ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ
ΚΟΙΝΩΝΙΚΑΙ
ΤΕΧΝΙΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΑΙ

ΜΗΝΙΑΙΑ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ
ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΝ ΕΤΟΣ 1959—1960	ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1959	Ι' ΤΟΜΟΣ	ΑΡΙΘ. ΤΕΥΧΟΥΣ 3-4

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ: ΝΕΟΝ ΟΡΓΑΝΟΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΟΡΘΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ κ. ΑΝΔΡΕΟΥ Γ. ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ

Ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι μία μαθηματικὴ τεχνικὴ χρησιμοποιουμένη διὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς μεγίστης τιμῆς μιᾶς γραμμικῆς συναρτήσεως ὑποκειμένης εἰς περιορισμοὺς οἵτινες λαμβάνουν τὴν μορφὴν γραμμικῶν ἀνισοτήτων. Ἡ τεχνικὴ αὕτη καθιστᾶ δυνατὴν τὴν λύσιν μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων μεγιστοποιήσεως ἢ ἐλαχιστοποιήσεως τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιμετωπισθοῦν διὰ τῶν κλασσικῶν μεθόδων ἀριστοποιήσεως. Ἡ σπουδαιότης τῆς τεχνικῆς συνίσταται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ὡς ἄνω κατηγορία προβλημάτων εἶναι λίαν ἐκτεταμένη.

Ἡ ἐξέτασις τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δύναται γενικῶς νὰ ἀναχθῇ, εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν κάτωθι τριῶν εἰδικωτέρων ζητημάτων: 1) Διατύπωσις τοῦ μαθηματικοῦ προβλήματος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ διερεύνησις τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει λύσιν. 2) Καθορισμὸς τῆς ὑπολογιστικῆς τεχνικῆς διὰ τὴν λύσιν

Θεωροῦμεν ἰδιαιτέραν τιμὴν ὅτι μεταξὺ τῶν συνεργατῶν τῆς παρούσης ἐκδόσεως συγκαταλέγεται καὶ ὁ διεθνοῦς κύρους οἰκονομολόγος κ. Α. Γ. Παπανδρέου, καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Καλιφορνίας, Berkeley. Ὁ καθηγητὴς κ. Παπανδρέου εἶναι συγγραφεὺς πλείστων ἐπιστημονικῶν ἐργασιῶν, ἐξ ὧν ἀναφέρομεν «Competition and its Regulation, Prentice Hall 1954, καὶ «Economics as a Science» Lippincott, 1958. Αἱ ἐργασίαι αὗται χαρακτηρίζονται ἀπὸ σπανίαν ἀναλυτικὴν δύναμιν καὶ μεθοδολογικὴν πρωτοτυπίαν, ἰδίᾳ ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρησιμοποίσιν τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς τεχνικῆς εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἔρευναν. Ἡ δημοσιευομένη ἐργασία, γραφεῖσα εἰδικῶς διὰ τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν, ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν συνοπτικὴν παρουσίασιν τῶν βασικῶν τεχνικῶν καὶ οἰκονομικῶν ἐννοιῶν τῆς θεωρίας τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. (Σ.Σ.)

τοῦ προβλήματος, καὶ 3) Ἀξιολόγησις τῆς σημασίας τῆς τεχνικῆς εἰς συγκεκριμένας ἐφαρμογάς. Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἀσχολούμεθα μόνον μὲ τὰ ζητήματα 1 καὶ 3.

I. Εἰσαγωγικαὶ μαθηματικαὶ ἔννοιαι

Διὰ τὴν κατανόησιν τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἀναγκαία ἡ ἐκμάθησις βασικῶν τινων μαθηματικῶν ἐννοιῶν. Σκοπὸς τοῦ παρόντος τμήματος τῆς ἀναλύσεως εἶναι ἀκριβῶς ἡ συνοπτικὴ καὶ ἡ ὅσον τὸ δυνατὸν ἁπλουστέρα παρουσίασις τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν. Ἐκρίθη σκόπιμον ὅπως ἀποφευχθῇ ἡ ἀποδεικτικὴ διαδικασία καὶ ἐδόθη ἔμφασις εἰς τὰς ἐννοίας μᾶλλον παρὰ εἰς τὰς μαθηματικὰς πράξεις.

1. Προτάσεις καὶ δηλώσεις

«Πρότασις» (Sentence) εἶναι μία σειρὰ συμβόλων τὰ ὁποῖα πληροῦν τὰς ἀπαιτήσεις τῆς διαρθρώσεως μιᾶς γλώσσης. Θὰ καλοῦμεν τὴν πρότασιν ταύτην «δήλωσιν» (Statement) ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ προσδώσωμεν εἰς αὐτὴν μίαν τιμὴν ἀληθείας (Truth Value). Οὕτω «α εἶναι Q», εἶναι μία δήλωσις, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ α εἶναι δοθὲν ἀντικείμενον καὶ τὸ Q ὑποδηλοῖ δοθεῖσαν ἰδιότητα. Ἂς ἐξετάσωμεν ὅμως μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς «χ εἶναι Q», ὅπου τὸ χ εἶναι μία μεταβλητή. Μία τοιαύτη πρότασις—καλουμένη ἀνοικτὴ πρότασις—δὲν εἶναι δήλωσις, διότι τὸ χ δὲν ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενόν τι ἀλλ' ἁπλῶς κατέχει τὴν θέσιν ἑνὸς μὴ ὁρισθέντος εἰσέτι ἀντικειμένου. Κατὰ συνέπειαν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἴπωμεν ἐὰν ἡ πρότασις «x εἶναι Q», εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής. Τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ μόνον κατόπιν ἀντικαταστάσεως τοῦ χ μὲ συγκεκριμένον ἀντικείμενον.

2. Σύνολα

Εἰς τὴν ἀνοικτὴν πρότασιν «x εἶναι Q» ἀντιστοιχεῖ ἓν σύνολον, τὸ ὁποῖον καλεῖται συνήθως «σύνολον ἀληθείας» τῆς προτάσεως. Τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι ἡ συλλογὴ ὅλων τῶν δυνατῶν ὑποκαταστάσεων τοῦ x αἱ ὁποῖαι μετατρέπουν τὴν πρότασιν εἰς πραγματικὴν δήλωσιν. Οὕτω γράφομεν:

$$X = [\, x/x \text{ εἶναι } Q \,]$$

πρὸς ὑποδήλωσιν τοῦ συνόλου ἀληθείας τῆς προτάσεως «x εἶναι Q». Ἐν ἄλλοις λόγοις X εἶναι ἡ τάξις ἢ τὸ σύνολον ὅλων τῶν περιπτώσεων ὑποκαταστάσεως τοῦ x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν πρότασιν «x εἶναι Q» ἀληθῆ δήλωσιν. Τὰ σύνολα ἀποτελοῦνται ἐκ στοιχείων. Ἐὰν ἡ πρότασις «x_1 εἶναι Q» εἶναι ἀληθὴς δήλωσις, τότε τὸ x_1 εἶναι στοιχεῖον τοῦ X ἢ συμβολικῶς $x_1 \varepsilon X$. Δύο σύνολα εἶναι ἴσα ἐὰν περιλαμβάνουν τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς στοιχεῖα. Ἕνα σύνολον X καλεῖται ὑποσύνολον ἑτέρου συνόλου Y ἐὰν τὸ τελευταῖον τοῦτο περιλαμβάνῃ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ X. Τοῦτο παριστῶμεν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς: $X \subseteq Y$. Ἐὰν ἐξ ἄλλου $X \subseteq Y$ εἶναι ἀληθὲς ἀλλὰ $Y \subseteq X$ δὲν εἶναι ἀληθὲς τότε λέγομεν ὅτι τὸ X εἶναι ἕνα πραγματικὸν (Proper) ὑποσύνολον τοῦ Y καὶ γράφωμεν συμβολικῶς $X \subset Y$.

Θὰ ὡρίσωμεν τρεῖς βασικὰς πράξεις ἐπὶ συνόλων ἤτοι: τὴν ἕνωσιν (Union), τὴν τομὴν (Intersection) καὶ τὴν συμπλήρωσιν (Complementation). Ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων A καὶ B, παριστωμένη διὰ «$A \cup B$», εἶναι ἓν σύνολον περιέχον τὰ στοιχεῖα τοῦ A καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ B. Οὕτω, ἀμφότερα τὰ σύνολα A καὶ B εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $A \cup B$. Ἡ τομὴ τῶν A καὶ B ἥτις παριστᾶται ὡς $A \cap B$ περιλαμβάνει μόνον ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ A (ἢ τοῦ B) τὰ ὁποῖα ἀνήκουν ἐπίσης εἰς τὸ B (τὸ A). Οὕτω, ἂν τὸ A καὶ B δὲν περιλαμβάνουν κοινὰ στοιχεῖα, λέγομεν ὅτι ἡ τομὴ τῶν A καὶ B εἶναι κ ε ν ή. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $A \subseteq B$. Τότε ἡ παράστασις $B - A$ εἶναι τὸ σ υ μ π λ ή ρ ω μ α (Complement) τοῦ A εἰς τὸ B. Τὸ σύνολον $B - A$ περιλαμβάνει προφανῶς ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ B τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἐπίσης καὶ στοιχεῖα τοῦ A.

