆς ὀλιγώτερον δαπανηρᾶς μεταξὺ αὐτῶν.

Ἡ γενικὴ συνάρτησις παραγωγῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως, ἡ ὁποία βασίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῆς ἀπεριορίστου δυνατότητος ἀντικαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν, μολονότι χρήσιμος διὰ λόγους θεωρητικῆς γενικεύσεως, εἶναι ἀνεφάρμοστος πρακτικῶς. Ὁ ἐπιχειρηματίας ἀντιλαμβάνεται συνήθως τὴν ἐπιχείρησίν του ὡς ἓν σύνολον παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἑκάστη τῶν ὁποίων χρησιμοποιεῖ ὡρισμένας ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ παράγει ὡρισμένον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα. Ἀντικατάστασις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς θεωρεῖται ἐπίσης δυνατή, ἀλλ' ὡς καθορίζουσα νέας παραγωγικὰς δραστηριότητας. Αἱ τεχνικαὶ συνθῆκαι τῶν περισσοτέρων ἐπιχειρήσεων δὲν ἐπιτρέπουν τὴν ἀντικατάστασιν συντελεστῶν παραγωγῆς ἐντὸς τῆς αὐτῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Γενικῶς δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι κύριον πλεονέκτημα τῆς ἐννοίας τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος, ὡς γίνεται δεκτὴ εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμόν, εἶναι ὅτι συμφωνῇ πρὸς τὴν οἰκονομικὴν καὶ λογιστικὴν πρᾶξιν.

Ἡ ὑπόθεσις περὶ σταθερῶν ἀναλογιῶν, μολονότι ἐκ πρώτης ὄψεως περιοριστική, εἶναι βάσιμος θεωρητικῶς. Ἐὰν αἱ ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα μεταβάλλωνται ἀναλόγως, οὐδεὶς λόγος ὑπάρχει ὅπως μὴ διατηρῆται σταθερὰ ἡ σχέσις μεταξὺ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων παραγωγῆς καὶ παραγομένης ποσότητος ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Αἱ εἰς τὴν πρᾶξιν παρατηρούμεναι περιπτώσεις αὐξανομένης ἢ φθινούσης κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως ὀφείλονται εἰς τὴν διατήρησιν σταθερᾶς τῆς ποσότητος ἑνὸς ἐκ τῶν χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν καθ' ὃν χρόνον αἱ ποσότητες τῶν ἄλλων μεταβάλλονται ἢ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν νέων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων [1]. Εἶναι λοιπὸν θεωρητικῶς δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν καταλλήλως καὶ εἰς κάθε στάδιον παραγωγῆς τὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων οὕτως ὥστε νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ ἀνωτέρω περιπτώσεις αὐξανομένης ἢ φθινούσης κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην πᾶσα συνάρτησις παραγωγῆς, συνεπῶς καὶ ἡ καμπυλοειδὴς συνάρτησις παραγωγῆς τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως, δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς σύνολον παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἀπὸ πρακτικῆς ὅμως ἀπόψεως

1) Δυνατὸν αἱ νέαι παραγωγικαὶ δραστηριότητες νὰ μὴ σχετίζωνται ἀμέσως μὲ τὴν ὑπ' ὄψιν οἰκονομικὴν μονάδα, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν «ἐξωτερικῶν βιομηχανικῶν οἰκονομιῶν».

δημιουργοῦνται ὑπολογιστικαὶ δυσχέρειαι ὅταν ἡ παραγωγικὴ συνάρτησις λαμβάνη καμπυλοειδῆ μορφήν, κυρίως λόγῳ τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν ὑπολογισμόν, ἐκτὸς βεβαίως ἂν ἱκανοποιούμεθα μὲ προσεγγίσεις. Οὕτω, θὰ ἠδύνατο νὰ λεχθῇ ὅτι, ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως, εἰς τὰς ἀναφερθείσας περιπτώσεις ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἐγγίζει τὰ ὅρια τῶν δυνατοτήτων του (βλ. παρ. 2 κατωτέρω).

Ἡ ὑπόθεσις περὶ περιωρισμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μᾶλλον σύμφωνος πρὸς τὴν πραγματικότητα. Μὲ ἐξαίρεσιν ἴσως τὴν γεωργίαν καί τινας χημικὰς βιομηχανίας, ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑφ' ἑκάστης οἰκονομικῆς μονάδος διαθεσίμων δραστηριοτήτων, ἤτοι παραγωγικῶν μεθόδων χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἶναι περιωρισμένος. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀναφερθεισῶν ἐξαιρέσεων δυνατὸν αἱ ἑκάστοτε τεχνολογικαὶ καὶ οἰκονομικαὶ συνθῆκαι νὰ περιορίζουν σημαντικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν οἰκονομικῶς βασίμων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων [1].

Ἡ ὑπόθεσις περὶ προσθετικότητος φαίνεται, ἐκ πρώτης ὄψεως, ὡς μὴ γενικῶς ἰσχύουσα. Οὕτω π.χ., εἰς βιομηχανικάς τινας ἐκμεταλλεύσεις ἡ παραγομένη θερμότης ἐκ καταναλώσεως ποσότητος ἄνθρακος δυνατὸν νὰ χρησιμοποιῆται ταυτοχρόνως ὑπὸ δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἂν αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἐλάμβανον χώραν εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους θὰ ἦτο προφανῶς ἀναγκαία ἡ κατανάλωσις περισσοτέρου ἄνθρακος. Παρόμοιαι περιπτώσεις παρατηροῦνται εἰς διαφόρους κλάδους τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς. Εἰς ἑκάστην ὅμως τῶν περιπτώσεων αὐτῶν δυνάμεθα—ἄνευ ἀλλοιώσεως τῆς οὐσίας—νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἐν ἀλληλοεπιδράσει παραγωγικὰς δραστηριότητας ὡς συνιστώσας μίαν ν έ α ν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Συνεπῶς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἡ ὑπόθεσις περὶ προσθετικότητος δὲν παραβιάζεται.

Ἡ ὑπόθεσις περὶ διαιρετότητος δυνατὸν νὰ ἰσχύῃ εἴς τινας περιπτώσεις, κατὰ κανόνα ὅμως εἶναι ἀντιπραγματική. Π.χ. εἰς τὴν παραγωγὴν διαρκῶν ἀγαθῶν (πλοίων, αὐτοκινήτων, ραδιοφώνων κλπ.) τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἶναι νοητὰ μόνον εἰς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἡ ὑπόθεσις περὶ διαιρετότητος εἶναι ἐν τούτοις χρήσιμος ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ἀπόψεως. Εἰς

---

1) Αἱ ὑποθέσεις περὶ σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ περιωρισμένου ἀριθμοῦ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἔχουν ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν θεωρίαν τῆς ἀπασχολήσεως εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας. Εἰς τὰς χώρας αὐτὰς παρατηρεῖται συνήθως σοβαρὰ ἀνεργία μὴ δυναμένη νὰ θεραπευθῇ οὔτε δι' αὐξήσεως τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως κατὰ τὰ κεϋνσιανὰ διδάγματα (αὔξησις ἐνεργοῦ ζητήσεως δημιουργεῖ συνήθως πληθωρισμόν), οὔτε δι' ἀντικαταστάσεως—μέσῳ τοῦ μηχανισμοῦ τῆς ἀγορᾶς—τοῦ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστοῦ (π.χ. τοῦ κεφαλαίου) ὑπὸ τοῦ συντελεστοῦ «ἐργασία», συμφώνως πρὸς τὴν νεοκλασικὴν θεωρίαν τῆς οριακῆς ἀποδοτικότητος. Ἡ ἐπίμονος ἀνεργία ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν περιωρισμένην δυνατότητα ἀντικαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ὡς ἀκριβῶς ὑποτίθεται ὑπὸ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἀπάλειψις τῆς ἀνεργίας εἰς τὰς χώρας αὐτὰς εἶναι δυνατὴ μόνον δι' ἀναλόγου αὐξήσεως τῆς ποσότητος τῶν ἐν τῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν. Βλ. λίαν ἐνδιαφερούσας ἀναλύσεις ὑπὸ Masao Fukuoka: Full Employment and Constant Coefficients of Production. Quart. Journal of Economics. February 1955, καὶ E. Simpson: Inflation, «Deflation and Employment in Italy» εἰς Review of Economic Studies, 1949 - 1950.

περιπτώσεις συγκεκριμένων ἐφαρμογῶν τῆς τεχνικῆς, πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ φύσις τῶν παραγομένων ἀγαθῶν καὶ νὰ γίνωνται αἱ ἀναγκαῖαι προσαρμογαὶ εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀναλύσεως.

Ἡ ὑπόθεσις περὶ μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως εἶναι «κανονιστική». Δὲν ἐπιδιώκει δηλαδὴ νὰ ἑρμηνεύσῃ τὴν πραγματικὴν ἐπιχειρηματικὴν συμπεριφοράν, ἡ ὁποία ἐνδέχεται νὰ μὴ συμφωνῇ μὲ τὸ Οἰκονομικὸν Ἀξίωμα, ἀλλ' ἁπλῶς σημαίνει ὅτι ἡ οἰκονομικὴ μονὰς πρέπει νὰ βασισθῇ ἐφ' ὡρισμένων κριτηρίων ἐπιλογῆς κατὰ τὴν οἰκονομικὴν αὐτῆς δρᾶσιν, ἂν ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἢ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς οἰκονομικῆς θυσίας.

2. Διατί «Γραμμικὸς» Προγραμματισμός.

Οἱ μαθηματικῶς ἐνήμεροι ἐκ τῶν ἀναγνωστῶν θὰ ἐμάντευαν ἤδη τὴν σημασίαν τοῦ ἐπιθέτου «Γραμμικός». Τὸ ἐπίθετον τοῦτο ἀναφέρεται εἰς τὴν μαθηματικὴν φύσιν τῶν προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται ἡ τεχνικὴ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἡ ὑπόθεσις περὶ σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς «γραμμικὰς παραστάσεις» δυναμένας νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς τὸ Καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων. Ἐπὶ πλέον, ἡ ὑπὸ μεγιστοποίησιν συνάρτησις εἶναι ἐπίσης γραμμικὴ παράστασις (βλ. παρ. 1, τμῆμα III). Ἡ «γραμμικότης» τῶν ἐν λόγῳ προβλημάτων ἀποκλείει τὴν ἐφαρμογὴν τῶν συνήθων μεθόδων τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ κατὰ τὴν μεγιστοποίησιν ἢ ἐλαχιστοποίησιν [1]. Ἀντὶ τῶν μεθόδων αὐτῶν χρησιμοποιεῖται εἰδικὴ ἀνάλυσις, βασιζομένη εἰς τὴν θεωρίαν τῶν «κυρτῶν συνόλων» καὶ τὴν γεωμετρίαν πολυδιαστάτων χώρων.

Ἡ μὴ γραμμικότης τῶν προβλημάτων, εἴτε λόγῳ τῆς μορφῆς τῆς ὑπὸ μεγιστοποίησιν συναρτήσεως, εἴτε λόγῳ τῆς μὴ γραμμικῆς διατυπώσεως τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς[2], ἀποκλείει τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ἐκτὸς ἐὰν καταστῇ δυνατὴ ἡ κατὰ προσέγγισιν γραμμικὴ διατύπωσις τῶν προβλημάτων αὐτῶν. Οὕτω, μολονότι ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς εὐρυτάτην κατηγορίαν προβλημάτων, δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γενικὴ μέθοδος. Τινές, ἀντὶ τοῦ εἰδικοῦ ὅρου «Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς» χρησιμοποιοῦν τοὺς γενικοὺς ὅρους «Ἀνάλυσις Δραστηριότητος» (Koopmans[3]) ἢ «Μαθηματικὸς Προγραμματισμὸς» (Dorfman)[4]. Οἱ ὅροι οὗτοι ἐπιδιώκουν νὰ καλύψουν

---

1) Ἐφαρμογὴ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ εἶναι δυνατή, ἂν ἡ ὑπὸ μεγιστοποίησιν ἢ ἐλαχιστοποίησιν συνάρτησις ἔχει πρώτην παράγωγον μηδὲν καὶ δευτέραν παράγωγον μικροτέραν τοῦ μηδενὸς (μεγαλυτέραν τοῦ μηδενὸς ἂν πρόκειται περὶ ἐλαχιστοποιήσεως). Ἡ γραμμικὴ ὅμως συνάρτησις ἔχει πρώτην παράγωγον σταθερὸν ἀριθμὸν καὶ δευτέραν παράγωγον μηδέν.

2) Ἡ γραμμικὴ διατύπωσις καμπυλοειδῶν συναρτήσεων παραγωγῆς εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὴ ἐφ' ὅσον, ὡς ἤδη ἐλέχθη, πᾶσα συνάρτησις παραγωγῆς θὰ ἠδύνατο νὰ διασπασθῇ εἰς ἓν πλῆθος παραγωγικῶν διαδικασιῶν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἀπὸ ὑπολογιστικῆς ὅμως ἀπόψεως δὲν συμφέρει πάντοτε ἡ διατύπωσις αὕτη.

3) Koopmans, T.C. ed. Activity analysis of production and allocation, Cowles Commission for Research in Economics, 1951.

4) Dorfman, R., Mathematical or linear programming, American Economic Review, 1953.

πάσας τὰς περιπτώσεις προγραμματισμοῦ, ἀνεξαρτήτως τῆς μαθηματικῆς φύσεως αὐτῶν. Διεξάγεται ἤδη ἐρευνητικὴ ἐργασία πρὸς γενίκευσιν τῶν μαθηματικῶν μεθόδων, ἐδημοσιεύθησαν δὲ ἐργασίαι ἐπὶ τῶν μὴ γραμμικῶν περιπτώσεων προγραμματισμοῦ (1).

3. *Δυναμικὸς Προγραμματισμός.*

Ἂν αἱ διαθέσιμοι παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἀνήκουν τεχνολογικῶς εἰς τὴν αὐτὴν χρονικὴν περίοδον δὲν ἀπαιτεῖται χρονικὸς συσχετισμὸς τοῦ προβλήματος. Ἂν ὅμως αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἀνήκουν εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους τότε εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως εἰσαχθῇ ὁ χρόνος ὡς ἓν ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ προβλήματος.

