

ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΛΕΟΝΤΙΕΦ *

Υπό τοῦ κ. Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

I

Α'. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατὰ τὴν μεταπολεμικὴν περίοδον ἐσημειώθη σημαντικὴ πρόοδος εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῆς οικονομικῆς ἀναλύσεως πρὸς ἀντιμετώπισιν πρακτικῶν οικονομικῶν προβλημάτων. Οἱ οικονομολόγοι, πέραν τοῦ συνήθους ἐνδιαφέροντός των πρὸς διατύπωσιν ὑποθέσεων περὶ τοῦ ποιοτικῆς χαρακτῆρος τῶν οικονομικῶν σχέσεων, ἤρχισαν νὰ δεικνύουν ἠῤῥξημένον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν ποσοτικὴν μέτρησιν τῶν σχέσεων αὐτῶν ἐπὶ τῇ βάσει στατιστικῶν στοιχείων.

Αἱ ἐπὶ μέρους ἐρευνητικαὶ προσπάθειαι ἐμπειρικῆς ἐπαληθεύσεως τῶν οικονομικῶν ὑποθέσεων καὶ συστηματοποιήσεως τῶν μεθόδων πρακτικῆς ἐφαρμογῆς τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν συγκλίνουν ἤδη πρὸς δημιουργίαν ἐνὸς νέου κλάδου τῆς οικονομικῆς ἐπιστήμης, γνωστοῦ ὑπὸ τὸ ὄνομα «Οἰκονομετρία».

Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως ὅτι ἡ οἰκονομετρικὴ ἐρευνα δὲν ὑποδηλοῖ στροφὴν πρὸς τὴν περιπτωσιολογίαν καὶ τὸν στατιστικὸν ἐμπειρισμόν, ἀλλ' ἀντιθέτως θέτει τὴν οικονομικὴν θεωρίαν ὡς θεμελιώδες προσπατούμενον διὰ τὴν κατὰστροφωσιν τῶν «ὑποδειγμάτων» οἰκονομετρικῆς ἀναλύσεως. Πρόκειται περὶ μιᾶς κινήσεως ἡ ὁποία ἀντιτίθεται εἰς τὴν μονομερῆ χρησιμοποίησιν καθαρῶς θεωρητικῶν ἢ καθαρῶς ἐμπειρικῶν μεθόδων ἀναλύσεως καὶ ἀποσκοπεῖ εἰς τὸν ἐπιτυχῆ συνδυασμὸν θεωρίας καὶ ἐμπειρικῆς ἐρεῦνης.

Εἰς τὴν νέαν ταύτην κίνησιν αἱ ἐργασίαι τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Harward Βασ. Λεόντιεφ κατέχουν ἀναμφισβητήτως πρωτοποριακὴν θέσιν.

Εἰδικώτερον, αἱ ὡς ἄνω ἐργασίαι ἀφοροῦν εἰς τὴν κατάστροφωσιν ἐνὸς οἰκονομετρικοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας, προοριζομένου διὰ τὴν μελέτην μακροοικονομικῶν προβλημάτων, ὡς εἶναι π. χ. τὸ πρόβλημα τῆς πλήρους ἀπασχολήσεως καὶ τοῦ προγραμματισμοῦ μιᾶς οικονομίας. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖ λογικὴν συνέχειαν τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας τῶν Quesnay, Walras, Pareto καὶ Cassel, τὰ ὁποῖα σκοπὸν εἶχον νὰ δώσουν μίαν ἐποπτικὴν περιγραφήν τῆς οικονομίας καὶ νὰ προσδιορίσουν τὴν φύσιν τῶν ὑφισταμένων σχέσεων ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων οικονομικῶν μεγεθῶν. Ὁ ἴδιος ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ θεωρεῖ τὴν κλασσικὴν ἐργασίαν του ἐπὶ τῆς διαρθρώσεως τῆς Ἀμερικανικῆς Οἰκονομίας (1) ὡς προσπάθειαν καταστρώσεως ἐνὸς Tableau Economique διὰ τὰς Ἠνωμένας Πολιτείας (2).

* Ἡ παρούσα μελέτη συνετάχθη ἐπὶ τῇ βάσει παλαιότερας μελέτης τοῦ συγγραφέως ὑπὸ τὸν ὡς ἄνω τίτλον καὶ τοῦ κειμένου δύο διαλέξεων αὐτοῦ, δοθεισῶν εἰς τὴν Ἀνωτάτην Βιομηχανικὴν Σχολὴν τὴν 26ην Νοεμβρίου καὶ 17ην Δεκεμβρίου 1958.

1) W. Leontief «The Structure of American Economy 1919 - 1939», N.Y. 1941 (νέα ἐκδόσις 1953).

2) W. Leontief, ἐνθ' ἄνωτ. σ. 9.

Ἄλλ' ἐνῶ οἱ κλασσικοὶ οἰκονομολόγοι τῆς γενικῆς ἰσορροπίας οὐδέποτε διανοήθησαν νὰ χρησιμοποιήσουν τὸ σύστημά των διὰ πρακτικὰς ἀναλύσεις, ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ ἀντιθέτως ἐπεδίωξε νὰ παρουσιάσῃ ἐν σύστημα τὸ ὁποῖον, τροφοδοτούμενον διὰ καταλλήλων στατιστικῶν στοιχείων, θὰ ἰδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν πρακτικῶν προβλημάτων.

Τὸ πολὺπλοκον τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων καὶ ἰδίως ἡ ἔλλειψις ἐπαρκῶν στατιστικῶν στοιχείων καὶ καταλλήλων ὑπολογιστικῶν μέσων καθίστα οὐτοπικὴν πᾶσαν προσπάθειαν πρακτικῆς χρησιμοποίησεως τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Walras καὶ Pareto. Οὕτω τὰ συστήματα ταῦτα, παρὰ τὴν θεωρητικὴν των μεγαλοπρέπειαν, ἐγκατελείφθησαν βαθμαίως χάριν τῶν μαρσαλλιανῶν συστημάτων μερικῆς ἰσορροπίας, εἰς τὰ ὁποῖα ἐξητάζοντο ἰδιαιτέρως αἱ οἰκονομικαὶ μεταβολαὶ ἐντὸς ὁρισμένων ἀγορῶν καὶ ἀπεφεύγετο ἡ παρακολούθησις τῶν ἐπιδράσεων τῶν μεταβολῶν αὐτῶν ἐντὸς ὁλοκλήρου τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἡ ἀναξωρογόνησις τοῦ συστήματος τῆς γενικῆς ἰσορροπίας ὑπὸ τοῦ Cassel (1918) δὲν ἤλλαξε κατὰ βάσιν τὴν κρατοῦσαν τάσιν. Καὶ τοῦτο διότι ὁ Cassel, συνεχίσας τὴν κλασσικὴν παράδοσιν, ἐνδιεφέρθη κυρίως διὰ τὴν μαθηματικὴν θεμελίωσιν τοῦ συστήματός του καὶ δὲν ἔθεσε ζήτημα πρακτικῆς ἐφαρμογῆς αὐτοῦ.

Ὁ καθηγητὴς Λεόντιεφ (1941) εἶναι ὁ πρῶτος οἰκονομολόγος ὁ ὁποῖος ἀντικατέστησε τὰ ἀφρημμένα ἐλγεθρικὰ σύμβολα τοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας διὰ συγκεκριμένον στατιστικῶν στοιχείων, καὶ ἐπεχείρησε νὰ χρησιμοποιήσῃ τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς οἰκονομικῆς πραγματικότητος. Τὸ ἐγγεῖρημα ἦτο θεθαίως τολμηρόν, ἀλλ' ἡ ἀνάληψις αὐτοῦ καθίστατο δυνατὴ κατόπιν τῆς ἐν τῷ μεταξύ ἐπελθούσης βελτιώσεως τῶν στατιστικῶν συνθηκῶν εἰς Ἀμερικὴν καὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος. Ἐξ ἄλλου ἡ προοιούσα σημασία τῶν προβλημάτων πλήρους ἀπασχολήσεως καὶ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ κατὰ τὴν μεταπολεμικὴν περιόδον προώθησεν ἐπίσης σημαντικῶς τὰς ἐρευνητικὰς ἐργασίας ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ συστήματος γενικῆς ἰσορροπίας.

Ὡς συνήθως συμβαίνει μὲ τὰς πρωτοποριακάς ἐργασίας, τὸ σύστημα Λεόντιεφ ἐγένετο ἀντικείμενον κριτικῶν ἐπιθέσεων, ἰδίᾳ ὅσον ἀφορᾷ τὰς δυνατότητας πρακτικῆς αὐτοῦ ἐφαρμογῆς. Ἀκόμη καὶ σήμερον, μετὰ παρέλευσιν 18ετίας ἀπὸ τῆς ἀρχικῆς του ἐμφανίσεως, θὰ ἰδύνατο νὰ λεχθῇ ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο δὲν περιβάλλεται ἐνεπιφυλάκτως μὲ τὸν μανδύαν τῆς ἀκαδημαϊκῆς ὀρθοδοξίας. Ὅπως ἴσως, τὸ σύστημα Λεόντιεφ ἤρχισε νὰ ἐπηρεάζῃ ἀποφασιστικῶς τὴν οἰκονομικὴν θεωρίαν καὶ πράξιν. Ἦδη διδάσκεται εἰς πλείστα ξένα πανεπιστήμια καὶ ἀποτελεῖ τὴν βάσιν ἐρευνητικῶν ἐργασιῶν αἱ ὁποῖα ἐκτελοῦνται, κατὰ τὴν τελευταίαν κυρίως πενταετίαν, ὑπὸ διαφόρων Ἰνστιτούτων ἢ κρατικῶν ὑπηρεσιῶν εἰς τὰς Η.Π.Α. καὶ πλείστας Ἑυρωπαϊκὰς χώρας. Σχετικὸν ἐνδιαφέρον ἤρχισε νὰ ἐκδηλοῦται τελευταίως καὶ παρ' ἡμῖν. Καθίσταται συνεπῶς σκόπιμος μίᾳ ἀναλυτικῇ περιγραφῇ τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, ἡ ὁποία θὰ ἰδύνατο νὰ βοηθήσῃ τοὺς ἐν Ἑλλάδι ἐνδιαφερομένους διὰ τὸ θέμα τοῦτο.

Ἡ παροῦσα ἐργασία ἀποσκοπεῖ εἰς μίαν ταιαύτην περιγραφὴν. Τὸ πρῶτον μέρος αὐτῆς περιλαμβάνει ἀνάλυσιν τοῦ κυριωτέρου ὑποδείγματος Λεόντιεφ καὶ συσχετισμὸν αὐτοῦ μὲ τὴν γενικωτέραν τεχνικὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ καὶ

τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἐργασίας περιλαμβάνει μίαν μαθηματικὴν ἐπισκόπῃσιν τοῦ ἑξεταζομένου θέματος, ἢ ὁποῖα δύναται ἐπίσης νὰ θεωρηθῆ καὶ ὡς γενίκευσις τῶν κυριωτέρων ἰδεῶν τοῦ πρώτου μέρους.

Β'. ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Αἱ βασικαὶ ὑποθέσεις τοῦ συστήματος Λεόντιεφ ἔχουν ὡς ἀκολούθως :

α) Ἡ οἰκονομία εἶναι δυνατόν νὰ διαιρεθῆ εἰς ἓνα ἀριθμὸν παραγωγικῶν κλάδων.

β) Ἐκαστος κλάδος παράγει ἓν μόνον προϊόν καὶ καθ' ὀρισμένην μέθοδον.

γ) Αἱ ὑφ' ἐκάστου κλάδου ἀπορροφώμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὐρίσκονται εἰς σταθερὰν ἀναλογίαν πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ἐξ αὐτῶν παραγομένου προϊόντος, ἀνεξαρτήτως τοῦ «ἐπιπέδου καὶ τοῦ χρόνου δράσεως»³⁾ τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

Ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ εἶδος τῶν εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν ἀναφερομένων κλάδων ἑξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος καὶ ποιότητος τῶν διατιθεμένων στατιστικῶν πληροφοριῶν, τῆς ἰκανότητος τῶν ὑπολογιστικῶν μέσων (ἀριθμομηχανῶν), ὡς ἐπίσης καὶ ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἑξεταζομένου θέματος. Ἐνταῦθα ἀνακύπτει τὸ πρόβλημα τῆς συμπτύξεως τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων εἰς γενικωτέρας ομάδας ἢ ἄλλως τῆς «συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως» (agrégation) τῶν στατιστικῶν στοιχείων⁴⁾. Τοιοῦτον πρόβλημα δὲν ὑφίστατο διὰ τοὺς κλασσικοὺς οἰκονομολόγους τῆς γενικῆς ἰσοροπίας, οἱ ὅποιοι ἐνδιεφέροντο μόνον δι' ἀλγεβρικὰς ἀποδείξεις. Πρακτικῆ ὅμως ἐφαρμογῆ τοῦ ὡς ἄνω συστήματος εἶναι ἀδύνατος ἄνευ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ὅχι μόνον λόγῳ τῶν δυσχερειῶν ἐξευρέσεως ἀναλυτικῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀλλὰ καὶ διότι ὁ μέγας ὄγκος τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν θὰ ἠμπόδιζε τὴν χρησιμοποίησίν των. Ὡς λέγει ὁ καθηγητῆς Λεόντιεφ, τὸ πρόβλημα δὲν εἶναι ἡ ἐκλογή μεταξὺ συγκεντρωτικῆς καὶ ἀναλυτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀλλ' ἡ ἐκλογή μεταξὺ μεγαλυτέρου ἢ μικροτέρου βαθμοῦ συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως. Οὕτω π.χ. ἐὰν πρόκειται νὰ ἑξετασθῆ ἀπὸ τινος ἀπόψεως, ἢ θέσις τῆς κλωστοῦφαντουργίας ἐντὸς μᾶς οἰκονομίας, δὲν γεννᾶται ζήτημα χρησιμοποίησεως ἀναλυτικῶν στατιστικῶν στοιχείων δι' ὅλας τὰς ἐπὶ μέρους κλωστοῦφαντουργικὰς ἐπιχειρήσεις, γεννᾶται μόνον ζήτημα ἐκλογῆς μεταξὺ συγκεντρωτικῶν στοιχείων διὰ τὴν κλωστοῦφαντουργίαν λαμβανομένην ὡς ἓνα ἐνιαῖον κλάδον παραγωγῆς καὶ συγκεντρωτικῶν (ἐπίσης) στοιχείων ἀναφερομένων εἰς μικρὸν σχετικῶς ἀριθμὸν ὑποκλάδων, εἰς τοὺς ὁποίους θὰ ἦτο δυνατόν νὰ διαιρεθῆ ἡ κλωστοῦφαντουργία (π.χ. ἐριουργίαν, βαμβαουργίαν κλπ.).

3) «Ἐπίπεδον δράσεως» (level of activity) εἶναι ὁ συνήθως χρησιμοποιούμενος εἰς τὴν θεωρίαν τοῦ προγραμματισμοῦ ὅρος πρὸς ὑποδήλωσιν τοῦ ἐπιπέδου παραγωγικῆς δραστηριότητος.

4) Ὡς «συγκεντρωτικὴ ταξινομήσις» στατιστικῶν στοιχείων νοεῖται ἡ συλλογὴ στοιχείων περὶ τῆς δραστηριότητος τῶν διαφόρων κλάδων, θεωρουμένων ὡς αὐτοτελεῶν μονάδων, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν συλλογὴν ἀναλυτικῶν στοιχείων περὶ τῆς δραστηριότητος τῶν ἐπὶ μέρους οἰκονομικῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τοὺς ἐν λόγῳ κλάδους.

“Όσον ό βαθμός συγκεντρωτικής ταξινομήσεως τών στατιστικῶν στοιχείων είναι μεγαλύτερος τόσοσν έλλαιτοῦται ή πληροφοριακή δύναμις τών στοιχείων αὐτῶν, ένῶ αντίθετως διευκολύνεται ό ύπολογιστικός χειρισμός των. Έπιβάλλεται ὅθεν ή έκλογή τοῦ βαθμοῦ συγκεντρωτικής ταξινομήσεως, ό ὁποῖος ἀφ’ ενός μὲν δέν θίγει στατιστικάς πληροφορίας χρησίμους διά τὸ ξεσταζόμενον θέμα, ἀφ’ ἐτέρου δέ διευκολύνει κατά τὸ δυνατόν τοὺς ύπολογισμοὺς (5).

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις, ἀνωτέρω, σημαίνει ὅτι εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ δέν τίθεται ζήτημα ἀριστοποίησης τοῦ οικονομικοῦ ἀποτελέσματος καθ’ ὅσον τοιαύτη ἀριστοποίησης προϋποθέτει δυνατότητα έκλογής μεταξὺ διαφόρων παραγωγικῶν μεθόδων ὁδηγουσῶν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα (6).

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν είναι θεμελιώδης διά τὸ σύστημα Λεόντιεφ, ὡς ἐπίσης καὶ διά τὰ κλασσικά συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας (7). Τοῦτο δέν σημαίνει ὅτι αἱ πραγματικαὶ παραγωγικαὶ συναρτήσεις θεωροῦνται ὡς συμφωνοῦσαι κατ’ ἀνάγκην πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, ἀλλ’ ἀπλῶς ή ὑπόθεσις αὕτη λαμβάνεται ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις εἰς τὴν πραγματικότητα (8).

Ἐκ τῶν ὑποθέσεων (β) καὶ (γ) προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ δέν γίνεται ἀποδεκτὴ ή θεωρία τῆς ὀριακῆς παραγωγικότητας, συμφώνως πρὸς τὴν ὁποῖαν ὑπάρχει ἀπεριόριστος δυνατότης ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Εἰς τὰς παραγωγικὰς συναρτήσεις τοῦ συστήματος Λεόντιεφ οἱ συντελεσταὶ παραγωγῆς είναι αὐστηρῶς συμπληρωματικοὶ καὶ συνεπῶς τὸ ὀριακὸν προϊόν ἐκάστου είναι μηδέν. Τὸ προϊόν δύναται νά αὔξηθῆ μόνον ἂν αἱ ποσότητες ὅλων τῶν συντελεστῶν, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγήν δεδομένου προϊόντος αὔξηθοῦν καθ’ ὀρισμένην ἀναλογίαν, καθοριζομένην ὑπὸ τῶν τεχνολογικῶν συνθηκῶν τῆς δεδομένης παραγωγῆς (9).

Γ'. ΤΟ ΒΑΣΙΚΟΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

1. Ἀναλύομεν κατωτέρω τὰ βασικά σημεῖα τοῦ συστήματος Λεόντιεφ μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος.

Τὸ κεντρικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ συστήματος είναι ὁ «πίναξ εἰσροῶν - ἐκροῶν (input - output table). Ὁ πίναξ οὗτος ὁμοιάζει κατά βάσιν πρὸς τὸ Tableau Economique τοῦ Francois Quesnay καὶ καταγράφει συστηματικῶς τὰς ροὰς ἀγαθῶν καὶ

5) Τὰ προβλήματα καὶ τὰ κριτήρια τῆς συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἀναπτύσσονται εἰς W. Leontief: The Structure of American Economy σ. σ. 14, 69 καὶ 208 - 11. Ἐπίσης εἰς Economic Activity Analysis. Edit by Os. Morgenstern, London 1954, σ. σ. 79 - 102.

6) Ἐπ’ αὐτοῦ τοῦ σημείου πλεονα εἰς τμήμα Ζ’.

7) Βλ. Economic Activity Analysis, κεφαλ. Models of General Economic Equilibrium:

8) Βλέπε Input - Output Analysis, an appraisal NBER, Princeton University Press, 1955, σ. 30. Βλ. ἐπίσης τμήμα Θ’ κατωτέρω.

9) Βλέπε τμήμα Θ’, παραγρ. 1 κατωτέρω. Βλ. ἐπίσης Α. Λάζαρη, Γραμμικὸς Προγραμματισμός, Ἐπιθεώρ. Οἶκον. καὶ Πολ. Ἐπιστημῶν σ. σ. 21 - 22.

υπηρεσιῶν μεταξύ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας ἐντὸς μιᾶς δεδομένης χρονικῆς περιόδου.

Ἴδου πῶς ἐμφανίζεται ὁ πίναξ εἰσοῶν - ἐκροῶν διὰ τὴν φανταστικὴν οἰκονομίαν τοῦ χρησιμοποιουμένου παραδείγματος :

Πίναξ 1

Εἰσοοαὶ - Ἐκροαὶ (καὶ Τελικὴ Ζήτησις) κατὰ τὸ ἔτος X

ΕΚΡΟΑΙ ΕΙΣΟΔΙΑ	Πρωτογενῆς παραγωγή	Μεταποιήσις	Λοιποὶ κλάδοι	Τελικὴ Ζήτησις				Ἐξαγοαὶ	Σύνολον
				Κατανάλωσις		Ἐπένδυσις (α)			
				Ἰδιωτικὴ	Δημόσια	Πάγια	Ἀποθεματ.		
Πρωτογενῆς παραγωγή		60	20	50	7		8	10	155
Μεταποιήσις	20		60	60	20	30	10	20	220
Λοιποὶ κλάδοι	20	40		40	20	15		10	145
Εἰσαγωγαὶ	5	30	10	10	3				58
Ἑπηρεσία προσώπων	100	70	45						215
Φόροι	10	20	10	20					60
Σύνολον	155	220	145	180	50	45	18	40	853

(α) Ἰδιωτικὴ Ἐπένδυσις.