3. *Σχέσεις*

Ἂς λάβωμεν δύο σύνολα, τὸ A καὶ τὸ B. Ἐὰν λάβωμεν ἀνὰ δύο τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων αὐτῶν ἀκολουθοῦντες ὡρισμένην τάξιν, π.χ. θέτοντες εἰς ἕκαστον ζεῦγος, ὡς πρῶτον ἓν στοιχεῖον τοῦ A καὶ ὡς δεύτερον ἓν στοιχεῖον τοῦ B, κατασκευάζομεν ἓν νέον σύνολον, τὸ ὁποῖον καλεῖται κ α ρ τ ε σ ι α ν ὸ ν γινόμενον τῶν συνόλων A,B καὶ παριστᾶται ὡς «$A \cdot B$». Τὸ σύνολον «$A \cdot B$» εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διετεταγμένων ζευγῶν (α, b). Οὕτω γράφομεν:

$$A \cdot B = [\,(\alpha, b)\ /\alpha \varepsilon A,\ b \varepsilon B\,]$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι $A \cdot B$ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ζευγῶν (α,b), ὅπου τὸ στοιχεῖον α ἀνήκει εἰς τὸ A καὶ τὸ στοιχεῖον b εἰς τὸ B.

Ἡ Σ χ έ σ ι ς (Relation) ὁρίζεται ὡς ἓν ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου. Ἂς λάβωμεν ἕνα παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις:

$$y = 3x$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι μία ἀνοικτὴ πρότασις. Δι᾽ ὡρισμένας τιμὰς τῶν x καὶ y εἶναι δυνατὸν νὰ μετατραπῇ αὕτη εἰς ἀληθῆ δήλωσιν, ἐνῶ δι᾽ ἄλλας τιμὰς τῶν x καὶ y δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς ψευδῆ δήλωσιν. Οὕτω π.χ. ἐὰν θέσωμεν $y = 3$ καὶ $x = 1$ ἡ ἐξίσωσις μετατρέπεται εἰς ἀληθῆ δήλωσιν. Ἀντιθέτως αἱ τιμαὶ $y = 2$ καὶ $x = 1$ καθιστοῦν αὐτὴν ψευδῆ δήλωσιν. Ποῖον εἶναι τώρα τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς προτάσεως:

$$y = 3x\ ;$$

Προφανῶς τοῦτο εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ζευγῶν τῆς μορφῆς (x,y) τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν καὶ μετατρέπουν αὐτὴν εἰς ἀληθῆ δήλωσιν. Οὕτω γράφομεν:

$$R = [\,(x,y)\ /\ y = 3x\,]$$

3. 4. 4

Τὸ σύνολον R εἶναι μία σχέσις. Εἶναι σαφὲς ὅτι τὸ R εἶναι ἓν ὑποσύνολον ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου, ἤτοι τοῦ:

$$X \cdot Y = [\ (x,y)\ / x \varepsilon X, y \varepsilon Y\ ]$$

Τὸ $X \cdot Y$ ἀποτελεῖται ἀπὸ πάντα τὰ ζεύγη τῆς μορφῆς (x,y) καὶ κατὰ συνέπειαν περιλαμβάνει κατ' ἀνάγκην καὶ τὰ ζεύγη ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν $y = 3x$.

Πρὸς ἐμφατικωτέραν διατύπωσιν τούτου δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ R ὡς ἀκολούθως:

$$R = [\ (x,y)\ / x \varepsilon X,\ y \varepsilon Y \text{ καὶ } y = 3x\ ]$$

Δοθείσης μιᾶς σχέσεως διακρίνομεν μεταξὺ τοῦ πεδίου (Domain) καὶ τοῦ εὔρους (Range) αὐτῆς. Τὸ πεδίον μιᾶς σχέσεως π.χ. τῆς R εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν x διὰ τὰ ὁποῖα ὑφίστανται y τοιαῦτα ὥστε ἡ σχέσις $y = 3x$ νὰ εἶναι ἀληθής. Ἀντιθέτως τὸ εὖρος τῆς R εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν y διὰ τὰ ὁποῖα ὑφίστανται x τοιαῦτα ὥστε ἡ σχέσις $y = 3x$ νὰ εἶναι ἀληθής.

Αἱ ἔννοιαι αὗται σχετίζονται εἰδικώτερον μὲ τὰς συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις τῶν σχέσεων, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἡ σχέσις R εἶναι μία δυαδικὴ σχέσις περιλαμβάνουσα 2 μεταβλητάς. Τριαδικαὶ σχέσεις ἢ σχέσεις περιλαμβάνουσαι περισσοτέρας μεταβλητὰς δύνανται νὰ ἀναχθοῦν εἰς δυαδικὰς σχέσεις ὡς ἀκολούθως: Ἔστω π.χ. ἡ σχέσις

$$S = [\ (x,y,z) / x \varepsilon X,\ y \varepsilon Y,\ z \varepsilon Z \text{ καὶ } z = y + 2x\ ]$$

S εἶναι τὸ ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $X \cdot Y \cdot Z$. Τίποτε ἐν τούτοις δὲν θὰ μᾶς ἐμποδίσῃ νὰ ἐκφράσωμεν τὸ καρτεσιανὸν τοῦτο γινόμενον ὡς $W \cdot Z$, ὅπου $W = X \cdot Y$. Οὕτω, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ $X \cdot Y$ ὡς τὸ πεδίον τοῦ S καὶ Z ὡς τὸ εὖρος αὐτοῦ καὶ νὰ γράψωμεν:

$$S = [\ ((x,y), z)\ / (x,y)\ \varepsilon X \cdot Y, z \varepsilon Z \text{ καὶ } z = y + 2x\ ]$$

4. *Συναρτήσεις καὶ Συσχετίσεις* (Mappings)

Μία σχέσις F καλεῖται συνάρτησις ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν εἰς ἕκαστον x τοῦ πεδίου τῆς F ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς *ἓν* y τοῦ εὔρους αὐτῆς. Οὕτω:

$$[\ (x,y) / x \varepsilon X,\ y \varepsilon Y \text{ καὶ } y = 2x\ )$$

εἶναι μία συνάρτησις, ἐνῶ:

$$[\ (x,y) / x \varepsilon X,\ y \varepsilon Y \text{ καὶ } x^2 + y^2 = 1\ ]$$

δὲν εἶναι συνάρτησις.

Εἰς ἑκάστην συνάρτησιν F μὲ πεδίον X καὶ εὖρος Y', ὅπου $Y' \subseteq Y$, ἀντιστοιχεῖ εἷς κανὼν f ὀνομαζόμενος συσχέτισις (Mapping) τοῦ X πρὸς τὸ Y, ὅστις συσχετίζει ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ X μὲ ἓν ἀκριβὲς στοιχεῖον τοῦ Y

Συμβολικῶς: $\quad f : X \longrightarrow Y$

Κατὰ ταῦτα ὁ κανὼν f δημιουργεῖ τὴν συνάρτησιν F ἥτις δύναται νὰ προσδιορισθῇ ὡς ἀκολούθως:

$$F = [\ (x,y)/x\varepsilon X,\ y\varepsilon Y \text{ καὶ } y = f(x)\ ]$$

ὅπου f (x) εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τοῦ x βάσει τοῦ κανόνος f καὶ καλεῖται συνήθως «f – ἀντίστοιχον» τοῦ x. Οὕτω ἡ ἔκφρασις:

$$y = f\ (x)$$

εἶναι μία ἀνοικτὴ πρότασις συμφώνως πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ y εἶναι f – ἀντίστοιχον τοῦ x.