Τὰ προβλήματα τῆς πρώτης κατηγορίας καλοῦμεν προβλήματα στατικοῦ προγραμματισμοῦ, τῆς δὲ δευτέρας κατηγορίας προβλήματα δυναμικοῦ προγραμματισμοῦ. Τυπικὸν πρόβλημα τῆς δευτέρας κατηγορίας εἶναι ἡ κατάστρωσις προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως μιᾶς περιοχῆς. Εἰς τὸ πρόβλημα αὐτὸ πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ διαχρονικὴ κατανομὴ τῶν διαφόρων κατηγοριῶν ἐπενδύσεων πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ τελικοῦ σκοποῦ. Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ μὲ μικρὰς ἀναπροσαρμογὰς εἰς τὰ προβλήματα τοῦ δυναμικοῦ προγραμματισμοῦ. Πάντως ἀπὸ ἀπόψεως ὑπολογισμοῦ τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι γενικῶς πολύπλοκα. Εἰς μερικὰς περιπτώσεις εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ εἰδικῆς τεχνικῆς πρὸς συντόμευσιν τῶν ὑπολογισμῶν (2).

4. *Μέθοδος* Simplex.

Ἡ μαθηματικὴ θεωρία τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαμόρφωσιν μιᾶς γενικῆς μεθόδου λύσεως τῶν γραμμικῶν προβλημάτων, γνωστῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα «μέθοδος simplex» (Βλ. καὶ παρ. 2, τμήμ. III). Ἡ μέθοδος αὕτη χαρακτηρίζεται ὡς «σταδιακὴ» (iterative), διότι ἐξετάζει συστηματικῶς καὶ κατὰ στάδια διαφόρους λύσεις πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς «ἀρίστης». Σημειοῦμεν κατωτέρω μερικὰ ἐκ τῶν κυριωτέρων πλεονεκτημάτων τῆς μεθόδου simplex:

α) Καθιστᾷ δυνατὴν τὴν λύσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ μεγάλης κλίμακος εἰς σχετικῶς βραχὺ χρονικὸν διάστημα. Οὕτω ἓν πρόβλημα προγραμματισμοῦ 50 ἀγνώστων τὸ ὁποῖον συνεπάγεται συνήθως ἄνω τῶν 100.000 πολλαπλασιασμῶν, δύναται νὰ λυθῇ ὑπὸ πεπειραμένου ὑπαλλήλου διὰ τῆς μεθόδου simplex ἐντὸς μιᾶς περίπου ἑβδομάδος. Προβλήματα τοιαύτης ἐκτάσεως δὲν δύνανται νὰ λυθοῦν διὰ τῶν συνήθων μεθόδων (3).

β) Παρέχει τὰ μέσα αὐτομάτου ἐλέγχου τῶν ὑπολογισμῶν ὡς ἐπίσης καὶ

---

1) Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. Non-linear programming εἰς Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. Press of California, Berkeley.

2) Dantzig, G.B. Block triangular systems in Linear Programming, The Rand Corporation Research Memorandum R.M. 1273, April, 8, 1954.

3) Ἐκτὸς βεβαίως ἂν διατίθεται ἠλεκτρονιακὴ ἀριθμομηχανή.

κριτήρια βάσει τῶν ὁποίων καθορίζεται ἂν ἐπετεύχθη ἡ «ἀρίστη» λύσις, ἢ ἂν πρέπει νὰ συνεχισθοῦν οἱ ὑπολογισμοί.

γ) Δίδει χρησίμους πληροφορίας ὡς πρὸς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιδράσεις πάσης ἀποκλίσεως ἀπὸ τὴν «ἀρίστην λύσιν».

δ) Δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν κοινωνικοοικονομικῶν προβλημάτων τύπου Leontief, τὰ ὁποῖα λόγῳ τοῦ μεγέθους των ἀπαιτοῦν συνήθως χρῆσιν δαπανηρῶν ἀριθμομηχανῶν (1).

ε) Ἀπὸ ἀπόψεως ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, γενικῶς, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων ἢ ἀνισοτήτων.

στ) Τέλος, σημαντικὸν πλεονέκτημα εἶναι ἡ ἁπλότης τῆς μεθόδου. Ἀνειδίκευτος ὑπάλληλος γραφείου δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ ταύτην ἀποδοτικῶς μετὰ ὀλιγοήμερον ἐξάσκησιν (2).

5. Ἐφαρμογαὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην σημειοῦμεν ἐνδεικτικῶς μερικὰς ἀπὸ τὰς γνωστοποιηθείσας ἐφαρμογὰς τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰς διαφόρους οἰκονομικοὺς κλάδους.

α) Ἐλαχιστοποίησις κόστους μεταφορᾶς (3). Ἐπιδιώκεται ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους μεταφορᾶς ἐμπορευμάτων ἀπὸ διάφορα σημεῖα προελεύσεως εἰς διάφορα σημεῖα προορισμοῦ καὶ εἰς ποσότητας προκαθωρισμένας δι' ἕκαστον σημεῖον προορισμοῦ. Τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι ἐξαιρετικῶς πολύπλοκα ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων προελεύσεως ἢ προορισμοῦ εἶναι μέγας. Ἡ διαδικασία λύσεως τῶν προβλημάτων αὐτῶν δύναται νὰ ἐπεκταθῇ ἐπίσης εἰς προβλήματα διανομῆς ἀγαθῶν εἰς διάφορα κέντρα καταναλώσεως, ἢ εἰς προβλήματα ἀγορᾶς πρώτων ὑλῶν ἀπὸ διάφορα σημεῖα πρὸς ἐξυπηρέτησιν γεωγραφικῶς κεχωρισμένων βιομηχανικῶν μονάδων.

β) Ὀρθολογιστικὴ χρησιμοποίησις κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ ἐπιχειρήσεων (4). Συνήθης τύπος βιομηχανικῶν προβλημάτων.

---

1) Ὁμοίως δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων τῆς θεωρίας «παιγνίων» ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ὁποίων ἀρχίζει νὰ ἀναγνωρίζεται σήμερον (Βλ. κεφ. 19, 20 καὶ 24 εἰς Koopmans, T.C., ed. «Activity analysis of production and allocation», Cowles Commission for Research in Economics, 1951).

2) Ἡ διατύπωσις βεβαίως τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ σχετικὴν πεῖραν καὶ γνῶσιν τῶν εἰδικῶν συνθηκῶν ἑκάστης περιπτώσεως προγραμματισμοῦ.

3) Lonax, K.S., «Allocation and Programming in Modern Economics», The Manchester School of Economics No 3, Sept. 1953. Morton, G. «Notes on Linear Programming». Economica, Nov. 1953. King, R.A., and R. J. Freund: «A procedure for solving a Linear Programming problem» Journal Paper No 563, North Carolina Agricultural Experiment Station, July, 1953. Koopmans, T.C., «Efficient allocation of resources», Cowles Commission for Research in Economics, 1939.

4) Lomax, K.S., «Allocation and Programming in Modern Economics», The Manchester School of Economics, Sept. 1953. Cahn. A.S. «The warehouse problem (abstract)»: Bulletin of the American Mathematical Society, Oct. 1948.

γ) Διαχωρικὴ ἰσορροπία ἀγορῶν [1]. Ἐπιδιώκεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἐξισορροπητικοῦ πλέγματος τιμῶν τὸ ὁποῖον ἐνδέχεται νὰ προκύψῃ ὑφ' ὡρισμένας συνθήκας ἀνταγωνισμοῦ μεταξὺ τοπικῶς κεχωρισμένων ἀγορῶν.

δ) Μεγιστοποίησις στρεμματικῆς ἀποδόσεως [2]. Ἐπιδιώκεται ἡ ἐπιλογὴ τῶν καλλιεργειῶν, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν μέγιστον τὸ οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα (κέρδος ἢ ποσότητα παραγωγῆς). Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἐφαρμόζεται ἤδη εὐρύτατα ὑπὸ διαφόρων ἀγροτικῶν Ἰνστιτούτων εἰς Ἀμερικήν.

ε) Ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους διατροφῆς κτηνῶν [3]. Ἐπιζητεῖται ὁ καθορισμὸς τῆς «ἀρίστης» δυνατῆς διαίτης οὕτως ὥστε ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ διατηρῆται ἀμείωτος ἡ οἰκονομικὴ ἀπόδοσις τῶν κτηνῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ ἐξασφαλίζεται ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους τῶν κτηνοτροφῶν.

στ) «Μῖξις» [4]. Τὰ προβλήματα μίξεως ἀπαντῶνται εἰς κάθε κλάδον τῆ οἰκονομικῆς ζωῆς, ἰδίως δὲ εἰς τὰς χημικὰς διομηχανίας. Π.χ. παραγωγὴ ἀγαθῶν μὲ ὡρισμένας χημικὰς ἰδιότητας, ἐκ τῆς μίξεως πρώτων ὑλῶν γνωστῆς συστάσεως καὶ ἰδιοτήτων, κατὰ τρόπον ἐλαχιστοποιοῦντα τὸ κόστος παραγωγῆς.

ζ) Οἰκονομικὴ ἀνάπτυξις μιᾶς περιοχῆς [5]. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐπιδιώκεται ἡ διαχρονικὴ κλιμάκωσις τῶν ἐπενδύσεων καὶ ἡ «ἀρίστη» δυνατὴ κατανομὴ τῶν διαθεσίμων ἐργατικῶν δυνάμεων πρὸς ἐπίτευξιν ἑνὸς ἐπιπέδου οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Δυνατὸν ἐπίσης νὰ ἐπιζητῆται ἀπορρόφησις πληθυσμιακοῦ πλεονάσματος ἐντὸς προκαθωρισμένων χρονικῶν ὁρίων μὲ ταυτόχρονον μεγιστοποίησιν τοῦ κατὰ κεφαλὴν εἰσοδήματος.

---

1) Samuelson P. «Spatial price equilibrium and Linear Programming». Am. Ec. Review. XLII, 3.

2) Boles N. J., «Linear Programming and Farm Management Analysis», Journal of Economics, Febr. 1955. O. Heady, «Simplified presentation and logical aspects of Linear Programming technique», Journal of Farm Economics, Proceedings, 1954. Dantzig, G. B., A. Orden, and P. Wolfe, «The generalized simplex method for minimizing a Linear form under Linear inequality restraints», The Rand Corp., Research Memor., RM-1264, Holley, J. L., A dynamic model: I Principles of model structure, Econometrica, Oct. 1952. King, R. A. Some applications of activity analysis in Agricultural Economics, Journal of Farm Economics, Dec. 1953. King, R. A., and R. J. Freund: A procedure for solving a Linear Programming problem», Journal Paper No 563, North Carolina Agricultural Experiment Station, July, 1953.

3) Morton, G. Notes on Linear Programming. Economica Nov. 1953. Neumann, P. Some calculations on least-cost diets, Oxford Bulletin of Statistics, Aug. 1954.

4) Charnes A., Cooper W. W., and Henderson A. An introduction to Linear Programming, Journal of Economics, Feb. 1955. Lomax K.S., Allocation and Programming in Modern Economics, The Manchester School of Economics No 3, Sept. 1953. Charnes A., Cooper W.W. and Mellon B., Blending aviation gazolines, Econometrica, April, 1952.

5) Chenery H. The role of industrialisation in development programs, American Econ. Rev. Procedings, May 1955. Moore F., Regional Economic Reaction Paths, Am. Ec. Rev. Proc. May 1955.

III. ΔΙΑΤΥΠΩΣΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΤΥΠΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

1. Διατύπωσις τοῦ προβλήματος.

Ὑποθέσεις[1]. Α. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦ ὑπολογισμοῦ ἡ ἐπιχείρησις Α δύναται νὰ διαθέσῃ 100, 80, 150 μονάδας[2] ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ, ἀντιστοίχως. Τὸν περιορισμὸν αὐτὸν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὑπὸ μορφὴν διανύσματος[3]:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Τὸ σύμβολον Π_0 παριστᾷ συνοπτικῶς τὸ ἀνωτέρω διάνυσμα. Ἀνάλογα σύμβολα θὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις κατωτέρω. Τὸ Π_0 θὰ καλέσωμεν «διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν».

Β. Ἡ ἐπιχείρησις Α ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της πέντε διαφόρους παραγωγικὰς δραστηριότητας, τὰς ὁποίας θὰ ἐκφράσωμεν διὰ τῶν διανυσμάτων Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, Π_5:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Pi_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Τὰ ἀνωτέρω διανύσματα, τὰ ὁποῖα συγκροτοῦν τὴν τεχνολογικὴν μήτραν[4]

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

τῆς ἐπιχειρήσεως, θὰ ὀνομάσωμεν «διανύσματα δράσεως»[5]. Τὸ Π_1 σημαίνει ὅτι πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐξ ἑνὸς ὡρισμένου ἀγαθοῦ[6], ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α, 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β καὶ οὐδεμία μονὰς ἐκ

---

1) Πλὴν τῶν ἐνταῦθα σημειουμένων ὑποθέσεων ἰσχύουν παραλλήλως καὶ αἱ γενικαὶ ὑποθέσεις τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ (Τμῆμα Ι).

2) Αἱ «μονάδες» μετρήσεως καθορίζονται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

3) Περὶ διανυσμάτων βλ. παράρτημα (τμ. Ι).

4) Περὶ «μητρῶν» βλ. Παράρτημα.

5) Structural or activity vectors.

6) Αἱ διάφοροι παραγωγικαὶ διαδικασίαι δυνατὸν νὰ παράγουν ἑτεροειδῆ ἢ ὁμοειδῆ ἀγαθά. Ἐνταῦθα θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι παράγουν ἑτεροειδῆ ἀγαθά.

τοῦ συντελεστοῦ γ (1). Ἀναλόγως ἑρμηνεύονται καὶ τὰ λοιπὰ διανύσματα.

Γ. Ἡ ἐπιχείρησις Α δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ταυτοχρόνως παραγωγικὰς δραστηριότητας καὶ εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον δράσεως—ἂν βεβαίως αἱ συνολικῶς ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν δὲν ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια τὰ ὁποῖα καθορίζει τὸ διάνυσμα Π_0.

Δ. Τὸ καθαρὸν κέρδος ἐκ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (=διανυσμάτων δράσεως) Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5 χρησιμοποιουμένων εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος, εἶναι 2, 2, 3, 4 καὶ 6 νομισματικαὶ μονάδες ἀντιστοίχως. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ κέρδους ἀφαιρεῖται τὸ κατὰ μονάδα κόστος ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν ἀντιστοίχων ἀγαθῶν (2).

Αἱ ἀνωτέρω ὑποθέσεις καθορίζουν τὰς τεχνολογικὰς καὶ οἰκονομικὰς συνθήκας ἐντὸς τῶν ὁποίων δύναται νὰ κινηθῇ ἡ ἐπιχείρησις Α.