Ὁ πίναξ 1 δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς μία λογιστικὴ (ex post) κατάστασις, ἀπεικονίζουσα τὰς διακλαδικὰς (intersectoral) σχέσεις τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας κατὰ τὸ ληφθὲν ἔτος X, ὡς ἐπίσης καὶ τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος παραχθέντος τελικοῦ προϊόντος. Ὁ πίναξ οὗτος ἐπισκοπούμενος κατὰ στίγλας δύναται νὰ χωρισθῆ εἰς δύο βασικοὺς τομεῖς, τὸν παραγωγικὸν τομέα — ὁ ὁποῖος ὑποδιαιρεῖται εἰς τὸν κλάδον τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς (γεωργία - δρυχεῖα κ.λ.π.), τῶν κλάδων τῆς μεταποιήσεως (βιομηχανία - βιοτεχνία) καὶ τοὺς «λοιποὺς κλάδους» — καὶ τὸν τομέα τῆς τελικῆς ζήτησεως, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν κατανάλωσιν, τὰς ἐπενδύσεις καὶ τὰς ἐξαγωγὰς. Ἐκ τῆς κατὰ σειρὰς ἐπισκοπήσεως τοῦ πίνακος εἶναι δυνατὸν νὰ διακριθοῦν ἐπίσης δύο τομεῖς, ὁ παραγωγικὸς τομεὺς (ὡς καὶ προηγουμένως) καὶ ὁ τομεὺς τῶν προσωπικῶν ὑπηρεσιῶν, τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῶν φόρων.

Ειδικότερον ἢ κατὰ στήλας ἐξέτασις τοῦ πίνακος 1 δεικνύει τὰς «εἰσοδάς» (inputs), ἦτοι τὰς ὑφ' ἐκάστου οἰκονομικοῦ κλάδου ἀπορροφωμένας ποσότητες ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν) καὶ τὰς πηγὰς προελεύσεως αὐτῶν. Αἱ ποσότητες αὗται δὲν μετροῦνται εἰς πραγματικὰς μονάδας, ἀλλ' ἐκφράζονται εἰς νομισματικὰς ἀξίας ὑπολογιζομένας εἰς σταθερὰς τιμὰς. Οὕτω, αἱ τρεῖς πρῶται στήλαι δεικνύουν τὰς ἀξίας ἀγαθῶν (ἢ ὑπηρεσιῶν) τὰ ὁποῖα ἀπορροφῶνται ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος αὐτῶν κατὰ τὸ ἔτος X. Ὁ κλάδος π.χ. τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς ἐχρησιμοποίησε προϊόν τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως ἀξίας 20 ν. μ., προϊόντα τῶν λοιπῶν κλάδων ἀξίας 20 ν. μ., εἰσαγόμενα προϊόντα ἀξίας 5 ν. μ., προσωπικὰς ὑπηρεσίας ἀξίας 100 ν. μ. καὶ ἐπλήρωσε φόρους 10 ν. μ.

Ἀναλόγως ἐρμηνεύονται καὶ αἱ ἐπόμεναι δύο στήλαι. Αἱ στήλαι τῆς τελικῆς ζητήσεως δεικνύουν τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ τελικοῦ προϊόντος τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος X μεταξὺ καταναλώσεως (ιδιωτικῆς καὶ δημοσίας), ἐπενδύσεων καὶ ἐξαγωγῶν. Ἡ εἰς τὴν στήλην τῆς ιδιωτικῆς καταναλώσεως ἀναγραφομένη ἀξία 20 ν. μ. ἐκ φόρων παριστᾷ τὸ ἀντίτιμον τῆς ὑπὸ τῶν ιδιωτῶν καταναλώσεως κρατικῶν ὑπηρεσιῶν κατὰ τὸ δοθὲν ἔτος.

Ἡ κατὰ σειρὰς ἐξέτασις τοῦ πίνακος δεικνύει τὰς «ἐκροδάς» (outputs), ἦτοι τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ παραχθέντος συνολικοῦ προϊόντος ἐκάστου κλάδου κατὰ τὸ ἔτος X. Οὕτω π.χ., ἡ πρώτη σειρὰ τοῦ πίνακος δεικνύει ὅτι ἐκ τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς τοῦ ἔτους X, ἀξίας 155 ν. μ., διετέθη προϊόν ἀξίας 60 ν. μ., διὰ τὸν κλάδον τῆς μεταποιήσεως (πρῶται ὕλαι κ.λ.π.), 20 ν. μ. διὰ τοὺς λοιποὺς κλάδους, 50 ν. μ. δι' ιδιωτικὴν κατανάλωσιν, 7 ν. μ. διὰ δημοσίαν κατανάλωσιν, 8 ν. μ. δι' ἀποθέματα καὶ τέλος προϊόν ἀξίας 10 ν. μ. δι' ἐξαγωγὰς (10).

Ἀναλόγως ἐρμηνεύονται καὶ αἱ ἐπόμεναι δύο σειραί.

Ὁ πίναξ 1 δεικνύει ὅτι ἡ ἀξία τοῦ συνολικοῦ προϊόντος ἐκάστου παραγωγικοῦ κλάδου (ἄθροισμα κονδυλίων ἀντιστοίχου σειρᾶς) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν χρηματικῶν καταβολῶν τοῦ αὐτοῦ κλάδου (ἄθροισμα κονδυλίων ἀντιστοίχου στήλης). Τοῦτο συμβαίνει διότι εἰς τὴν ἀξίαν δι' ὑπηρεσίας προσώπων συμπεριλαμβάνονται ἐνταῦθα καὶ τὰ ἐπιχειρηματικὰ κέρδη.

Ἡ τετάρτη σειρὰ καθορίζει τὸν τρόπον διαθέσεως τῶν εἰσαγομένων ἀγαθῶν μεταξὺ τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως. Ἡ πέμπτη σειρὰ δεικνύει τὴν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων καταβληθεῖσαν ἀξίαν διὰ τὰς χρησιμοποιηθείσας ὑπηρεσίας προσώπων (ἐργασίαν). Τέλος εἰς τὴν ἕκτην σειρὰν ἀναγράφονται αἱ ἐκ φόρων ἐπιβαρύνσεις τῶν παραγωγικῶν κλάδων καὶ τῆς καταναλώσεως. Αἱ ἐπιβαρύνσεις αὗται ἀποτελοῦν θεωρητικῶς τὸ ἀντίτιμον τῶν κρατικῶν ὑπηρεσιῶν πρὸς τὴν οἰκονομίαν.

Ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τοῦ πίνακος 1 τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν σειρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν στηλῶν. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μερικὰ ἄθροίσματα τῶν τριῶν πρώτων σειρῶν ἰσοῦνται, ἀνὰ ἓν, πρὸς τὰ συνολικὰ ἄθροίσματα τῶν τριῶν πρώτων στηλῶν, ἔπεται ὅτι τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων σειρῶν (ἀξία

10) Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ δι' ἰδιοκατανάλωσιν χρησιμοποιούμενον προϊόν.

εισαγωγών + αξία υπηρεσιών προσώπων + φόροι), ισούται πρὸς τὸ συνολικὸν ἄθροισμα τῶν στηλῶν τῆς τελικῆς ζητήσεως.

2. Ἐλέχθη ἤδη ὅτι ὁ πίναξ 1 ἔχει ἀπλῶς λογιστικὴν σημασίαν ὡς ἀπεικονίζων τὰς λαβούσας χώραν κατὰ τὸ ἔτος Χ, συναλλακτικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν κλάδων τῆς δοθείσης οἰκονομίας. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ὁ πίναξ οὗτος θὰ ἠδύνατο νὰ παραβληθῆ πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν⁽¹¹⁾. Ἡ μετατροπὴ τοῦ πίνακος 1 ἀπὸ ἀπλῆν λογιστικὴν κατάστασιν εἰς ἀ ν α λ υ τ ι κ ὸ ν ὄ ρ γ α ν ο ν — δυνάμενον νὰ παρακολουθῆσθαι τὰς ἐπιδράσεις τῶν μεταβολῶν τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν μεγεθῶν — εἶναι ἐν τούτοις δυνατὴ διὰ τῆς χρησιμοποίησεως τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, αἱ ὑφ' ἐκάστου παραγωγικοῦ κλάδου ἀπορροφώμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς εὐρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὴν ποσότητα τοῦ ἐξ αὐτῶν παραγομένου προϊόντος, ἀνεξαρτήτως ἐπιπέδου καὶ χρόνου δράσεως τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, δοθέντος τοῦ πίνακος 1, δύνανται νὰ προσδιορισθῆ ἡ μορφή τῆς παραγωγικῆς συναρτήσεως ἐκάστου κλάδου διὰ σειρὰς τεχνολογικῶν συντελεστῶν, οἱ ὅποιοι λαμβάνονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν κοινδυλίων τῶν εἰσροῶν τῶν ἐν λόγῳ κλάδων διὰ τῆς ἀξίας τοῦ ὑπ' αὐτῶν παραχθέντος συνολικοῦ προϊόντος⁽¹²⁾. Οἱ συντελεσταὶ οὗτοι εἶναι γνωστοὶ ὡς «συντελεσταὶ εἰσροῆς» (input coefficients).

Πίναξ 2

Συντελεσταὶ Εἰσροῆς

	Π (α)	Μ	Λ
Π	0/155 = 0	60/220 = 0,272	20/145 = 0,137
Μ	20/155 = 0,129	0/220 = 0	60/145 = 0,414
Λ	20/155 = 0,129	40/220 = 0,182	0/145 = 0
Ε	5/155 = 0,032	30/220 = 0,136	10/145 = 0,069
Υ	100/155 = 0,645	70/220 = 0,318	45/145 = 0,311
Φ	10/155 = 0,065	20/220 = 0,092	10/145 = 0,069
	Σύνολον 1,000	1,000	1,000

(α) Τὰ σύμβολα Π, Μ, κλπ. εἶναι τὰ ἀρχικὰ γράμματα τῶν ὀνομάτων τῶν κλάδων τοῦ πίνακος 1.

Ἡ ἔννοια τῶν ἀνωτέρω συντελεστῶν εἶναι προφανής. Οὕτω, ὁ συντελεστὴς 0,272 (πρῶτος εἰς τὴν στήλην Μ) καθορίζει τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τῆς πρωτογενοῦς παραγωγῆς, τὸ ὅποιον χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ κλάδου τῆς μεταποιήσεως

11) Βλέπε σχετικὴν σύγκρισιν εἰς Τμήμα Δ' κατωτέρω.

12) Μολονότι ἐνδιαφέρουν κυρίως αἱ σχέσεις πραγματικῶν ποσοτήτων, ἡ χρησιμοποίησις ἐνταῦθα σταθερῶν τιμῶν καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐκτίμησιν τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν εἰς νομισματικὰς ἀξίας.

κατά την παραγωγή προϊόντος του κλάδου τούτου αξίας μιάς νομ. μονάδος. Ἀνάλογον ἐρμηνείαν δίδομεν καὶ εἰς τοὺς λοιποὺς συντελεστὰς εἰσροῆς.

Ὁ εἰς τὸν πίνακα 1 γενόμενος διαχωρισμὸς μεταξὺ παραγωγικοῦ τομέως καὶ τελικῆς ζήτησεως ἐπιδιώκει νὰ τονίσῃ ὅτι εἰς τὸ ἐξεταζόμενον οἰκονομικὸν σύστημα τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζήτησεως λαμβάνονται ὡς δεδομένα (ἐξωγενῆ), ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῶν κονδυλίων αὐτῶν πρέπει νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ βαθμὸς παραγωγικῆς ἀπασχολήσεως τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἐκάστοτε ὕψος (καὶ τὴν σύνθεσιν) τῆς τελικῆς ζήτησεως.

Διὰ νὰ καταδειχθῇ τώρα ἡ ἀναλυτικὴ ἀξία τοῦ πίνακος εἰσροῶν - ἐκροῶν κατόπιν τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κονδύλια τελικῆς ζήτησεως μεταβάλλονται ὡς ἀκολούθως : Τὰ μὲν κονδύλια τῆς καταναλώσεως αὐξάνουν κατὰ 5 ο)ο, τὰ δὲ κονδύλια τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῶν ἐξαγωγῶν αὐξάνουν κατὰ 10 ο)ο. Τὸ προκύπτον ἐκ τῶν ὡς ἄνω μεταβολῶν πρόβλημα εἶναι νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ νὰ ἱκανοποιήσουν τὴν αὐξηθεῖσαν τελικὴν ζήτησιν.

Ἐχόντες ὑπ' ὄψιν μας τὰς πληροφορίας τῶν πινάκων 1 καὶ 2 καὶ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὸν κάτωθι πίνακα :

Πίναξ 3

ΕΚΡΟΑΙ ΕΙΣΡΟΑΙ	Πρωτογενῆς παραγωγή	Μεταποιήσις	Λοιποὶ κλάδοι	Τελικὴ ζήτησις					Σύνολον
				Κατανάλωσις		Ἐπενδύσεις		Ἐξαγωγαί	
				Ἰδιωτικὴ	Δημόσια	Πάγια	Ἀποθεμ.		
								Ἰδιωτικὴ	
Πρωτογενῆς παραγωγή		0,272 X ₂	0,137 X ₃	52,5	7,35		8,8	11	X ₁
Μεταποιήσις	0,129 X ₁		0,414 X ₃	63	21	33	11	22	X ₂
Λοιποὶ κλάδοι	0,129 X ₁	0,182 X ₂		42	21	16,5		11	X ₃
Εἰσαγωγαί	0,032 X ₁	0,136 X ₂	0,069 X ₃	10,5	3,15				X ₄
Ἐπηρεασίαι Προσώπων	0,645 X ₁	0,318 X ₂	0,311 X ₃						X ₅
Φόροι	0,065 X ₁	0,092 X ₂	0,069 X ₃	21					X ₆
Σύνολον	X ₁	X ₂	X ₃	189	52,5	49,5	19,8	44	X

Εἰς τὸν ἄνωτέρω πίνακα τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ κονδύλια τελικῆς ζητήσεως τοῦ πίνακος 1, μεταβληθέντα συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος. Τὰ X_1 , X_2 καὶ X_3 παριστοῦν τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα δράσεως τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων κατὰ τὴν σειρὰν τοῦ πίνακος. Αἱ ἐγγραφαι εἰς τὰς στήλας τοῦ παραγωγικοῦ τομέως ὑπελογίσθησαν ὡς γινόμενα τῶν συντελεστῶν εἰσορῆς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα δράσεως X_1 , X_2 καὶ X_3 ⁽¹³⁾.

Λύσις τοῦ τεθέντος προβλήματος σημαίνει νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν X_1 , X_2 , X_3 , ἔξ ὧν τιμῶν δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν ἐν συνεχείᾳ πᾶσαι αἱ ἐγγραφαι τοῦ πίνακος 3.

Προχωροῦμεν ὡς ἀκολούθως :

Ὡς γνωρίζομεν, ἑκάστη τῶν τριῶν πρώτων σειρῶν δεικνύει τὸν τρόπον διανομῆς τοῦ προϊόντος τῶν ἀντιστοίχων παραγωγικῶν κλάδων μεταξὺ τῶν κλάδων τούτων καὶ τῶν διαφόρων ὑποτομῶν τῆς τελικῆς ζητήσεως. Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν κονδυλίων ἑκάστης σειρᾶς πρέπει νὰ ἰσοῦται ἐξ ὀρισμοῦ πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης (βλ. πίν. 3) εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} 0 &+ 0,272 X_2 + 0,137 X_3 + 79,65 = X_1 \\ 0,129 X_1 + 0 &+ 0,414 X_3 + 150 = X_2 \\ 0,129 X_1 + 0,182 X_2 + 0 &+ 90,5 = X_3 \end{aligned}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὡς ἄνω συστήματος λαμβάνομεν :

$$X_1 = 164, \quad X_2 = 234, \quad X_3 = 154$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τιμῶν τούτων καὶ κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν σημειουμένων πολλαπλασιασμῶν, ὁ πίναξ 3 λαμβάνει τὴν μορφήν τοῦ πίνακος 4, κατωτέρω.

Ἡδη ἡ ἀπάντησις τοῦ τεθέντος προβλήματος δίδεται ἐκ τῶν ἐγγραφῶν τῆς στήλης τῶν συνόλων τοῦ πίνακος 4.

Τὸ ἐπίπεδον δράσεως τοῦ κλάδου Π	ἠδῆθη ἀπὸ	155	εἰς	164	ἤτοι	κατὰ	6	%	περίπ.
> > > > M	> >	220	>	234	>	>	>	6,3	% >
> > > > Λ	> >	145	>	154	>	>	>	6,2	% >
> > τῶν εἰσαγωγῶν	> >	58	>	62	>	>	>	6,9	% >
> > ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως	> >	>	>	>	>	>	>	6,5	% >
> (Ἡ φορολογ. ἐπιβάρυνσις τῆς Οἴκου	> >	60	>	63,7	>	>	>	6,2	% >)

Ἡ διάρθρωσις τοῦ πίνακος 4 δεικνύει ἐπίσης τὰς μεταβολὰς εἰς τὰς εἰσορὰς καὶ ἐκροὰς αἱ ὁποῖαι ἦσαν ἀναγκαῖαι πρὸς παραγωγὴν τοῦ νέου συνολικοῦ προϊόντος τῶν τριῶν παραγωγικῶν κλάδων.

3. Εἶναι πρόδηλος ἡ πρακτικὴ σπουδαιότης τῆς ὡς ἄνωτέρω ἀναλύσεως. Ἐν

13) Ἐφ' ὅσον ἕκαστος συντελεστὴς εἰσορῆς ἀποτελεῖ τὸ πηλίκον τῆς διαίρεσεως τῆς ἀντιστοίχου ἐγγραφῆς (εἰσορῆς) ἐνὸς κλάδου διὰ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τοῦ αὐτοῦ κλάδου, ἡ ὡς ἄνω ἐγγραφή (εἰσορῆς) δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ εἰσορῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τοῦ κλάδου (βλ. καὶ εἰς μέρος II συστήματα 2 καὶ 4).

Πίναξ 4 (α)

ΕΚΡΟΑΙ ΠΡΟΪΟΝΤΑ	Πρωτογενής παραγωγή	Μεταποιήσις	Λοιποί κλάδοι	Τελική ζήτησις					Σύνολον
				Κατανάλωσις		Έπενδύσεις		Έξαγωγαι	
				Ίδιωτική	Δημοσία	Ίγυια	Άποθέματ.		
Πρωτογενής παραγωγή		63,2	21,2	52,5	7,3		8,8	11	164
Μεταποιήσις	21		63	63	21	33	11	22	234
Λοιποί κλάδοι	21,5	42		42	21	16,5		11	154
Είσαγωγαί	5,3	32	11	10,5	3,2				62
Ύψηρσσία προσώπων	105,6	75,5	48						229,1
Φόροι	10,6	21,3	10,8	21					63,7
Σύνολον	164	234	154	189	52,5	49,5	19,8	44	906,8

(α) Κατά τους ύπολογισμούς μετεβλήθησαν ελαφρώς ώρισμένα ποσά πρὸς ἀποφυγήν τῶν πολλῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς ἐγγραφάς.

π.χ. αἱ ύποθεθεῖσαι μεταβολαὶ τῆς τελικῆς ζήτησεως ἀποτελοῦν ἀντικειμενικοὺς σκοποὺς ἑνὸς οικονομικοῦ προγράμματος πραγματοποιητέους εἰς τὸ τέλος μιᾶς, ἔστω, τριετίας ἀπὸ τοῦ ἔτους X, τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 4 δεικνύουν τὰς ἀναγκαῖας προϋποθέσεις ἀπὸ ἀπόψεως ἐπιπέδων δράσεως τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ποσότητος (14) καὶ εἶδους πρῶτων ὑλῶν, ἐπιπέδου εἰσαγωγῶν καὶ ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως, τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν σκοπῶν τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος. Ἄν, ἐπομένως, ἐκ τῶν ύπαρχουσῶν στατιστικῶν πληροφοριῶν προκύπη ὅτι ὁ κεφαλαιουχικὸς ἔξοπλισμὸς ὄρισμένων παραγωγικῶν κλάδων δὲν ἐπιτρέπει τὴν σχεδιασθεῖσαν ἐπέκτασιν ἢ ὅτι τὸ ἀπόθεμα συναλλάγματος τῆς ἐν λόγῳ οικονομίας (λαμβάνομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ἔξαγωγῶν) δὲν ἐπιτρέπει τὴν ἀπαιτουμένην αὔξησιν τῶν εἰσαγωγῶν, τότε οἱ σκοποὶ τοῦ προγράμματος δὲν δύνανται νὰ πραγματοποιηθοῦν.