5. *Διανύσματα καὶ διανυσματικοὶ χῶροι*

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀμφότερα τὰ σύμβολα X καὶ Y παριστοῦν τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον X · Y περιλαμβάνει στοιχεῖα τῆς μορφῆς (x, y) ὅπου x, y εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Τὰ διατεταγμένα ταῦτα ζεύγη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων α,β,γ, κ.λ.π. Ἔστω ὅτι διά:

$$\alpha = (x', y'),\ \beta = (x'', y''):$$

1. $\alpha = \beta$ σημαίνει $x' = x''$ καὶ $y' = y''$.
2. $\alpha + \beta$ σημαίνει $(x' + x'',\ y' + y'')$.
3. $k\alpha = (kx',\ ky')$, ὅπου k εἶναι ἕνας ἀριθμός.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου X · Y, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν αἱ ὑποθέσεις 1,2 καὶ 3 ἀνωτέρω, δυνάμεθα τώρα νὰ ὀνομάσωμεν καρτεσιανὸν χῶρον δύο διαστάσεων τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Συμβολικῶς θὰ παραστήσωμεν τὸν χῶρον τοῦτον διὰ $V_2(R)$. Τὰ εἰς τὸν χῶρον αὐτὸν περιλαμβανόμενα διατεταγμένα ζεύγη καλοῦνται διανύσματα εἰς $V_2(R)$.

Αἱ ὡς ἄνω παρατηρήσεις δύνανται νὰ γενικευθοῦν. Ἐν πρώτοις δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ περιορισθῶμεν εἰς διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐπεκταθῶμεν εἰς χῶρον n διαστάσεων, συμβολικῶς εἰς $V_n(R)$. Ἐπὶ πλέον, πλὴν τοῦ πεδίου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἐπεκταθῶμεν καὶ εἰς πᾶν ἕτερον πεδίον τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ ὡρισμένα ἀξιώματα. Πράγματι, ὁ διανυσματικὸς χῶρος εἶναι σύνολον στοιχείων (διανυσμάτων) διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν αἱ πράξεις τῆς διανυσματικῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ διανύσματος ἐπὶ βαθμωτὸν (δηλαδὴ πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν) καὶ ἱκανοποιοῦν τὰς κάτωθι ὑποθέσεις ἢ ἀξιώματα. Ἔστω ὅτι α, β, γ, ... εἶναι διανύσματα εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\underline{X}$ καὶ c,d ἀριθμοί.

1. Τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta$ εἶναι διάνυσμα εἰς $\underline{X}$.
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
3. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

4. Ὑφίσταται ἓν διάνυσμα 0 τοιοῦτον ὥστε δι' ἕκαστον διάνυσμα α: $\alpha+0=\alpha$.
5. Δι' ἕκαστον διάνυσμα α ὑφίσταται ἓν διάνυσμα δ τοιοῦτον ὥστε: $\alpha+\delta=0$.
6. Τὸ γινόμενον $c\alpha$ εἶναι διάνυσμα εἰς $\underline{X}$.
7. $c(\alpha+\beta) = c\alpha + c\beta$.
8. $(c+d)\alpha = c\alpha + d\alpha$.
9. $(cd)\alpha = c(d\alpha)$.
10. $1\alpha = \alpha$.

Ὁ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον δοθεὶς ὁρισμὸς τοῦ διανυσματικοῦ χώρου εἶναι γενικὸς καὶ περιλαμβάνει μεταξὺ τῶν διαφόρων εἰδικῶν περιπτώσεων καὶ τὴν περίπτωσιν τοῦ n–διαστάτου χώρου τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Πᾶν ὑποσύνολον ἔστω $\underline{Y}$ ἑνὸς διανυσματικοῦ χώρου $\underline{X}$, καλεῖται ὑ π ο χ ῶ ρ ο ς τοῦ $\underline{X}$ ἐφ' εἶναι διανυσματικὸς χῶρος. Εἰδικώτερον ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἀπαιτεῖ ὅπως, (1) ἐὰν $\alpha, \beta \in Y$, τότε $\alpha+\beta \in Y$, (2) ἐὰν $\alpha \in Y$, τότε $c\alpha \in Y$, διὰ πάντα ἀριθμὸν c.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι $\underline{X}$ εἶναι διανυσματικὸς χῶρος καὶ ὅτι $x^1, x^2, \ldots, x^n$ εἶναι διανύσματα εἰς $\underline{X}$. Καλοῦμεν γ ρ α μ μ ι κ ὸ ν σ υ ν δ υ α σ μ ὸ ν τῶν διανυσμάτων αὐτῶν τὴν παράστασιν $c_1x^1 + c_2x^2 + \ldots + c_n x^n$ ὅπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ εἶναι ἀριθμοί. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν διανυσμάτων $x^1, x^2, \ldots, x^n$ εἶναι ὑποχῶρος τοῦ $\underline{X}$ καὶ καλεῖται ὑποχῶρος δημιουργούμενος ὑπὸ τῶν διανυσμάτων $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Τὰ διανύσματα ταῦτα καλοῦνται γ ρ α μ μ ι κ ῶ ς ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ α ἐὰν

$$c_1x^1 + c_2x^2 + c \ldots + c_n x^n = 0$$

διὰ $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Περαιτέρω ἐὰν τὰ διανύσματα εἶναι ἀνεξάρτητα κ α ὶ δημιουργοῦν ὁλόκληρον τὸν χῶρον $\underline{X}$, καλοῦνται β ά σ ι ς τοῦ χώρου τούτου καὶ ὁ δείκτης n δ ι ά σ τ α σ ι ς τοῦ $\underline{X}$. Ἐπὶ παραδείγματι τὰ διανύσματα

$$\begin{aligned} x^1 &= (1, 0, \ldots, 0, 0) \\ x^2 &= (0, 1, \ldots, 0, 0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= (0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

σχηματίζουν βάσιν διὰ τὸν καρτεσιανὸν χῶρον τῶν n διαστάσεων. Ἀξίζει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐὰν μία ἐκ τῶν βάσεων τοῦ X περιλαμβάνει n διανύσματα τότε κάθε βάσις αὐτοῦ περιλαμβάνει ἐπίσης n διανύσματα. Ἐπὶ πλέον ἐὰν ὁ χῶρος X ἔχει μίαν βάσιν n διανυσμάτων τότε οὐδὲν σύνολον περιέχον περισσότερα τῶν n διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητον.

6. *Μῆτραι*

Μία μήτρα δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἓν διατεταγμένον m–πλοῦν διανυσμάτων, εἰς ἓν n–διάστατον καρτεσιανὸν διανυσματικὸν χῶρον, καταγραφομένων εἰς στήλας μᾶλλον παρὰ εἰς σειράς. Π.χ.:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

εἶναι μήτρα ὅπου $\alpha = (x', y')$, $\beta = (x'', y'')$, $\gamma = (x''', y''')$. Οὕτω δυνάμεθα ἐπίσης νὰ γράψωμεν :

$$\begin{bmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{bmatrix}$$

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως βλέπομεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρήσωμεν τὰς στήλας

$$\begin{bmatrix} x' \\ x'' \\ x''' \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{bmatrix}$$

ὡς διανύσματα — ὀνομαζόμενα διανύσματα στῆλαι — ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὰ (x', y'), (x'', y''), (x''', y'''), τὰ ὁποῖα δυνάμεθα τώρα νὰ καλέσωμεν διανύσματα σειρᾶς. Οὕτω, ἡ μήτρα ἀποτελεῖ ἕναν ὀρθογώνιον πίνακα ἀριθμῶν m σειρῶν (διανυσμάτων - σειρῶν) καὶ n στηλῶν (διανυσμάτων - στηλῶν). Προφανῶς πᾶν διάνυσμα - σειρὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις μήτρας τάξεως $1 \times n$, ἐνῶ πᾶν διάνυσμα - στήλη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μήτρα τάξεως $m \times 1$. Πᾶσα μήτρα A τάξεως $m \times n$ δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς ἐκ τῶν ἀκολούθων τρόπων :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \equiv (\alpha', \beta', \gamma')$$

ὅπου α_{ij} εἶναι τὸ στοιχεῖον τῆς μήτρας τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν i σειρὰν καὶ j στήλην, καὶ $\alpha = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, $\beta = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$:

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix}, \quad \beta' = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \gamma' = \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix}$$

Δύο μῆτραι A καὶ B καλοῦνται ἴσαι ἐὰν εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ $\alpha_{ij} = b_{ij}$ διὰ πάντα τὰ ij.