Τὸ πρόβλημα τώρα εἶναι νὰ καθορισθῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν τὸ πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως. Τοῦτο σημαίνει καθορισμόν: α) τοῦ εἴδους τῶν χρησιμοποιηθησομένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ β) τοῦ ἐπιπέδου δράσεως αὐτῶν, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐπιχείρησις νὰ ἐπιτύχῃ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν προϊόντων.

Ἂν θέσωμεν λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, καὶ λ_5, διὰ τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5 ἀντιστοίχως, τότε ἡ συνάρτησις $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda)=2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+6\lambda_5$$

ἐκφράζει τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον ἡ ἐπιχείρησις ἐπιδιώκει νὰ καταστήσῃ μέγιστον, ὑπὸ τὰς ἐνταῦθα ὑποθέσεις (3). Προφανῶς μερικὰ λ δυνατὸν νὰ λάβουν τιμὴν μηδέν(4), ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίστοιχος παραγωγικὴ δραστηριότης δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ πρόγραμμα.

Ὁ τελικὸς περιορισμὸς τοῦ προγράμματος δράσεως τίθεται βεβαίως ὑπὸ τῆς ὑπαρχούσης ποσότητος συντελεστῶν παραγωγῆς. Δέον συνεπῶς νὰ εἶναι:

$$\lambda_1\Pi_1+\lambda_2\Pi_2+\lambda_3\Pi_3+\lambda_4\Pi_4+\lambda_5\Pi_5\leqslant\Pi_0 \qquad (1)$$

ἤ, ἐκφράζοντες ἀριθμητικῶς τὰ διανύσματα:

---

1) Οἱ α, β, γ θεωροῦνται συντελεσταὶ παραγωγῆς ἀπὸ ἐπιχειρηματικῆς ἀπόψεως καὶ δὲν ἀνταποκρίνονται κατ' ἀνάγκην εἰς τὴν κλασικὴν διαίρεσιν: ἐργασία, ἔδαφος, κεφάλαιον. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ πρόβλημα οἱοσδήποτε ἀριθμὸς παραγωγικῶν συντελεστῶν. Ὁ συντελεστὴς α ἐνταῦθα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς «χρηματικὸν κεφάλαιον», ὁπότε ἐξηγεῖται εὐκόλως πῶς εἶναι δυνατὴ ἡ παραγωγὴ μὲ δύο μόνον συντελεστὰς εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις.

2) Δυνατὸν τὸ κέρδος νὰ ὑπολογίζεται βάσει προβλεπομένων τιμῶν.

3) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_1 εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος εἶναι 2. Ἂν συνεπῶς λ_1 εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῆς Π_1 τότε θὰ ἔχωμεν $2\lambda_1$ διὰ τὸ συνολικὸν κέρδος ἐκ τῆς παραγωγικῆς ταύτης δραστηριότητος. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας καὶ προσθέτοντες τὰ ἐπὶ μέρους γινόμενα λαμβάνομεν τὴν συνάρτησιν κέρδους $\varphi(\lambda)$.

4) Ὄχι ὅμως καὶ ἀρνητικήν.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$$

ἢ ἀναλυτικώτερον (1).

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 100 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 80 \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 150 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ἡ σημασία τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων εἶναι προφανής: Ἡ πρώτη σημαίνει ὅτι ἡ συνολικῶς δαπανωμένη ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ προγράμματος δράσεως δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν συνολικῶς διατιθεμένην ποσότητα τῶν 100 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ. Ἀνάλογος ἑρμηνεία πρέπει νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς ἄλλας δύο ἀνισότητας. Οὕτω τὸ σύστημα (2) σημαίνει ὅτι αἱ ὑπὸ τοῦ προγράμματος προβλεπόμεναι συνολικαὶ ποσότητες τῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ δὲν πρέπει νὰ ὑπ(ρβαίνουν τὰς ἀντιστοίχως διαθεσίμους ποσότητας τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Συνοπτικῶς λοιπὸν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως Α δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ (μὴ ἀρνητικαὶ) τιμαὶ τῶν λ, τοιαῦται ὥστε:

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \text{μέγιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 \leqslant \Pi_0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν ἐν τούτοις, εἶναι ἀνάγκη, διὰ λόγους διευκολύνσεως τῶν ὑπολογισμῶν, ὅπως μετατρέψωμεν τὰς ἀνωτέρω ἀνισότητας εἰς ἰσότητας. Ἡ μετατροπὴ μιᾶς ἀνισότητος εἰς ἰσότητα γίνεται δι' ἁπλῆς προσθήκης εἰς τὸ ἀσθενέστερον μέρος τῆς ἀνισότητος τῆς διαφορᾶς ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνισότητος ταύτης. Π.χ. ἡ ἀνισότης $5<8$ μετατρέπεται εἰς ἰσότητα ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέλος τὴν διαφορὰν $8 - 5 = 3$. Ἡ ἀκολουθουμένη ἐνταῦθα διαδικασία μετατροπῆς τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς. Ὁρίζομεν τρία νέα διανύσματα Π_6, Π_7, Π_8, τοιαῦτα ὥστε:

$$\Pi_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οἰκονομικῶς, τὸ Π_6 σημαίνει ὅτι ἐπιτρέπῃ τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α. Τὰ Π_7 καὶ Π_8 ἐπιτρέπουν τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τῶν συντελεστῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως. Τὰ δύο μηδενικὰ εἰς ἕκαστον διάνυσμα σημαίνουν ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ δὲν ἀπαιτεῖ δαπάνας ἐκ τῶν δύο ἄλλων συντελεστῶν. Λόγῳ τῆς

1) Βλ. Παράρτημα, τμ. Ι.

οἰκονομικῆς των σημασίας θὰ ὀνομάσωμεν τὰ Π_6, Π_7, καὶ Π_8 «διανύσματα ἀδρανείας»[1].

Ἂν τώρα ὡρισμέναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς μένουν ἀχρησιμοποίητοι, διότι εἶναι πολλάκις τεχνικῶς ἀδύνατος ἡ χρησιμοποίησις ὡρισμένων ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ ἄνευ ἀντιστοίχων ποσοτήτων ἐκ τῶν ἄλλων συντελεστῶν (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν) τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα ἀδρανείας πρέπει νὰ περιλαμβάνωνται εἰς τὸ πρόγραμμα δράσεως ὑπὸ κατάλληλα ἐπίπεδα. Θὰ ὀνομάσωμεν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα «ἐπίπεδα ἀδρανείας», καθόσον χρησιμοποίησις εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον ἑνὸς διανύσματος ἀδρανείας, σημαίνει ἁπλῶς μὴ χρησιμοποίησιν ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Αἱ τιμαὶ τῶν ἐπιπέδων ἀδρανείας δὲν δύνανται νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ μηδενὸς (δηλαδὴ ἀρνητικαὶ) οὔτε μεγαλύτεραι τῶν ποσοτήτων τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν.

Ἂν θέσωμεν λ_6, λ_7, λ_8 διὰ τὰ ἐπίπεδα ἀδρανείας Π_6, Π_7 καὶ Π_8 ἀντιστοίχως, τότε ἡ παράστασις (²) γίνεται:

$$\lambda_1\Pi_1+\lambda_2\Pi_2+\lambda_3\Pi_3+\lambda_4\Pi_4+\lambda_5\Pi_5+\lambda_6\Pi_6+\lambda_7\Pi_7+\lambda_8\Pi_8=\Pi_0 \tag{3}$$

καὶ ἀναλυτικῶς:

$$\begin{aligned}2\lambda_1+2\lambda_2+1\lambda_3+2\lambda_4+2\lambda_5+1\lambda_6+0\lambda_7+0\lambda_8&=100\\ 2\lambda_1+0\lambda_2+1\lambda_3+1\lambda_4+2\lambda_5+0\lambda_6+1\lambda_7+0\lambda_8&=\ 80\\ 0\lambda_1+1\lambda_2+2\lambda_3+1\lambda_4+2\lambda_5+0\lambda_6+0\lambda_7+1\lambda_8&=150\end{aligned} \tag{4}$$

Τὸ σύστημα (4) σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον τῶν παραγωγικῶς χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων συντελεστῶν σὺν τῷ συνόλῳ τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὰς συνολικῶς διαθεσίμους ποσότητας συντελεστῶν.

Ἂν τέλος ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ζημιοῦται ἡ ἐπιχείρησις Α ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν[2], τότε τὸ καθαρὸν ἀποτέλεσμα ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὸ πρόγραμμα ὑφ' οἱονδήποτε ἐπίπεδον εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις $\varphi(\lambda)$ μένει ἀμετάβλητος.

Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λάβῃ ὁριστικὴν διατύπωσιν ὡς ἀκολούθως:

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ (μὴ ἀρνητικαὶ) τιμαὶ τῶν λ, τοιαῦται ὥστε:

$$\varphi(\lambda)=2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+6\lambda_5=\text{μέγιστον} \tag{5}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\lambda_1\Pi_1+\lambda_2\Pi_2+\lambda_3\Pi_3+\lambda_4\Pi_4+\lambda_5\Pi_5+\lambda_6\Pi_6+\lambda_7\Pi_7+\lambda_8\Pi_8=\Pi_0 \tag{6}$$

---

1) Slack vectors ἢ disposable activities. Μαθηματικῶς τὰ διανύσματα ταῦτα ὀνομάζονται «μοναδιαῖα» (βλ. Παράρτημα, τμ. I, § 10).

2) Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ διαφυγὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν. Πάντως εἶναι ἐνδεχόμενον ὅπως ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων συντελεστῶν προκαλῇ ζημίας, ἂν π.χ. δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ διατήρησις καὶ ἐπαναχρησιμοποίησις αὐτῶν. (Βλ. καὶ ὑπ' ἀριθ. 2 παρατήρησιν εἰς παραγ. 3, κατωτέρω).

2. *Λύσις τοῦ προβλήματος.*

Ἡ παράστασις (6), ἡ ὁποία εἶναι περιληπτικὴ μορφὴ τοῦ συστήματος (4), ἐπιδέχεται διαφόρους λύσεις. Ἡ ἐπιχείρησις Α ἐνδιαφέρεται μόνον δι' ἐκείνην τὴν λύσιν ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ ταυτοχρόνως τὴν (5), ἤτοι καθιστᾷ μέγιστον τὸ ἀναμενόμενον κέρδος. Ἡ μέθοδος simplex, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον τμῆμα, χρησιμοποιεῖται ἀκριβῶς πρὸς ἀνίχνευσιν τῆς λύσεως ταύτης διὰ συστηματικῆς ἐξετάσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ λύσεων.

Π ρ ῶ τ ο ν σ τ ά δ ι ο ν ὑ π ο λ ο γ ι σ μ ῶ ν. Ἐκλέγομεν ὡς ἀφετηρίαν τῶν ὑπολογισμῶν τὴν ἁπλουστέραν «δυνατὴν»[1] λύσιν θέτοντες $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$ καὶ $\lambda_6=100$, $\lambda_7=80$ $\lambda_8=150$[2]. Ἡ λύσις αὕτη σημαίνει ὅτι οὐδεμία παραγωγικὴ δραστηριότης χρησιμοποιεῖται (ἐφ' ὅσον τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαθεσίμων παραγωγικῶν διαδικασιῶν εἶναι μηδέν), αἱ δὲ διατιθέμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραμένουν ἀχρησιμοποίητοι (ἤτοι ἀπορροφῶνται ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα λ_6, λ_7, λ_8 λαμβάνουν τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμήν). Κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι μηδέν :

$$\varphi(\lambda)=2\times0+2\times0+3\times0+4\times0+6\times0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν πρὸς εὕρεσιν καλλιτέρας λύσεως θὰ καταγράψωμεν συστηματικῶς τὰ τεχνικὰ καὶ οἰκονομικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν ἀρχικὴν λύσιν ὡς κατωτέρω :

Πινάκιον α'

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
↓	Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
	Π_6	100	1			2	2	1	2	2
	Π_7	0		1		2		1	1	2
	Π_8	150			1		1	2	1	2
Ο.Κ.	→					−2	−2	−3	−4	−6

Ἐὰν ἀφήσωμεν πρὸς στιγμὴν κατὰ μέρος τὴν τελευταίαν σειράν, τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ πινακίου εἶναι μᾶλλον σαφές.

α) Κάτωθεν τοῦ στοιχείου Β, τὸ ὁποῖον συμβολίζει τὴν λέξιν «βάσις», ἐγγρά-

1) «Δυνατὴ» λύσις σημαίνει λύσις ἱκανοποιοῦσα τὴν παράστασιν (6) ὄχι ὅμως κατ' ἀνάγκην καὶ τὴν (5).

2) Οἱ λόγοι τῆς ἐκλογῆς αὐτῆς ἀναφέρονται κατωτέρω.

φονται τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα πρὸς κατάστρωσιν τοῦ ἑκάστοτε προγράμματος[1].

β) Κάτωθεν τοῦ Π_0 σημειοῦνται αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ. Ταυτοχρόνως ὅμως οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ παριστοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως (ἢ ἀδρανείας, ὡς ἐν προκειμένῳ) τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων τῆς βάσεως· ὡς δεικνύεται εἰς τὸ πινάκιον, αἱ 100, 80 καὶ 150 μονάδες ἐκ τῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ ἀντιστοίχως, καθορίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων Π_6 Π_7 καὶ Π_8 Οὕτω αἱ στῆλαι κάτωθεν τῶν B καὶ Π_0 παριστοῦν ὁμοῦ τὸ ἑκάστοτε ἐκλεγόμενον πρόγραμμα δράσεως, ὡς καθορίζουσαι τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

γ) Εἰς τὰς ὑπολοίπους στήλας τοῦ πινακίου ἀναγράφονται πάντα τὰ χρησιμοποιούμενα διανύσματα (δράσεως ἢ ἀδρανείας) μετὰ τῶν στοιχείων αὐτῶν. Τὰ μηδενικὰ στοιχεῖα δὲν ἀναγράφονται. Κατὰ τὴν ταξινόμησιν τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἐτέθησαν πρὸ τῶν διανυσμάτων δράσεως διὰ λόγους εὐχερείας ὑπολογισμῶν.

δ) Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι πάντα τὰ διανύσματα Π_0, Π_1, ... Π_8 δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ[2] τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως Π_6, Π_7, Π_8.