Ἐκ τοῦ συμπεράσματος αὐτοῦ αἱ ἀρμόδια ἀρχαὶ δυνατὸν νὰ ἀχθοῦν εἰς ἀποφάσεις οικονομικῆς πολιτικῆς διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων κεφαλαιουχικοῦ ἔξοπλισμοῦ, πρῶτων ὑλῶν κ.λ.π. τῆς δοθείσης οικονομίας, τὰ ὁποῖα ἀποκαλύπτει ἡ σύγκρισις τῶν

14) Ἐφ' ὅσον αἱ ἐγγραφαὶ τοῦ πίνακος 4 ἐκφράζουν ἀξίας προϊόντων ὑπολογιζομένων εἰς σταθεράς τιμάς, πρὸς εὔρεσιν τῶν ποσοτήτων τῶν προϊόντων αὐτῶν ἀπαιτεῖται διαίρεσις τῶν ἀξιῶν διὰ τῶν ἀντιστοιχῶν σταθερῶν τιμῶν.

πινάκων 4 και 1. Ἐάν τοιαύτη λύσις εἶναι ἀδύνατος τότε καθίσταται ἀναγκαία ἡ ἀναπροσαρμογή τοῦ προγράμματος (ποσοτικῶς ἢ χρονικῶς) ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαθεσίμων οικονομικῶν πόρων. Οὕτω, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου ταύτης θὰ ἦτο δυνατόν νὰ ἀποκαλυφθοῦν τυχόν ὑπάρχουσαι ἀσυνέπειαι κατὰ τὴν κατάρτισιν ἐνὸς οικονομικοῦ προγράμματος.

Δ'. ΠΙΝΑΞ ΕΙΣΡΟΩΝ - ΕΚΡΟΩΝ ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ ⁽¹⁵⁾

Ὁ πίναξ εισροῶν - ἐκροῶν δύναται, ὡς ἐλέχθη, νὰ παραβληθῇ πρὸς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Ἐκ τῶν πληροφοριῶν τοῦ πίνακος τούτου δυνάμεθα, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμοὺς, νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ὕψος τοῦ ἐθνικοῦ εισοδήματος καὶ τὸν τρόπον διαθέσεως αὐτοῦ κατὰ δοθεῖσαν περίοδον.

Ἐπάρχουν ἐν τούτοις σημαντικαὶ διαφοραὶ μεταξὺ τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν καὶ τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν. Αἱ κυριώτεραι ἐκ τῶν διαφορῶν αὐτῶν εἶναι αἱ ἑξῆς δύο : α) εἰς τὸν πίνακα τῶν εισροῶν - ἐκροῶν περιέχονται πληροφορία περὶ τοῦ τελικοῦ προϊόντος μιᾶς οικονομίας ἐντὸς μιᾶς δοθείσης περιόδου, ὡς συμβαίνει μὲ τοὺς ἐθνικοὺς λογαριασμοὺς, ἐπὶ πλέον ὅμως περιέχονται καὶ πληροφορία περὶ τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν τῆς δοθείσης οικονομίας, αἱ ὁποῖαι ἀποκλείονται ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν. β) Ἐπειδὴ ἡ λογιστικὴ βάση διὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν εἶναι αἱ ἀγοραὶ καὶ πωλήσεις ἀγαθῶν καὶ ὑπηρεσιῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, δὲν λαμβάνονται συνήθως ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐθνικοῦ εισοδήματος, βάσει τοῦ ἀνωτέρω πίνακος, τὰ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εισρέοντα εισοδήματα. Συνεπῶς τὸ ἐθνικὸν εισόδημα, ὡς δίδεται ἐκ τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν, εἶναι συνήθως κατώτερον τοῦ ἐθνικοῦ εισοδήματος, ὡς τοῦτο καθορίζεται εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν, κατὰ τὸ ποσὸν τῶν ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ εισρέοντων εισοδημάτων.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐθνικοῦ εισοδήματος δύναται νὰ προσδιορισθῇ κατὰ δύο τρόπους ἐκ τοῦ πίνακος εισροῶν - ἐκροῶν : α) Διὰ προσθέσεως τῶν ἀθροιστικῶν κονδυλίων τῆς καταναλώσεως (ιδιωτικῆς καὶ δημοσίας) καὶ τῶν ἐπενδύσεων καὶ τῆς ἀφαιρέσεως (προσθέσεως) τοῦ ἐλλείμματος (πλεονάσματος) τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου. Οὕτω, βάσει τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 1 ἔχομεν :

$$180 + 50 + 45 + 18 - 18 = 275$$

Τὸ συνολικὸν ποσὸν 275 ἀποτελεῖ τὸ ἀκαθάριστον ἐθνικὸν εισόδημα (gross value added) τῆς οικονομίας κατὰ τὸ τέλος τοῦ ἔτους ⁽¹⁶⁾.

β) Διὰ προσθέσεως τῶν εισοδημάτων ἐξ ὑπηρεσιῶν καὶ τῶν φόρων :

$$215 + 60 = 275$$

Ὅμοιως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ πίνακος 4 λαμβάνομεν :

$$^{\circ} \text{Ακαθ. ἔθν. εισόδημα : } 241,5 + 69,3 - 18 = 292,8$$

$$\text{ἢ } 229,1 + 63,7 = 292,8$$

15) Βλ. Η. Liebling : Interindustry economy and national income theory εἰς Input - Output. — Analysis : an appraisal κλπ.

16) Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω σημειώσεις ἐπιφυλάξεις καὶ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ ἐν τῷ πίνακι ἀναγραφομένη ἀξία τῶν ἐπενδύσεων εἶναι ἀκαθάριστος.

Ἐκ τῶν πινάκων 1 καὶ 4 δυνάμεθα τώρα νὰ σχηματίσωμεν τοὺς κάτωθι ἀναλυτικούς λογαριασμούς :

Πίναξ 5

Ἐθνικοὶ Λογαριασμοὶ καὶ Διακλαδικαὶ Συναλλαγαὶ διὰ τὰ τη χ καὶ ψ (α)

	Πραγματικά δεδομένα διὰ τὸ ἔτος χ	Προβλέψεις διὰ τὸ ἔτος ψ	% Μετα- ολαί με- ταξὺ ἐτῶν χ καὶ ψ
I. Ἔσοδα καὶ ἔξοδα ἰδιωτῶν			
α) Ἔσοδα (μισθοί, κέρδη κ.λπ.)	215	229,1	6,5
β) Ἔξοδα (κατανάλωσις)	180	189	5
γ) Διαφορὰ (ἀποταμίευσις)	35	40,1	14,5
II. Ἔσοδα καὶ ἔξοδα Δημοσίου			
α) Ἔσοδα (Φόροι)	60	63,7	6,2
β) Ἔξοδα (κατανάλωσις)	50	52,5	5
γ) Διαφορὰ (ἀποταμίευσις)	10	11,2	12
III. Ἐξωτερικὸν ἐμπόριον			
α) Εἰσαγωγαί	58	62	7
β) Ἐξαγωγαί	40	42	5
γ) Ἐλλειμμα Ἐμπορ. Ἴσοζυγίου	18	18	0
IV. Ἐπένδυσις Ἀποταμίευσις			
α) Ἐπένδυσις	63	69,3	10
Παγία	45	49,5	
Ἀποθέματα	18	19,8	
β) Ἀποταμίευσις	63	69,3	10
Ἰδιωτῶν	35	40,1	
Δημοσίου	10	11,2	
Ἐλλειμμα Ἐμπ. Ἴσοζυγίου (β)	18	18	
V. Διακλαδικαὶ Συναλλαγαὶ			
α) Ἀγοραί	220	231,9	4,5
ὑπὸ Πρωτ. Παραγωγῆς	40	42,5	
» Μεταποιήσεως	100	105,2	
» Λοιπῶν Κλάδων	80	84,2	
β) Πωλήσεις	220	231,9	4,5
ὑπὸ Πρωτ. Παραγωγῆς	80	84,4	
» Μεταποιήσεως	80	84	
» Λοιπῶν Κλάδων	60	63,5	

(α) Διὰ τοῦ συμβόλου ψ παριστᾶται τὸ ἔτος εἰς ὃ ἀναφέρεται ὁ πίναξ 4.

(β) Τὸ ἔλλειμμα τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀρνητικὴ ἐπένδυσις ἢ ὡς ἀποτμίευσις ἐξωτερικοῦ χρηματοδοτοῦσα ἰσόποσον ἐπένδυσιν τῆς δοθείσης οικονομίας.

Οί λογαριασμοί I - IV ἀντιστοιχοῦν εἰς ἀναλόγους τοιοῦτους τοῦ συστήματος ἔθνικῶν λογαριασμῶν. Ὁ λογαριασμός V συναντᾶται μόνον εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ.

Ἐφ' ὅσον ὁ πίναξ 1 παριστᾷ λογιστικὴν κατάστασιν τῆς οἰκονομίας διὰ τὸ δοθὲν ἔτος, οἱ ἐκ τοῦ πίνακος τούτου ἀπορρέοντες λογαριασμοὶ ἀναφέρονται εἰς πραγματοποιηθέντα οἰκονομικὰ μεγέθη. Ἀντιθέτως οἱ ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 4 διαμορφούμενοι λογαριασμοὶ ἀναφέρονται εἰς π ρ ο β λ ε ψ ε ι ς περὶ τῆς ἐξελίξεως τῶν ὡς ἄνω μεγεθῶν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς μεταβολῆς τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ πίνακος 1, συμφώνως πρὸς τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

Ε'. ΑΝΟΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ

Πάντα τὰ ὑποδείγματα τοῦ συστήματος Λεόντιεφ τὰ ὁποῖα περιλαμβάνουν, ὡς καὶ τὸ ἤδη ἔξετασθὲν ὑπόδειγμα, ἓνα τομέα τελικῆς ζητήσεως ἐξωγενῶς καθοριζόμενον, χαρακτηρίζονται ὡς «ἀνοικτά». Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα προῆλθον ἐκ τῶν «κλειστῶν» ὑποδειγμάτων Λεόντιεφ, εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχει τομεὺς τελικῆς ζητήσεως, τὰ δὲ ἐπίπεδα δράσεως πάντων τῶν οἰκονομικῶν κλάδων θεωροῦνται ὡς καθοριζόμενα ἐντὸς τοῦ συστήματος (ἐνδογενῶς). Εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ λαμβάνονται ὡς εἰς παραγωγικὸς κλάδος, τοῦ ὁποίου ἔκροαί (προϊόντα) εἶναι αἱ πρὸς τοὺς λοιποὺς κλάδους τῆς οἰκονομίας παρεχόμεναι ὑπηρεσίαι καὶ εἰσροαὶ εἶναι ἡ κατανάλωσις διαφόρων προϊόντων ἐγχωρίως παραγομένων ἢ εἰσαγομένων ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ.

Τὸ ἐξωτερικὸν ἐμπόριον ἐπίσης θεωρεῖται εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα ὡς ἰδιαιτερος παραγωγικὸς κλάδος, μὲ εἰσροὰς τὰ ἐξαγόμενα προϊόντα καὶ ἔκροας τὰ εἰσαγόμενα τοιαῦτα (17). Σταθεροὶ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ καθορίζονται ἐν προκειμένῳ διὰ πάντας τοὺς οἰκονομικοὺς κλάδους. Στατιστικαὶ δυσχέρειαι καὶ ἰδίως ὁ ἀπρόβλεπτος χαρακτήρ τῆς ἐξελίξεως ὠρισμένων τομέων, π.χ. τοῦ τομέως τῶν Ἐξαγωγῶν, ὤθησαν εἰς τὴν ἐγκατάλειψιν τῶν κλειστῶν ὑποδειγμάτων καὶ τὴν ἀποδοχὴν τῶν ἀνοικτῶν τοιούτων. Τὰ ἀνοικτὰ συστήματα ἐξ ἄλλου εἶναι ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των πρόσφορα διὰ τὴν μελέτην προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ὡς εἶδομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἔξετασθέντος ὑποδείγματος. Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα, ὑποτίθεται συνήθως ὅτι τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὠρισμένων τομέων, ὡς π.χ. τοῦ κρατικοῦ τομέως καὶ τοῦ τομέως τῶν ἐξαγωγῶν, καθορίζονται ἐξωγενῶς ὡς σκοποὶ τοῦ οἰκονομικοῦ προγράμματος καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἐπίσης καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν εἰσαγωγῶν καὶ τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὰ ὁποῖα θὰ ἐπιτρέψουν τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ σκοπῶν.

ΣΤ'. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ (18)

Εἰς τὸ προηγουμένως ἔξετασθὲν ὑπόδειγμα καθορίζονται τὰ ἐπίπεδα εἰσροῶν καὶ ἔκροῶν τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὴν ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο ἀναφέρεται βεβαίως εἰς συγκεκριμένην χρονικὴν περίοδον ἀλλὰ

17) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι οἱ ὅροι «κλειστὸν ἢ ἀνοικτὸν» ὑπόδειγμα δὲν σημαίνουν ἀποκλεισμὸν ἢ μὴ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου ἀπὸ τοῦ ὑποδείγματος.

18) Βλ. καὶ μέρος II τῆς παρούσης ἐργασίας.

δέν δίδει τὴν διαχρονικὴν ἐξάρτησιν τῶν μεταβλητῶν. Διὰ τοῦτο τὸ ὑπόδειγμα χαρακτηρίζεται ὡς «στατικόν»⁽¹⁹⁾.

Τὰ στατικά ὑποδείγματα δυνατόν νὰ εἶναι ἀνοικτὰ ἢ κλειστά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν περιέχεται εἰς αὐτὰ ἰδιαίτερος τομεὺς τελικῆς ζητήσεως ἢ ἐὰν πάντα τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν οικονομικῶν κλάδων ἀλληλοκαθαρίζονται ἐντὸς τοῦ οικονομικοῦ συστήματος (ἐνδογενῶς).

Διὰ τῶν στατικῶν ὑποδειγμάτων εἶναι, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, γενικῶς δυνατός ὁ προσδιορισμὸς τῶν μεταβολῶν εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν καὶ εἰς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἐγγραφῶν πινάκων εἰσροῶν - ἐκροῶν ἀνηκόντων εἰς διαφόρους χρονικὰς περιόδους (συγκριτικὴ στατικὴ), ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ περιγραφή τῆς ἐξελιξέως τῶν διαφορῶν μεγεθῶν εἰς τὸ μεταξὺ τῶν ἐν λόγω περιόδων χρονικὸν διάστημα. Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ κενοῦ αὐτοῦ ὁ καθηγητῆς Λεόντιεφ ἐπενόησε τὰ «δυναμικὰ» ὑποδείγματα⁽²⁰⁾, εἰς τὰ ὁποῖα εἰσάγονται ὁ χρόνος καὶ αἱ μεταβολαὶ τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τῶν παραγωγικῶν κλάδων ὡς ὑπολογιστικοὶ παράγοντες. Τὰ δυναμικὰ ὑποδείγματα διακρίνονται ὡσαύτως εἰς ἀνοικτὰ καὶ κλειστά, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ γνωστοῦ κριτηρίου. Μέχρι τοῦδε δὲν ἐγένετο σοβαρὰ προσπάθεια ἐμπειρικῆς ἐπαληθεύσεως τῆς ἀξίας τῶν δυναμικῶν ὑποδειγμάτων λόγω στατιστικῶν καὶ ὑπολογιστικῶν δυσχερειῶν.

Ζ'. ΣΥΣΤΗΜΑ ΛΕΟΝΤΙΕΦ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ⁽¹⁾

Τὸ σύστημα Λεόντιεφ θεωρεῖται εἰδικὴ περίπτωσης τοῦ καλουμένου Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἀποτελεῖ γενικῶς μίαν τεχνικὴν ὑπολογισμοῦ τῶν προγραμμάτων οικονομικῆς δράσεως, στηρίζεται δέ, ὡς καὶ τὸ σύστημα Λεόντιεφ, εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἐκφράζεται μαθηματικῶς εἰς τὴν «γραμμικότητα» τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων ἐξ ἧς δικαιολογεῖται καὶ ὁ ὅρος «Γραμμικὸς» Προγραμματισμὸς⁽²²⁾.

Τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριστος συνδυασμὸς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ μεγίστου οικονομικοῦ αποτελέσματος (ἢ τῆς ἐλαχίστης οικονομικῆς θυσίας).

Ἡ εὔρεσις ἐνὸς ἀρίστου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ προϋποθέτει βεβαίως δυνατότητα ἐπιλογῆς μεταξὺ διαφορῶν μεθόδων παραγωγῆς, τὰς ὁποίας ὑποτίθεται ὅτι γνωρίζει ὁ προγραμματίζων. Εἰς τὸ σύστημα Λεόντιεφ ὑποτίθεται, ἐν τούτοις, ὅτι ὑπάρχει μόνον εἷς ὀρισμένος τρόπος ἐπιτευξέως ἐνὸς οικονομικοῦ αποτελέσματος⁽²³⁾ καὶ συνεπῶς οὐδὲν ζήτημα ἐπιλογῆς τίθεται. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἀκρι-

19) Βλ. W. Leontief, *Studies in the Structure of American Economy*, 1953 καὶ R. G. Allen, *Mathematical Economics*, London, 1956, Κεφ. 11.

20) Βλ. βιβλιογρ. προηγ. σημειώσεως καὶ τὸ μέρος II τῆς παρουσίας ἐργασίας (τμήμ. Β).

21) Βλ. Α. Α. Λάζαρη «Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς» εἰς Ἐπιθ. Οἰκ. καὶ Κοινων. Ἐπιστημῶν, Ἰανουάρ. - Ἰουν. 1956.

22) Α. Α. Λάζαρη ἐθν. ἀν. σ. 24.

23) «Ἐκαστος κλάδος παράγει ἐν μόνον προϊόν καὶ καθ' ὀρισμένην μέθοδον» (βλ. ἀρχὴν τμήμ. Β', ἀνωτ.).

ὡς τὸ σύστημα Λεόντιεφ θεωρεῖται ὡς εἰδικὴ μορφή τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ Νεώτεροι ἔρευνα ἄπειδειξαν ἐν τούτοις ὅτι εἶναι δυνατόν νὰ ἀρθῇ ἢ ὡς ἄνω περιοριστικὴ ὑπόθεσις τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, ὅποτε καὶ τὸ πρόβλημα τῆς ἀναλύσεως εἰσοῶν - ἐκροῶν⁽²⁴⁾ μετατρέπεται εἰς γενικὸν πρόβλημα ἀριστοποιήσεως ὡς εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμόν⁽²⁵⁾.

Η'. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Τὸ σύστημα Λεόντιεφ ἤρχισεν ἤδη νὰ χρησιμοποιηθῆται διὰ πρακτικὸς σκοποὺς εἰς πλείστας χώρας⁽²⁶⁾, εἰς διαφόρους δὲ ἄλλας γίνεται σχετικὴ προεργασία διὰ τὴν εἰσαγωγὴν του⁽²⁷⁾.

Ἡ ταχεῖα διάδοσις τοῦ συστήματος Λεόντιεφ ὀφείλεται τόσον εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἀξίαν ὅσον καὶ εἰς τὴν στατιστικὴν χρησιμότητα αὐτοῦ. Ἀναλυτικῶς τὸ σύστημα τοῦτο (ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ ὡς βοηθητικὸν ὄργανον οἰκονομικῆς πολιτικῆς, εἰδικώτερον δέ, ὡς ἐλέχθη, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ.

Τὸ κυριώτερον πλεονέκτημα τοῦ συστήματος Λεόντιεφ ἀπὸ ἀπόψεως οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἰκανότης αὐτοῦ νὰ παρακολουθῆ τόσον τὰς ἀμέσους ὅσον καὶ τὰς ἐμμέσους οἰκονομικὰς συνεπείας δοθεῖσης μεταβολῆς εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν. Ἄς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι εἰς μίαν χώραν μελετᾶται ἡ ἐκτέλεσις ἐνὸς στεγαστικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων. Δὲν εἶναι κατ' ἀρχὴν δύσκολον νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ποσότητες σιδήρου, τσιμέντου καὶ λοιπῶν οἰκοδομικῶν ὑλικῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ὡς ἄνω ἐκτέλεσιν. Πρέπει ὅμως νὰ ληφθῇ ἐπίσης ὑπ' ὄψιν ὅτι, πρὸς ἐξασφάλισιν τῶν ἀναγκαίουσῶν ποσοτήτων π.χ. σιδήρου, ἀπαιτοῦνται ἀνάλογοι ποσότητες σιδηρομεταλλεύματος, συγκοινωνιακῶν ὑπηρεσιῶν, καυσίμου ὕλης κ.λ.π. (ἢ ἐνδεχομένως ἀνάλογος ποσότης συναλλάγματος πρὸς εἰσαγωγὴν τοῦ σιδήρου ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ).

Καθίσταται εὐκόλως ἀντιληπτὸν πόσον πολὺπλοκον ἀποβαίνει τὸ συνολικὸν πλέγμα τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι ἀναφαίνονται κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ ὡς ἄνω προγράμματος ἢ οἰουδήποτε ἄλλου προγράμματος ἐπενδύσεων ἢ καταναλώσεως. Τὸ σύστημα Λεόντιεφ παρέχει τὴν δυνατότητα εὐχεροῦς παρακολουθήσεως τοῦ πολυπλόκου αὐτοῦ πλέγματος σχέσεων.