Τὸ ἄθροισμα δύο μητρῶν τάξεως $m \times n$ εὑρίσκεται διὰ τοῦ σχηματισμοῦ μιᾶς μήτρας C τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα c_{ij} ἰσοῦνται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν A καὶ B. Οὕτω :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + b_{11} & \alpha_{12} + b_{12} \\ \alpha_{21} + b_{21} & \alpha_{22} + b_{22} \\ \alpha_{31} + b_{31} & \alpha_{32} + b_{32} \end{bmatrix}$$

Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι k εἶναι ἕνας ἀριθμὸς καὶ A μία μήτρα δυνάμεθα τότε νὰ ὁρίσωμεν μίαν νέαν μήτραν $k \cdot A$ τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα εἶναι $k\alpha_{ij}$. Οὕτω

$$k \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\alpha_{11} & k\alpha_{12} \\ k\alpha_{21} & k\alpha_{22} \\ k\alpha_{31} & k\alpha_{32} \end{bmatrix}$$

Ὁ πολλαπλασιασμὸς μητρῶν εἶναι μία ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου. Ἔστω:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{καὶ} \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Δυνάμεθα τότε νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον $\alpha \cdot \beta$ ὡς ἀκολούθως:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι: 1) ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ α ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων τοῦ β. 2) Τὸ διάνυσμα στήλη α προηγεῖται τοῦ διανύσματος στήλη β. 3) Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως εἶναι ἕνας ἀριθμός.

Δοθεισῶν δύο μητρῶν A καὶ B τάξεως $m \times k$ καὶ $k \times n$ ἀντιστοίχως δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μήτραν C τάξεως $m \times n$ διὰ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $A \times B$. Τὸ στοιχεῖον c_{ij} τοῦ C ἰσοῦται μὲ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς i σειρᾶς τῆς A καὶ j στήλης τῆς B. Οὕτω π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\ 3+2\ 5 & 1\ 0+2\ 1 & 1\ 1+2\ 2 \\ 3\ 3+1\ 5 & 3\ 0+1\ 1 & 3\ 1+3\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 & 5 \\ 14 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Δοθείσης μιᾶς μήτρας A δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μίαν νέαν μήτραν A' μεταβάλλοντες τὰς σειρᾶς τῆς A εἰς στήλας τῆς A'. Ἡ πρᾶξις αὕτη καλεῖται ἐναλλαγὴ τῆς A. Προφανῶς $A'' = A$.

Ὁ συμβολισμὸς τῶν μητρῶν εἶναι λίαν ἰσχυρός, δι' αὐτοῦ δὲ ὁλόκληρα συστήματα εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθοῦν κατὰ τρόπον ἁπλούστατον. Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι τὸ σύστημα ἐξισώσεων:

$$3x_1 + 2x_2 = w_1$$
$$2x_1 + 5x_2 = w_2$$

τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ διὰ τοῦ συμβολισμοῦ τῶν μητρῶν ὡς ἀκολούθως:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

ἢ ἁπλῶς

$$Ax = w$$

ὅπου A εἶναι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, καὶ $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$

7. *Γραμμικοὶ μετασχηματισμοὶ καὶ συναρτησιακὰ*

Γραμμικὸς μετασχηματισμὸς εἶναι μία συσχέτισις, f, τῆς ὁποίας τὸ πεδίον καὶ τὸ εὖρος εἶναι διανυσματικοὶ χῶροι καὶ ἱκανοποιεῖ τὰ κάτωθι δύο ἀξιώματα:

(1) Δι' ἕκαστον x', x'' εἰς τὸ πεδίον $\underline{X}$:

$$f(x' + x'') = f(x') + f(x'')$$

(2) Δι' ἕκαστον x εἰς $\underline{X}$, καὶ δι' ἕκαστον ἀριθμὸν c:

$$f(cx) = cf(x)$$

Ὁ γραμμικὸς μετασχηματισμὸς δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς:

$$f: \underline{X} \to \underline{Y}$$

ὅπου $\underline{X}$ καὶ $\underline{Y}$ εἶναι διανυσματικοὶ χῶροι. Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος ὁρίζεται ὡς μιὰ ἀνοικτὴ πρότασις ἔστω $f(x) = y$, ὅπου $x \varepsilon \underline{X}$ καὶ $y \varepsilon \underline{Y}$. Π.χ. ἔστω:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

τότε τὸ f— ἀντίστοιχον τοῦ x θὰ εἶναι ἴσον μὲ

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

Οὕτω τὸ f εἰς τὸ παράδειγμά μας εἶναι ἕνας μετασχηματισμὸς μεταξὺ τοῦ τρισδιαστάτου διανυσματικοῦ χώρου καὶ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου δύο διαστάσεων. Εἰς τὸν μετασχηματισμὸν ἀντιστοιχεῖ μία μήτρα μετασχηματισμοῦ, ἤτοι:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Μία γραμμικὴ ἀριθμητικὴ συνάρτησις (functional) εἶναι μία συσχέτισις μὲ πεδία διανυσματικῶν χώρων καὶ περιοχὴν μίαν σειρὰν ἀριθμῶν καὶ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὰ ἀνωτέρω ἀναφερθέντα ἀξιώματα. Οὕτω ἡ γραμμικὴ ἀριθμητικὴ συνάρτησις εἶναι μία εἰδικὴ περίπτωσις γραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ. Ἔστω π.χ. g εἶναι μία γραμμικὴ ἀριθμητικὴ συνάρτησις εἰς τὸν τρισδιάστατον διανυσματικὸν χῶρον. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$g: \underline{X} \to R$$

καὶ νὰ ὁρίσωμεν τὸ g διὰ τῆς ἀνοικτῆς προτάσεως

$$g(x) = (1, 5, 2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Οὕτω τὸ g—ἀντίστοιχον τοῦ x ἰσοῦται πρὸς $x_1 + 5x_2 + 2x_3$ τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνας ἀριθμὸς καὶ ἀνήκει εἰς τὸ R, δηλ. τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

II. *Κυρτὰ σύνολα*

Ἂς λάβωμεν π.χ. τὴν ἀνοικτὴν πρότασιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $f(x) = w_i$ ὅπου τὸ x εἶναι διάνυσμα εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον τῶν n διαστάσεων $\underline{X}_n$ καὶ w_i εἶναι ἕνας ἀριθμός. Ἡ πρότασις αὕτη ὁρίζει μίαν γραμμικὴν ἀριθμητικὴν συνάρτησιν, f. Τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς προτάσεως, ἐκφράζεται διὰ τοῦ συνόλου:

$$[\ x/x \varepsilon X_n \quad \text{καὶ} \quad f(x) = w_i\ ]$$

Διὰ $n = 2$ τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι γ ρ α μ μ ή, διὰ $n = 3$ ἐ π ί π ε δ ο ν καὶ διὰ $n > 3$ ὑ π ε ρ ε π ί π ε δ ο ν. Ἔστω π.χ.:

$$f(x) = (3, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 6$$

Ἡ ἀνωτέρω παράστασις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἐξίσωσιν: $3x_1 + x_2 = 6$, τῆς ὁποίας τὸ σύνολον ἀληθείας

$$[\ x/x \varepsilon \underline{X}_2 \quad \text{καὶ} \quad 3x_1 + x_2 = 6\ ]$$

εἶναι μία γραμμή.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς ἀνισότητος:

$$f(x) = (3, 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 6$$

Τοῦτο ἰσοῦται πρὸς

$$[\ x/x \varepsilon X_2 \quad \text{καὶ} \quad 3x_1 + x_2 > 6\ ]$$

Ἡ ἐστιγμένη περιοχὴ τοῦ διαγράματος 1 κατωτέρω ἐκφράζει γεωμετρικῶς τὸσύνολον τοῦτο. Ἡ γραμμὴ ἡ παριστῶσα τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς ἐξισώσεως $3x_1 + x_2 = 6$ δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὴν ἐν λόγῳ περιοχήν. Ἐὰν ἀντιθέτως ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὸ σύνολον τῆς ἀληθείας τῆς ἀνισότητος $f(x) \geqslant 6$, ἡ γραμμὴ αὕτη πρέπει νὰ περιληφθῇ εἰς τὴν ἐστιγμένην περιοχήν.

Γενικῶς ἀνισότητες τῆς μορφῆς $f(x) < w_i$ ἢ $f(x) > w_i$ προσδιορίζουν σύνολα, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ἀ ν ο ι κ τ ο ὺ ς ἡ μ ι χ ώ ρ ο υ ς ἐνῶ ἀνισότητες τῆς μορφῆς $f(x) \leqslant w_i$ ἢ $f(x) \geqslant w_i$ χαρακτηρίζουν σύνολα, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν κ λ ε ι σ τ ο ὺ ς ἡ μ ι χ ώ ρ ο υ ς.