Ἂς λάβωμεν π.χ. τὸ διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν Π_0 δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$\Pi_0 = 100\ \Pi_6 + 80\ \Pi_7 + 150\ \Pi_8$$

$$= 100 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 80 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 150 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix} = \Pi_0$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω γραμμικὸν συνδυασμόν, ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων ἐτέθησαν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ διανύσματος Π_0. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ εἶναι ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν α, β, γ, διατίθενται ἐξ ὁλοκλήρου, ἂν τὸ ἐκλεγόμενον πρόγραμμα περιλαμβάνῃ τὸ διάνυσμα Π_6 εἰς ἐπίπεδον 100, τὸ διάνυσμα Π_7 εἰς ἐπίπεδον 80 καὶ τὸ διάνυσμα Π_8 εἰς ἐπίπεδον 150. «Διατίθενται ἐξ ὁλοκλήρου» σημαίνει ἐνταῦθα—λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος—ὅτι δὲν χρησιμοποιοῦνται. Ἡ ἑρμηνεία εἶναι προφανῶς πλέον ἐνδιαφέρουσα ὅταν εἰς τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνωνται καὶ διανύσματα δράσεως (=παραγωγικαὶ δραστηριότητες), ὡς συμβαίνει εἰς τὰ πινάκια β′ καὶ γ′ κατωτέρω.

Ὁμοίως, τὸ διάνυσμα Π_4 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς :

$$\Pi_4 = 2\Pi_6 + 1\Pi_7 + 1\Pi_8$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \Pi_4$$

1) Θὰ καλοῦμεν ἐνίοτε τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος, διανύσματα βάσεως.
2) Βλέπε Παράρτημα (τμ. I).

Εἰς τὸν συνδυασμὸν αὐτὸν ἐτέθησαν ὁμοίως ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων τὰ στοιχεῖα τοῦ Π_4. Γενικῶς πᾶν διάνυσμα τοῦ πινακίου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐκλεγομένου προγράμματος, ἂν θέσωμεν ὡς πολλαπλασιαστὰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

Ποία τώρα εἶναι ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ἐκφράσεως ἑνὸς διανύσματος δράσεως, π.χ. τοῦ Π_4, ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Σκεπτόμενοι ὡς καὶ προηγουμένως, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἔννοιαν ταύτην ὡς ἑξῆς: Αἱ ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν π.χ. τοῦ διανύσματος δράσεως Π_4 εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος, ἰσοῦνται ἀκριβῶς πρὸς τὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι ἀπορροφῶνται ἀπὸ τὰ διανύσματα: Π_6 εἰς ἐπίπεδον 2, Π_7 εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ Π_8 εἰς ἐπίπεδον 1. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἔχομεν ἐνώπιόν μας δύο διαφόρους συνδυασμοὺς τῆς αὐτῆς ποσότητος παραγωγικῶν συντελεστῶν. Δεδομένου ὅτι εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ γνωρίζωμεν τὸ καθαρὸν κέρδος ἑκάστου συνδυασμοῦ (διότι δίδεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος τὸ ὑφ' ἑκάστου διανύσματος ἀναμενόμενον καθαρὸν κέρδος), δυνάμεθα νὰ ἀποφασίσωμεν ἐὰν συμφέρῃ ἢ ὄχι ἡ ἀφαίρεσις ποσοτήτων συντελεστῶν ἀπὸ τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος, διὰ τὴν δραστηριοποίησιν ἑνὸς νέου διανύσματος. Ἐνταῦθα βεβαίως ἡ σύγκρισις αὕτη γίνεται αὐτομάτως διότι γνωρίζομεν ὅτι τὰ διανύσματα ἀδρανείας δίδουν μηδὲν καθαρὸν κέρδος, ὁπότε συμφέρει ὁπωσδήποτε ἡ εἰσαγωγὴ ἑνὸς διανύσματος δράσεως εἰς τὸ πρόγραμμα. Ὅταν ὅμως τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνῃ ἤδη διανύσματα δράσεως (ὡς εἰς τὰ ἑπόμενα πινάκια β' καὶ γ') τότε ἡ ἀνωτέρω σύγκρισις διὰ τοῦ τεχνάσματος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ εἶναι βασικὴ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς καλλιτέρας δυνατῆς λύσεως (1).

Ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ ἀναγνώστης τὰ διανύσματα Π_0, Π_1 . . . Π_8 ἐκφραζόμενα ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, δὲν ἀλλάσσουν ἀριθμητικὴν μορφήν, παραμένοντα ὡς ἀκριβῶς ἐδόθησαν ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ προβλήματος. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει μόνον εἰς τὸ πρῶτον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν, λόγῳ τῆς ἀριθμητικῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας (2) τὰ ὁποῖα ἐξελέγησαν εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Οὕτω ἐκλέγοντες ὡς ἀφετηρίαν ἓν πρόγραμμα ἀπαρτιζόμενον ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας εἰς οὐδένα σχεδὸν ὑπολογισμὸν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προβῶμεν κατὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ πρώτου πινακίου. Ἀρκεῖ νὰ καταγράψωμεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν

---

1) Πᾶν διάνυσμα ἀδρανείας δύναται ἐπίσης νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Ἡ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ δύναται νὰ καθορισθῇ κατ' ἀναλογίαν τῶν λεχθέντων διὰ τὰ λοιπὰ διανύσματα, λαμβανομένης βεβαίως ὑπ' ὄψιν τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας.

2) Ἐπειδὴ δηλαδὴ περιέχουν ἀνὰ μίαν μονάδα καὶ δύο μηδενικὰ ἕκαστον κατὰ τρόπον ὥστε χρησιμοποιούμενα εἰς τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν ἀφήνουν τὴν ἀριθμητικὴν φύσιν τῶν ἄλλων διανυσμάτων ἀναλλοίωτον. Μαθηματικῶς τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἀποτελοῦν τὴν ἀρχικὴν «βάσιν» τοῦ συστήματος ἢ τὰς συντεταγμένας ἑνὸς χώρου ν διαστάσεων (ν=ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν) βάσει τῶν ὁποίων δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τὰ ὑπόλοιπα διανύσματα τοῦ προβλήματος, κείμενα ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χώρου.

σειρὰν (πινάκ. α΄). Οὗτος εἶναι εἷς ἐκ τῶν λόγων χρησιμοποιήσεως διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Ἕτερος, πλέον οὐσιώδης λόγος, εἶναι ὅτι διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἀποφεύγεται ἡ ὑπερπήδησις τῆς «ἀρίστης» δυνατῆς λύσεως, ἐφ᾿ ὅσον ἀρχίζομεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀπὸ τὴν λύσιν ἐκείνην ἡ ὁποία δίδει καθαρὸν κέρδος μηδέν.

ε) Τὰ στοιχεῖα Κ.Κ. εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον τοῦ πινακίου σημαίνουν «καθαρὸν κέρδος». Ἡ φορὰ τῶν βελῶν δεικνύει ὅτι τὰ τετραγωνίδια τῆς ἔναντι σειρᾶς καὶ τῆς κάτωθεν στήλης χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἑκάστου διανύσματος. Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἔχουν καθαρὸν κέρδος μηδέν, τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια μένουν κενά, ἀναγράφεται δὲ μόνον τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διανύσματα δράσεως, κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

στ) Εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου, ἔναντι τῶν στοιχείων Ο.Κ. (=οριακὸν κέρδος) ἐγγράφεται ἡ διαφορὰ καθαροῦ κέρδους ἢ λαμβανομένη ἐκ τῆς ὑπὸ στοιχείων δ ἀνωτέρω ὑποδειχθείσης συγκρίσεως. Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι θέλωμεν νὰ καθορίσωμεν ποίαν ἐπίδρασιν θὰ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ καθαροῦ κέρδους ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος δράσεως Π_3. Πρῶτον, ἐκφράζομεν τοῦτο ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως κατὰ τὰ γνωστά:

$$\Pi_3 = 1.\Pi_6 + 1.\Pi_7 + 2.\Pi_8$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις σημαίνει ὅτι ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ Π_3 εἰς ἐπίπεδον δράσεως 1, εἶναι ἴση μὲ τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν τὸ διάνυσμα Π_6 εἰς ἐπίπεδον 1, τὸ διάνυσμα Π_7 εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ τὸ διάνυσμα Π_8 εἰς ἐπίπεδον 2.

Δεύτερον, συγκρίνομεν τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδουν οἱ δύο ἀνωτέρω συνδυασμοί [1] τῶν αὐτῶν ποσοτήτων συντελεστῶν παραγωγῆς. Γνωρίζομεν ὅτι πάντα τὰ διανύσματα ἀδρανείας φέρουν ἐξ ὑποθέσεως καθαρὸν κέρδος μηδὲν (ἤτοι, $1\times0+1\times0+2\times0=0$, ὅπου τὰ τρία πρῶτα μηδενικὰ εἶναι τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν Π_6, Π_7, Π_8), τὸ δὲ Π_3 εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος φέρει κέρδος 3. Συγκρίνοντες συνεπῶς λαμβάνομεν $0-3=-3$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ οριακὸν κέρδος τοῦ διανύσματος Π_3 εἶναι 3 μονάδες [2]. Ἑπομένως ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ Π_3 εἰς τὸ πρόγραμμα δύναται νὰ βελτιώσῃ τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως. Κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον γίνεται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ «ὁριακοῦ κέρδους» ὅλων τῶν διανυσμάτων. Γενικῶς ὅταν ὑπάρχῃ ἓν ἢ περισσότερα ἀρνητικὰ στοιχεῖα εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου, βελτίωσις τοῦ συνολικοῦ κέρδους εἶναι δυνατὴ δι᾿ εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων. Κατ᾿ ἀντιστοιχίαν ὅταν ἓν στοιχεῖον εἶναι θετικὸν ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ

1) Ὡς παριστῶνται ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως.

2) Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ ὁριακοῦ κέρδους ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ Π_3 τίθεται ὡς ἀφαιρέτης, δὲν πρέπει δὲ νὰ ἐκλαμβάνεται ὡς ὁριακὴ ζημία ἡ ὁποία σημειοῦται διὰ θετικοῦ σημείου. Ὁ τρόπος αὐτὸς παρουσιάσεως ἔχει ὡρισμένα πλεονεκτήματα ἀπὸ ἀπόψεως ὑπολογισμοῦ.

πρόγραμμα τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος μειώνει τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ὡς τοῦτο καθορίζεται ὑπὸ τοῦ ἤδη ἐκλεγέντος προγράμματος. Ὅταν ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου εἶναι μηδέν, οὔτε κέρδος οὔτε ζημία προκαλοῦνται ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων εἰς τὸ πρόγραμμα.

Λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας, τὰ ὁποῖα δίδουν κέρδος μηδέν, οὐδεμία σχεδὸν σκέψις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατάρτισιν τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου α'. Ἁπλῶς ἐγγράφομεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

Κατόπιν τῶν ὅσων ἤδη ἐλέχθησαν, ἁπλῆ ἐπισκόπησις τοῦ πινακίου α' δεικνύει ὅτι ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἐπιτύχῃ καθαρὸν κέρδος ἂν μεταβάλῃ τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Τὸ πρόβλημα εἶναι τώρα πῶς θὰ γίνῃ ἡ μεταβολή. Εἰδικώτερον πρέπει νὰ καθορισθοῦν: α) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ πρόγραμμα. β) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος.

Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιχείρησις ἐνδιαφέρεται διὰ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, λογικὸν εἶναι νὰ ἐπιζητῆται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον δίδει τὸ μεγαλύτερον ὁριακὸν κέρδος. Ἐνταῦθα τὸ διάνυσμα αὐτὸ εἶναι τὸ Π_5 εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ κέρδος 6 μονάδες. Γενικῶς, ἐπιβάλλεται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου (1).

Πρὸς καθορισμὸν τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος, ἀντικαθιστώμενον ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ἐφ' ὅσον τὸ Π_5 εἶναι τὸ πλέον ἐπικερδὲς διάνυσμα, συμφέρει ἡ χρησιμοποίησις αὐτοῦ εἰς τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος τῶν ἐν ἀδρανείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, κυρίως δὲ (2) ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ ἐν σχετικῇ (ὡς πρὸς τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας τοῦ Π_5) ἀνεπαρκείᾳ εὑρισκομένου συντελεστοῦ. Ὁ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστὴς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μικρότερον ἐκ τῶν πηλίκων, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται ἂν διαιρέσωμεν τὰς ποσότητας καὶ τῶν τριῶν συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ Π_5. Ἐνταῦθα ἔχομεν $100/2=50$, $80/2=40$, $150/2=75$, συνεπῶς ὁ συντελεστὴς β εἶναι ὁ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ εὑρισκόμενος καὶ καθορίζει ἀνώτατον ἐπίπεδον δράσεως τοῦ Π_5 40 μονάδας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁλόκληρος ἡ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β $(40 \times 2=80)$ χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα Π_7 (τὸ ὁποῖον ὑποδηλοῖ ἀδράνειαν τοῦ συντελεστοῦ β), δὲν ἔχει θέσιν εἰς τὸ πρόγραμμα. Γενικῶς, πρὸς

1) Ἂν ὑπάρχουν εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν δύο ἢ περισσότεροι ἴσοι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῶν ἄλλων ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἐκλέγεται πρὸς εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα οἱονδήποτε ἐκ τῶν διανυσμάτων τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς ἴσους ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

2) Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

καθορισμὸν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ Π_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν [1] στοιχείων τοῦ εἰσερχομένου διανύσματος καὶ καθορίζομεν ἐν συνεχείᾳ ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα τὸ διάνυσμα τοῦ προγράμματος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ μικρότερον πηλῖκον [2]. Τὸ «εἰσερχόμενον» διάνυσμα Π_5 καὶ τὸ «ἐξερχόμενον» διάνυσμα Π_7 καταδεικνύονται διὰ τῶν ἐντόνων καθέτων καὶ ὁριζοντίων γραμμῶν τοῦ πινακίου.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ περατοῦται τὸ πρῶτον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν. Μηχανικῶς αἱ μέχρι τοῦδε ὑποδειχθεῖσαι κινήσεις ἔχουν ὡς ἀκολούθως:

α) Κατάστρωσις τοῦ πινακίου α΄ βάσει τῶν δοθεισῶν πληροφοριῶν: ἐγγραφὴ εἰς τὸ πινάκιον τῶν διανυσμάτων δράσεως καὶ ἀδρανείας κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν τάξιν· ἐγγραφὴ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν διανυσμάτων εἰς τὰ οἰκεῖα τετραγωνίδια τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ πινακίου· ἐγγραφὴ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου (βλ. πινάκ. α΄).