Μέχρι τοῦδε ὑπετίθετο ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν διαφορῶν ἀγαθῶν (καὶ ὑπηρεσιῶν) παραμένουν σταθεραὶ καὶ ὅτι μόνον αἱ ποσότητες αὐτῶν εἶναι μεταβληταί. Εἶναι ἐν τούτοις δυνατὴ ἢ κατὰστροφαις ἐνὸς ὑποδείγματος εἰς τὸ ὅποιον αἱ ποσότητες λαμ-

24) «Ἀνάλυσις εἰσοῶν - ἐκροῶν» (input - output) ἀποκαλεῖται συνήθως ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις βάσει τοῦ συστήματος Λεόντιεφ.

25) Βλ. T. Koopmans «Activity Analysis» Ν. Υ. 1951, καὶ R. G. D. Allen : Mathematical Economics, London, 1956 (σ. 573 κ.έ.).

26) Πλὴν τῶν Η.Π.Α. ὅπου λειτουργοῦν ἀπὸ τινῶν ἐτῶν καλῶς ὀργανωμένα κέντρα ἐρευνῶν ἢ ἐφαρμογῆς τῆς διακλαδικῆς ἀναλύσεως, ἔχουν καταστρώσει πίνακας εἰσοῶν-ἐκροῶν αἱ ἐξῆς εὐρωπαϊκαὶ χώραι : Δανία, Ἰταλία, Ὀλλανδία, Σουηδία, Νορβηγία, Μ. Βρετανία καὶ Γαλλία (Βλ. Econ. Bulletin for Europe, May 1956).

27) Βλ. Input - Output Models, εἰς Economic Bulletin for S. America, Sept. 1956.

βάνονται ὡς σταθερὰ μεγέθη, αἱ δὲ τιμαὶ δύνανται νὰ μεταβάλλονται. Αἱ μεταβληταὶ τιμαὶ τοῦ ὑποδείγματος δύνανται τότε νὰ ταξινομηθοῦν εἰς δύο κατηγορίας, τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς τιμὰς καὶ τὰς ἐξηρητημένας τοιαύτας⁽²⁸⁾.

Ἄν εἰς τὸ ὑπόδειγμα τῶν μεταβλητῶν τιμῶν ληφθοῦν ὡς ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, π.χ. οἱ ἐργατικοὶ μισθοὶ καὶ ὡς ἐξηρητημένα μεταβληταὶ αἱ τιμαὶ τῶν προϊόντων τῶν διαφόρων κλάδων, τότε θὰ ἦτο δυνατόν (c.p.) διὰ χρησιμοποίησεως τοῦ ὑποδείγματος τούτου⁽²⁹⁾ νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἄμεισοι καὶ ἔμμεσοι ἐπιδράσεις ἐπὶ τοῦ κόστους καὶ τῶν τιμῶν διαφόρων προϊόντων, αἱ ἀπορρέουσαι ἀπὸ δοθεῖσαν μεταβολὴν εἰς τοὺς ἐργατικούς μισθοὺς⁽³⁰⁾. Τὰ προβλήματα τῆς ἐπιπτώσεως τῶν ἐμμέσων φόρων, τῶν ὄρων ἐμπορίου μεταξὺ γεωργίας καὶ βιομηχανίας καὶ γενικῶς προβλήματα νομισματικῆς φύσεως θὰ ἠδύναντο κατ' ἀρχὴν νὰ ἐρευνηθοῦν δι' ἑνὸς τοιοῦτου ὑποδείγματος.

Πλὴν τῶν καθαρῶς ἀναλυτικῶν ἐφαρμογῶν τῆς διακλαδικῆς ἀναλύσεως⁽³¹⁾, ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν καὶ αἱ στατιστικαὶ ἐφαρμογαὶ τοῦ πίνακος εἰσοδῶν - ἐκροῶν. Διευκρινίσθη ἤδη ἡ σχέση τοῦ πίνακος τούτου πρὸς τὸ σύστημα ἐθνικῶν λογαριασμῶν. Διὰ τῆς συστηματικῆς καταχωρήσεως εἰς τὸν ἐν λόγῳ πίνακα στατιστικῶν στοιχείων περὶ τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς οἰκονομίας ἐντὸς δοθείσης περιόδου, ὡς ἐπίσης καὶ περὶ τῶν διακλαδικῶν συναλλαγῶν, αἱ ὁποῖαι ἔλαβον χώραν κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον, παρέχεται ἡ δυνατότης ἐποπτικῆς ἐξετάσεως τῶν στοιχείων αὐτῶν καὶ συνεπῶς ἐκκαθαρίσεως τυχόν ἀσυνεπειῶν ἢ συμπληρώσεως πληροφοριακῶν κενῶν⁽³²⁾. Τὰ κενὰ ταῦτα τοῦ πίνακος εἰσοδῶν - ἐκροῶν δεικνύουν ἐξ ἄλλου τὴν κατεύθυνσιν πρὸς τὴν ὁποῖαν πρέπει νὰ στραφῇ ἡ στατιστικὴ ἔρευνα. Εἰς διαφόρους χώρας ὁ πίναξ εἰσοδῶν - ἐκροῶν χρησιμοποιεῖται ἐπιτυχῶς ὡς μέσον βελτιώσεως τῶν στατιστικῶν ἐκτιμήσεων ἢ πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ συστήματος τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν⁽³³⁾.

Θ'. ΚΡΙΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιών. Ὡς καθίσταται προφανὲς ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων, τὸ σύστημα Λεόντιεφ θάβει ὡς θεμελιώδη

28) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ ἐξετασθὲν (ἀνοικτὸν) ὑπόδειγμα τοῦ τμήμ. Γ, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ μεταβληταὶ ποσότητες ταξινομοῦνται εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν τομέων (ἐξηρητημένα μεταβληταὶ) καὶ τὴν τελικὴν ζήτησιν (ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ).

29) Κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐν τμήματι Γ (ἀνωτέρω) ἐφαρμοσθέντα.

30) Τὸ ὑπόδειγμα τοῦτο θὰ ἦτο χρήσιμον π.χ. διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν ἐπιδράσεων σχεδιαζομένης ἀναπροσαρμογῆς ἐργατικῶν μισθῶν λόγῳ πληθωρισμοῦ.

31) Εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀναφερθείσας ἐφαρμογὰς πρέπει νὰ προστεθῇ καὶ ἡ καλουμένη «διαχωρικὴ ἀνάλυσις» (interregional analysis) βάσει τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, ἡ ὁποία παρουσιάζει ἐνδιαφέρον διὰ χώρας μὲ σοβαρὰς διαφορὰς εἰς τὰ ἐπίπεδα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τῶν διαφόρων περιοχῶν των. Βλ. Chenery and Clark: *The structure and Growth of Italian Economy*, Roma 1953.

32) Εἰς τινὰς περιπτώσεις εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τῶν σχέσεων τοῦ πίνακος (π.χ. τῆς ἰσότητος τοῦ ἀθροίσματος τῶν στηλῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σειρῶν) τυχόν ἑλλείποντα στατιστικὰ στοιχεῖα.

33) Βλ. *Econ. Bull. for Europe*, May 1956.

προϋπόθεσιν του την σταθερότητα των συντελεστών εισροής (υπόθεσις σταθερών αναλογιών). Ένταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὴν βασιμότητα τῆς προϋποθέσεως ταύτης, ἡ ὁποία εἶναι θεμελιώδης διὰ τὴν ἀνάλυσιν εἰσοῶν - ἐκροῶν καὶ γενικώτερον τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν.

Ὡς ἤδη ἐλέχθη, συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν αναλογιῶν, οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς (Input Coefficients) θεωροῦνται σταθεροὶ τόσοσιν κατὰ κλίμακα παραγωγῆς ὅσον καὶ διαχρονικῶς. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ σχέσις μεταξὺ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων συντελεστῶν καὶ παραγομένων ποσοτήτων ἀγαθῶν λαμβάνεται ὡς ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου καὶ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς.

Τὴν μεθοδολογικὴν καὶ ἀπλοποιητικὴν ἀξίαν τῆς ὡς ἄνω ὑποθέσεως οὐδεὶς ἀμφισβητεῖ. Ἠγέρθησαν ὅμως σοβαραὶ ἀμφισβητήσεις, ἐὰν αὕτη εἶναι δυνατόν νὰ χρησιμοποιηθῆ διὰ τὴν περιγραφὴν πραγματικῶν καταστάσεων. Τὰ προβλήματα, ἐν προκειμένῳ ἐπιχειρήματα εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι εἰς τὰς παραγωγικὰς μονάδας παρατηρεῖται ἐνίοτε τὸ φαινόμενον τῆς μὴ ἀναλόγου κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως — εἴτε ὑπὸ τὴν μορφήν τῆς φθινούσης, εἴτε ὑπὸ τὴν μορφήν τῆς αὐξήσεως ἀποδόσεως — ἀφ' ἑτέρου δὲ ὅτι αἱ μεταβολαὶ τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ ἰδίως ἡ ἐξέλιξις τῆς τεχνικῆς ἐπιφέρουν σοβαρὰς μεταβολὰς εἰς τοὺς τεχνολογικοὺς συντελεστάς.

Μολονότι τὸ ἐπιχείρημα τῶν μεταβολῶν τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν συντελεστῶν, ἔν τινι δὲ μέτρῳ, καὶ τὸ ἐπιχείρημα τῆς μὴ ἀναλόγου κατὰ κλίμακα ἀποδόσεως, δὲν ἔχουν πάντοτε τὴν εἰς αὐτὰ ἀποδιδομένην σημασίαν³⁴), ἡ ἀνωτέρω κριτικὴ εἶναι νομιζομένη κατὰ βάσιν ὀρθή, λόγῳ κυρίως τῆς σοβαρότητος τοῦ ἐπιχειρήματος περὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς τεχνικῆς. Δεδομένου μάλιστα ὅτι δὲν εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατόν νὰ προβλεφθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς τεχνικῆς, δὲν εἶναι ἐπίσης δυνατόν νὰ περιληφθοῦν καὶ αἱ σχετικαὶ μεταβολαὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν εἰς τὸ ὑπόδειγμα ἀναλύσεως.

Βεβαίως ἡ τεχνικὴ δὲν μεταβάλλεται οὐσιωδῶς ἐντὸς σχετικῶς βραχείου χρόνου διαστήματος καὶ συνεπῶς ἡ σταθερότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, δύναται νὰ θεωρηθῆ βραχυχρονίως, ὡς μία ἱκανοποιητικὴ προσέγγισις εἰς τὴν πραγματικότητα. Διὰ μακροτέρας ὅμως περιόδους (π.χ. διὰ περιόδους 3,5 ἢ περισσοτέρων ἐτῶν) ἡ μεταβλητότης τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν δὲν εἶναι δυνατόν νὰ ἀγνοηθῆ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανές ὅτι ἡ προγνωστικὴ ἱκανότης τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν αναλογιῶν εἶναι μᾶλλον περιορισμένη. Δὲν δυνάμεθα, δηλαδή, νὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν μᾶς ὠρισμένης περιόδου διὰ νὰ προβλέψωμεν ἀσφαλῶς τὰς μελλοντικὰς οἰκονομικὰς ἐξελίξεις, λόγῳ ἀκριβῶς τῶν ἀπροβλέπτων μεταβολῶν εἰς τοὺς συντελεστάς αὐτούς. Πρέπει νὰ ὁμολογηθῆ ὅτι ἡ μέχρι τοῦδε χρησιμοποίησις τοῦ συστήματος εἰσοῶν - ἐκροῶν — τὸ ὁ-

34) Βλ. σχετικῶς, Masao Fukuoka : Full employment and constant coefficients of production, Quart. Journal of Economics, Febr. 1955 καὶ E. Simpson : inflation, Deflation and employment in Italy» εἰς Reviv of Economic Studies, 1941—1950.

ποϊον, ὡς γνωρίζομεν, στηρίζεται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν — δι' οικονομικὴν πρόγνωσην, δὲν εἶχε τὰ ἀναμενόμενα ἀποτελέσματα (35). Τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι ἄλλη τις μέθοδος προγνώσεως θὰ ἰδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῆ μὲ μεγαλύτερας πιθανότητος ἐπιτυχίας πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτόν. Ἡ κτηθεῖσα πείρα ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῶν «οἰκονομικῶν βαρομέτρων», μέχρι τῶν σημερινῶν πολυπλόκων οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων (36) κατέστησαν τοὺς οἰκονομολόγους λίαν ἐπιφυλακτικούς ὅσον ἀφορᾷ τὰς προγνωστικὰς δυνατότητας τῆς ἐπιστήμης των.

Θὰ ἰδύνατό τις κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων νὰ ἐρωτήσῃ ἐὰν εἶναι ὀρθὸν νὰ βασίζομεθα ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διὰ τὴν μελέτην προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ ἢ διὰ τὴν κατάρτισιν προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο εἶναι ἀνευδοιάστως καταφατική. Διὰ νὰ γίνῃ ὅμως ἀντιληπτὴ ἡ ἀπάντησις αὕτη εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ σαφὴς διάκρισις μεταξὺ δύο ἐννοιῶν, ἥτοι τῆς περιγραφικῆς (Descriptive) καὶ τῆς κανονιστικῆς (Normative) ἐννοίας τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν αὐτῆς ἔννοιαν ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν περιγραφὴν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων καὶ τὴν οἰκονομικὴν πρόγνωσην. Ὑποτίθεται δηλαδὴ ὅτι αἱ παραγωγικαὶ συναρτήσεις συμπεριφέρονται καθ' ὄρισμένον ἄπλοῦν τρόπον καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι δυνατὴ ἡ προβολὴ τῶν οἰκονομικῶν ἐξελίξεων καὶ εἰς τὸ μέλλον. Αἱ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαι κριτικαὶ παρατηρήσεις καὶ γενικῶς αἱ συνήθως διατυπούμεναι παρατηρήσεις ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀφοροῦν ἀκριβῶς εἰς τὴν ὑπόθεσιν ταύτην ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν τῆς ἔννοιαν.

Ἡ ὑπόθεσις ὅμως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν χρησιμοποιεῖται εἰς τὸν οἰκονομικὸν προγραμματισμὸν οὐχὶ ὑπὸ τὴν περιγραφικὴν ἀλλὰ ὑπὸ τὴν κανονιστικὴν αὐτῆς ἔννοιαν. Ὑπὸ τὴν τελευταίαν ταύτην ἔννοιαν ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν συνδέεται μὲ τὸ βασικὸν πρόβλημα τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, τὸ ὅποιον συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης οἰκονομικῆς διαρθρώσεως, δηλαδὴ τῶν καλύτερων ἐκ τῶν ὑφισταμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, κατὰ τὴν περίοδον τῆς ἐπιλογῆς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἔννοια τῆς μελλοντικῆς τεχνικῆς ἐξελίξεως δὲν ὑπεισέρχεται κατ' ἀρχὴν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ προγραμματισμοῦ. Ὅταν π.χ. ἓνας μηχανικὸς προγραμματίζει τὴν κατασκευὴν ἐνὸς ἔργου, ἔχει νὰ ἐπιλέξῃ τὴν καλύτεραν — βάσει ὀρισμένων κριτηρίων — ἐκ τῶν ὑφισταμένων τεχνικῶν μεθόδων, διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἔργου αὐτοῦ. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι αἱ τεχνικαὶ μέθοδοι θὰ μεταβληθῶν εἰς τὸ μέλλον. Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται προφανῶς νὰ ἐπηρεάσῃ τὴν διατύπωσιν καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος προγραμματισμοῦ, τὸ ὅποιον ἀντιμετωπίζει ὁ μηχανικός. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι κανονιστικοῦ χαρακτῆρος, ἢ δὲ λύσις του καθορίζει.

35) Βλ. Nat. Bureau of Econ. Research : «Input - Output Analysis. An Appraisal». Princeton Univ. Press, 1955.

36) Βλ. π.χ. L. Klein, Economic Fluctuation in the United States, 1921—1944 (N. Y. Wiley, 1950).

τί πρέπει νά γίνη καί ὄχι τί πράγματι θά γίνη. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁ οἰκονομικός προγραμματισμός, γενικώτερον, θέτει προβλήματα κανονιστικοῦ χαρακτήρος, ἡ λύσις τῶν ὁποίων συνίσταται εἰς τήν ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης παραγωγικῆς δραστηριότητος μεταξύ τῶν ὑφισταμένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, πρὸς ἐπίτευξιν ὀρισμένου σκοποῦ.

Ὡς γνωστόν, παραγωγικὴ δραστηριότης εἶναι ὁ συγκεκριμένος συνδυασμός τῶν συντελεστῶν πρὸς παραγωγήν ἐνὸς ἀγαθοῦ. Κατὰ συνέπειαν, «ἀρίστη παραγωγικὴ δραστηριότης» σημαίνει ἄριστον συνδυασμὸν τῶν συντελεστῶν διὰ τὴν παραγωγήν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγαθοῦ. Ἡ διατήρησις ὅμως τοῦ ἀρίστου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ — ὡς βεβαίως καὶ οἰουδήποτε ἄλλου ὀρισμένου παραγωγικοῦ συνδυασμοῦ — εἶναι δυνατὴ μόνον ἂν οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς παραμένουν σταθεροὶ κατὰ κλίμακα παραγωγῆς καὶ διαχρονικῶς, ἂ ν δ η λ α δ ἡ ἡ σ υ ν ἄ ρ τ η σ ι ς π α ρ α γ ω γ ῆ ς συμπεριφέρεται ἐπὶ τῆ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς εἶναι προφανῆς ὁ κανονιστικὸς χαρακτήρ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

Τὰ ἀνωτέρω δὲν σημαίνουν ὅτι, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν προβλεπομένων ἐπενδύσεων ἢ ἐπιλεγείσα παραγωγικὴ δραστηριότης θά λειτουργῇ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆ βάσει τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Διάφορα αἷτια τεχνικῆς ἢ ἄλλης φύσεως (ὡς π.χ. ἡ ἔλλειψις πλήρους διαιρετότητος τῶν παραγομένων ἀγαθῶν ἢ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς) δημιουργοῦν ἀποκλίσεις ἀπὸ τὸ παραγωγικὸν Optimum τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Αἱ ἀποκλίσεις αὗται δὲν θίγουν ἐν τούτοις οὐσιωδῶς τὴν σταθερότητα τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ὅσον ἀφορᾷ τὴν δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Κατὰ συνέπειαν, εἶναι δυνατόν, μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς δραστηριότητος ταύτης νά προβλεφθοῦν μελλοντικαὶ ἐξελίξεις, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅμως τῆς ἐκτελέσεως τοῦ σχετικοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων.

Βεβαίως εἶναι δυνατὴ ἡ ἀντικατάστασις εἰς τὸ μέλλον τῆς ἐπιλεγείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος δι' ἄλλης καλυτέρας, ἥτις βασίζεται ἐπὶ νεωτέρων τεχνικῶν ἐξελίξεων μὲ συνέπειαν τὴν ἀλλοίωσιν τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, ἀλλ' ἡ ἀντικατάστασις αὕτη εἶναι συνήθως οἰκονομικῶς ἀσύμφορος ἂν δὲν ἔχουν προηγουμένως ἀποσβεσθῆ αἱ ἐπὶ τῆ βάσει τῆς ἀρχικῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος διενεωρηθεῖσαι ἐπενδύσεις. Ὅπωςδήποτε, πρὸς ἀποφυγὴν ἐσφαλμένων ἐκτιμήσεων ἐπιβάλλεται ἡ ἐπανεξέτασις τοῦ καταρτισθέντος προγράμματος κατὰ περιόδους καὶ ἡ προσαρμογὴ αὐτοῦ εἰς τὰς ἐκάστοτε διαμορφουμένας νέας συνθήκας καὶ τεχνικὰς ἐξελίξεις. Τοῦτο καθίσταται ἄλλωστε δυνατόν καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ προβλεπόμεναι ὑπὸ τοῦ προγράμματος ἐπενδύσεις δὲν γίνονται ἐφ' ἅπαξ ἐντὸς μιᾶς βραχείας χρονικῆς περιόδου, ἀλλ' ἐκτελοῦνται τμηματικῶς ἐντὸς μιᾶς σχετικῶς μακρᾶς χρονικῆς περιόδου.

Στατιστικαὶ καὶ ὑπολογιστικαὶ δυσχέρειαί. Μολοντοὶ διὰ τῆς τεχνικῆς Λεόντιεφ δύνανται νά ἀντιμετωπισθοῦν ἀποτελεσματικώτερον ἢ δι' ἄλλων ἐμπειρικῶν μεθόδων πλείστα οἰκονομικὰ προβλήματα, δὲν πρέπει πάντως νά παραβλέπεται ἡ σοβαρότης τῶν στατιστικῶν καὶ ὑπολογιστικῶν δυσ-

χειρών, τὰς ὁποίας συνεπάγεται συνήθως ἡ ἐφαρμογή τῆς ὡς ἄνω τεχνικῆς.