Ἐλέχθη προηγουμένως ὅτι ἓν σύστημα ἐξισώσεων δύναται νὰ διατυπωθῇ ὑπὸ μορφὴν μητρῶν. Τοῦτο ἀκριβῶς δύναται νὰ συμβῇ καὶ μὲ ἓν σύστημα ἀνισοτήτων. Π.χ.:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ἢ} \quad Ax \leqslant w$$

καταλήγει εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &\leqslant w_1 & & & f(x) &\leqslant w_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &\leqslant w_2 & &\text{ἢ} & f(x) &\leqslant w_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 &\leqslant w_3 & & & f(x) &\leqslant w_3 \end{aligned}$$

Ἂς λάβωμεν ἓν δεύτερον παράδειγμα. Ἔστω:

$$Ax \leqslant w$$

ὅπου

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἓν σύστημα ἀνισοτήτων

$$\begin{aligned} -x_1 &\leqslant 0 & &\text{ἢ} & x_1 &\geqslant 0 \\ -x_2 &\leqslant 0 & &\text{ἢ} & x_2 &\geqslant 0 \\ 3x_1 + x_2 &\leqslant 6 & &\text{ἢ} & 3x_1 + x_2 &\leqslant 6 \end{aligned}$$

Τὸ σύνολον ἀληθείας τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων ἤτοι

$$[\, x / x \varepsilon X_n \quad \text{καὶ} \quad Ax \leqslant w \,]$$

ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν περιοχὴν τοῦ τριγώνου (συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν πλευρῶν) τοῦ διαγρ. 1. Τὸ σύνολον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ τομὴ τριῶν ἄλλων συνόλων, ἤτοι τῶν τριῶν ἡμιχώρων, οἱ ὁποῖοι χαρακτηρίζονται ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων $Ax \leqslant w$.

Μία σημαντικὴ ἰδιότης τῶν ἡμιχώρων εἶναι ἡ κυρτότης αὐτῶν. Ἓν σύνολον χαρακτηρίζεται ὡς κυρτὸν ἐὰν δι' ἕκαστον ζεῦγος στοιχείων αὐτοῦ, π.χ. x_1' καὶ x_2'' τὸ συνδέον ταῦτα τμῆμα εὐθείας κεῖται ἐπίσης ἐντὸς τοῦ συνόλου. Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ τῶν κυρτῶν συνόλων ἀποτελεῖ ἐπίσης κυρτὸν σύνολον. Ἓν κυρτὸν σύνολον τὸ ὁποῖον δημιουργεῖται ἐκ τῆς τομῆς κλειστῶν ἡμιχώρων καλεῖται πολυεδρικὸν κυρτὸν σύνολον. Ἐκ τούτου συνέπεται ὅτι τὸ σύνολον ἀληθείας μιᾶς ἀνοικτῆς δηλώσεως τοῦ τύπου $Ax \leqslant w$ εἶναι ἓν πολυεδρικὸν κυρτὸν σύνολον. Π.χ. τὸ τρίγωνον τοῦ διαγράμματος 1 ἀποτελεῖ ἓν τοιοῦτον πολυεδρικὸν κυρτὸν σύνολον.

Ἐλέχθη ἤδη ὅτι ἡ ἀνοικτὴ δήλωσις $Ax \leqslant w$ ὅπου:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots\cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots\cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \cdots\cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

ἐκφράζει τὰς ἀνοικτὰς προτάσεις - ἀνισότητας

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots\cdots, \alpha_{1n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leqslant w_1$$

$$(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots\cdots \alpha_{2n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leqslant w_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\alpha_{m1}\ \alpha_{m2}, \cdots\cdots, \alpha_{mn}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leqslant w_m$$

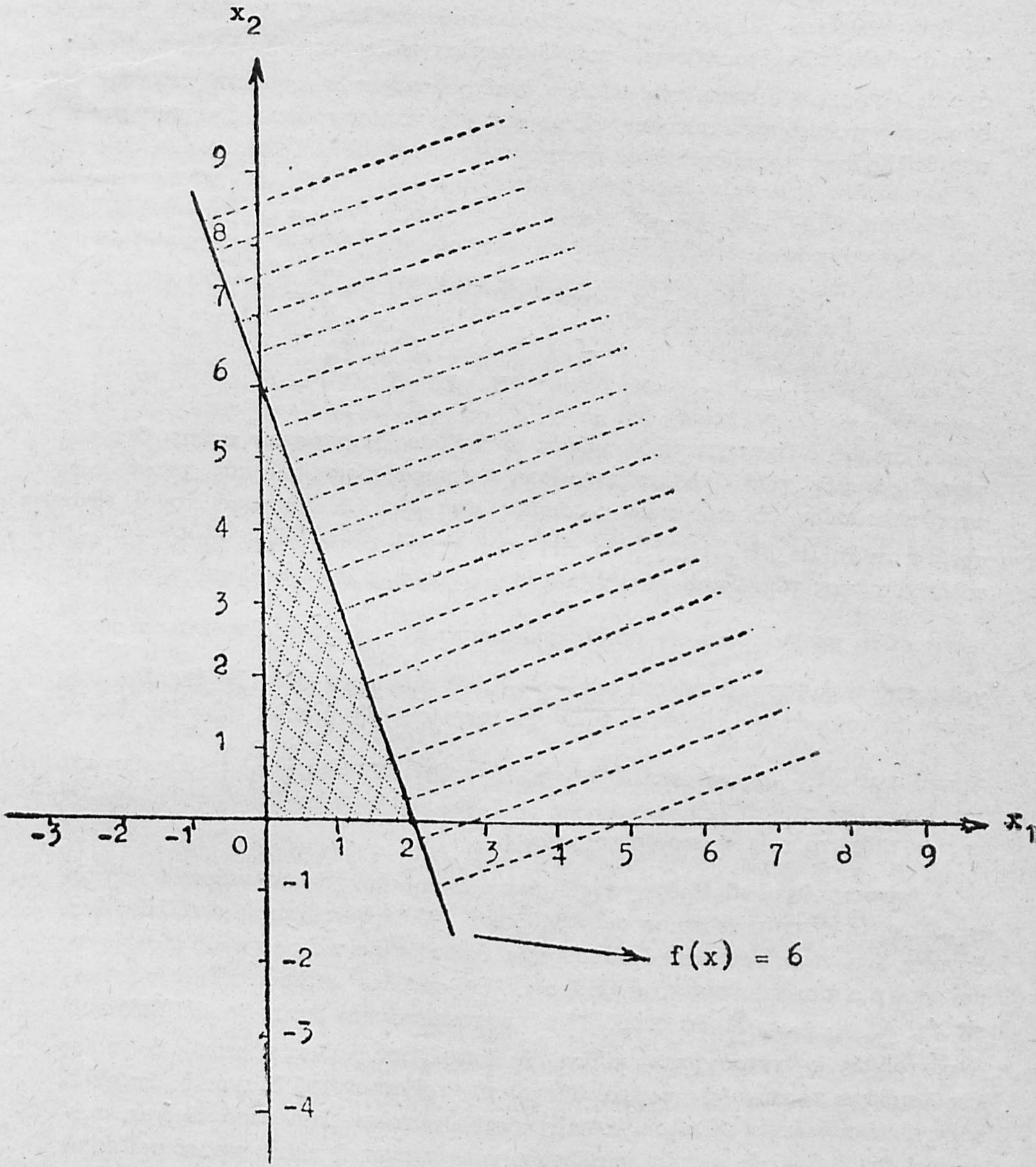
τῶν ὁποίων τὰ σύνολα ἀληθείας εἶναι κλειστοὶ ἡμιχῶροι εἰς τὸν n - διάστατον διανυσματικὸν χῶρον. Εἰς ἕκαστον οὕτω ὁριζόμενον ἡμιχῶρον ἀντιστοιχεῖ ἓν περιβάλλον ὑπερεπίπεδον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς ἐξισώσεως ἥτις χαρακτηρίζει τὴν ἀνισότητα. Οὕτω π.χ. τὸ περιβάλλον ὑπερεπίπεδον τοῦ ἡμιχώρου:

$$[x / x \varepsilon X_n \quad \text{καὶ} \quad (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots\cdots, \alpha_{1n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leqslant w_1]$$

εἶναι τὸ σύνολον

$$[x / x \varepsilon X_n \quad \text{καὶ} \quad (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots\cdots, \alpha_{1n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = w_1]$$

Εἰς τὸ διάγραμμα 1 τὸ περιβάλλον ὑπερεπίπεδον τοῦ ἡμιχώρου ὅστις προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἀνισότητα $3x_1 + x_2 \geqslant 6$ εἶναι ἡ γραμμὴ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $3x_1 + x_2 = 6$. Τὰ περιβάλλοντα ὑπερεπίπεδα τῶν ἡμιχώρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡς τομὴν τὸ κυρτὸν πολύεδρον ἀποτελοῦν ἐπίσης τὰ περιβάλλοντα ὑπερεπίπεδα τοῦ πολυέδρου τούτου.