β) Καθορισμὸς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος βάσει τοῦ ἀρνητικοῦ στοιχείου μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὴν τελευταίαν σειράν.

γ) Καθορισμὸς τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος βάσει τοῦ μικροτέρου ἐκ τῶν πηλίκων τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ Π_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν στοιχείων τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος.

Καταφαίνεται ὅτι ὁ χρόνος τοῦ μηχανικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ πινακίου α΄ εἶναι ἐλάχιστος.

Δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν. Μὲ ἀφετηρίαν τὰς πληροφορίας τοῦ πινακίου α΄, προχωροῦμεν εἰς τὸ δεύτερον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν ἐκ τῶν ὁποίων τελικῶς συντίθεται τὸ πινάκιον β΄.

Τὸ πινάκιον β΄ διαφέρει σημαντικῶς ἀπὸ τὸ πινάκιον α΄. Αἱ διαφοραὶ ὀφείλονται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ διανύσματος Π_7 διὰ τοῦ διανύσματος Π_5 εἰς τὴν βάσιν. Λόγῳ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης κατέστη ἀναγκαῖον, ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ νέου τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ ἀναπροσαρμοσθοῦν τὰ στοιχεῖα πάντων τῶν διανυσμάτων (Π_1—Π_8) κατὰ τρόπον ὥστε νὰ δύναται ἓν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, μὲ πολλαπλασιαστὰς τὰ στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

---

1) Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν τὰ μηδενικὰ καὶ τὰ ἀρνητικὰ στοιχεῖα.

2) Ἂν εὑρεθοῦν δύο ἢ περισσότερα πηλίκα ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀμέσως δεξιὰ τῶν διαιρετέων τῶν ἴσων πηλίκων (καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου κατὰ σειρὰν διανύσματος ἀδρανείας), διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος. Τὸ διάνυσμα τῆς βάσεως τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον ἐκ τῶν οὕτω ληφθέντων πηλίκων, χαρακτηρίζεται ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα. Ἂν δύο ἢ περισσότερα ἐκ τῶν νέων πηλίκων, εἶναι ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, συνεχίζεται ὁ ὑπολογισμὸς καθ' ὅμοιον τρόπον, μὲ διαιρετέους τὰ ἀμέσως ἑπόμενα στοιχεῖα κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἓν (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον πηλῖκον.

Πινάκιον 6'.

Κ.Κ. →						2	2	3	4	6
↓	Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_6	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
	Π_6	20	1	—1			2		1	
→ 6	Π_5	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	Π_8	70		—1	1	—2	1	1		
Ο.Κ. →		240		3		4	—2		—1	

Δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἑρμηνευθῇ οἰκονομικῶς διατὶ ἀπαιτεῖται ὑπολογισμὸς νέων ἐπιπέδων διὰ τὰ διανύσματα τῆς βάσεως. Καθωρίσθη ἤδη ὅτι τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως τοῦ Π_5 εἶναι 40 μονάδες. Διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ Π_5 εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἀπαιτοῦνται: 1) ὁλόκληρος ἡ ἐν ἀδρανείᾳ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β (συνεπῶς τὸ Π_7 ἀφαιρεῖται ἐκ τῆς βάσεως), 2) 80 μονάδες (2×40), ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα Π_6 ἐξακολουθεῖ νὰ παραμένῃ εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον ἀδρανείας 20 μονάδας (=100—80), 3) 80 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ γ καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα ἀδρανείας Π_8 παραμένει εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον 70 μονάδας (=150—80).

Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναπροσαρμογὴ τῶν διανυσμάτων Π_1—Π_8, οὕτως ὥστε νὰ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως εἶναι ἀναγκαία, ὡς ἤδη ἐλέχθη, διὰ τὴν σύγκρισιν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἑκάστου διανύσματος μὲ τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδει ἡ α ὐ τ ὴ ποσότης συντελεστῶν χρησιμοποιουμένη ὅμως ὑπὸ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως. Ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς θὰ καταφανῇ ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης καταρτίσεως ἄλλου καλλιτέρου προγράμματος ἢ ἐὰν τὸ ἤδη καταρτισθὲν εἶναι τὸ ζητούμενον.

Μηχανικῶς ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου 6, γίνεται ὡς ἀκολούθως:

α) Αἱ δύο πρῶται σειραὶ τοῦ πινακίου α' μεταφέρονται εἰς τὸ πινάκιον 6' ἄνευ οὐδεμιᾶς μεταβολῆς [1].

6) Εἰς τὴν βάσιν ἀναγράφεται τὸ διάνυσμα Π_5 ἀντὶ τοῦ διανύσματος Π_7. Ἀριστερὰ τοῦ Π_5 ἀναγράφειαι τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ διανύσματος 6 νομισματικαὶ μονάδες.

γ) Διαιροῦνται πάντα τὰ στοιχεῖα τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν σειρὰν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος Π_7 εἰς τὸ πινάκιον α', δῖὰ τοῦ στοιχείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς αὐτῆς καὶ τῆς στήλης τοῦ «εἰσερχομένου»

1. Ὅταν τὰ πινάκια τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐνσωματοῦνται εἰς ἕνα πίνακα, δὲν ἀπαιτεῖται βεβαίως ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν.

διανύσματος εἰς τὸ πινάκιον α'. Τὰ προκύπτοντα πηλίκα ἐγγράφονται εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκιον β'. Οὕτω π.χ. τὸ ἕβδομον στοιχεῖον τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_5 (πινάκ. β') προσδιορίζεται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ στοιχείου 1, ἑβδόμου εἰς τὴν σειρὰν ἔναντι τοῦ Π_7 εἰς τὸ πινάκ. α', διὰ τοῦ στοιχείου 2 τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς αὐτῆς σειρᾶς καὶ τῆς στήλης τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκ. α'. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἐλέγξῃ δι' ἀναλόγων ὑπολογισμῶν τὰς λοιπὰς ἐγγραφὰς τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_5 εἰς τὸ πινάκ. β'.

δ) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου β' χρειάζεται περισσοτέραν προσοχήν. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τετραγωνίδιον τ τοῦ πινακ. β' (1).

1) Εὑρίσκομεν τὸ στοιχεῖον τοῦ ἀντιστοίχου τετραγωνιδίου τ' εἰς τὸ πινάκιον α (2).

2) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ εὑρεθὲν στοιχεῖον τοῦ τ' τὸ γινόμενον: τοῦ στοιχείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ τ' καὶ τῆς στήλης τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, εἰς τὸ πινάκιον α' ἐ π ὶ τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διασταυρώσεως τῆς στήλης τοῦ τ εἰς τὸ πινάκ. β' καὶ τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ «εἰσερχομένου διανύσματος» εἰς τὸ πινάκ. β'.

3) Τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν ἐγγράφομεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον τ (τοῦ πινακ. β').

Διὰ νὰ κατανοηθῇ ὁ τελευταῖος ὑπολογισμὸς χρειάζεται παρακολούθησις τῶν ὑποδεικνυομένων κινήσεων ἐπὶ τῶν πινακίων α' καὶ β'. Μὲ ὀλίγην ἐξάσκησιν ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς γίνεται σχεδὸν αὐτομάτως, ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ ἀναγνώστης πειραματιζόμενος βάσει τῶν δεδομένων τῶν πινακίων α' καὶ β'. Δίδομεν ἐνταῦθα μερικὰ παραδείγματα:

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ πρῶτον στοιχεῖον τοῦ Π_0 εἰς τὸ πινάκ β'. 1) Τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον εἰς τὸ πινάκ. α' εἶναι 100. 2) Ἀπὸ τὸ 100 ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ στοιχείου 2 (εὑρισκομένου εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ 100 μὲ τὴν στήλην τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκ. α'), ἐπὶ τὸ στοιχεῖον 40 (τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς στήλης τοῦ πρὸς ὑπολογισμὸν στοιχείου καὶ τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκ. β'). 3) Ἐγγράφομεν τὴν διαφορὰν $100-80=20$ εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον κάτωθεν τοῦ Π_0.

Καθ' ὅμοιον τρόπον πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τετάρτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_6 εἰς τὸ πινάκιον β' (διασταύρωσις στήλης Π_5 καὶ τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_6) ἔχομεν: $0-2\times 0=0$.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἕκτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 (διασταύρωσις τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 καὶ τῆς στήλης Π_8) ἔχομεν: $1-2\times 0=1$.

1) τ δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε τετραγωνίδιον ἐκτὸς βεβαίως τῶν τετραγωνιδίων τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, τὰ ὁποῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ ὑπὸ στοιχεῖον γ' ἀναγραφόμενα.

2) Τὸ στοιχεῖον τοῦτο δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 ἔχομεν: $0-2\times1/2=-1$, κ.ο.κ.

ε) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακ. 6΄ γίνεται, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχεῖον δ΄ λεχθέντων, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχεῖον στ΄ (πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν) λεχθέντων. Οὕτω, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακ. 6΄ ἔχομεν: $0-(-6\times1/2)=3$ ἢ $[0\times(-1)+6\times1/2+0\times(-1)]-0=3$ ὅπου 0,6,0 (ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν) παριστοῦν τὸ καθαρὸν κέρδος τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ὁποίων θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ τὸ διάνυσμα Π_7 τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τρίτον στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἕκτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακ. 6΄ ἔχομεν $(-2)-(-6)\ X0=-2$ ἢ $(2X0+0X6+1X6)-2=-2$.

Ἐπειδὴ οἱ ὡς ἄνω δύο τρόποι ὑπολογισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμοι, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ταυτοχρόνως πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ἐγγραφῶν ἑκάστου νέου πινακίου. Ἂν δηλαδὴ παρατηρηθῇ διαφορὰ ἀποτελέσματος τῶν δύο ὑπολογισμῶν σημαίνει ὅτι ἔγινε λάθος εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ πινακίου.

Μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τῶν ὡς ἄνω ὑπολογισμῶν, ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὸ πινάκιον 6΄. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ νέον πρόγραμμα (Π_6 : 20_1 Π_5 : 40_2 Π_8 : 70) εἶναι καλλίτερον ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν (Π_6 : 100_2 Π_7 : 80_1 Π_8 : 150) διότι δίδει καθαρὸν κέρδος 240 νομισματικὰς μονάδας (40X6). Τὸ καθαρὸν κέρδος καταγράφεται ὡς πρῶτον στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς [1]. Παρατηροῦμεν ὅμως ἐπίσης ὅτι δύο ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, ὅπερ σημαίνει ὅτι εἶναι δυνατὴ περαιτέρω βελτίωσις τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάσιν τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ἀρνητικὸν στοιχεῖον μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, ἤτοι τοῦ Π_2 καὶ δι' ἀφαιρέσεως τοῦ Π_2, ἐπειδὴ $20/2<70/1$. Ἑπομένως οἱ ὑπολογισμοὶ δέον νὰ συνεχισθοῦν διὰ τὴν κατάρτισιν νέου πινακίου.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ δίδομεν τὸ γενικὸν κριτήριον τῆς μεθόδου simplex περὶ τῆς συνεχίσεως ἢ μὴ τῶν ὑπολογισμῶν.

Κριτήριον simplex. Μετὰ τὴν κατάρτισιν ἑκάστου πινακίου:

1) Ἂν ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, βελτίωσις τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος εἶναι δυνατή, καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ συνεχίζονται, ἐκτὸς ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἶναι μὴ θετικὰ [2] ὁπότε συνήθως σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λανθασμένην διατύπωσιν· 2) ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναί μὴ ἀρνητικὰ [3], τὸ ἐν λόγῳ πινάκιον περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ μέγιστον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα δίδεται ἐκ τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς.

---

1) Τὸ στοιχεῖον αὐτὸ μολονότι δὲν ὑποδηλοῖ ὁριακὸν κέρδος, τίθεται εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν διότι ἐξομοιοῦται ὑπολογιστικῶς πρὸς τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς σειρᾶς ταύτης.

2) Ἤτοι ἀρνητικὰ ἢ μηδέν.

3) Ἤτοι θετικὰ ἢ μηδέν.

Συνέχεια ὑπολογισμῶν. Ἡ κατάστρωσις τοῦ ἑπομένου πινακίου γίνεται βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου β', ὅπως ἀκριβῶς ἐγένετο ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου β' βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου α'.

Πινάκιον γ'.

Κ.Κ. →						2	2	3	4	6
	B	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
→ 2	Π_2	10	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{2}$	
6	Π_5	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	Π_8	60	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2		1	$-\frac{1}{2}$	
Ο.Κ. →		260	1	2		4				

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ πινακ. γ' συνάγεται ὅτι: α) Τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ νέου προγράμματος (260 ν.μ) εἶναι ἀνώτερον τοῦ καθαροῦ κέρδους τοῦ προηγουμένου προγράμματος (240 ν.μ.). β) Οὐδὲν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι ἀρνητικόν· συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον **simplex**, τὸ πινάκιον γ' περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως, ἤτοι $\Pi_2 : 10$, $\Pi_5 : 40$ καὶ $\Pi_8 : 60$ καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ ζητούμενον μέγιστον κέρδος εἶναι 260 νομισματικαὶ μονάδες.

Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ πινακ. β' ἱκανοποιοῦν ἐπίσης τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Οὕτω ἔχομεν:

Ἐπίπεδον δράσεως		$\Pi_1 = \lambda_1 = 0$
»	»	$\Pi_2 = \lambda_2 = 10$
»	»	$\Pi_3 = \lambda_3 = 0$
»	»	$\Pi_4 = \lambda_4 = 0$
»	»	$\Pi_5 = \lambda_5 = 40$
Ἐπίπεδον ἀδρανείας		$\Pi_6 = \lambda_6 = 0$
»	»	$\Pi_7 = \lambda_7 = 0$
»	»	$\Pi_8 = \lambda_8 = 60$ [1]

Συνεπῶς αἱ (5) καὶ (6) γίνονται:

1. Ἡ μὴ χρησιμοποίησις τῶν 60 μονάδων ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν ἔλλειψιν ἀντιστοίχων ποσοτήτων ἐκ τῶν συμπληρωματικῶν συντελεστῶν *α* καὶ *β* (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

$$\varphi(\lambda) = 2 \times 0 + 2 \times 10 + 3 \times 0 + 4 \times 0 + 6 \times 40 = 260 = \text{μέγιστον}$$

καὶ $0 . \Pi_1 + 10 . \Pi_2 + 0 . \Pi_3 + 0 . \Pi_4 + 40 . \Pi_5 + 0 . \Pi_6 + 0 . \Pi_7 + 60 . \Pi_8 = \Pi_0$

ἢ ἀναλυτικώτερον :

$$0 \times 2 + 10 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 2 + 40 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 60 \times 0 = 100$$
$$0 \times 2 + 10 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 40 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 60 \times 0 = 80$$
$$0 \times 0 + 10 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 1 + 40 \times 2 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 60 \times 1 = 150$$

Ἐκθέτομεν κατωτέρω συστηματικῶς τὸ εὑρεθὲν πρόγραμμα :

«Ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως Α.