Ἐν πρώτοις ἡ διακλαδική ἀνάλυσις προϋποθέτει εἰδικευμένον προσωπικὸν καὶ ἀνεπτυγμένον στατιστικὸν σύστημα. Προϋποθέτει ἐπίσης λύσιν τοῦ προβλήματος τῆς συγκεντρωτικῆς ταξινομήσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ὑπολογισμὸν τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν εισροῆς καὶ ἀντιστροφὴν τῆς μήτρας ταύτης (37). Ἡ ἐξασφάλισις τῶν ὡς ἄνω προϋποθέσεων ἀπαιτεῖ συνήθως χρόνον μακρὸν ἀκόμη καὶ εἰς ἀνεπτυγμένας ἀπὸ στατιστικῆς ἀπόψεως χώρας καὶ ἀναλόγους οικονομικὰς θυσίας. Διὰ τοῦτο ἡ ἀξία τῆς μεθόδου Λεόντιεφ, ἐν σχέσει πρὸς ἄλλας μεθόδους, πρέπει νὰ κρίνεται ὄχι μόνον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀναλυτικῆς τῆς ὑπεροχῆς ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ κόστους ἐφαρμογῆς αὐτῆς.

Ι. ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Τὸ σύστημα Λεόντιεφ ἀποτελεῖ συνέχειαν τῶν κλασσικῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας καὶ στηρίζεται ὡς καὶ τὰ τελευταῖα εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἄλλ' ἐνῶ οἱ κλασσικοὶ οικονομολόγοι τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας δὲν κατήρχοντο ἀπὸ τοῦ ὕψους τῆς θεωρητικῆς ἐρεῦνης, ὁ καθηγητῆς Λεόντιεφ ἐπεχείρησε νὰ δημιουργήσῃ διὰ τοῦ συστήματός του ἐν ἀναλυτικὸν ὄργανον διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν πρακτικῶν οικονομικῶν προβλημάτων.

Τὰ ὑποδείγματα τῆς ἀναλύσεως Λεόντιεφ χαρακτηρίζονται ὡς δυναμικὰ ἢ στατικά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν παρακολουθοῦν ἢ ὄχι διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν οικονομικῶν μεγεθῶν. Τὰ ὑποδείγματα ταῦτα διακρίνονται ἐξ ἄλλου εἰς ἀνοικτὰ ἢ κλειστά, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν περιλαμβάνουν ἓνα ἐξωγενῶς καθοριζόμενον τομέα τελικῆς ζήτησεως προϊόντων, πρὸς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ προσαρμοσθῇ ὁλόκληρον τὸ οικονομικὸν σύστημα, ἢ ἐὰν πάντα τὰ οικονομικὰ μεγέθη καθορίζονται ἐνδογενῶς (ἐντὸς τοῦ ὑποδείγματος). Εἰς τὰ κλειστὰ ὑποδείγματα τὰ οικονομοῦντα ἄτομα ἐν τῷ συνόλῳ θεωροῦνται ὡς εἰς παραγωγικὸς κλάδος παράγων ὑπηρεσίας καὶ ἀπορροφῶν καταναλωτικὰ ἀγαθὰ.

Αἱ προσπάθειαι ἐμπειρικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ συστήματος Λεόντιεφ ἀπέδειξαν ὅτι, πρὸς τὸ παρὸν τουλάχιστον, μόνον τὰ στατικά ἀνοικτὰ ὑποδείγματα εἶναι πρόσφορα διὰ πρακτικὰς ἀναλύσεις, κυρίως διότι τὰ ὑποδείγματα ταῦτα παρουσιάζουν σχετικῶς ὀλιγωτέρας στατιστικὰς καὶ ὑπολογιστικὰς δυσχερείας καὶ διότι εἶναι κατάλληλα διὰ τὴν μελέτην θεμάτων οικονομικῆς πολιτικῆς.

Τὸ κυριώτερον πλεονέκτημα τοῦ συστήματος Λεόντιεφ εἶναι ὅτι παρέχει τὴν δυνατότητα ὑπεροῦς παρακολουθήσεως τῶν ἀμέσων ὅσον καὶ τῶν ἐμμέσων οικονομικῶν συνεπειῶν δοθείσης μεταβολῆς ἐνὸς οικονομικοῦ μεγέθους (π.χ. τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἐξαγωγῶν ἢ τῶν κρατικῶν ἐπενδύσεων). Ἡ ἀρχὴ τῆς οικονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ σύστημα τοῦτο διὰ τὴν μελέτην καὶ τὴν λύσιν πραγματικῶν οικονομικῶν προβλημάτων. Μηχανικὴ πάντως ἐφαρμογὴ τοῦ

37) Βλ. μέρος II τμήμα Α. Δυνατὸν ἀντὶ τῆς ἀντιστροφῆς τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν εισροῆς νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ κατὰ προσέγγισιν (ἀνγνωτικῶν) μεθόδων ὡς ἐλέχθη εἰς τὸ τμήμα Η'.

συστήματος δὲν ἀρκεῖ. Ἀπαιτεῖται ἐπίσης γνῶσις τῶν συνθηκῶν ἐκάστης συγκεκριμένης περιπτώσεως ἐφαρμογῆς πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ὕψους καὶ τῆς συνθέσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ ὑποδείγματος. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην τὸ σύστημα Λεόντιεφ εἶναι δυνατόν νὰ ἀποβῆ πολῦτιμον ὄργανον πρακτικῆς οἰκονομικῆς ἐρεῦνης εἰς χεῖρας πεπειραμένου ἀναλυτοῦ.

Εἰς πλείστας χώρας ἔχει κατανοηθῆ ἡ πρακτικὴ χρησιμότης τοῦ συστήματος Λεόντιεφ, τὸ ὁποῖον ἤρχισεν ἤδη νὰ ἐφαρμόζεται συστηματικῶς εἰς προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναλύσεως ἢ διὰ καθαρῶς στατιστικούς σκοπούς. Τὴν τάσιν ταύτην ὑποβοηθεῖ καὶ ἡ ὁλοῦν ἀξαναομένη σημασία τῶν κυβερνητικῶν οἰκονομικῶν προγραμμάτων, τὰ ὁποῖα δύνανται γενικῶς νὰ ἀντιμετωπισθοῦν εὐχερέστερον καὶ ἀποτελεσματικώτερον διὰ τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν παρὰ διὰ τῶν παλαιότερων στατιστικῶν μεθόδων.

II

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΛΕΟΝΤΙΕΦ

Α'. ΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

1. Κλειστὸν ὑπόδειγμα. Ἐὰν X_i παριστᾷ τὴν ἀξίαν ⁽³⁹⁾ τοῦ συνολικοῦ ἐτήσιου προϊόντος τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου i καὶ X_{ik} τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος τούτου, ἡ ὁποία ἀπορροφᾶται ἐντὸς μιᾶς περιόδου (π.χ. ἐνὸς ἔτους) ὑπὸ τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου k , τότε αἱ συναλλαγματικαὶ σχέσεις τῶν n παραγωγικῶν κλάδων μιᾶς οἰκονομίας κατὰ τὴν ὡς ἄνω περίοδον δύνανται νὰ παρασταθοῦν διὰ τοῦ ἀκολούθου συστήματος:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \chi_{12} - \chi_{13} - \dots - \chi_{1n} &= 0 \\ -\chi_{21} + X_2 - \chi_{23} - \dots - \chi_{2n} &= 0 \\ -\chi_{31} - \chi_{32} + X_3 - \dots - \chi_{3n} &= 0 \\ \cdot &\cdot \\ \cdot &\cdot \\ -\chi_{n1} - \chi_{n2} - \chi_{n3} - \dots + X_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ἢ συνοπτικῶς:

$$X_i - \sum_{k=1}^n \chi_{ik} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ \text{καὶ } i \neq k \end{array} \right. \quad (1')$$

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) παριστοῦν ἀπλῶς λογιστικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ὡς ἀπεικονίζουσαι τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τῶν κλάδων αὐτῶν κατὰ τὴν δοθεῖσαν περίοδον. Οὕτω, ἡ πρώτη ἐξίσωσις δεικνύει ὅτι τὸ συνολικὸν ἐτήσιον προϊόν τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου 1 διανέμεται ἐξ

39) Ἡ ἀξία τῶν προϊόντων ἀποτιμᾶται εἰς σταθερὰς τιμὰς.

όλοκλήρου μεταξύ τών λοιπών κλάδων 2, 3... και ν (40). 'Ανάλογος έρμηγεία πρέπει να δοθῆ και εις τās λοιπās έξισώσεις του συστήματος.

Είς τὸ σύστημα (1) τὰ οικονομούντα άτομα εν τῷ συνόλω θεωροῦνται ὡς εἰς παραγωγικός κλάδος, ὑπὸ εὐρείαν ἔννοιαν, ὁ ὁποῖος προσφέρει εἰς τοὺς λοιποὺς κλάδους τās ὑπηρεσίας του (ἐργασίαν) και ἀπορροφᾷ καταναλωτικά ἀγαθά. Ὅμοιος ὁ κρατικός τομεὺς δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς παραγωγικός κλάδος προσφέρων ὑπηρεσίας διοικήσεως, ἀσφαλείας κ.λ.π. εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους και καταναλισκων μέρους τοῦ προϊόντος τῶν κλάδων αὐτῶν (41). Τὸ ἔξωτερικὸν ἐμπόριον δύναται ἐπίσης νὰ θεωρηθῆ ὡς ἰδιαιτερος κλάδος ἀπορροφῶν τὰ ἐ ξ α γ ὀ μ ε ν α προϊόντα τῶν λοιπῶν κλάδων και προσφέρων εἰς αὐτοὺς τὰ ε ἰ σ α γ ὀ μ ε ν α προϊόντα.

Αἱ σχέσεις μεταξύ τῶν ἀξιῶν τῶν ὑφ' ἐκάστου κλάδου καταναλισκομένων προϊόντων ἐντὸς μιᾶς περιόδου και τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον δύναται νὰ παρασταθοῦν διὰ μιᾶς σειρᾶς ἔξισώσεων τῆς μορφῆς:

$$a_{ik} = \frac{\chi_{ik}}{X_k} \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, v \\ k = 1, 2, \dots, v \end{array} \right\} \quad (2)$$

Τὸ a_{ik} εἶναι «συντελεστὴς εισροῆς» (42) και καθορίζει τὴν ὑπὸ τοῦ κλάδου k καταβαλλομένην ἀξίαν εἰς τὸν κλάδον i διὰ τὴν χρησιμοποίησιν ποσότητος προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου διὰ τὴν παραγωγήν προϊόντος τοῦ κλάδου k ἀξίας μιᾶς χρημ. μονάδος. Οἱ συντελεσταὶ εισροῆς θεωροῦνται σ τ α θ ε ρ ο ἰ ἀνεξαρτήτως τοῦ βαθμοῦ και τῆς περιόδου ἀπασχολήσεως τῶν οἰκείων κλάδων (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιών). Ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν δι' ἐκάστον κλάδον ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν «εἰσροῶν» αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν τοῦ ὡς ἄνω κλάδου. Ἐνταῦθα ὑποτίθεται γενικῶς, πρὸς ὁμοιομορφίαν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰσροῶν δι' ὅλους τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους εἶναι v , ἤτοι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν παραγωγικῶν κλάδων τοῦ συστήματος, ἀλλ' ὑποτίθεται ἐπίσης ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ μερικῶν ἐκ τῶν συντελεστῶν εισροῆς δύναται νὰ εἶναι και μηδέν.

Συμφάνως πρὸς τὰ ἤδη λεχθέντα οἱ συντελεσταὶ εισροῆς διὰ τὸν κλάδον 1 θὰ εἶναι:

$$\left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{v1} \end{array} \right]$$

40) Εἰς τὸ X_i δὲν συμπεριλαμβάνεται ἡ ἀξία τῆς ὑπὸ τοῦ κλάδου 1 καταναλισκομένης ποσότητος ἰδίου προϊόντος, δι' ὃ και εἰς τὴν συνοπτικὴν παράστασιν (1') δὲν ἀθροίζονται τὰ στοιχεῖα χ_{ik} ὅταν $i=k$.

41) Τὸ κόστος τῶν ὡς ἄνω προϊόντων καλύπτεται ἐκ τῶν φορολογικῶν ἐσόδων, τὰ ὁποῖα καταβάλλονται εἰς τὸ Κράτος ὑπὸ τῶν λοιπῶν κλάδων ὡς οἰονεὶ ἀντιπαροχὴ διὰ τās κρατικὰς ὑπηρεσίας.

42) Βλ. μέρος I, τμῆμα Γ παρ. 2.

Κατ' ἀναλογίαν συντελεσται εισροῆς τῶν κλάδων 2 καὶ ν θὰ εἶναι:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \vdots \\ \alpha_{v2} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{1v} \\ \alpha_{2v} \\ \alpha_{3v} \\ \vdots \\ \alpha_{vv} \end{bmatrix}$$

ἀντιστοίχως.

Αἱ ἀνωτέρω «στῆλαι» τῶν συντελεστῶν εισροῆς παριστοῦν προφανῶς τὰ παραγωγικὰ δραστηριότητος τῶν ἀντιστοίχων κλάδων, αἱ ὅποια δεικνύουν τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας παραγωγῆς προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος τῶν κλάδων αὐτῶν. Τὰς ὡς ἄνω συναρτήσεις δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν, γεωμετρικῶς, ὡς σημεία ἐντὸς τοῦ ν - διαστάτου εὐκλειδείου χώρου, ἔχοντα συντεταγμένας τὰ στοιχεῖα α_{ik}, ἢ — ἰσοδυνάμως — ὡς «διανύσματα» (43) ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χώρου καὶ μὲ τὰς αὐτὰς συντεταγμένας.

Ἐκ τῶν διανυσμάτων τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων τῶν διαφόρων κλάδων δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν τὴν «μῆτραν» (44) τῶν συντελεστῶν εισροῆς» (matrix of input coefficients) δι' ὁλόκληρον τὴν ἐξεταζομένην οἰκονομίαν:

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1v} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2v} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{v1} & \alpha_{v2} & \alpha_{v3} & \dots & \alpha_{vv} \end{bmatrix} \quad (45) \quad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα ἡ ὑφ' ἐκάστου κλάδου κατανάλωσις ἰδίου προϊόντος (βλ. ὑποσημ. 40) θὰ θέσωμεν συμβατικῶς $X_{ii} = 0$ καὶ:

$$\alpha_{ii} = \frac{0}{X_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

Κατὰ συνέπειαν ἡ κυρία διαγώνιος ($\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{vv}$) τῆς μῆτρας A περιλαμβάνει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα.

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῶν συντελεστῶν εισροῆς (ἐξίσωσις 2) δυνάμεθα τώρα, δι' ἀντικαταστάσεως, εἰς τὸ σύστημα (1) νὰ σχηματίσωμεν τὸ κάτωθι σύστημα ἐξισώσεων:

43) βλ. Allen (R.C.D.), *Mathematical Economics*, Macmilan, 1956.

44) βλ. ἐπίσης Aitken (A.C.) *Determinants and matrices*, Oliver and Bond, 1949.

45) Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σημειωθέντων περὶ διανυσμάτων, καθίσταται νοητὸν ὅτι ἡ μῆτρα τῶν συντελεστῶν εισροῆς παριστᾷ, γεωμετρικῶς, δέσμην διανυσμάτων ἐντὸς τοῦ ν - διαστάτου εὐκλειδείου χώρου.

$$\left. \begin{aligned} X_1 - a_{1,2} X_2 - a_{1,3} X_3 - \dots - a_{1,v} X_v &= 0 \\ -a_{2,1} X_1 + X_2 - a_{2,3} X_3 - \dots - a_{2,v} X_v &= 0 \\ -a_{3,1} X_1 - a_{3,2} X_2 + X_3 - \dots - a_{3,v} X_v &= 0 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ -a_{v,1} X_1 - a_{v,2} X_2 - a_{v,3} X_3 - \dots + X_v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ἢ συνοπτικῶς:

$$X_i - \sum_{k=1}^v a_{ik} X_k = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, v \\ \text{καὶ } \chi_{ii} = 0 \text{ διὰ } i = \kappa \end{array} \right.$$

Ἐφ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ εισροῆς παραμένουν σταθεροί, αἱ ἀξίαι τῶν συνολικῶν προϊόντων δύναται νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἄγνωστοι μεταβληταὶ εἰς τὸ σύστημα (4). Δεδομένου ὅτι ὁ ἀριθμὸς v τῶν ἐν τῷ συστήματι ἐξισώσεων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνῶστων (X_1, X_2, \dots, X_v), τὸ σύστημα τοῦτο δύναται κατ' ἀρχὴν νὰ λυθῆ. Ἡ ἀκολουθουμένη διαδικασία λύσεως στηρίζεται εἰς τὰ περὶ ὁμογενῶν συστημάτων ὀριζόμενα (46). Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν ἡ λύσις εἶναι σ η μ α ν τ ι κ ή, ἥτοι διάφορος τοῦ μηδενός, μόνον ὅταν ἡ μήτρα τοῦ συστήματος ἰσοῦται πρὸς (rank) $v-1$ ἢ κατωτέρου, δηλ. ἂν ἡ $v \times v$ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι βαθμοῦ τὸ μηδὲν καὶ μία τουλάχιστον ἐκ τῶν $\mu \times \mu$ ὀρίζουσῶν (διὰ $\mu = 1, 2, \dots, v-1$) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Ἡ τοιαύτη λύσις ἐν τούτοις δίδει μόνον τὴν σ η ε τ ι κ ή ν τιμὴν τῶν ζητουμένων μεταβλητῶν καὶ εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως καθορισθῆ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ μιᾶς οἰασθήποτε μεταβλητῆς πρὸς καθορισμὸν τῆς ἀπόλυτου τιμῆς τῶν λοιπῶν. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ ἦτο δυνατόν νὰ καθορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως ὄλων τῶν παραγωγικῶν κλάδων.

Ὡς ἐλέγχθη τὸ σύστημα (4) ἐσχηματίσθη ἀπὸ τὸ σύστημα (1) διὰ τῆς καταλλήλου εἰσαγωγῆς εἰς τὸ τελευταῖον τῶν σταθερῶν συντελεστῶν εισροῆς, οἱ ὁποῖοι ἐκφράζουν τὴν ὑπόθεσιν τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἡ μετατροπὴ αὕτη προσδίδει εἰς τὸ σύστημα (4) λειτουργικὴν ἀξίαν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τοῦτο θὰ ἠδύνατο νὰ χρησιμοποιηθῆ κατ' ἀρχὴν ὄχι μόνον διὰ λογιστικὴν ἀπεικόνισιν τῶν διακλαδικῶν σχέσεων τῆς οἰκονομίας, ἀλλ' ἐπίσης καὶ δι' οἰκονομικὴν πρόγνωσιν ἢ δοκιμαστικὸν σχεδιασμόν.

Τὸ ὑπόδειγμα τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται διὰ τοῦ συστήματος ἐξισώσεων (4) χαρακτηρίζεται ὡς «στατικόν», καθόσον ἡ λύσις αὐτοῦ δὲν δίδει διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν X_1, X_2, \dots, X_v , ἀλλ' εἰκονίζει μόνον μίαν κατάστασιν *ex post* ἰσορροπίας. Εἶναι βεβαίως δυνατόν νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν ὡς ἄνω μεταβλητῶν μεταξὺ δύο χρονικῶν σημείων (συγκριτικὴ στατικὴ), ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ παρακολούθησις τῶν μεταβολῶν αὐτῶν κατὰ τὴν δ ι á ρ κ ε ι α ν δοθείσης περιόδου. Τὸ ὡς ἄνω ὑπόδειγμα χαρακτηρίζεται ἐξ ἄλλου ὡς «κλειστὸν» διότι δὲν περιλαμβάνει ἐξωγενεῖς μεταβλητάς: Ἄπαντα τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν οἰκονο-

46) Βλ. Aitken, Allen, ἔνθ. ἄνωτ.

μικῶν κλάδων, τὰ ὅποια ὑποδηλοῦνται διὰ τῶν X_1, X_2, \dots, X_n , ἀλληλοκαθαρίζονται ἐντὸς τοῦ ὑποδείγματος.

Αἱ μεταβληταὶ X_1, X_2, \dots, X_n ἐκφράζουν τὴν ἀξίαν τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τῶν ἀντιστοίχων κλάδων εἰς σταθερὰς τιμὰς (βλ. ὑποσ. 39). Θὰ ὑποθέσωμεν περαιτέρω ὅτι αἱ τιμαὶ μονάδος $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ τῶν προϊόντων τῶν κλάδων 1, 2, ... n εἶναι ἐπίσης σταθεραὶ. Δυνάμεθα τότε νὰ προσδιορίσωμεν τὰς ποσότητας συνολικῆς παραγωγῆς τῶν προϊόντων τῶν ὡς ἄνω κλάδων ὡς ἐξῆς:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_i}{\tau_i} &\equiv X'_i \\ i &= (1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\}$$

2. Ἄνοικτὸν ὑπόδειγμα. Βασικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ «ἀνοικτοῦ» ὑποδείγματος εἶναι ὅτι ὠρισμένα τῶν ἐν αὐτῷ μεταβλητῶν θεωροῦνται ὡς ἀνεξαρτήτως (ἐκτὸς τοῦ ὑποδείγματος) καθοριζόμενα. Οὕτω θὰ ἠδύνατο π.χ. νὰ θεωρηθῆ ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τὸ ἐπίπεδον καταναλώσεως προϊόντων ὑπὸ τῶν φυσικῶν προσώπων (47), ὁπότε ὁ σχετικὸς κλάδος «οἰκονομοῦντα ἄτομα» (48) χαρακτηρίζεται ὡς ἐξωτερικὸς τομεὺς διὰ τὸ ὑπόδειγμα καὶ διασπᾶται εἰς τοὺς ὑποτομεῖς Ἰδιωτικὴ Κατανάλωσις καὶ Ἑπιχειρήσιαι Προσώπων, τῶν ὑποτομῶν τούτων μόνον χαλαρῶς συνδεομένων.