Διαγρ. 1

Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν n περιβαλλόντων ὑπερεπιπέδων ἑνὸς κυρτοῦ πολυέδρου καλεῖται ἀκραῖον σημεῖον τοῦ συνόλου. Ὁ ἀριθμὸς n δεικνύει τὸν ἀριθμὸν τῶν διαστάσεων τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\underline{X}$. Ὁ ὁρισμὸς τῶν ἀκραίων σημείων δεικνύει τὴν μέθοδον ἀναζητήσεως τῶν σημείων τούτων εἰς ἓν κυρτὸν πολυεδρικὸν σύνολον. Οὕτω π.χ. εἰς τὸ διάγραμμα 1 ἔχομεν τρεῖς περιβαλλούσας γραμμὰς διὰ τὸ στικτὸν κυρτὸν σύνολον, ἤτοι

$$H_1 = \left[\; x / x\varepsilon \underline{X}_2 \quad \text{καὶ} \quad (-1, 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right]$$

$$H_2 = \left[\; x / x\varepsilon \underline{X}_2 \quad \text{καὶ} \quad (0, -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right]$$

$$H_3 = \left[\; x / x\varepsilon \underline{X}_2 \quad \text{καὶ} \quad (3, \; 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6 \right]$$

Ἐπειδὴ ὁ διανυσματικὸς χῶρος εἶναι δύο διαστάσεων πρέπει διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀκραίων σημείων νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τομὰς τῶν περιβαλλουσῶν τὸ τρίγωνον γραμμῶν ἀνὰ δύο. Αἱ σχετικαὶ τομαὶ εἶναι τρεῖς ἤτοι $H_1 \cap H_2$, $H_1 \cap H_3$, $H_2 \cap H_3$. Ἡ τομὴ $H_1 \cap H_2$ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ σύνολον ἀληθείας τῶν ἐξισώσεων H_1 καὶ H_2, δηλαδὴ τῶν $x_1 = 0$ καὶ $x_2 = 0$. Ἡ λύσις αὕτη περιλαμβάνει ἓν μόνον σημεῖον τὸ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ πολυεδρικοῦ κυρτοῦ συνόλου. Κατὰ συνέπειαν εἶναι ἓν ἀκραῖον σημεῖον. Ἡ τομὴ $H_1 \cap H_3$ ἰσοῦται πρὸς τὸ σύνολον τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων $x_1 = 0$ καὶ $3x_1 + x_2 = 6$ καὶ δίδει τὸ ἀκραῖον σημεῖον $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ὁμοίως τὸ $H_2 \cap H_3$ δίδει τὸ τρίτον ἀκραῖον σημεῖον $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ἀναφορικῶς μὲ τὰς ἰδιότητας τῶν ἀκραίων σημείων τῶν πολυεδρικῶν κυρτῶν συνόλων, ὑφίσταται ἓν σημαντικὸν θεώρημα, ἀλλ' ἡ διατύπωσις αὐτοῦ δὲν εἶναι δυνατὴ ἄνευ προηγουμένου ὁρισμοῦ τῶν ὅρων κυρτὸς συνδυασμὸς καὶ περατωμένον σύνολον. Ἓν σύνολον σημείων (διανυσμάτων) εἰς $\underline{X}_2$, $\underline{X}_3$, ..., $\underline{X}_n$ θὰ ὀνομάζεται περατωμένον ἐὰν δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἀντιστοίχως ἓν τετράγωνον, κύβον, ἢ ὑπερκύβον (ν διαστάσεων), ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει τὸ σύνολον τοῦτο. Οὕτω τὸ τρίγωνον τοῦ διαγρ. **1**, ἀποτελεῖ περατωμένον κυρτὸν σύνολον. Ἐὰν ἓν κυρτὸν σύνολον εἶναι περατωμένον, συνάγεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς m τῶν ἡμιχώρων, τῶν ὁποίων ἡ τομὴ προσδιορίζει τὸ σύνολον, εἶναι μεγαλύτερος τῶν διαστάσεων n τοῦ χώρου. Κυρτὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων $x^1, x^2, \ldots\ldots, x^k$ εἰς $\underline{X}_n$ καλεῖται ὁ γραμμικὸς συνδυασμός :

$$c_1 x^1 + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k \qquad \text{ὅπου} \qquad c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$$

Δυνάμεθα τώρα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν : Πᾶν σημεῖον ἑνὸς κυρτοῦ πολυεδρικοῦ συνόλου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων σημείων τοῦ συνόλου καὶ πᾶς κυρτὸς συνδυασμὸς τῶν ἀκραίων σημείων εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου.

Μία πρότασις ἔχουσα ἄμεσον σχέσιν μὲ τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Ἐὰν f εἶναι ἓν συναρτησιακὸν εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον n - διαστάσεων καὶ C εἶναι κυρτὸν πολυεδρικὸν σύνολον εἰς τὸν αὐτὸν χῶρον, δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ $x \epsilon C$ ἡ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως f(x) ἐπιτυγχάνεται εἰς ἓν ἢ περισσότερα ἀκραῖα σημεῖα τοῦ C. Ἓν παράδειγμα θὰ διευκολύνῃ τὴν κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω: Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὰ ἀκραῖα σημεῖα τοῦ περατωμένου κυρτοῦ συνόλου τοῦ σχήματος 1 εἶναι:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ἂς ὁρίσωμεν τώρα ἓν συναρτησιακὸν εἰς τὸν χῶρον τῶν 2 διαστάσεων, μέσῳ τῆς ἀνοικτῆς προτάσεως $f(x) = x_1 + 2x_2$. Ἡ ἀξία τῆς f(x) εἰς τὰ τρία ἀκραῖα σημεῖα (κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν σειρὰν) εἶναι 0, 12, 2. Ἡ f(x) μεγιστοποιεῖται εἰς τὸ σημεῖον $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ καὶ ἐλαχιστοποιεῖται εἰς τὸ σημεῖον $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Τὸ ἴδιο ἰσχύει διὰ πᾶσαν συνάρτησιν g(x), ὅπου $g(x) = f(x) + k$, καὶ k εἶναι εἷς ἀριθμός:

III. *Τὰ βασικὰ χαρακτηριστικὰ προβλήματα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ*

Τυπικῶς τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἀκολούθως: Περιγράψατε ἢ ἀπαριθμήσατε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου:

$$[\,\widehat{x} \,/\, \widehat{x} \,\epsilon\, C \subset \underline{X}_n \quad \text{καὶ} \quad f(\widehat{x}) = \text{ἀκραία τιμὴ τῆς } f(x)\,]$$

ὅπου C εἶναι πολυεδρικὸν κυρτὸν σύνολον καὶ f ἓν συναρτησιακὸν εἰς τὸν n-διάστατον χῶρον. Ἂς ἐξετάσωμεν π.χ. ἓν πρόβλημα μεγιστοποιήσεως. Τὸ συναρτησιακὸν ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἀνοικτὴν πρότασιν:

$$(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_n x_n$$

ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ ἁπλούστερον ὡς cx. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ διάνυσμα x τοιοῦτον ὥστε cx = μέγιστον ὑπὸ τὸν περιορισμὸν ὅτι τὸ x ἀνήκει εἰς τὸ κυρτὸν πολυεδρικὸν σύνολον C, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν τομὴν κλειστῶν ἡμιχώρων. Τὸ κάτωθι σύστημα ἀνισοτήτων προσδιορίζει τὸ σχετικὸν κυρτὸν πολύεδρον:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ἤ, ἁπλῶς} \quad \mathbf{x} \geqslant 0$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad \text{ἤ, ἁπλῶς} \quad A\mathbf{x} \leqslant w$$

Οὕτω τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς cx ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς τῶν ἀνισοτήτων $\mathbf{x} \geqslant 0$ καὶ $Ax \leqslant w$.

Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως ὅτι εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀντιστοιχεῖ ἕτερον πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τὸ ὁποῖον καλοῦμεν «δίδυμον» (dual) αὐτοῦ. Εἰσάγομεν ἕνα διάνυσμα στήλη τάξεως $m \times 1$:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\underline{Z}_m$, καὶ ἐν συνεχείᾳ διατυποῦμεν τὸ κάτωθι πρόβλημα: Νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ ἡ

$$(w_1, w_2, \cdots\cdots, w_m) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \quad \text{ἤ, ἁπλῶς} \quad w'z$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς $\qquad z \geqslant 0$

καὶ

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots\cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \alpha_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots\cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

ἤ, ἁπλῶς $\qquad A'z \geqslant c'$

Ὡς παρατηροῦμεν τὸ μόνον νέον σύμβολον τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εἰς τὸ δίδυμον πρόβλημα εἶναι τὸ διάνυσμα στήλη z. Ἡ ἔννοια τοῦ διανύσματος αὐτοῦ θὰ ἐξετασθῇ ἀργότερον. Ἐνταῦθα περιοριζόμεθα εἰς τὴν παρουσίασιν τῆς τυπικῆς σχέσεως μεταξὺ ἑνὸς προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ τοῦ διδύμου αὐτοῦ. Τὸ δίδυμον πρόβλημα ἐκφράζεται ὡς ἀκολούθως: Νὰ περιγραφοῦν ἢ ἀπαριθμηθοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου

$$[\, \widehat{z} \,/\, \widehat{z} \in C' \subset \underline{Z}_m \text{ καὶ } h(\widehat{z}) = \text{ἐλάχιστον τῆς } h(z) \,]$$

Τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀναφέρεται ἀκριβῶς εἰς τὴν τυπικὴν σχέσιν μεταξὺ ἑνὸς προβλήματος μεγιστοποιήσεως (ἢ ἐλαχιστοποιήσεως) καὶ τοῦ διδύμου αὐτοῦ προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως (ἢ μεγιστοποιήσεως). Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς: α) τὸ σύνολον $\widehat{X} = [\,\widehat{x} \,/\, \widehat{x}\ \varepsilon\ C \sqsubset \underline{X}_n$ καὶ $f(\widehat{x})$ = μέγιστον (ἐλάχιστον τῆς $f(x)$] δὲν εἶναι κενὸν (δηλαδὴ τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα ἔχει λύσιν) ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν τὸ σύνολον $\widehat{Z} = [\,\widehat{z} \,/\, \widehat{z}\ \varepsilon\ C' \sqsubset \underline{Z}_m$ καὶ $h(\widehat{z})$ = ἐλάχιστον (μέγιστον) τῆς $h(z)$] δὲν εἶναι κενὸν (δηλαδὴ ἐὰν τὸ δίδυμον πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν). β) $\widehat{x}$ καὶ $\widehat{z}$ εἶναι λύσις (ἀμφοτέρων τῶν προβλημάτων) ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $c\widehat{x} = w'\widehat{z}$.

Τέλος, δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν C ἢ C' εἶναι μὴ κενὰ καὶ περατωμένα σύνολα τότε $\widehat{X}$ καὶ $\widehat{Z}$ εἶναι μὴ κενὰ σύνολα (δηλαδὴ ἀμφότερα τὰ προβλήματα ἔχουν λύσεις). Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀπορρέει ἀμέσως ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ ἀπὸ τὸ θεώρημα συμφώνως πρὸς τὸ ὁποῖον ἓν συναρτησιακὸν ὁριζόμενον εἰς ἓν περατωμένον κυρτὸν πολυεδρικὸν σύνολον λαμβάνει τὴν μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν αὐτοῦ εἰς ἓν ἢ περισσότερα ἀκραῖα σημεῖα τοῦ συνόλου.

IV. *Ἡ ἔννοια τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ*

Ἡ ἔννοια τῶν πράξεων τὰς ὁποίας περιγράψαμε εἰς τὸ προηγούμενον τμῆμα ἐξαρτᾶται κατ' ἀνάγκην ἀπὸ τὰ συγκεκριμένα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται ἡ τεχνική. Κατὰ κανόνα τὰ προβλήματα ταῦτα εἶναι προβλήματα ἀριστοποιήσεως. Μία σπουδαιοτάτη κατηγορία προβλημάτων ἀριστοποιήσεως εἶναι τὰ ἀφορῶντα εἰς τὴν λῆψιν ἀποφάσεων σχετικῶς μὲ τὴν λειτουργίαν καὶ διοίκησιν τῶν ἐπιχειρήσεων. Πρὸς πληρεστέραν ἐξέτασιν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ὡς ἄνω τεχνικῆς εἰς ἓν τυπικὸν ἐπιχειρηματικὸν πρόβλημα πρέπει νὰ περιγράψωμεν τὴν τεχνολογίαν τῆς ἐπιχειρήσεως κατὰ τρόπον σύμφωνον πρὸς τὸ ἐννοιολογικὸν πλαίσιον τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἀποτελεσματικὴ μέθοδος διὰ τὴν περιγραφὴν ταύτην εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τῆς λεγομένης τεχνολογικῆς μήτρας:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ἑκάστη στήλη ἐκφράζει μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα (activity) καὶ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς σημεῖον εἰς τὸν διανυσματικὸν χῶρον $\underline{X}_m$ τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας m ποσότητας ἀγαθῶν, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται εἰσροαὶ (inputs) ἐὰν προσημαίνωνται μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον ἢ ἐκροαὶ (outputs) ἐὰν λαμβάνουν θετικὸν σημεῖον. Ἑκάστη σειρὰ τῆς A περιλαμβάνει n ποσότητας ἐκ δοθέντος ἀγαθοῦ, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται ὡς ἐκροαὶ ἢ εἰσροαὶ εἰς μίαν ἢ περισσοτέρας παραγωγικὰς δραστηριότητας. Ἑκάστη στήλη (παραγωγικὴ δραστηριότης) παριστᾷ μίαν συγκεκριμένην μέθοδον παραγωγῆς ἑνὸς προϊόντος. Ὁ ἀριθμὸς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἶναι περιωρισμένος (finite). Ἐπὶ πλέον αἱ n παραγωγικαὶ δραστηριότητες τῆς μήτρας A εἶναι βασικαὶ (basic), δηλαδὴ δὲν δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ θετικοὶ συνδυασμοὶ ἄλλων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῆς ἐν λόγῳ μήτρας. Εἰς ἑκάστην παραγωγικὴν δραστηριότητα ἀντιστοιχεῖ μία διαδικασία (process), ἡ ὁποία περιλαμβάνει ταύτην. Οὕτω π.χ. δοθείσης τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος α τὸ σύνολον ὅλων τῶν γινομένων λα, ὅπου $\lambda \geqslant 0$ ἀποτελεῖ μίαν διαδικασίαν. Τὸ λ εἶναι βαθμωτὸν (scalar) καὶ παριστᾷ τὸ ἐπίπεδον χρησιμοποιήσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος α, ἡ ὁποία θεωρεῖται ἐπίσης ὅτι ἀποτελεῖ τὴν μονάδα μετρήσεως τῆς ἐν λόγῳ παραγωγικῆς διαδικασίας.

Ὁ τρόπος οὗτος ἐκφράσεως τῆς τεχνολογίας μίας ἐπιχειρήσεως βασίζεται ἐπὶ ὑποθέσεων, αἱ ὁποῖαι γενικῶς ἀποτελοῦν ἀπόκλισιν ἀπὸ τὴν κατὰ παράδοσιν διατύπωσιν τῆς παραγωγικῆς συναρτήσεως εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν. Ἡ διατύπωσις μιᾶς παραγωγικῆς συναρτήσεως ἀπαιτεῖ πράγματι νὰ λυθῇ προηγουμένως τὸ πρόβλημα τῆς τεχνολογικῆς ἀποδοτικότητος (technological efficiency). Ἂς λάβωμεν π.χ. ἓν σημεῖον $(x_1, x_2, \ldots, x_n : y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ἢ συνοπτικῶς $(\mathbf{x}, y)$ τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς μίαν παραγωγικὴν συνάρτησιν χαρακτηριζομένην ἀπὸ τὴν ἀνοικτὴν πρότασιν $g(\mathbf{x}, y) = 0$, καὶ ὅπου x_i εἶναι ἡ i—στὴ εἰσροὴ καὶ y_j εἶναι ἡ j—στὴ ἐκροή. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο ἀνήκει εἰς τὴν παραγωγικὴν συνάρτησιν ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἕκαστον y_j εἶναι τὸ μέγιστον τεχνολογικῶς δυνατὸν (ἢ ἕκαστον x_i εἶναι τὸ ἐλάχιστον τεχνολογικῶς δυνατόν), δοθέντων τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ ὡς ἄνω σημείου. Ἡ ἐξουδετέρωσις τῶν μὴ ἀποδοτικῶν σημείων εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων παραγωγικῶν συνδυασμῶν ἀποτελεῖ μέρος τῆς διαδικασίας προσδιορισμοῦ τῆς παραγωγικῆς συναρτήσεως. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὴν συνήθη ἀνάλυσιν ἡ παραγωγικὴ συνάρτησις λαμβάνεται γενικῶς ὡς δεδομένη, δὲν διατυποῦται ἀποτελεσματικὴ διαδικασία ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου ἀποδοτικότητος διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ὡς ἄνω συναρτήσεως. Ἀντιθέτως, εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν ὁρίζεται σαφῶς ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ τοῦ ὑποσυνόλου τῶν ἀποδοτικῶν συνδυασμῶν δοθέντος ἑνὸς συνόλου πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν. Ἡ δυνατότης ὑπολογισμοῦ τῆς τεχνικῆς ἀποδοτικότητος καθιστᾷ ἰδιαιτέρως ἑλκυστικὴν τὴν τεχνικὴν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τοὺς μηχανικούς, λογιστὰς καὶ ἐπιχειρηματίας. Πράγματι, ἡ τεχνικὴ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ φαίνεται νὰ προσαρμόζεται καλύτερον ἢ ἄλλαι τεχνικαὶ ἀναλύσεως εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν πρακτικῶν προβλημάτων. Τὰ πλεονεκτήματα ταῦτα ἐπιτυγχάνονται ἐν τούτοις μὲ μίαν θυσίαν. Ἐν πρώτοις εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν χρησιμοποιοῦμεν περιωρισμένον ἀριθμὸν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ οὐχὶ ἀπεριόριστον ὡς εἰς τὴν συνήθη ἀνάλυσιν. Ἐπὶ πλέον, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῆς γραμμικότητος, ἀποδεχόμεθα σταθερότητα τῶν τεχνολογικῶν συντελεστῶν ἥτις δυνατὸν νὰ μὴ καλύπτῃ ὡρισμένην τάξιν προβλημάτων.