Ἐπιλεγεῖσαι Παραγ. Δραστηριότ. (Ε.π.δ.)	Ἐπίπεδον δράσεως Ε.π.δ.	Κέρδος κατὰ μονάδα Ε.π.δ.	Σύνολον κέρδους ἐξ ἑκάστης Ε.π.δ.	Συνολικὸν κέρδος τοῦ προγράμματος	Ἀχρησιμοπ. ποσότης συντελεστῶν
Π_2	10	2	20		60 μον.
Π_5	40	6	240	260	ἐκ τοῦ συντ. γ

3. Παρατηρήσεις.

1. Τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου μεγιστοποιήσεως (1) παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον.

α) Τὸ πρῶτον στοιχεῖον παριστᾷ πάντοτε τὸ «μέγιστον» δυνατὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα (κέρδος, παραγωγὴ κλπ.).

β) Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους διαθεσίμους ποσότητας συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα, λαμβάνομεν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος. Οὕτω ἐνταῦθα :

$$1 \times 100 + 2 \times 80 + 0 \times 150 = 260.$$

Ἡ σχέσις αὕτη ὀφείλεται εἰς τὴν λεγομένην «δυαδικὴν» φύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἕκαστον πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἔχει λύσιν ἴσην πρὸς τὴν λύσιν τοῦ ἀντιστοίχου «διδύμου προβλήματος» ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ λύσεις τῶν δύο προβλημάτων δίδονται ὑπὸ τοῦ τελικοῦ πινακίου τῶν ὑπολογισμῶν. Ἐνταῦθα τὰ στοιχεῖα 1, 2, 0 τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, εἶναι λύσεις τοῦ διδύμου προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς σημασίας τῆς διαδικῆς φύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἐκφεύγει τῶν πλαισίων τῆς παρούσης εἰσαγωγικῆς ἐργασίας. Τὴν ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσαν σχέσιν δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ χρησιμο-

1. «Πινάκιον μεγιστοποιήσεως» καλεῖται συνήθως τὸ τελευταῖον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν, εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως.

ποιήσωμεν πρὸς τελικὸν ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ὑπολογισμῶν. Ἂν, ὁ ἐν ἀρχῇ τῆς παρούσης παραγράφου (β) ἀναφερόμενος ὑπολογισμός, δίδῃ ἀποτέλεσμα διάφορον τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς, τότε οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι λανθασμένοι.

γ) Τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικά· τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν βάσιν ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων δὲν αὐξάνει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα, δυνατὸν δὲ νὰ τὸ μειώσῃ (περίπτωσις τοῦ Π_1).

2. Ὑπετέθη ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ δὲν ζημιώνει τὴν ἐπιχείρησιν. Ἂν ὅμως αἱ μὴ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες προκαλοῦν ζημίας, λόγῳ π.χ. ἀδυναμίας διατηρήσεως αὐτῶν ἢ ἐξόδων ἀποθηκεύσεως κλπ., τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως πρέπει νὰ μειωθῇ ἀντιστοίχως. Εἶναι δυνατὸν τότε νὰ ἀπαιτῆται συνέχισις τῶν ὑπολογισμῶν πρὸς εὕρεσιν καλυτέρου προγράμματος ὑπὸ τὰς νέας συνθήκας (1).

3. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πινακίων ὑπολογισμοῦ δὲν εἶναι συνήθως μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, δυνατὸν δὲ νὰ εἶναι πολὺ μικρότερος. Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ὑπολογισμῶν συνιστῶνται τὰ ἀκόλουθα: α) Χρῆσις τετραγωνισμένου χάρτου διὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν πινακίων, β) ἐνσωμάτωσις τῶν πινακίων εἰς ἕνα συνεχῆ πίνακα, οὕτως ὥστε νὰ ἀποφεύγεται ἡ ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν καὶ νὰ διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς ἑκάστου πινακίου δι' ἀμέσου συσχετίσεως πρὸς τὸ προηγούμενον πινάκιον. γ) Ὅταν τὸ «εἰσερχόμενον» διάνυσμα ἔχει ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ στοιχεῖα, τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν σειρῶν τῶν μηδενικῶν στοιχείων, μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τοῦ νεοκαταρτιζομένου πινακίου. Ὁμοίως, πάντα τὰ στοιχεῖα τῶν στηλῶν αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς μηδενικὰ στοιχεῖα τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰς ἀντιστοίχους θέσεις τοῦ νεοκαταρτιζομένου πινακίου. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν μηδενισμὸν τοῦ ὑπὸ στοιχ. δ, παρ. ***3*** τοῦ παρόντος τμήματος (δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν) προσδιοριζομένου γινομένου. Εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι, νομίζομεν, σκόπιμον νὰ σημειοῦνται αἱ ἐν λόγῳ στῆλαι ἢ σειραί, τὰ δὲ στοιχεῖα των νὰ μεταφέρωνται ἀμέσως εἰς τὸ νέον πινάκιον.

4. Εἶναι δυνατὴ ἡ παράλειψις τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας πρὸς συντόμευσιν τῶν ὑπολογισμῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ἐξασφαλίζεται ὅμως τὸ ὑπ' ἀριθ. (1) ἀνωτέρω, κριτήριον τελικοῦ ἐλέγχου.

5. Τὸ ληφθὲν ἐνταῦθα πρόβλημα εἶναι βεβαίως εὐκολώτατον (2) καὶ δύναται νὰ λυθῇ καὶ δι' ἄλλων μεθόδων. Ἡ μέθοδος simplex ἐσχεδιάσθη διὰ τὴν λύσιν πολὺ συνθετωτέρων προβλημάτων. Ἐχρησιμοποιήσαμεν ἐν τούτοις τὸ ἀνωτέρω ἁπλοῦν πρόβλημα δι' εὐκολίαν ἀναπτύξεως τῆς μεθόδου καὶ διότι ἡ διαδικασία λύσεως τῶν συνθέτων προβλημάτων εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδία μὲ τὴν ἐνταῦθα χρησιμοποιηθεῖσαν.

---

1) Ἡ περίπτωσις αὕτη μολονότι ἀναμφισβητήτου πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος δὲν ἀναφέρεται εἰς τὴν φιλολογίαν τοῦ Γ.Π. Ὁ γράφων διεβεβαιώθη, κατόπιν ἐπανειλημμένων πειραματισμῶν, ὅτι ὁ χειρισμὸς τῆς παρούσης περιπτώσεως εἶναι δυνατὸς ἄνευ οὐσιαστικῆς ἀλλοιώσεως τῆς περιγραφείσης τεχνικῆς.

2) Μὲ ὀλίγην πεῖραν ἡ ἐκτέλεσις τῶν ὑπολογισμῶν δύναται νὰ γίνῃ ἐντὸς πενταλέπτου.

6. Διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως ἀκολουθεῖται ἡ περιγραφεῖσα διαδικασία τῆς μεθόδου simplex, μὲ μικρὰς μόνον ἀλλαγὰς ὑπαγορευομένας ὑπὸ τῆς φύσεως τῶν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως [1].

4. *Περίληψις.*

Ἡ διαδικασία λύσεως τῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως δύναται νὰ συνοψισθῇ ὡς ἀκολούθως :

α) Ταξινόμησις καὶ ἔλεγχος τῶν πληροφοριῶν. Ἀπαιτοῦνται συνήθως πληροφορίαι : 1) τῆς ποσότητος καὶ τοῦ εἴδους τῶν διαθεσίμων οἰκονομικῶν μέσων (συντελεστῶν παραγωγῆς ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν), 2) τῶν διαθεσίμων μεθόδων δράσεως (παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν) καὶ 3) τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (κέρδους, παραγωγῆς κλπ.) τὸ ὁποῖον ἐπιζητεῖται ὅπως καταστῇ μέγιστον.

β) Ἐπιλογὴ διανυσμάτων ἀδρανείας.

γ) Διατύπωσις τοῦ προβλήματος (καὶ ἔλεγχος τῆς «γραμμικότητος» αὐτοῦ).

δ) Κατάρτισις τοῦ πινακίου α΄ δι' εἰσαγωγῆς τῶν πληροφοριῶν καὶ τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὰς οἰκείας θέσεις καὶ δι' ἐγγραφῆς τῶν στοιχείων τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

ε) Καθορισμὸς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3, ἀνωτέρω, πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν).

ϛ) Καθορισμὸς τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3. πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν).

ζ) Κατάστρωσις τοῦ δευτέρου πινακίου ὡς ἀκολούθως :

1) Εἰσαγωγὴ τοῦ νέου διανύσματος εἰς τὴν βάσιν.

2) Ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ νέου διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3, δεύτερον στάδιον ὑπολογ.).

3) Ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου (ὡς ἐν παρ. 3, δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν).

η) Ἐπισκόπησις τοῦ δευτέρου πινακίου πρὸς καθορισμόν :

1) Τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος τοῦ νέου προγράμματος.

2) Τῆς δυνατότητος περαιτέρω βελτιώσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (ἐφαρμογὴ «κριτηρίου simplex»).

Ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης βελτιώσεως, τότε ἐπιβάλλεται :

θ) Κατάρτισις τρίτου πινακίου κατὰ τὰ γνωστά, κ.ο.κ. μέχρις ὅτου ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κριτηρίου simplex δείξῃ ὅτι ἐπετεύχθη τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως ἢ ὅτι λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος.

ι) Ἔλεγχος τῆς ὀρθότητος τῶν ἐγγραφῶν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ὑπὸ στοιχ. β΄ τῆς παρ. 4 κριτηρίου.

---

1) Charnes A., W. W. Cooper, and A. Henderson. «An introduction to Linear Programming», New York, 1953. Neuman, P., «Some calculations on least - cost diets», Oxford Bulletin of Statistics, Aug. 1954.

ια) Ἔλεγχος τῆς οἰκονομικῆς λογικῆς τοῦ «ἀρίστου» προγράμματος δράσεως διὰ συσχετίσεως πρὸς τὰ δεδομένα καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

ιβ) Συστηματικὴ ἔκθεσις τοῦ εὑρεθέντος «ἀρίστου» προγράμματος δράσεως διὰ σαφοῦς καθορισμοῦ: 1) τοῦ εἴδους καὶ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, 2) τοῦ συνολικῶς ἐπιτυγχανομένου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος, 3) τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τοῦ προγράμματος ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α (1)

Dorfman R., «Application of Linear Programming to the theory of the Firm», University of California Press, 1951.

» » «Mathematical or Linear Programming», American Ecom. Review, 1953.

Charnes A., W. W. Cooper and A. Henderson, «An introduction to Linear Programming», New York, 1953.

Boles N. J., «Linear Programming and Farm Management Analysis», Journal of Economics, February 1955.

Lomax K. S., «Allocation and Programming in Modern Economics», The Manchester School of Economics No 3, Sept. 1953.

Morton G., «Notes on Linear Programming», Economica, Nov. 1953.

Heady O., «Simplified Presentation and Logical Aspects of Linear Programming Technique», Journal of Farm Economics, Proceedings, 1954.

Neuman P., «Some calculations on least-cost diets», Oxford Bulletin of Statistics, Aug. 1954

Β.

Champernowne D. G., «A note on J. V. Neumann's article on a model of Economic Equilibrium», The Review of Economic Studies III. Dantzig G.B. «A procedure for maximizing a linear function subject to linear inequalities» Washington: Headquarters, U.S.Air forces Comptroller, 1948. Τοῦ ἰδίου, «A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem», Washington: U.S.Air forces Comptroller, 1948. Τοῦ ἰδίου, «Maximization of a Linear form whose variables are subject to a system of Linear Inequalities», Washington: Headquarters, U.S.Air forces Comptroller, 1949. Τοῦ ἰδίου, «Optimal solution of a dynamic Leontief model with substitution», Econometrica, July 1955. Τοῦ ἰδίου, «Programming of interdependent activities, II mathematical model» Econometrica, 1949. Τοῦ ἰδίου, «The dual Simplex Algorithm». The Rand Corporation Research Memorandum R.M. 1270, July, 1954. Gale D., V. W. Kuhn and A. W. Tucker,

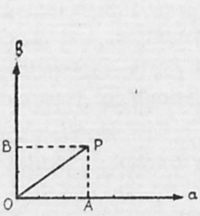
1) Αἱ ὑπὸ στοιχεῖον Α ταξινομούμεναι ἐργασίαι περιέχουν ἐνδιαφέροντα τμήματα μὴ τεχνικῆς φύσεως.

«Four equivalent Linear - Convex Problems». Princeton, 1949. Georgescu-Roegen N. «Leontief's system in the light of recent results», Review of Economic and Statistics, XXXVI. Hawkins, D. «Some conditions of Marcoeconomic stability», Econometrica, XVI (1948). Holley, J. L., «A dynamik model: I. Principles of model structure», Econometrica. XX, Oct. 1952. Koopmans, T. C. ed. «Activity analysis of production and allocation». Cowles Commission for Research in Economics, 1951. Τοῦ ἰδίου, «A mathematical model of production», Cowles Commission for Research in Economics, 1949. Τοῦ ἰδίου, «Efficient allocation of resources», Cowles Commission for Recearch in Economics, 1949. Τοῦ ἰδίου, «Optimum utilization of the transportation system», Econometrica (Supplement), July, 1949. Morgenstern ed., «Economic activity analysis», N.Y., 1954. Weyl H., «The elementary theory of Convex polyhedra», in Contributions to the theory of games, ed. A.W. Kuhn and Tucker, Princeton University Press, 1950.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

I. *Παραγωγικαὶ δραστηριότητες καὶ διανύσματα*

1. «Ὡς παραγωγικὴ δραστηριότης» (activity) νοεῖται εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς μονάδος τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου. Οὕτω π.χ. ὁ συνδυασμὸς 3 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ α μὲ 2 μονάδας τοῦ συντελεστοῦ ϐ πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω συνιστᾷ μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Αὕτη δύναται νὰ παρασταθῇ εἰς τὸ καρτεσιανὸν σύστημα συντεταγμένων ὡς ἀκολούθως :



Διάγραμμα 1

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων τοῦ ἀνωτέρω συστήματος μετροῦνται αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ α καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ ϐ. Τὸ σημεῖον P τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας (3,2) παριστᾷ τὴν ὡς ἄνω παραγωγικὴν δραστηριότητα. (π.δ.). Ἡ αὐτὴ π.δ. δύναται ἐπίσης νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος OP, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων, πέρας τὸ σημεῖον P καὶ διεύθυνσιν τὴν τῆς εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται ἐκ τῶν σημείων O καὶ P. Τὸ τμῆμα τοῦτο καλεῖται γεωμετρικῶς διάνυσμα (vector).