Ἐὰν ὑποτεθῆ ὅτι ὁ νιοστὸς κλάδος εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ συστήματος ἐξισώσεων (4) ἀντιπροσωπεύει τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα, πρὸς μετατροπὴν τοῦ ὡς ἄνω ὑποδείγματος ἀπὸ κλειστοῦ εἰς ἀνοικτὸν ἢ νιοστὴ ἐξίσωσις ἀπαλείφεται, αἱ δὲ ἐπὶ μέρους ἀξίαι τῶν ἀπορροφωμένων ὑπὸ τῶν οἰκονομοῦντων ἀτόμων προϊόντων τῶν ὑπολοίπων κλάδων (1, 2, 3, ... μ) (49) μεταφέρονται εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τοῦ συστήματος καὶ λαμβάνονται ὡς γνωσταὶ σταθεραὶ $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_\mu$, αἱ ὅποια ἀποτελοῦν τὰ κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - a_{12} X_2 - a_{13} X_3 - \dots - a_{1\mu} X_\mu &= \Psi_1 \\ - a_{21} X_1 + X_2 - a_{23} X_3 - \dots - a_{2\mu} X_\mu &= \Psi_2 \\ - a_{31} X_1 - a_{32} X_2 + X_3 - \dots - a_{3\mu} X_\mu &= \Psi_3 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ - a_{\mu 1} X_1 - a_{\mu 2} X_2 - a_{\mu 3} X_3 - \dots + X_\mu &= \Psi_\mu \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

καὶ συνοπτικῶς

$$X_i - \sum_{k=1}^{\mu} a_{ik} X_k = \Psi_i \quad \left\{ \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, \mu \\ \mu + 1 &= n \\ \chi_{ii} &= 0 \quad \text{διὰ } i = \chi \end{aligned} \right. \quad (5')$$

47) Ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν κατανάλωσιν προϊόντων ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων.

48) Βλ. παρ. 1 ἄνωτ.

49) Δηλαδή οἱ νιοστοὶ ὅροι τῶν ὑπολοίπων ἐξισώσεων.

Τὸ σύστημα (5) εἶναι μὴ ὁμογενές ⁽⁵⁰⁾ καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ μ ἐξισώσεις καὶ μ ἀγνώστους. Δύναται συνεπῶς νὰ λυθῇ ἂν ἡ μήτρα τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους αὐτοῦ εἶναι μιοστοῦ βαθμοῦ, ἥτοι ἂν ἡ ὀρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός ⁽⁵¹⁾.

Λόγω τῆς ἰδιαίτερας οἰκονομικῆς σπουδαιότητος τῶν ἀνοικτῶν ὑποδειγμάτων παραθέτομεν κατωτέρω ἀναλυτικῶς τὴν διαδικασίαν λύσεως τοῦ συστήματος (5).

Συμφωνῶς πρὸς τὸν συμβολισμόν τῶν «μητρῶν» ⁽⁵²⁾ τὸ σύστημα (5) δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix} 1 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1\mu} \\ -a_{21} & 1 & -a_{23} & \dots & -a_{2\mu} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 & \dots & -a_{3\mu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{\mu 1} & -a_{\mu 2} & -a_{\mu 3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \vdots \\ \Psi_\mu \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ὁ πρῶτος παράγων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς ἐξισώσεως (6) καλεῖται «τεχνολογικὴ μήτρα» (technological matrix) καὶ περιλαμβάνει τοὺς σταθεροὺς συντελεστὰς τοῦ συστήματος (5). Θὰ παραστήσωμεν ταύτην διὰ τοῦ συμβόλου A^* . Αἱ στήλαι τῆς τεχνολογικῆς μήτρας παριστοῦν τὰς παραγωγικὰς συναρτήσεις τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας. Αἱ συναρτήσεις αὗται διαφέρουν ἀπὸ τὰς παραγωγικὰς συναρτήσεις τῆς μήτρας συντελεστῶν εισροῆς A , καθ' ὅτι αἱ πρῶται, πλὴν τῶν στοιχείων κόστους (εἰσροῶν) τοῦ παραγομένου προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος, περιλαμβάνουν ἐπίσης ρητῶς τὴν ὡς ἄνω μονάδα ἀξίας (ἐκροήν) ⁽⁵³⁾.

Ἡ τεχνολογικὴ μήτρα ἀποτελεῖ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς καλουμένης «μοναδιαίας μήτρας» (unit matrix) ⁽⁵⁴⁾

$$I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

καὶ τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν εισροῆς A (λαμβανομένου βεβαίως ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ κυρία διαγώνιος τῆς τελευταίας μήτρας περιλαμβάνει μόνον μηδενικὰ στοιχεῖα).

50) Βλ. Aitken, Allen, ἐνθ. ἀν.

51) Εἰδικῶς ἡ ὀρίζουσα τοῦ μὴ ὁμογενοῦς συστήματος τύπου Leontief (ἀνοικτῶν ὑπόδειγμα) πρέπει νὰ εἶναι θετικὴ. Βλ. σχετικῶς Economic Activity Analysis, ed. by Morgenstern (σ. 400 κ.ἐπ.).

52) Βλ. Aitken, ἐνθ. ἀν. σ. 3.

53) Αἱ εισροαὶ λαμβάνονται μὲ ἀρνητικὰς τιμὰς εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰς ἐκροὰς αἱ ὁποῖαι λαμβάνονται ὡς θετικαὶ μονάδες.

54) Aitken, ἐνθ. ἀνωτ. σ. 12.

Δυνάμεθα οὕτω νὰ παραστήσωμεν περιληπτικῶς τὴν τεχνολογικὴν μῆτραν ὡς ἀκολούθως :

$$A^* \equiv [I - A] \quad (8)$$

Ἡ τεχνολογικὴ μῆτρα $[I - A]$ καλεῖται συνήθως «μῆτρα τύπου Λεόντιεφ». Ὁ δεύτερος παράγων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τῆς ἐξισώσεως (6) ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα τῶν προσδιοριστέων μεταβλητῶν τοῦ συστήματος (5), τὸ δὲ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης παριστᾷ τὸ διάνυσμα τῆς τελικῆς ζητήσεως. Ἐάν θέσωμεν περιληπτικῶς X καὶ Ψ διὰ τὸ διάνυσμα τῶν προσδιοριστέων μεταβλητῶν καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως ἀντιστοίχως, τότε ἡ ἐξίσωσις (6) καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (5) δύναται νὰ λάβῃ τὴν συνοπτικὴν μορφήν :

$$[I - A] \cdot X = \Psi \quad (9)$$

Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (9) ἐπὶ τὴν μῆτραν $[I - A]^{-1}$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ «ἀντίστροφος» τῆς τεχνολογικῆς μῆτρας, λαμβάνομεν :

$$[I - A]^{-1} \cdot [I - A] \cdot X = [I - A]^{-1} \cdot \Psi \quad (10)$$

Καὶ ἐπειδὴ $[I - A]^{-1} \cdot [I - A] \cdot X = IX = X$

ἡ ἐξίσωσις 10 γίνεται :

$$X = [I - A]^{-1} \cdot \Psi \quad (11)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως 11 καθίσταται προφανές ὅτι, δοθέντος τοῦ διανύσματος τελικῆς ζητήσεως, πρὸς εὐρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων X_1, X_2, \dots, X_n ἀπαιτεῖται προηγουμένως «ἀντίστροφη» (55) τῆς τεχνολογικῆς μῆτρας καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐκτελέσεις τοῦ εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως σημειουμένου πολλαπλασιασμοῦ.

Ἀναλυτικῶς ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως 11 (καὶ συνεπῶς καὶ τοῦ συστήματος (5)) ἔχει ὡς ἀκολούθως :

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= E_{11} \Psi_1 + E_{21} \Psi_2 + E_{31} \Psi_3 + \dots + E_{\mu 1} \Psi_\mu \\ X_2 &= E_{12} \Psi_1 + E_{22} \Psi_2 + E_{32} \Psi_3 + \dots + E_{\mu 2} \Psi_\mu \\ X_3 &= E_{13} \Psi_1 + E_{23} \Psi_2 + E_{33} \Psi_3 + \dots + E_{\mu 3} \Psi_\mu \\ &\vdots \\ &\vdots \\ X_\mu &= E_{1\mu} \Psi_1 + E_{2\mu} \Psi_2 + E_{3\mu} \Psi_3 + \dots + E_{\mu\mu} \Psi_\mu \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

καὶ συνοπτικῶς :

$$X_i = \sum_{\kappa=1}^{\mu} E_{\kappa i} \Psi_\kappa \quad i = 1, 2, \dots, \mu \quad (12')$$

Ἐνωτέρω

$$E_{\kappa i} = \frac{\Delta_{\kappa i}}{\Delta} \quad (13)$$

55) Βλ. Α. Λάζαρη : Στοιχεῖα μαθηματικῆς ἀναλύσεως διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἐργεῖον Κοινῶν καὶ Οἰκονομικῶν Ἐπιστημῶν, 1957.

όπου Δ_{ki} είναι τὸ ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου a_{ik} τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ Δ ἡ ὀρίζουσα τῆς μήτρας ταύτης.

Οἰκονομικῶς ὁ ὅρος $E_{11} \Psi_1$ ἐκφράζει τὸ τμήμα τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1 τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν Ψ_1 αὐτοῦ τούτου τοῦ προϊόντος. Ὁ ὅρος $E_{21} \Psi_2$ παριστᾷ τὸ τμήμα τῆς ἀξίας τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν Ψ_2 τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 2 κ.ο.κ. Γενικῶς οἱ συντελεσταὶ E_{ki} δεικνύουν κατὰ πόσον τὸ συνολικὸν προϊόν τοῦ κλάδου k ἀξιάνει ἂν ἡ τελικὴ ζήτησις διὰ τὸ προϊόν τοῦ κλάδου k ἀξηθῆ κατὰ 1 μονάδα (τῶν ἄλλων κοινῶν ζητήσεως παραμενοντων ἀμεταβλήτων). Ἐκ τῆς (13) καταφαίνεται ὅτι ἡ τιμὴ τῶν συντελεστῶν E_{ki} ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ὀρίζουσης τῆς τεχνολογικῆς μήτρας καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς τιμῆς δ λ ω ν τῶν συντελεστῶν εἰσορῆς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἱκανοποίησης δοθείσης ἀξίσεως τῆς ζήτησεως π.χ. γεωργικῶν προϊόντων, εἶναι κατ' ἀρχὴν δυνατὴ κατόπιν ὀρισμένων μεταβολῶν, α μ ϵ σ ν ἢ ϵ μ μ ϵ σ ν εἰς τὰ ἐπίπεδα δράσεως δ λ ω ν τῶν παραγωγικῶν κλάδων (56). Τοῦτο ἐκφράζεται εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην διὰ τῆς γνωστῆς ἀρχῆς τῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν οἰκονομικῶν κλάδων.

Ἡ δεδομένη λύσις (12) καθορίζει τὰ ἐπίπεδα δράσεως X_1, X_2, \dots, X_μ τῶν παραγωγικῶν κλάδων 1, 2, ... μ , τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζήτησεως ($\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_\mu$).

Αἱ ποσότητες προϊόντων αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ὡς ἄνω ἐπίπεδα δράσεως θὰ εἶναι (βλ. τέλος παρ. 1, ἀνωτέρω)

$$X'_i \equiv \frac{X_i}{\tau_i} \quad (i = 1, 2, \dots, \mu) \quad (14)$$

Ἐκ τῆς λύσεως (12) δὲν εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῆς ὕψ' ἐκάστου κλάδου καταβαλλομένης ἀξίας δι' ἐργασίαν καὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως (57) τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας (58). Τοιοῦτος προσδιορισμὸς καθίσταται ἐν τούτοις δυνατὸς ἂν γνωρίζωμεν τοὺς «συντελεστὰς εἰσορῆς ἐργασίας» δι' ἕκαστον κλάδον. Οἱ συντελεσταὶ οὗτοι καθορίζουν τὴν καταβαλλομένην ὑπὸ τῶν ἀντιστοίχων κλάδων ἀξίαν διὰ τὴν ἐργασίαν ἢ ὁποῖα ἀπαιτεῖται πρὸς παραγωγήν μιᾶς μονάδος ἀξίας ἐκ τοῦ προϊόντος τῶν ἐν λόγῳ κλάδων. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ οὗτοι παραμένουν σταθεροὶ ὡς καὶ οἱ λοιποὶ συντελεσταὶ εἰσορῆς. Ἄν χαρακτηρίσωμεν διὰ τοῦ γράμματος ν τὸν τομέα «Ἑπιχειρήσια Προσώπων» ἢ «Ἐργασία» τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας, θὰ ἔχωμεν γενικῶς :

56) Ἡ αὐτὴ ἔννοια θὰ ἠδύνατο νὰ διατυπωθῆ ἐπίσης ὡς ἀκολούθως : Μία ἀξίσις τῆς τελικῆς ζήτησεως ἐνὸς ὀρισμένου προϊόντος προκαλεῖ κατ' ἀρχὴν ἀμέσους ἢ ἐμμέσους ἀξήσεις εἰς τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς δ λ ω ν τῶν παραγωγικῶν κλάδων.

57) Ὁ ὅρος «ἐργατικὴ ἀπασχόλησις» χρησιμοποιεῖται ἐνταῦθα ὑπὸ εὐρείαν ἔννοιαν, περιλαμβάνων τὰς πάσης φύσεως παραγωγικὰς ὑπηρεσίας προσώπων.

58) Ὡς ἐλέχθη ἡ νιοστὴ ἐξίσωσις ἡ ἀναφερομένη εἰς τὰ οἰκονομοῦντα ἄτομα (καὶ συνεπῶς καὶ εἰς τὴν ἐργασίαν) ἀπληρίφη ἀπὸ τὸ σύστημα (5).

$$\left. \begin{aligned} \chi_{v_i} &= a_{v_i} X_i \\ i &= 1, 2, \dots, \mu \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Όπου a_{v_i} παριστᾶ τὸν σταθερὸν συντελεστὴν εἰσροῆς ἐργασίας τοῦ κλάδου i καὶ χ_{v_i} τὴν συνολικῶς καταβαλλομένην ἀξίαν δι' ἐργασίαν ὑπὸ τοῦ κλάδου i διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ συνολικοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου.

Κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ ἐν παραγορ. 1 (ἄνωτέρω) λεχθέντα καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἡ τιμὴ μονάδος τῆς ἐργασίας (π.χ. τὸ ὠρομισθιον) εἶναι ἴση πρὸς τὴν σταθερὰν τ_v , δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν δι' ἕκαστον κλάδον παραγωγῆς τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως (εἰς ὥρας ἐργασίας) :

$$\left. \begin{aligned} \chi'_{v_i} &\equiv \frac{a_{v_i} X_i}{\tau_v} \\ i &= 1, 2, \dots, \mu \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Ἄν εἰς τὸ σύστημα (16) ἀντικαταστήσωμεν τὸ X_i διὰ τῆς τιμῆς του ὡς αὕτη ὀρίζεται ἐκ τῶν λύσεων (12), λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} \chi'_{v_i} &= \frac{a_{v_i}}{\tau_v} (E_{1i} \Psi_1 + E_{2i} \Psi_2 + \dots + E_{\mu i} \Psi_\mu) \\ i &= (1, 2, \dots, \mu) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Ἐξ οὗ καταφαίνεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἰς δοθέντα κλάδον i ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διαρθρώσεως $\delta \lambda \omega \nu$ τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων τῆς οἰκονομίας καὶ ἐκ τοῦ μεγέθους $\delta \lambda \omega \nu$ τῶν κονδυλίων τελικῆς ζητήσεως.

Ἡ συνολικὴ ἐργατικὴ ἀπασχόλησις εἰς τὴν οἰκονομίαν (X'_v) εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τὸ ἀθροισμα τῶν ἐπιπέδων ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τῶν ἐπὶ μέρους κλάδων τῆς οἰκονομίας :

$$X'_v = (\chi'_{v_1} + \chi'_{v_2} + \dots + \chi'_{v_\mu}) \quad (18)$$

Ἡ ἐξίσωσις (18) δεικνύει ἐξ ἄλλου τὸν τρόπον κατανομῆς τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (18) τὰς τιμὰς τῶν χ'_{v_i} ὡς αὗται δίδονται εἰς (17), θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} X'_v &= \frac{1}{\tau_v} (a_{v_1} E_{11} \Psi_1 + a_{v_1} E_{21} \Psi_2 + \dots + a_{v_1} E_{\mu 1} \Psi_\mu) + \\ &+ \frac{1}{\tau_v} (a_{v_2} E_{12} \Psi_1 + a_{v_2} E_{22} \Psi_2 + \dots + a_{v_2} E_{\mu 2} \Psi_\mu) + \\ &+ \frac{1}{\tau_v} (a_{v_\mu} E_{1\mu} \Psi_1 + a_{v_\mu} E_{2\mu} \Psi_2 + \dots + a_{v_\mu} E_{\mu\mu} \Psi_\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta) \quad X'_v = & \frac{\Psi_1}{\tau_v} (a_{v_1} E_{11} + a_{v_2} E_{12} + \dots + a_{v\mu} E_{1\mu}) + \\ & + \frac{\Psi_2}{\tau_v} (a_{v_1} E_{21} + a_{v_2} E_{22} + \dots + a_{v\mu} E_{2\mu}) + \dots \\ & + \frac{\Psi_\mu}{\tau_v} (a_{v_1} E_{\mu 1} + a_{v_2} E_{\mu 2} + \dots + a_{v\mu} E_{\mu\mu}) \dots \end{aligned} \quad (19)$$

καὶ συνοπτικῶς :

$$X'_v = \frac{\Psi_1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{vi} E_{1i} + \frac{\Psi_2}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{vi} E_{2i} + \dots + \frac{\Psi_\mu}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{vi} E_{\mu i} \quad (19')$$

Ὁ ὅρος $\frac{\Psi_1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{vi} E_{1i}$ προσδιορίζει τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως, τὴν ὀφειλομένην εἰς τὴν αὔξησιν κατὰ Ψ_1 μονάδας τῆς τελικῆς ζήτησεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου 1.

Γενικῶς ὁ ὅρος $\frac{\Psi_\kappa}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{vi} E_{\kappa i}$ ($\kappa = 1, 2 \dots \mu$) δίδει τὴν αὔξησιν τῆς συνολικῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τὴν προερχομένην ἐκ τῆς αὔξεσεως τῆς τελικῆς ζήτησεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ κατὰ Ψ_κ μονάδας.

Κατ' ἀναλογίαν οἱ συντελεσταὶ $\frac{1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{vi} E_{\kappa i}$ ($\kappa = 1, 2 \dots \mu$), καλούμενοι συνήθως «συντελεσταὶ ὀλικῆς ἀπασχολήσεως» (total employment coefficients), προσδιορίζουν τὴν αὔξησιν τῆς ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως τῆς οἰκονομίας, τὴν προερχομένην ἐκ τῆς αὔξεσεως κατὰ μίαν μονάδα τῆς τελικῆς ζήτησεως τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ ($\kappa = 1, 2 \dots \mu$).

Ἐκαστος συντελεστοῦ ὀλικῆς ἀπασχολήσεως ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦ «ἀμέσου συντελεστοῦ ἀπασχολήσεως»⁵⁹⁾ (direct employment coefficient) καὶ τῶν «συντελεστῶν ἐμμέσου ἀπασχολήσεως»⁶⁰⁾ (indirect employment coefficient).

Ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ὡς ἄνω συντελεστῶν ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως εἶναι προφανής.

Καταφαίνεται ἤδη ὅτι ἐκ τῆς λύσεως (12) καὶ τῆς ἐξισώσεως (19) εἶναι δυνατόν νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς ἐκάστου κλάδου καὶ τὰ ἐπίπεδα

59) Οὗτος δεικνύει τὴν ὑπὸ τοῦ οἰκείου κλάδου ἀμέσως ἀπορροφωμένην ποσότητα ἐργασίας διὰ τὴν ἱκανοποίησιν μιᾶς μονάδος τελικῆς ζήτησεως ἐκ τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου καὶ παριστᾶται διὰ τῶν στοιχείων

$$\frac{1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{vi} E_{\kappa i} \quad \kappa=1, 2, \dots, \mu \quad (\text{βλ. ἐξ. (19)})$$

60) Οὗτοι δεικνύουν τὴν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν κλάδων τῆς οἰκονομίας δαπανωμένην ποσότητα ἐργασίας διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν προϊόντων τὰ ὅποια χρησιμοποιοῦνται ὡς πρῶτα ἔλαι κλπ. πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας μιᾶς μονάδος τοῦ δοθέντος κλάδου κ . Οἱ ἔμμεσοι συντελεσταὶ παριστᾶνται διὰ τῶν στοιχείων $\frac{1}{\tau_v} \sum_{i=1}^{\mu} a_{vi} E_{\kappa i}$ (διὰ $\kappa=1, 2, \dots, \mu$ ἀλλὰ $\kappa \neq i$).