Κατὰ κανόνα εἰς τὰ προβλήματα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τὰ ἀφορῶντα εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις ὑποτίθεται ὅτι εἶναι δεδομέναι αἱ ποσότητες ὡρισμένων συντελεστῶν παραγωγῆς—καὶ οἱ περιορισμοὶ οὗτοι ἐκφράζονται διὰ τοῦ σχετικοῦ κυρτοῦ πολυεδρικοῦ συνόλου—οἱ δὲ λοιποὶ συντελεσταὶ δύνανται νὰ ἀγορασθοῦν εἰς σταθερὰς τιμάς. Ὑποτίθεται ἐξ ἄλλου ὅτι τὰ παραγόμενα προϊόντα δύνανται νὰ πωληθοῦν ἐπίσης εἰς σταθερὰς τιμάς. Ἡ τεχνολογία τῆς ἐπιχειρήσεως λαμβάνει συνήθως τὴν μορφὴν μιᾶς μήτρας, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν σταθερῶν ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Εἰς τὴν διατύπωσιν ταύτην δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ διάκρισις μεταξὺ ἀρνητικῶν καὶ θετικῶν στοιχείων τῆς μήτρας, ὡς ἐγένετο προηγουμένως, καθ' ὅσον ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας ταύτης ἀναφέρονται εἰς εἰσροὰς αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν θετικὰς τιμὰς ἢ μηδέν. Διὰ τὸ προϊὸν ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος χρησιμοποιουμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος ὑπολογίζεται ἓν καθαρὸν κέρδος c_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) εἰς τρόπον ὥστε διὰ τὰς n παραγωγικὰς δραστηριότητας λαμβάνομεν τὸ διάνυσμα σειρὰ $c = (c_1, c_2, \ldots c_n)$. Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως δύναται τώρα νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως:

Νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ συνάρτησις cx ὑπὸ τὸν περιορισμὸν $Ax \leqslant w$ καὶ $x \geqslant o$, ὅπου $\mathbf{x}$ εἶναι τὸ διάνυσμα - στήλη, τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα τὰ ἐπίπεδα τῶν n παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, A ἡ τεχνολογικὴ μήτρα τῆς ἐπιχειρήσεως ὡς ὡρίσθη ἀνωτέρω καὶ w τὸ διάνυσμα στήλη τὸ ὁποῖον ἔχει στοιχεῖα τὰς διαθεσίμους ποσότητας τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Ἐὰν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει λύσιν, δηλαδὴ ἐὰν τὸ σύνολον τῶν λύσεων X δὲν εἶναι κενόν, τότε δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ὑφίσταται ἓν ἄ ρ ι σ τ ο ν π ρ ό γ ρ α μ μ α $\widehat{x} \varepsilon \widehat{X}$ τὸ ὁποῖον δὲν περιλαμβάνει περισσοτέρας ἀπὸ m δραστηριότητας ὅπου m εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνισοτήτων, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν τὰς ἐκ τῶν διαθεσίμων συντελεστῶν δυνατότητας τῆς ἐπιχειρήσεως.

Λύσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος σημαίνει καὶ λύσιν τοῦ διδύμου αὐτοῦ. Ἀλλὰ ποία εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ διδύμου προβλήματος; Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ζητεῖται ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς συναρτήσεως $w'z$ ὑπὸ τὸν περιορισμὸν $z \geqslant o$ καὶ $A'z \geqslant c'$. Ἡ ἔννοια τοῦ z εἶναι θεμελιώδους σημασίας διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν. Τὸ z εἶναι τὸ διάνυσμα τῶν λ ο γ ι σ τ ι κ ῶ ν τιμῶν τῶν διαθεσίμων παραγωγικῶν συντελεστῶν. Διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν καθίσταται δυνατὸς ὁ πλήρης ἐπιμερισμὸς (imputation) τοῦ συνολικοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τοὺς ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστὰς παραγωγῆς, κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ συνολικῶς καταλογιζομένη ἀξία εἰς τοὺς συντελεστὰς παραγωγῆς οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται εἰς μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα εἶναι ἴση πρὸς τὸ δημιουργούμενον ἐκ τῆς δραστηριότητος ταύτης καθαρὸν κέρδος. Εἶναι ἄξιον ἰδιαιτέρας σημειώσεως ὅτι ἐὰν ὡρισμένοι συντελεσταὶ παραγωγῆς δὲν χρησιμοποιοῦνται πλήρως αἱ λογιστικαὶ τιμαὶ αὐτῶν κατὰ τὴν λύσιν τοῦ διδύμου προβλήματος εἶναι μηδέν.

Καθίσταται ἤδη προφανὲς ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν διαθεσίμων πόρων καὶ ἡ ἀξιολόγησις αὐτῶν ἀποτελοῦν εἰς τὴν πραγματικότητα δύο ὄψεις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος. Οὕτω τὸ θεώρημα τῆς διαδικότητος (dualily) τὸ ὁποῖον εἰσάγει τὴν ἔννοιαν τοῦ διδύμου προβλήματος, καθιστᾷ δυνατὴν τὴν σαφῆ διατύπωσιν τοῦ προβλήματος τῆς κατανομῆς καὶ ἀξιολογήσεως καὶ κατὰ συνέπειαν ἐπιτρέπει νὰ κατανοήσωμεν καλύτερον βασικὰ προβλήματα τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης. Ἐπὶ πλέον ἡ δυνατότης καθορισμοῦ «ὀρθῶν» λογιστικῶν τιμῶν διὰ τοὺς ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστὰς μιᾶς παραγωγικῆς μονάδος καθιστᾷ δυνατὴν τὴν εἰσαγωγὴν ἑνὸς ἀποτελεσματικοῦ συστήματος ἀποκεντρωτικῆς διοικήσεως εἰς τὴν ἐν λόγῳ παραγωγικὴν μονάδα. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν λογιστικῶν τιμῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ληφθοῦν ἀνεξάρτητοι ἀποφάσεις εἰς τὰ κατώτερα κλιμάκια τῆς διοικήσεως ὅσον ἀφορᾷ τὴν κατανομὴν τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων χρήσεων.

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐξητάσαμεν τὴν σημασίαν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ὅσον ἀφορᾷ μίαν περιωρισμένην τάξιν προβλημάτων. Ἡ τεχνικὴ ὅμως αὔτη δύναται πράγματι νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς μίαν εὐρυτάτην κατηγορίαν προβλημάτων. Δύναται π.χ. νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ἓν ἀναλυτικὸν ἐργαλεῖον προγραμματισμοῦ τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως διὰ τοῦ καθορισμοῦ λογιστικῶν τιμῶν εἰς τοὺς ἐν ἀνεπαρκείᾳ πόρους. Εἶναι προφανὴς ἐκ τῆς ἀπόψεως ταύτης ἡ χρησιμότης τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

Ὡς ἀναλυτικὴ τεχνικὴ ὁ γραμμικὸς προγραμματισμὸς εἶναι τμῆμα τοῦ καλουμένου Μαθηματικοῦ Προγραμματισμοῦ (ὁ ὁποῖος περιλαμβάνει ἐπίσης καὶ τὸν μὴ γραμμικὸν προγραμματισμόν). Εἶναι ἐπίσης μέρος τῆς λεγομένης Ἀναλύσεως Οἰκονομικῆς Δραστηριότητος, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἤδη νέον κλάδον τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης. Ἀλλ' ἡ ἐξέτασις τῶν θεμάτων αὐτῶν δὲν ἐμπίπτει εἰς τὰ ὅρια τῆς παρούσης μελέτης.