Γενικῶς διάνυσμα καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον ὡρισμένην κατεύθυνσιν, ἤτοι ὡρισμένην διεύθυνσιν καὶ φοράν. Διὰ τὸν συμβολισμὸν ἑνὸς διανύσματος χρησιμοποιοῦνται τὰ γράμματα τῶν ἄκρων αὐτοῦ μὲ μίαν ἐπιγραμμήν, π.χ., διὰ τὸ διάνυσμα τοῦ διαγράμματος 1 γράφομεν : $\overline{OP}$ [1].

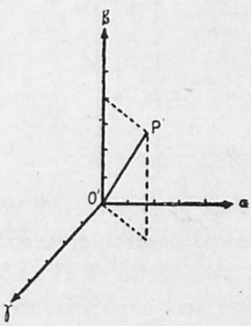
2. Τὰ διανύσματα διακρίνονται γενικῶς εἰς ἐ λ ε ύ θ ε ρ α, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἔχουν ὡς ἀρχὴν οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ χώρου καὶ εἰς ἐ ν τ ε τ ο π ι σ μ έ ν α, τὰ ὁποῖα διακρίνονται περαιτέρω εἰς ὀ λ ι σ θ α ί ν ο ν τ α, δυνάμενα νὰ ἔχουν ὡς ἀρχὴν οἱονδήποτε σημεῖον μιᾶς εὐθείας, διεύθυνσιν δὲ τὴν τῆς εὐθείας καὶ εἰς ἐ φ α ρ μ ο σ τ ά, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡρισμένον σημεῖον ἐφαρμογῆς (σταθερὰν ἀρχήν). Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ διανύσματα τῆς τελευταίας κατηγορίας, εἰδικώτερον δὲ μὲ διανύσματα ἔχοντα ὡς σημεῖον ἐφαρμογῆς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων [2].

Ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας προκύπτει εὐκόλως ὅτι τὰ ὡς ἄνω διανύσματα ἔχουν ὡς συντεταγμένας τὰς συντεταγμένας τοῦ πέρατος αὐτῶν. Οὕτω π.χ. τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ (διαγρ. 1) ἔχει συντεταγμένας OA ($=3$ μονάδες ἐκ τοῦ α) καὶ OB ($=2$ μονάδες ἐκ τοῦ β), αἱ ὁποῖαι εἶναι ὡς εἴδομεν καὶ συντεταγμέναι τοῦ σημείου P.

3. Ἀναλυτικῶς (ἀλγεβρικῶς) τὸ διάνυσμα δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς μία στήλη (ἢ σειρὰ) ἀριθμῶν διατεταγμένων καθ' ὡρισμένην τάξιν. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ὀνομάζονται σ τ ο ι χ ε ῖ α τοῦ διανύσματος καὶ ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς γεωμετρικὰς συντεταγμένας αὐτοῦ. Οὕτω π.χ. τὸ διάνυσμα $\overline{OP}$ ἀναλυτικῶς θὰ εἶναι :

$$\overline{OP} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. Ἂν πρὸς παραγωγὴν τῆς μονάδος ἑνὸς ἀγαθοῦ ἀπαιτοῦνται 3,6 καὶ 4 μονάδες ἐκ τῶν τριῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ ἀντιστοίχως, ἡ π.δ. διὰ τὸ ἐν λόγῳ ἀγαθὸν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα $\overline{O'P'}$ ἐντὸς τοῦ τρισδιαστάτου χώρου :



Διάγραμμα 2

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν κατηγμένων τοῦ ἀνωτέρω τρισορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων μετροῦνται αἱ ποσότητες τοῦ συντελεστοῦ γ.

Ἀναλυτικῶς τὸ διάνυσμα $\overline{O'P'}$ θὰ εἶναι :

1) Διὰ συντομίαν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ ἓν μόνον γράμμα μετὰ ἢ ἄνευ ἐπιγραμμῆς.

2) Τὰ διανύσματα ταῦτα ὀνομάζονται συνήθως δ ι α ν υ σ μ α τ ι κ α ὶ ἀ κ τ ῖ ν ε ς. Βλ. Φ. Βασιλείου, «Μαθήματα Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν», Ἀθῆναι, 1950, σ. 86.

$$\overline{O'P'} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. Ὁ ἀριθμὸς τῶν συντελεστῶν οἱ ὁποῖοι λαμβάνουν μέρος εἰς δοθεῖσαν π.δ. καθορίζει προφανῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ συνεπῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστάσεων τοῦ χώρου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἐν λόγῳ π.δ. διάνυσμα.

Ἂν εἰς μίαν π.δ. ὑπεισέρχωνται περισσότεροι τῶν τριῶν παραγωγικοὶ συντελεσταί, τὸ ἀντιστοιχοῦν διάνυσμα ἀνήκει εἰς τὸν καλούμενον ὑπερχῶρον (hyper space) δηλ. εἰς τὸν νοητὸν χῶρον ὁ ὁποῖος ἔχει περισσοτέρας τῶν τριῶν διαστάσεις [1]. Γραφικὴ παράστασις τοιούτου διανύσματος δὲν εἶναι δυνατή, ἡ ἀναλυτικὴ ὅμως παράστασις αὐτοῦ ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ἁπλῆ. Οὕτω, ἂν π.χ. εἰς μίαν π.δ. λαμβάνουν μέρος οἱ παραγωγικοὶ συντελεσταὶ α, β. γ καὶ δ εἰς ποσότητας 1, 2, 4 καὶ 3 μονάδας ἀντοιστοίχως, τὸ σχετικὸν διάνμσμα θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Γενικῶς, ἡ δοθεῖσα π.δ. ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τοὺς συντελεστὰς α, β, γ, ...ν κατὰ ποσότητας α_1, α_2, α_3, ...α_ν μονάδας θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu \end{bmatrix}$$

6. Ἑκάστη π.δ. δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς οἱονδήποτε (θετικὸν) ἐπίπεδον—ἐὰν βεβαίως τὸ ἐπιτρέπουν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν. Τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς π.δ. ὀνομάζεται ἐπίπεδον δράσεως καὶ μετρεῖται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων τῶν παραγομένων οἰκονομικῶν ἀγαθῶν. Εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν ὑποτίθεται ὅτι αἱ ὑφ᾽ ἑκάστης παραγωγικῆς διαδικασίας χρησιμοποιούμεναι ποσότητες παραγωγικῶν συντελεστῶν εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν ποσότητα τῶν παραγομένων ἀγαθῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τῆς π.δ. (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν) [2].

Οὕτω π.χ., ἡ π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω (παράγρ. 1) εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως, τῆς μονάδος χρησιμοποιεῖ 3 μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α κα 2 μονάδας ἐκ τοῦ

1) Οἱ ὑπερχῶροι λαμβάνονται ἐνταῦθα ὡς εὐκλείδειοι, δηλ. ὑποτίθεται ὅτι ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς χώρους αὐτοὺς αἱ ἀρχαὶ τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας.

2) Βλ. μέρος πρῶτον (τμ. II § 1).

συντελεστοῦ β καὶ συνεπῶς αἱ σχέσεις τῆς ποσότητος τοῦ παραγομένου προϊόντος πρὸς τὰς χρησιμοποιουμένας ποσότητας συντελεστῶν α καὶ β εἶναι $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{2}$ ἀντιστοίχως· ἡ αὐτὴ π.δ. εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῶν μονάδων θὰ ἀπαιτήσῃ 6 (2×3) μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ 4 (=2×2) μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β, οὕτως ὥστε θὰ ἔχωμεν πάλιν τὰς ἀρχικὰς σχέσεις ποσότητος παραγομένου προϊόντος καὶ ποσοτήτων χρησιμοποιουμένων συντελεστῶν α καὶ β:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ἡ π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως 2 δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ ἀντιστοιχοῦντος διανύσματος $\overline{OP}$ (διάγρ. 1) ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2.

$$2 \times \overline{OP} = 2 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ σημειουμένου πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ σχηματίζομεν διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ γινόμενα 6 (=2×3) καὶ 4 (=2×2) κατὰ σειράν:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Γενικῶς, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ ἀριθμὸν σχηματίζομεν ἓν νέον διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ γινόμενα τῶν στοιχείων τοῦ δοθέντος διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, π.χ.:

$$\kappa . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa\alpha_1 \\ \kappa\alpha_2 \\ \kappa\alpha_3 \\ . \\ . \\ . \\ \kappa\alpha_\nu \end{bmatrix}$$

Γεωμετρικῶς τὸ γινόμενον δοθέντος δανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν ρ δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς νέου διανύσματος μὲ συντεταγμένας ρ φορὰς μεγαλυτέρας τῶν συντεταγμένων τοῦ δοθέντος διανύσματος. Οὕτω π.χ. τὸ γινόμενον 2×$\overline{OP}$ (τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως 2) δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ διανύσματος $\overline{OP'}$ (διάγρ. 3) τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας OA′ (=2×OA) καὶ OB′ (=2×OB):

Διάγραμμα 3

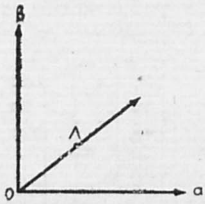
5. 6. 92

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν δοθὲν διάνυσμα ἐπὶ τὴν μονάδα λαμβάνομεν διάνυσμα μὲ στοιχεῖα ἀνὰ ἓν ἴσα πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ δοθέντος. Τὰ δύο διανύσματα καλοῦμεν τότε ἴ σ α. Γενικῶς ἴσα εἶναι δύο ἢ περισσότερα διανύσματα ἂν ἔχουν τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἀνὰ ἓν ἴσα.

7. Καθ' ὑπόθεσιν, ἑκάστη π,δ. δύναται νὰ διεξαχθῇ ὄχι μόνον εἰς οἱονδήποτε (1) ἀκέραιον ἀλλὰ καὶ εἰς οἱονδήποτε κλασματικὸν ἐπίπεδον δράσεως, ἄνευ καταστρατηγήσεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν (ὑ π ό θ ε σ ι ς δ ι α ι ρ ε τ ό τ η τ ο ς). Οὕτω, ἡ π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω εἰς τὸ ἐπίπεδον $\frac{1}{10}$ τῆς μονάδος θὰ ἀπαιτήσῃ $\frac{3}{10}$ μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ $\frac{2}{10}$ μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β. Διανυσματικῶς :

$$\frac{1}{10} \times \overline{OP} = \frac{1}{10} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

8. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν καὶ ἡ ὑπόθεσις τῆς διαιρετότητος ὁδηγοῦν εἰς γ ρ α μ μ ι κ ὰ ς σ υ ν ε χ ε ῖ ς συναρτήσεις παραγωγῆς, αἱ ὁποῖαι ἐκφράζονται γεωμετρικῶς ὡς εὐθεῖαι γραμμαὶ (2) ἐντὸς τοῦ θετικοῦ χώρου τοῦ συστήματος συντεταγμένων μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος τούτου :



Διάγραμμα 4

Ἐκ τοῦ διαγρ. 4 καταφαίνεται ὅτι μία γραμμικὴ συνάρτησις παραγωγῆς δύναται νὰ νοηθῇ ὡς προκύπτουσα ἐκ δοθείσης π.δ. (ἤτοι ἐξ ἑνὸς διανύσματος)(3), ἂν τὰ ἐπίπεδον δράσεως αὐτῆς λαμβάνουν συνεχεῖς θετικὰς τιμάς.

9. Ἂν τὸ ἐπίπεδον δράσεως μιᾶς π.δ., π.χ. τῆς π.δ. διὰ τὸ ἀγαθὸν ω (παράγρ. 1), εἶναι μηδὲν θὰ ἔχωμεν :

$$0 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) Θετικόν.

2) Αἱ γραμμαὶ αὗται καλοῦνται ἀκριβέστερον ἡ μ ι ε υ θ ε ῖ α ι ἢ ἀ κ τ ῖ ν ε ς καθ' ὅσον δὲν ἐπεκτείνονται ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

3) Τοῦ διανύσματος $\overline{OΛ}$ ἐν προκειμένῳ.

Τὸ διάνυσμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος καλεῖται μ η δ ε ν ι κ ὸ ν[1] καὶ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου 0. Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον θὰ εἶναι:

$$\overline{0} \equiv \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix}$$

10. Ἐφ' ὅσον αἱ ποσότητες ἑνὸς παραγωγικοῦ συντελεστοῦ μετροῦνται ἐπὶ ἑνὸς συγκεκριμένου ἄξονος τοῦ συστήματος συντεταγμένων, ἡ μονὰς μετρήσεως τῆς ποσότητος τοῦ ἐν λόγῳ συντελεστοῦ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα μὲ συντεταγμένην ἐπὶ τοῦ οἰκείου ἄξονος τὴν μονάδα καὶ μηδενικὰς τὰς λοιπὰς συντεταγμένας. Οὕτω εἰς τὸ διάγρ. 1 θὰ ἔχωμεν διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ καὶ } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ἀντιπροσωπεύοντα τὰς μονάδας μετρήσεως τῶν συντελεστῶν α καὶ β ἀντιστοίχως. Ταῦτα καλοῦμεν μ ο ν α δ ι α ῖ α δ ι α ν ύ σ μ α τ α.