άπασχολήσεως τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναγκαῖα πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως τῶν προϊόντων τῶν ἐν λόγῳ κλάδων. Αἱ οὕτω προσδιοριζόμεναι τιμαὶ λύσεως εἰς τὰς οικονομικὰς μεταβλητὰς (ἐπίπεδα δράσεως παραγωγικῶν τομέων καὶ ἐπίπεδον ἐργατικῆς ἀπασχολήσεως) χαρακτηρίζονται συνήθως ὡς «συνεπείς» (consistent), καθ' ὅσον ἀναφέρονται εἰς τὴν «ἀρμονικὴν» (61) συνεργασίαν τῶν παραγωγικῶν κλάδων πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Ἡ σύγκρισις τῶν τιμῶν αὐτῶν πρὸς τὰς πραγματικὰς συνθήκας τῆς οἰκονομίας θὰ δείξῃ κατὰ πόσον τὸ δοθὲν ἐπίπεδον τελικῆς ζητήσεως (62) εἶναι **πραγματοποιήσιμον** (feasible). Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης θὰ δειχθῇ ἐπίσης ἂν ἐπιβάλλεται προηγουμένως ἄρσις τῶν τυχόν ὑπαρχουσῶν στενοτήτων (λόγῳ ἑλλείψεως κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ εἰς τινὰ παραγωγικὸν κλάδον ἢ λόγῳ ἀνεπαρκοῦς ποσότητος ἐργασίας), ἢ ἂν ἡ τελικὴ ζήτησις πρέπει νὰ προσαρμοσθῇ ἀναλόγως, εἰς τρόπον ὥστε νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἱκανοποίησις αὐτῆς βάσει τῶν ὑπαρχουσῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας.

Τὸ ἀνωτέρω περιγραφὲν ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα εἶναι **στατικὸν** ὡς καὶ τὸ προηγούμενον, διότι δὲν παρακολουθεῖ διαχρονικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν X_1, X_2, \dots, X_m ἀλλὰ δίδει μόνον λύσεις ἰσορροπίας αὐτῶν εἰς δεδομένην περίοδον ἢ συνολικὰς μεταβολὰς τῶν μεταβλητῶν μεταξὺ δύο χρονικῶν περιόδων (συγκριτικὴ στατική).

3. Ἰδιότητες μητροῶν τύπου Λεόντιεφ. Ἡ μήτρα τύπου Λεόντιεφ ἔχει ὄρισμένας μαθηματικὰς ιδιότητες, αἱ ὁποῖαι ἀντικατοπτρίζουν ιδιότητες τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος. Αἱ κυριώτεραι ἐκ τῶν ιδιοτήτων αὐτῶν εἶναι αἱ ἀκόλουθοι (63):

$$1\eta \quad \sum_{i=1}^v a_{ik} \leq 1 \quad (k=1, 2, \dots, v)$$

$$2a \quad a_{ik} \geq 0 \quad (i, k=1, 2, \dots, v)$$

$$3\eta \quad 1 > (I - A) > 0$$

$$4\eta \quad (I - A)^{-1} = (I + A + A^2 + A^3 + \dots)$$

ὁπερ σημαίνει ὅτι τὸ δευτερον μέλος τῆς ἰσότητος ἀποτελεῖ **συγκλίνουσαν** σειρὰν.

5η Πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς $(I - A)^{-1}$ εἶναι μὴ ἀρνητικὰ καὶ μεγαλύτερα, κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς $(I - A)$.

Συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην ιδιότητα, τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῶν στη-

61) Ἄνευ ὑποδραστηριότητος ἢ ὑπερδραστηριότητος τῶν ἐπὶ μέρους παραγωγικῶν κλάδων.

62) Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ δυνατὸν νὰ ἀποτελῇ πρόβλεψιν ἢ προγραμματικὸν σκοπὸν.

63) Βλ. Dorfman Samuelson and Solow «Linear programming and economic analysis» morgan Hill 1958 σ. 253 κ. ἑ. Ἐπίσης βλ. Morgenstern A. (edit.) economic activity analysis, σ. 341 κ.ἑ.

λῶν τῆς Α δὲν εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Ἡ οικονομικὴ ἔννοια τῆς ιδιότητος αὐτῆς εἶναι ὅτι τὸ σύνολον τῶν πληρωμῶν τοῦ δοθέντος κλάδου κ διὰ προϊόντα ἄλλων κλάδων πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του, δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνει τὴν ἀξίαν τοῦ προϊόντος αὐτοῦ. Ἡ συνήθης μάλιστα περίπτωσις εἶναι $\sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} < 1$.

Ἡ δευτέρα ιδιότης λέγει ὅτι ἡ ἐκάστοτε «εἰσροή» τοῦ δοθέντος κλάδου κ ἀπὸ ἄλλους κλάδους ($i=1, 2, \dots$) εἶναι μέγεθος μὴ ἀρνητικόν. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (1 § 1), δεδομένου ὅτι $X_k > X_{ik} > 0$ καὶ σημαίνει ὅτι δὲν εἶναι νοητὸν νὰ λαμβάνῃ ὁ κλάδος κ ἀρνητικὸν προϊόν ἀπὸ τοὺς λοιποὺς κλάδους.

Προφανῶς ἐκ τῆς 1ης ιδιότητος θὰ εἶναι:

$$1 > a_{ik} \geq 0$$

καὶ ἐκ τῆς 2ας ιδιότητος:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} \leq 1$$

Ἡ συνήθης περίπτωσις εἶναι (64) :

$$0 < \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik} < 1$$

Αἱ ιδιότητες 1 καὶ 2 ἀποτελοῦν ἀ ν α γ κ α ῖ α ς καὶ ἐ π α ρ κ ε ῖ ς συνθήκας διὰ χαρακτηρισμὸν μιᾶς μήτρας ὡς τύπου Λεόντιεφ. Αἱ λοιπαὶ ιδιότητες 3, 4 καὶ 5 εἶναι παράγωγοι τῶν ιδιοτήτων 1 καὶ 2.

Συμφώνως πρὸς τὴν 3ην ιδιότητα, ἡ ὀρίζουσα τῆς μήτρας τύπου Λεόντιεφ, (I—A) εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος⁽⁶⁵⁾.

Ἡ ιδιότης αὕτη σημαίνει ὅτι πληροῦνται αἱ συνθήκαι ἰσορροπίας τοῦ οικονομικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον περιγράφει ἡ (I—A) (66).

Ἡ 4η ιδιότης χρησιμοποιεῖται εὐρύτητα εἰς τὰς διακλαδικὰς ἀναλύσεις διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων ἐξισώσεων:

Ὡς γνωστόν, ἡ ἀντιστροφὴ τῆς μήτρας (I—A) εἶναι, εἰς περίπτωσιν μεγάλων συστημάτων, δυσχερέστατον ὑπολογιστικὸν πρόβλημα, ἡ λύσις τοῦ ὁποίου δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἄνευ τῆς χρησιμοποιήσεως ἠλεκτρονικῶν ἀριθμομηχανῶν. Βάσει τῆς 4ης ὅμως ιδιότητος ἡ ἐξίσωσις (11) γίνεται

$$X = (I + A + A^2 + A^3 + \dots) \Psi = (\Psi + A\Psi + A^2\Psi + \dots) \quad (20)$$

Ἐπειδὴ ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς $(I + A + A^2 + A^3 + \dots)$ εἶναι σχετικῶς τα-

64) $0 = \sum_{i=1}^{\nu} a_{ik}$ ἐμφανίζεται ἐνίοτε εἰς τὰς καλουμένας «τριγωνικὰς μήτρας τύπου Λεόντιεφ».

65) Βλ. Morgenstern (edit). Economic activity analysis 356.

66) Βλ. D. Hawkins and H Simon, «Note: Some conditions of macro economic stability» Econometrica, 1949.

χεία⁽⁶⁷⁾, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ διάνυσμα X κατὰ προσέγγισιν μιᾶς δυνάμεως τοῦ A , π.χ. τῆς A_1 δυνάμεως: ⁽⁶⁸⁾.

$$X = (\Psi + A\Psi + A^2\Psi + A^3\Psi + A^4\Psi) \dots \quad (21)$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ὄρων τῆς σειρᾶς ταύτης, ἡ ὁποία εἶναι συνήθως γνωστὴ ὡς «πολλαπλασιαστικὴ διαδικασία Cornfield - Leontief»⁽⁶⁹⁾ δὲν παρουσιάζει σοβαρὰ προβλήματα ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν σχετικῶς μεγάλων τεχνολογικῶν μητρῶν, δύναται δὲ νὰ γίνῃ μὲ συνήθεις ἀριθμομηχανὰς γραφείου⁽⁷⁰⁾.

Ἡ 5ῃ ιδιότης ἀπορρέει προφανῶς ἐκ τῆς 4ῆς ιδιότητος. Ἐφ' ὅσον $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$ καὶ πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς A εἶναι μὴ ἀρνητικά (2α ιδιότης) θὰ ἔχωμεν καὶ τὰ στοιχεῖα τῶν A^2, A^3 κ.λ.π. μὴ ἀρνητικά. Ἡ I ἔχει ἐπίσης μὴ ἀρνητικά στοιχεῖα ἐξ ὀρισμοῦ⁽⁷¹⁾, κατὰ συνέπειαν τὰ στοιχεῖα τῆς $(I - A)^{-1}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν I, A, A^2 , κ.λ.π. θὰ εἶναι ἐπίσης μὴ ἀρνητικά. Ἐξ ἄλλου ἐὰν θέσωμεν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς $(I - A)$ μὲ θετικὸν σημεῖον λαμβάνομεν τὴν μήτραν: $(I + A)$, ἣτις εἶναι:

$$(I + A) < (I + A + A^2 + A^3 + \dots) = (I - A)^{-1} \quad (22)$$

ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτει ὅτι ἕκαστον στοιχεῖον τῆς $(I - A)^{-1}$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τῆς $(I + A)$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἀπὸ τὴν ἀπώλυτον τιμὴν τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου τῆς $(I - A)$.

4. Ἐπισημαίνεται ὅτι ἡ μήτρα A εἶναι τύπου Λεόντιεφ, θὰ ἀνομαζώμεν «ἐπιρρηξιμὴ μήτρας τύπου Λεόντιεφ», τὰς μήτρας τάξεων $(\mu + 1) \mu$ τῆς κατωτέρω μορφῆς:

67) Sal Cherubino: «Sull' analisi delle interdependenze strutturali dei settori economici in L' industria No 4, 1953 (σ. 39 κ. ἐ.) καὶ H. Chenery, P. Clark κλπ. the structure of Italian economy». M.S.A. Rome, 1953. Ἡ σειρά $I + A + A^2 + A^3 + \dots$ καλεῖται συνήθως «σειρὰ Newmann» (βλ. Morejestern: Economic activity analysis σ. 294).

68) Ὁ βαθμὸς προσεγγίσεως ἐξαρτᾶται κυρίως ἐκ τῆς ταχύτητος συγκλίσεως τῶν ὄρων A, A^2, A^3, \dots . Ἄν ἐπιτευχθῇ μιὰ σταθερὰ σχέσηις συγκλίσεως τῶν ὄρων εἶναι δυνατόν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάνυσμα X μετὰ μεγίστης προσεγγίσεως, διὰ προσθέσεως εἰς τὸ ἀρχικὸν ἀποτέλεσμα τοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς πολλαπλασιαστικῆς διαδικασίας, ἣτις ἔχει λόγον τὴν σταθερὰν ταύτην σχέσιν. Βλ. σχετικῶς: C. Rigbi: Raffronto fra I metodi matriciale e iterativo per la soluzione dello schema di Leontief (nota tecnica) εἰς l' Industria, No 1, 1952.

69) Βλ. Dorfman, Samuelson κλπ. «Linear programming κλπ.» σ. 253. Πρβ. καὶ R. Goodwin «The multiplier en a matrix» Econ. Journal. Dec. 1949.

70) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πολλαπλασιασμῶν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι, κατὰ προσέγγισιν, Pv , ὅπου $P = \delta$ ἀριθμὸς τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων εἰς μίαν σειρὰν τύπου (A. 14) καὶ $v = \eta$ τάξις τῆς μήτρας A , δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν κλάδων τοῦ ἐξεταζομένου οικονομικοῦ συστήματος. Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ X διὰ τῆς συνήθους μεθόδου τῆς ἀντιστροφῆς τῆς μήτρας ἀπαιτοῦνται περίπου v^3 πολλαπλασιασμοί. Κατὰ συνέπειαν, ἡ διαδικασία Cornfield - Leontief συμφέρει ἐὰν $P < v$, ὡς πράγματι συμβαίνει κατὰ κανόνα εἰς τὰς πραγματικὰς περιπτώσεις. (Βλ. Chenery, Clark κλπ. ἐνθ. ἀνωτέρω).

71) Βλ. A.A. Λάζαρη «Στοιχεῖα κλπ.» παρ. III 5.

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1\mu} \\ -\alpha_{21} & 1 & -\alpha_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2\mu} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_{\mu 1} & -\alpha_{\mu 2} & -\alpha_{\mu 3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \hline -\alpha_{(\mu+1)1} & -\alpha_{(\mu+1)2} & -\alpha_{(\mu+1)3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{(\mu+1)\mu} \end{array} \right] \quad (23)$$

Ἡ μήτρα (23) εἶναι διανεμημένη⁽⁷²⁾ εἰς δύο μέρη: τὸ ἄνωθεν τῆς «εὐθείας διανομῆς» τμήμα αὐτῆς, τὸ ὁποῖον θὰ ὀνομάζωμεν *κ ὄ ρ ι ο ν σ ῶ μ α* τῆς ἐπηυξημένης μήτρας καὶ τὴν ὑπὸ τὴν εὐθείαν διανομῆς σειράν⁽⁷³⁾. Ὡς παρατηροῦμεν τὸ κύριον σῶμα τῆς ἐπηυξημένης μήτρας ἀποτελεῖ ἀπλήν μήτραν τύπου Λεόντιεφ. Ἡ ὑπὸ τὴν εὐθείαν διανομῆς σειρά δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελουμένη ἀπὸ στοιχεῖα «εἰσροῆς» ἀναλόγου φύσεως ὡς καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αἰκ. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα — τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζομεν ὡς «ἀκράια» πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα εἰσροῆς τὰ ὁποῖα καλοῦνται συνήθως «διακλαδικὰ»

$$\alpha_{(\mu+1)i} \geq 0$$

Ἐκ τῆς ἐπηυξημένης μήτρας 23 δυνάμεθα νὰ λάβωμεν στήλας — διανύσματα (Column Vectors)⁽⁷⁴⁾ ὡς π.χ.

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ -\alpha_{21} \\ -\alpha_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\alpha_{\mu 1} \\ \hline -\alpha_{(\mu+1)1} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} -\alpha_{12} \\ -\alpha_{22} \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\alpha_{\mu 2} \\ \hline -\alpha_{(\mu+1)2} \end{array} \right] \quad \text{κ.λ.π.}$$

αἱ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἐπηυξημένας παραγωγικὰς δραστηριότητας, διαφερούσας ἀπὸ τὰς ἀπλῶς παραγωγικὰς δραστηριότητος τῆς μορφῆς τῆς σ.24, καθ' ὅτι περιλαμβάνουν ἐπὶ πλέον τὰ στοιχεῖα $\alpha_{(\mu+1)}$. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα οἰκονομικῶς δὲν παριστοῦν διακλαδικὰς ροὰς, δηλαδὴ προϊόντα ἐνὸς ἐκ τῶν παραγωγικῶν κλάδων, ἀλλὰ εἰσροὰς εἰς τὸν οἰκείον κλάδον προερχομένας ἐκ τῶν τοῦ συστήματος τῶν μ κλάδων.

Τοιαῦται εἰσροαὶ δυνατόν νὰ εἶναι π.χ. τὸ κόστος κεφαλαίου κατὰ μονάδα παραγωγῆς τοῦ δεδομένου προϊόντος, ἢ ἡ πρὸς τοῦτο ἀπαιτουμένη ποσότης ἐργασίας.

72) Περὶ «διανεμομένην μήτραν» (Partitioned matrices) βλ. Aitken ἐνθ. ἄνωτ. 21.

73) Ἡ σειρά αὕτη, ἀποτελεῖ, κατὰ τὴν ὀρολογίαν τῶν μητρῶν, διάνυσμα-σειρά (Row-Vector), βλ. Α. Λάζαρη «Στοιχεῖα κ.λ.π.» παραγρ. III 3.

74) Βλ. Α. Λάζαρη «Στοιχεῖα κ.λ.π.» παράγρ. III 3.

Ἡ ἐπηρεξιμένη μήτρα (23) δύναται νὰ γραφῆ ὡς :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2\mu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha_{3\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline \alpha_{(\mu+1)1} & \alpha_{(\mu+1)2} & \alpha_{(\mu+1)3} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{(\mu+1)\mu} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ἢ συμβολικῶς :

$$\left\{ \frac{I - A}{\bar{0} - \bar{\alpha}} \right\} \quad (25)$$

ὅπου $I = \eta$ μοναδιαία μήτρα, $A = \eta$ μήτρα τῶν διακλαδικῶν στοιχείων

$\alpha_{ik} (i, k = 1, \dots, \mu)$, $\bar{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$ καὶ $\bar{\alpha} = (\alpha_{(\mu+1)1}, \dots, \alpha_{(\mu+1)\mu})$

Βάσει τῆς ἐπηρεξιμένης μήτρας τύπου Λεόντιεφ δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν δύο κατηγοριῶν προβλημάτων. Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν προβλημάτων ζητεῖται νὰ εὐρεθοῦν αἱ συνολικαὶ ποσότητες ἢ ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (καὶ αἱ διακλαδικαὶ ροαὶ) αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν προβλημάτων ζητεῖται νὰ προσδιορισθοῦν ὄρισμένοι τιμαὶ ἰσορροπίας, ὡς π.χ. εἶναι ἡ περίπτωση τῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου δι' ἐκάστην παραγωγικὴν δραστηριότητα.

Οὕτω, π.χ. ἐκ τοῦ συστήματος (6) ἀνωτέρω, βλέπομεν ὅτι δοθείσης τῆς τελικῆς ζητήσεως, πρὸς εὐρεσιν τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς $X_1, X_2, X_3, \dots, X_\mu$ μιᾶς οἰκονομίας, βασιζόμεθα ἐπὶ τῆς μήτρας τῶν διακλαδικῶν στοιχείων τῶν ἐν λόγω δραστηριοτήτων, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸ κύριον σῶμα τῆς ἐπιπέδων παραγωγῆς τεχνολογικῆς μήτρας 23. Ἡ τελευταία σειρά τῆς ἐπηρεξιμένης μήτρας δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὸν ὑπολογισμόν.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἐξ ἄλλου ὅτι θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς τιμὰς $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_\mu$, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῆς ἐπηρεξιμένης τεχνολογικῆς μήτρας 23⁽¹⁵⁾. Τὸ κόστος τοῦτο εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀμέσου κόστους κεφαλαίου (τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ ἀκραιὸν στοιχεῖον) τῆς δοθείσης διαδικασίας καὶ τοῦ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν διακλαδικῶν στοιχείων τῆς διαδικασίας ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τ . Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων :

75) Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι τὸ στοιχεῖον $\alpha_{(\mu+1)1}, \alpha_{(\mu+1)2}, \dots$ παριστοῦν ἄμεσον κόστος κεφαλαίου, τῶν οἰκείων δραστηριοτήτων.

$$\begin{aligned}
 \tau_1 - \alpha_{21} \tau_2 - \alpha_{31} \tau_3 - \dots - \alpha_{\mu 1} \tau_\mu &= \alpha_{(\mu+1)1} \\
 -\alpha_{12} \tau_1 + \tau_2 - \alpha_{32} \tau_3 + \dots - \alpha_{\mu 2} \tau_\mu &= \alpha_{(\mu+1)2} \\
 -\alpha_{13} \tau_1 - \alpha_{23} \tau_2 + \tau_3 + \dots - \alpha_{\mu 3} \tau_\mu &= \alpha_{(\mu+1)3} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 -\alpha_{1\mu} \tau_1 - \alpha_{2\mu} \tau_2 - \alpha_{3\mu} \tau_3 + \dots + \tau_\mu &= \alpha_{(\mu+1)\mu}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Τὸ σύστημα τοῦτο ἀναδιατυπούμενον ὑπὸ μορφήν μητρῶν γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{21} & -\alpha_{31} & \dots & -\alpha_{\mu 1} \\ -\alpha_{12} & 1 & -\alpha_{32} & \dots & -\alpha_{\mu 2} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 1 & \dots & -\alpha_{\mu 3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1\mu} & -\alpha_{2\mu} & -\alpha_{3\mu} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \vdots \\ \tau_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{(\mu+1)1} \\ \alpha_{(\mu+1)2} \\ \alpha_{(\mu+1)3} \\ \vdots \\ \alpha_{(\mu+1)\mu} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω διατυπώσεως προκύπτει ὅτι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη (Transposed) τοῦ κυρίου σώματος τῆς ἐπισημασμένης τεχνολογικῆς μήτρας(23) (76). Ἐπίσης τὸ διάνυσμα (στήλη) τοῦ δεξιῦ ὁρίστου τοῦ συστήματος (A20) εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ διανύσματος (σειρᾶς) τῶν ἀκραίων στοιχείων τῆς ἐπισημασμένης μήτρας(23). Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ προσδιορίσωμεν εὐκόλως ἐν σύστημα πρὸς εὔρεσιν τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων μιᾶς οἰκονομίας, ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς ἐπισημασμένης τεχνολογικῆς μήτρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκράια σειρὰ παριστᾷ συντελεστὰς κεφαλαιουχικότητος τῶν οἰκειῶν δραστηριοτήτων(77).

Συνοπτικῶς, ἂν T παριστᾷ τὸ διάνυσμα (στήλη) τῶν ζητούμενων τιμῶν (συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου) $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_\mu$ καὶ K τὸ διάνυσμα (σειρὰ) τῶν ἀκραίων στοιχείων $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_\mu$, τῆς ἐπισημασμένης τεχνολογικῆς μήτρας:

$\left\{ \frac{I - A}{0 - K} \right\}$, διὰ τὸν πρόσδιορισμὸν τοῦ T θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα:

$$(I - A')T = K' \tag{28}$$

Ἐξ ὧν:

$$T = (I - A')^{-1} K' \tag{29}$$

76) Δηλαδή ἐκάστη στήλη τοῦ κυρίου σώματος τῆς ἐπισημασμένης μήτρας ἐμφανίζεται ὡς σειρὰ τῆς νέας μήτρας. Περὶ ἐνηλλαγμένων ἢ ἀντιστρόφων μητρῶν βλ. Α. Λάζαρη «Στοιχεῖα κλπ». παραγρ. IV4.

77) Ὁμοίως δυνάμεθα βάσει μιᾶς ἐπισημασμένης μήτρας νὰ προσδιορίσωμεν ἄλλας παρομοίας τιμὰς ὡς εἶναι π.χ. τὸ συνολικὸν κόστος ἐργασίας, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὰ ἀκράια στοιχεῖα τῆς ἐν λόγω μήτρας παριστοῦν ἄμεσον κόστος ἐργασίας κατὰ μονάδα παραγομένου προϊόντος.

Β'. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

1. Κλειστόν υπόδειγμα. Ἐν μέρος τῆς παραγωγῆς ἐκάστης περιόδου ἀποτελεῖται συνήθως ἀπό κεφαλαιονχικά ἀγαθά, τὰ ὁποῖα ἀπορροφῶνται ἀπὸ τοὺς διαφόρους οικονομικοὺς κλάδους πρὸς αὔξησιν τῆς παραγωγικῆς τῶν δυναμικότητας. Ἄν θέσωμεν K_{ik} διὰ τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου i τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ὡς ὕλικὸν κεφάλαιον (πάγιον ἢ ἀποθέματα) ὑπὸ τοῦ κλάδου κ καὶ $K_{ik} (= dK_{ik}/dt)$ διὰ τὴν μεταβολὴν (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) τοῦ K_{ik} κατὰ τὴν δοθεῖσαν περίοδον (t) αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (1') μετατρέπονται εἰς:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \chi_{12} - \chi_{13} - \dots - \chi_{1v} - K_{11} - K_{12} - \dots - K_{1v} &= 0 \\ -\chi_{21} + X_2 - \chi_{23} - \dots - \chi_{2v} - K_{21} - K_{22} - \dots - K_{2v} &= 0 \\ -\chi_{31} - \chi_{32} + X_3 - \dots - \chi_{3v} - K_{31} - K_{32} - \dots - K_{3v} &= 0 \\ \vdots & \\ -\chi_{v1} - \chi_{v2} - \chi_{v3} - \dots + X_v - K_{v1} - K_{v2} - \dots - K_{vv} &= 0 \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\text{καὶ} \quad X_i - \sum_{\kappa=1}^v \chi_{i\kappa} - \sum_{\kappa=1}^v K_{i\kappa} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, v \\ \chi_{i\kappa} = 0 \quad \text{διὰ} \quad i = \kappa \end{array} \right. \quad (20')$$

Τὸ σύστημα ἐξισώσεων (20) δεικνύει ὅτι τὸ συνολικὸν ἐτήσιον προϊόν ἐκάστου κλάδου διανέμεται μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλάδων, διὰ νὰ λάβῃ μέρος ὡς πρώτη ὕλη κ.λ.π. εἰς τὴν τρέχουσαν παραγωγὴν ἢ τὴν ἐπέκτασιν τοῦ κεφαλαιονχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τῶν κλάδων αὐτῶν.

Ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἔχομεν $\chi_{i\kappa} = \alpha_{i\kappa} X_i$. Ὀρίζομεν ἤδη:

$$K_{i\kappa} = \beta_{i\kappa} X_i \quad (21)$$

ὅπου $\beta_{i\kappa}$ εἶναι ὁ τεχνολογικὸς συντελεστὴς κεφαλαίου» (capital coefficient), ὁ ὁποῖος καθορίζει τὴν ἀξίαν τῶν ἀγαθῶν τοῦ κλάδου i τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ὁ κλάδος κ ὡς ὕλικὸν κεφάλαιον, διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος τοῦ τελευταίου κλάδου ἀξίας 1 νομισμ. μονάδος. Ἐὰν π.χ. ὁ κλάδος κ παριστᾷ τὴν γεωργίαν καὶ ὁ κλάδος i τὴν βιομηχανίαν γεωργικῶν ἐργαλείων ὠρισμένου τύπου, ὁ συντελεστὴς $\beta_{i\kappa}$ παριστᾷ τὴν ἀξίαν τῶν ὡς ἄνω ἐργαλείων, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ ἢ γεωργία καθ' ὠρισμένην περίοδον πρὸς παραγωγὴν γεωργικοῦ προϊόντος ἀξίας μᾶς νομισμ. μονάδος κατὰ τὴν περίοδον ταύτην. Ὁ τεχνολογικὸς συντελεστὴς $\beta_{i\kappa}$ δύναται συνεπῶς νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ «ἐπιταχυντὴς» (accelerator), ὁ ὁποῖος δεικνύει τὴν σχέσιν μεταξὺ ὕλικου κεφαλαίου τοῦ τύπου i καὶ παραγομένου προϊόντος τοῦ κλάδου κ .

Ἄν διαφορίσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (21) ὡς πρὸς τὸν χρόνον (t) , θὰ ἔχομεν:

$$\frac{dK_{i\kappa}}{d(t)} = \beta_{i\kappa} \frac{dX_\kappa}{d(t)}$$

$$K_{i\kappa} = \beta_{i\kappa} X_\kappa \quad (22)$$

K_{ik} παριστᾶ τὴν ἐπένδυσιν τοῦ κλάδου k εἰς προϊόντα τοῦ κλάδου i ἢ ὁποία καθίσταται ἀναγκαία πρὸς ὑποστήριξιν τῆς μεταβληθείσης κατὰ X'_k μονάδας παραγωγῆς τοῦ κλάδου k .

Ἄντικαθίστωντες τώρα εἰς τὸ σύστημα (20) τὰ χ_{ik} καὶ K_{ik} διὰ τῶν τιμῶν τὸν ἐκ τῶν σχέσεων (2) καὶ (22) λαμβάνομεν τὸ κάτωθι «λειτουργικὸν» σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \alpha_{12}X_2 - \dots - \alpha_{1v}X_v - \beta_{11}X_1 - \beta_{12}X_2 - \dots - \beta_{1v}X_v &= 0 \\ -\alpha_{21}X_1 + X_2 - \dots - \alpha_{2v}X_v - \beta_{21}X_1 - \beta_{22}X_2 - \dots - \beta_{2v}X_v &= 0 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ -\alpha_{v1}X_1 - \alpha_{v2}X_2 - \dots + X_v - \beta_{v1}X_1 - \beta_{v2}X_2 - \dots - \beta_{vv}X_v &= 0 \end{aligned} \right\} (23)$$

καὶ συνοπτικῶς

$$\left. \begin{aligned} X_i - \sum_{k=1}^v \alpha_{ik} X_k - \sum_{k=1}^v \beta_{ik} X_k &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, v \\ \alpha_{ik} &= 0 \text{ διὰ } i = k \end{aligned} \right\} (23')$$

Τὸ ὑπόδειγμα τὸν ὅποιον περιγράφεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἐξισώσεων εἶναι $\delta \nu \nu \alpha \mu \iota \kappa \delta \nu$ διότι περιλαμβάνει τὴν διαχρονικὴν μεταβολὴν τῶν ἐπιπέδων δράσεως $X_1, X_2 \dots X_v$. Εἶναι ἐξ ἄλλου κλειστὸν διότι ἅπαντα τὰ ὡς ἄνω ἐπίπεδα δράσεως καθορίζονται ἐνδογενῶς, ἤτοι ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος. Τὰ οικονομοῦντα ἄτομα ἐν τῇ συνόλῳ θεωροῦνται ὡς ἰδιαίτερος παραγωγικὸς κλάδος, ὁ ὁποῖος προσφέρει τὰς ὑπηρεσίας του εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους καὶ ἀπορροφᾷ ἀγαθὰ τρεχούσης καταναλώσεως καὶ καταναλωτικὰ ἀγαθὰ διαρκείας (αὐτοκίνητα, οἰκίας κ.λ.π.). Τὰ τελευταία ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς ἐπενδύσεις τῶν παραγωγικῶν κλάδων ἐν στενῇ ἐννοίᾳ.

Ἐκ τοῦ συστήματος (23) συνάγεται ὅτι ἡ διάρθρωσις τῆς οἰκονομίας δύναται νὰ περιγραφῆ διὰ δύο κατηγοριῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν, τῶν «συντελεστῶν εἰσροῆς», οἱ ὁποῖοι ἀπαρτίζουν τὴν μῆτραν τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς A (78) καὶ τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν κεφαλαίου, οἱ ὁποῖοι συγκροτοῦν τὴν «τεχνολογικὴν μῆτραν κεφαλαίου» B :

$$B \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1v} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2v} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{v1} & \beta_{v2} & \dots & \beta_{vv} \end{bmatrix} \quad (24)$$

78) Ἐντὶ τῆς μῆτρας A θὰ ἠδύνατο νὰ ἀναφερθῆ ἡ «τεχνολογικὴ μῆτρα» A^* (βλ. ἐξίσ. 6).

Ἐκάστη στήλη τῆς μήτρας Β ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς τεχνολογικοὺς συντελεστὰς κεφαλαίου (εἰδικοὺς ἐπιταχυντὰς), οἱ ὅποιοι δεικνύουν τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ ὑλικοῦ κεφαλαίου διαφόρων τύπων τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου καὶ τοῦ παραγομένου προϊόντος τοῦ κλάδου τούτου (79).

Τὸ σύστημα (23) ἀποτελεῖται ἀπὸ ν ὁμογενεῖς διαφορικὰς ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ καὶ ν ἀγνώστου ν ($X_1, X_2 \dots X_\nu$) μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς. Δύναται συνεπῶς νὰ λυθῇ κατ' ἀρχὴν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς σχετικῆς τεχνικῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ (80). Ἐπειδὴ εἰς τὸ σύστημα περιέχονται ἐπίσης καὶ αἱ χρονικαὶ παράγωγοι τῶν ἀγνώστων, εἶναι δυνατὸν ἐκ τῆς λύσεως νὰ καθορισθῇ ἡ διαχρονικὴ συμπεριφορὰ (time path) τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, προϋποτιθεμένου βεβαίως ὅτι κατὰ τὴν λύσιν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ «ἀρχικαὶ συνθῆκαι» (initial conditions) (81) τοῦ οικονομικοῦ συστήματος κατὰ δοθεῖσαν περίοδον. Εὐθύς ὡς καθορισθῇ ὡς ἀνωτέρω ἡ διαχρονικὴ καμπύλη τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, εἶναι θεωρητικῶς δυνατόν νὰ προσδιορισθοῦν, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὰς τεχνολογικὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (22), αἱ καθ' ἑκάστην χρονικὴν στιγμήν (ἢ περίοδον εἰσροαὶ ἐνὸς κλάδου (82), αἱ ὅποια λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν τρέχουσαν παραγωγὴν, ὡς ἐπίσης καὶ αἱ ἀναγκαῖαι ἐπενδύσεις τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου πρὸς ὑποστήριξιν ἐνδεχομένης αὐξήσεως τῆς τρεχούσης παραγωγῆς (83).

Πρὸς εὔρεσιν τῶν φυσικῶν ποσοτήτων τῶν μεταβλητῶν, διαιροῦμεν ὡς καὶ προηγουμένως τὰ X_1 διὰ τῶν σταθερῶν τιμῶν t_i ($i = 1, 2 \dots \nu$).

2. Ἀνοικτὸν ὑπόδειγμα. Συμφώνως πρὸς τὰ ἐν τμήμ. Α παρ. 2 λεχθέντα, τὸ κλειστὸν σύστημα (23) δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ἀνοικτὸν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος τῶν σταθερῶν τῆς τελικῆς ζητήσεως ($\Psi_1, \Psi_2 \dots \Psi_\mu$) καὶ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ἀντιστοιχῶν ($\nu - \mu$) ἐξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - \alpha_{12}X_2 - \dots - \alpha_{1\mu}X_\mu - \beta_{11}X_1 - \beta_{12}X_2 - \dots - \beta_{1\mu}X_\mu &= \Psi_1 \\ -\alpha_{21}X_1 + X_2 - \dots - \alpha_{2\mu}X_\mu - \beta_{21}X_1 - \beta_{22}X_2 - \dots - \beta_{2\mu}X_\mu &= \Psi_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -\alpha_{\mu 1}X_1 - \alpha_{\mu 2}X_2 - \dots + X_\mu - \beta_{\mu 1}X_1 - \beta_{\mu 2}X_2 - \dots - \beta_{\mu\mu}X_\mu &= \Psi_\mu \end{aligned} \right\} (25)$$

79) Ἡ κυρία διαγώνιος ($\beta_{11}, \beta_{22}, \dots, \beta_{\nu\nu}$) τῆς μήτρας Β ἀποτελεῖται ἀπὸ μὴ μηδενικὰ στοιχεῖα, τὰ ὅποια παριστοῦν τὰς σχέσεις μεταξὺ τοῦ παρακρατουμένου ὑφ' ἑκάστου κλάδου ἰδίου προϊόντος διὰ νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ὑλικὸν κεφάλαιον καὶ τοῦ συνολικῶς παραγομένου προϊόντος τῶν τοῦ κλάδου τούτου κατὰ μίαν περίοδον.

80) Βλ. R. G. D. Allen Mathematical Economics, London 1956, shps 5 and 11.

81) Ὡς «ἀρχικαὶ συνθῆκαι» θεωροῦνται αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν καθ' ὄρισμένην περίοδον, ἡ ὅποια λαμβάνεται ὡς ἀφετηρία τῆς δυναμικῆς ἀναλύσεως.

82) Αἱ καταβαλλόμεναι ὑπ' αὐτοῦ ἀξίαι εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους.

83) Δυνατὸν βεβαίως νὰ προκληθῇ μείωσις τῆς τρεχούσης παραγωγῆς ὅποτε θὰ ἔχωμεν ἀρνητικὴν ἐπένδυσιν.

καὶ συνοπτικῶς:

$$\left. \begin{aligned} X_i - \sum_{\kappa=1}^{\mu} \alpha_{i\kappa} X_{\kappa} - \sum_{\kappa=1}^{\mu} \beta_{i\kappa} X_{\kappa} &= \Psi_{\kappa} \\ i &= 1, 2, \dots, \mu \\ \alpha_{i\kappa} &= 0 \quad \text{διὰ } i = \kappa \end{aligned} \right\} \quad (25')$$

Ἐκ τῆς περιληπτικῆς παραστάσεως (25') καταφαίνεται ὅτι τὸ συνολικὸν προῖ-
 ὄν ἐνὸς κλάδου διανέμεται μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλάδων (διὰ τὴν ἀναγκαζομένην εἰς
 τὴν τρέχουσαν παραγωγὴν καὶ τὴν δημιουργίαν ὑλικοῦ κεφαλαίου) καὶ τῆς τελικῆς
 ζητήσεως. Τὸ σύστημα (25) εἶναι μὴ ὁμογενὲς καὶ περιέχει μ διαφορικὰς ἐξισώσεις
 πρώτου βαθμοῦ καὶ μ ἀγνώστους (X_1, X_2, \dots, X_{μ}). Δύναται συνεπῶς νὰ λυθῆ, ἂν ἡ
 ὀρίζουσα τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους αὐτοῦ εἶναι θετικὴ⁽⁸⁴⁾ καὶ ἂν ὀρισθοῦν αἱ συνθήκαι
 τοῦ συστήματος κατὰ δοθεῖσαν (ἀρχικὴν) περίοδον, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ διαχρονικὴ καμ-
 πύλη τῶν κονδυλίων τελικῆς ζητήσεως $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{\mu}$. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστή-
 ματος δύνανται ἐν συνεχείᾳ νὰ προσδιορισθοῦν αἱ εἰσροαὶ τρεχούσης παραγωγῆς
 καὶ αἱ ἀνάγκαι ὑλικοῦ κεφαλαίου διαφόρων τύπων ἐκάστου κλάδου. Ἄν ὁ κλάδος
 «οἰκονομοῦντα ἄτομα» θεωρηθῆ ὡς ἑξωτερικὸς τομεὺς ὡς καὶ εἰς τὸ στατικὸν ἀνο-
 κτὸν ὑπόδειγμα, τότε ἡ ἐργατικὴ ἀπασχόλησις δι' ἕκαστον κλάδον παραγωγῆς ἢ διὰ
 τὴν οἰκονομίαν ἐν τῷ συνόλῳ δύναται νὰ προσδιορισθῆ (ἂν γνωρίζωμεν τοὺς συντε-
 λεστάς εἰσροῆς ἐργασίας ἐκάστου κλάδου), κατὰ τὸν τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν ἐν τμή-
 ματι Α τοῦ παρόντος μέρους ὑποδεικνυόμενον.

84) Βλ. ὑποσημ. 57.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Allen (R. G. D.), «Mathematical Economics, London, Mc Millan, 1956.
- Boudeville J. R., «Leontief et l' étude du circuit économique», Revue Economique. Nov. 1953.
- Burgess Cameron, «Input - Output Analysis», Econ. Records, May 1954.
«The production function in Leontief models», Review of Econ. Studies, Vol. XX (1).
- Burtie J., «Input - Output analysis as an aid to manpower policy», Intern. Labor Review. May 1952.
- Chabert A., «Le système d' input-output de W. Leontief et l' analyse économique quantitative», Economie Appliquée, 1950.
- Chenery H. B. and P. Clark, «Application of input - output Analysis in Italy», Econometrica, Jan. 1953.
- Chenery H. B., P. Clark and others, «The structure and growth of the Italian economy», Rome 1953.
- Davies G., «Input - output matrices and index numbers», ες R. E. St. 1953, XXXV.
- Dorfman R., «The nature and significance of input - output analysis», Rev. Econ. Stat., May 1952.
- Eckstein O., «Input - output system» ες Econ. Activity Analysis, 1954.
- Evans W. D., «Marketing Uses of input - output data», Journal of Marketing, July 1952.
- Evans W. D. and Hoffenberg, «The Interindustry Relations Study» Review of Econ. and Stat., May 1952.
- Georgescu - Roegen N., «Some properties of a generalized Leontief Model» ες Activity Analysis, 1951.
- Hoffenberg M., «Employment resulting from U. S. Exports», Monthly Labor Review, Dec. 1947.
- Koopmans T. C., (Edit), «Activity Analysis of Production and Allocation» Wiley N. Y. 1951.
- Leontief W., «The structure of American Economy 1919 - 39», Oxford Univ. Press, 1951.
- » » «Recent developments in the study of interindustrial relationships» Amer. Econ. Rev., May 1949.
- » » «Structural Matrices and national Economics», Proceeding, of the International Statistical Conferences, 1947, Vol. V.
- » » «Some basic problems of structural analysis», Rev. Econ. Stat., Febr. 1952.
- » » «Domestic Production and Foreign Trade: The American Capital position re - examined» Harvard Economic Research Project, March 1953.
- » » and others, «Studies in the structure of the American Economy», Oxford Univ. Press 1953.
- Morgenstern O., «Economic Activity Analysis» Chapman and Hall Ltd, London 1954.
- Smith H. M., «Uses of Leontief's open input - output Models» ες Activity Analysis, 1951.
- National Bureau of Econ. Research, «Input - output Analysis. An Appraisal», Princeton Univ. Press 1955.