Γενικῶς εἰς ἕνα ν-διάστατον χῶρον θὰ ἔχωμεν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 1_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_1 \\ 1_2 \\ 0_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ 1_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0_\nu \end{bmatrix} \; \ldots\ldots \; \begin{bmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1_\nu \end{bmatrix}$$

τὰ ὁποῖα οἰκονομικῶς παριστοῦν μονάδας μετρήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐπὶ τῶν ν ἀξόνων τοῦ συστήματος συντεταγμένην. Πᾶσα συντεταγμένην διανύσματος δύναται τώρα νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ ἀντιστοίχου μοναδιαίου διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστῶντα τὴν συντεταγμένην, π.χ. ἡ πρώτη συντεταγμένη τοῦ διανύσματος $\overline{OP}$ (διάγραμμα 1) θὰ εἶναι:

$$3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

11. Μέχρι τοῦδε ἠσχολήθημεν μὲ μαθηματικὰς ἐννοίας καὶ παραστάσεις ἀναφερομένας εἰς μεμονωμένας π.δ. Εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους θὰ ἀσχοληθῶμεν κυρίως μὲ τὸν χειρισμὸν περισσοτέρων τῆς μιᾶς π.δ.

1) Γεωμετρικῶς τὸ διάνυσμα τοῦτο ἔχει ἀρχὴν καὶ πέρας τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων καὶ τυχοῦσαν κατεύθυνσιν.

Εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν θεωρεῖται ὅτι δύο ἢ περισσότεραι π.δ. χρησιμοποιούμεναι ταυτοχρόνως εἰς δεδομένα ἐπίπεδα δράσεως, ἀπορροφοῦν ποσότητας συντελεστῶν ἴσας πρὸς τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν ἀπορροφωμένας ποσότητας συντελεστῶν ἂν ἑκάστη π.δ. ἐλάμβανε χώραν ἐντὸς διαφόρου χρονικῆς περιόδου· τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὸ σύνολον τῶν παραγομένων ἀγαθῶν (ὑ π ό θ ε σ ι ς π ρ ο σ θ ε τ ι κ ό τ η τ ο ς). Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ταυτόχρονος διεξαγωγὴ διαφόρων π.δ. θεωρεῖται ὡς μὴ ἐπηρεάζουσα εὐνοϊκῶς ἢ δυσμενῶς τὸ συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ τὴν συνολικὴν οἰκονομικὴν θυσίαν.

Μαθηματικῶς τὰ ἐνωτέρω δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῆς π ρ ο σ θ έ σ ε ω ς δ ι α ν υ σ μ ά τ ω ν. Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι τὰ διανύσματα:

$$\overline{\mathrm{OK}} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \overline{\mathrm{O\Lambda}} \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

παριστοῦν δύο π.δ. ταυτοχρόνως χρησιμοποιουμένας εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῆς μονάδος. Αἱ ἀναλισκόμεναι ποσότητες τῶν συντελεστῶν, ἔστω α καὶ β, θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα 5 καὶ 7 μονάδες ἀντιστοίχως. Τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα δίδεται καὶ ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δύο διανυσμάτων:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ ὑπελογίσθησαν ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν προστιθεμένων διανυσμάτων.

Γενικῶς, διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα διανύσματα σχηματίζομεν ἓν νέον διάνυσμα μὲ στοιχεῖα τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀ ν τ ι σ τ ο ί χ ω ν (1) στοιχείων τῶν προσθετέων διανυσμάτων (2), π χ. :

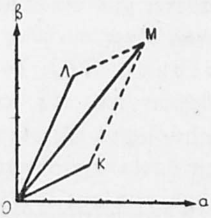
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_\nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_\nu \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ . \\ . \\ . \\ \rho_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \rho_1 \\ \beta_2 + \beta_2 + \ldots + \rho_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_\nu + \beta_\nu + \ldots + \rho_\nu \end{bmatrix}$$

Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων διανυσμά-

1) Συνεπῶς πρόσθεσις διανυσμάτων μὴ ἐχόντων ἀντίστοιχα στοιχεῖα, δηλ. μὴ ἀνηκόντων εἰς τὸν ἴδιον γεωμετρικὸν χῶρον, ἀποκλείεται.

2) Ὁ κανὼν οὗτος ἰσχύει (ὑπὸ τὴν ἀλγεβρικὴν ἔννοιαν) καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν διανυσμάτων.

των, π.χ. τῶν διανυσμάτων $\overline{\mathrm{OK}}$ καὶ $\overline{\mathrm{O\Lambda}}$ ἀνωτέρω, δεικνύεται εἰς τὸ κατωτέρω διάγραμμα :



Διάγραμμα 5

Τὸ διάνυσμα $\overline{\mathrm{OM}}$, μὲ συντεταγμένας τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων συντεταγμένων τῶν διανυσμάτων $\overline{\mathrm{OK}}$ καὶ $\overline{\mathrm{O\Lambda}}$, ἀποτελεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν τελευταίων. Ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ ἀναγνώστης τὸ $\overline{\mathrm{OM}}$ εἶναι τὸ διαγώνιον διάνυσμα τοῦ παραλληλογράμμου ΟΛΜΚ τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν μηκῶν (1) ΟΚ καὶ ΟΛ τῶν προστιθεμένων διανυσμάτων (2).

12. Ἂν αἱ ὑπὸ τῶν διανυσμάτων $\overline{\mathrm{OK}}$ καὶ $\overline{\mathrm{O\Lambda}}$ παριστώμεναι π.δ. χρησιμοποιοῦνται ταυτοχρόνως εἰς ἐπίπεδα δράσεως 3 καὶ 2 μονάδων ἀντιστοίχως πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀναλισκομένων ποσοτήτων συντελεστῶν πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν :

$$3 \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

τὴν ὁποίαν καλοῦμεν γραμμικὸν συνδυασμὸν διανυσμάτων. Γενικῶς «γραμμικὸν συνδυασμὸν διανυσμάτων» καλοῦμεν τὸ ἄθροισμα (ἢ διαφορὰν) διανυσμάτων» ἑκάστου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν (3). Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς σχετικῆς παραστάσεως, ἐκτελοῦμεν τοὺς σημειουμένους πολλαπλασιασμοὺς κατὰ τὰ γνωστὰ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα νέα διανύσματα. Οὕτω, διὰ τὴν ἀνωτέρω παράστασιν θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Τὸ τελευταῖον διάνυσμα τῆς ἰσότητος δεικνύει τὸ σύνολον τῶν ἀναλισκομένων ποσοτήτων συντελεστῶν ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν $\overline{\mathrm{OK}}$ καὶ $\overline{\mathrm{O\Lambda}}$ εἰς τὰ ἐπίπεδα 3 καὶ 2 ἀντιστοίχως.

1) Τὸ μῆκος διανύσματος μὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων, εἶναι (συμφώνως πρὸς τὸ πυθαγόρειον θεώρημα) $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots}$, ὅπου $\alpha_1\, \alpha_2 \dots$ ἀποτελοῦν τὰς συντεταγμένας τοῦ διανύσματος.

2) Ἂν τὰ προστιθέμενα διανύσματα παριστάνουν δυνάμεις, ὡς συνήθως συμβαίνει εἰς τὴν Μηχανικήν, τὸ παραλληλόγραμμον καλεῖται «παραλληλόγραμμον τῶν δυνάμεων».

3) Ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

II. Παραγωγικαὶ διαδικασίαι καὶ μῆτραι

1. Αἱ π.δ. τὰς ὁποίας διαθέτει μία οἰκονομικὴ μονὰς πρὸς ἐκτέλεσιν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων οἰκονομικῶν ἔργων εἶναι συνήθως περιωρισμένου ἀριθμοῦ (ὑπόθεσις πεπερασμένου ἀριθμοῦ π.δ.). Τὸ σύνολον τῶν ἐν λόγῳ π.δ. καθορίζει τὴν παραγωγικὴν διάρθρωσιν καὶ τὰς τεχνολογικὰς δυνατότητας[1] ἢ ἁπλῶς τὴν τεχνολογίαν (technology) τῆς οἰκονομικῆς μονάδος. Τὰ κατωτέρω συμπαρατιθέμενα διανύσματα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς π.δ. δοθείσης οἰκονομικῆς μονάδος, ἀποτελοῦν παράδειγμα τοιαύτης τεχνολογίας:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ἀπαλείφοντες τὰς ἐσωτερικὰς ἀγκύλας τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως λαμβάνομεν τὴν ἁπλουστέραν τοιαύτην

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ παράστασις αὕτη καλεῖται μαθηματικῶς «μήτρα» (matrix).

Γενικῶς, ἡ μήτρα εἶναι σύστημα διανυσμάτων εὑρισκομένων ἐν τῷ αὐτῷ χώρῳ ἢ ἁπλῶς πίναξ διατεταγμένων ἀριθμῶν. Ἡ διάταξις τῶν ἀριθμῶν (στοιχείων) ὁρίζεται ἐκ τῆς θέσεως αὐτῶν εἰς τὰς σειρὰς καὶ τὰς στήλας τῆς μήτρας. Ἂν $\iota = (1,2. \ldots \mu)$ συμβολίζῃ τυχοῦσαν σειρὰν τῆς μήτρας καὶ $\varkappa$ $(= 1,2. \ldots \nu)$ τυχοῦσαν στήλην αὐτῆς, $\alpha_{\iota\varkappa}$ εἶναι γενικῶς τὸ στοιχεῖον τῆς μήτρας τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς σειρᾶς ι καὶ τῆς στήλης $\varkappa$.

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω συμβολισμόν, ἡ γενικὴ μορφὴ μήτρας μ σειρῶν καὶ ν στηλῶν—$\mu X \nu$ τάξεως—δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots \alpha_{3\nu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

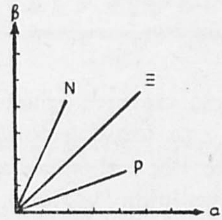
$$\text{ἢ συντόμως: } \begin{bmatrix} \alpha_{\iota\varkappa} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \iota = 1, 2. . \nu \\ \varkappa = 1, 2. . \mu \end{matrix}$$

2. Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς μήτρας εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν γεω-

---

1) Αἱ τεχνολογικαὶ δυνατότητες ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰς διαθεσίμους ποσότητας παραγωγικῶν συντελεστῶν καθορίζουν τὰ παραγωγικὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομικῆς μονάδος.

μετρικὴν παράστασιν τῶν διανυσμάτων. Οὕτω ἡ μήτρα τοῦ προηγουμένου ἀριθμητικοῦ παραδείγματος θὰ εἶναι :



Διάγραμμα 6

Τὰ διανύσματα $\overline{ON}$, $\overline{O\Xi}$ καὶ $\overline{OP}$ ἔχουν συντεταγμένας (2, 4), (5, 4) καὶ (5, 1) ἀντιστοίχως. Προφανῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν διανυσμάτων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν τῆς μήτρας, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν διαστάσεων τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ διανύσματα εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν τῆς μήτρας.

Ἂν αἱ εἰς τὰ διανύσματα ταῦτα ἀντιστοιχοῦσαι π.δ. διέπωνται ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν (καὶ τὴν ὑπόθεσιν τῆς διαιρετότητος), αἱ ἐκ τοῦ σημείου O ἐκκινοῦσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς κατευθύνσεις τῶν διανυσμάτων $\overline{ON}$, $\overline{O\Xi}$ καὶ $\overline{OP}$ προσδιορίζουν ἀντιστοίχουν γραμμικὰς (καὶ συνεχεῖς) συναρτήσεις παραγωγῆς διὰ τὴν δοθεῖσαν οἰκονομικὴν μονάδα.

3. Ἂν μία μήτρα μXν [1] τάξεως ἔχῃ ἀριθμὸν σειρῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν ($\mu = \nu$) αὕτη καλεῖται «τετραγωνικὴ μήτρα» π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Ἂν αἱ σειραὶ μήτρας εἶναι περισσότεραι τῶν στηλῶν αὐτῆς ἢ ἀντιθέτως ($\mu \neq \nu$) αὕτη καλεῖται «ὀρθογώνιος μήτρα». Ὀρθογώνιος εἶναι ἡ πρώτη μήτρα τῆς παραγρ. 1, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ κάτωθι :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μήτρα ἔχουσα περισσοτέρας τῆς μιᾶς σειρᾶς καὶ μίαν μόνον στήλην ($\nu = 1$ καὶ $\mu \neq \nu$) ἀποτελεῖ ἁπλοῦν διάνυσμα, π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1) Τὰ μ καὶ ν θεωροῦνται βεβαίως ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Μήτρα ἔχουσα μίαν μόνον σειρὰν καὶ περισσοτέρας τῆς μιᾶς στήλας ($\mu=1$ καὶ $\nu \neq \mu$) ἀποτελεῖ ἐπίσης διάνυσμα, π.χ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Τὰ διανύσματα τῆς μορφῆς ταύτης (ὡς καὶ πᾶσαι αἱ σειραὶ μιᾶς μήτρας) καλοῦνται σειραὶ-διανύσματα (row-vectors). Πρὸς διάκρισιν, τὰ διανύσματα τῆς προηγουμένης μορφῆς (ὡς καὶ πᾶσαι αἱ στῆλαι μιᾶς μήτρας) καλοῦνται στῆλαι-διανύσματα (column vectors).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ μητρῶν καὶ διανυσμάτων εἶναι διπλῆ· μία μήτρα σύγκειται ἐκ διανυσμάτων ἀλλὰ καὶ ἓν διάνυσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπωσις μήτρας.

Ἂν $\mu = \nu = \nu = 1$ τότε ἔχομεν ἁπλῶς ἕνα ἀριθμόν. Ὑπὸ τὴν ἔνοιαν ταύτην πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μήτρα 1×1 τάξεως.

4. Ἡ μήτρα ἡ ὁποία ἔχει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα καλεῖται «μηδενικὴ μήτρα» (null matrix), π.χ.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἡ μηδενικὴ μήτρα ἀποτελεῖ σύστημα μηδενικῶν διανυσμάτων. Ἡ τετραγωνικὴ μήτρα ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὴν κυρίαν διαγώνιον[1] αὐτῆς μονάδας καὶ μηδενικὰ πάντα τὰ λοιπὰ στοιχεῖα καλεῖται «μοναδιαία μήτρα» (unit matrix) καὶ παριστᾶται διὰ τοῦ συμβόλου I, π.χ.

$$I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ μοναδιαία μήτρα ἀποτελεῖ σύστημα μοναδιαίων διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα παριστοῦν μονάδας μετρήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν ἐντὸς τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων.

---

1) Κυρία διαγώνιος τετραγώνου μήτρας καλεῖται ἡ ἐξ ἀριστερῶν καὶ ἄνω ἀρχομένη διαγώνιος.