ΚΡΙΤΗΡΙΟΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΘΕΣΙΜΩΝ ΠΟΡΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΕΩΣ

Ὑπὸ τοῦ κ. Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

1. Δοθέντων τῶν σκοπῶν τοῦ προγράμματος, τὸ πρὸς λύσιν πρόβλημα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως εἶναι νὰ χρησιμοποιηθοῦν οἱ διαθέσιμοι οἰκονομικοὶ πόροι κατὰ τρόπον ἐξασφαλίζοντα τὴν πραγματοποίησιν τῶν σκοπῶν αὐτῶν, ὑπὸ τοὺς καλλιτέρους δυνατοὺς ὅρους. Τοῦτο σημαίνει ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης λύσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος, δηλαδὴ μεταξὺ τῶν διαφόρων μορφῶν κατανομῆς τῶν οἰκονομικῶν πόρων. Ἐπιβάλλεται ὅθεν ὁ προσδιορισμὸς κριτηρίου τινος, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἐπιλογὴ αὕτη.

Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κριτηρίου τῆς ἀρίστης λύσεως, ὡς καὶ τοῦ τρόπου χρησιμοποιήσεως αὐτοῦ, ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ τὴν συνεπείᾳ ταύτης διδομένην ἑκάστοτε ἔννοιαν εἰς τὸν ὅρον «ἀρίστη λύσις». Ἂν π.χ. μία οἰκονομία χαρακτηρίζεται ἀπὸ στενότητα ἐργατικῶν δυνάμεων καὶ ἐπιδιώκεται διὰ τῆς κινητοποιήσεως αὐτῶν ἡ πραγματοποίησις ὡρισμένων σκοπῶν, ὡς οἰκονομικῶς ἀρίστη λύσις δύναται νὰ χαρακτηρισθῆ ἡ λύσις ἡ ὁποία ἐξασφαλίζει τὴν μεγίστην δυνατὴν ἐξοικονόμησιν τῶν ἐργατικῶν δυνάμεων ἢ ἄλλως, τὴν καλλιτέραν ἀξιοποίησιν τῶν δυνάμεων αὐτῶν. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν «ἀρίστη λύσις» εἶναι συνεπῶς ἡ ἱκανοποιοῦσα τὸ οἰκονομικὸν ἀξίωμα, ὅσον ἀφορᾶ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ οἰκονομικῶν πόρων.

Πρέπει νὰ σημειωθῆ ὅτι ἡ χρησιμοποίησις διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης λύσεως κριτηρίου ἀναφερομένου εἰς τὸν μέγιστον βαθμὸν οἰκονομικότητος ὅσον ἀφορᾶ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ πόρων, δὲν σημαίνει ἔλλειψιν ἐνδιαφέροντος διὰ τὴν ὀργάνωσιν καὶ ἀξιοποίησιν τῶν ἐν σχετικῇ ἐπαρκείᾳ εὑρισκομένων οἰκονομικῶν πόρων. Σημαίνει ἁπλῶς ὅτι οἱ πόροι οὗτοι δὲν ἐμποδίζουν τὴν ἀνάπτυξιν τῆς οἰκονομίας καὶ συνεπῶς δὲν δημιουργοῦν οἰκονομικὰ προβλήματα, ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐξεταζομένην περίοδον οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

2. Ἐνταῦθα ἐνδιαφερόμεθα εἰδικώτερον δι' ἕνα συγκεκριμένον τύπον οἰκονομίας, εἰς τὸν ὁποῖον δύναται νὰ ὑπαχθῇ καὶ ἡ ἑλληνικὴ οἰκονομία. Ὁ τύπος οὗτος τῆς οἰκονομίας χαρακτηρίζεται κυρίως ἀπὸ ἔντονον ἀνεπάρκειαν κεφαλαίου καὶ ἀφθονίαν ἐργατικῶν δυνάμεων. Κατὰ συνέπειαν, τὸ κριτήριον τῆς ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως πρέπει νὰ εἶναι, βάσει τῶν λεχθέντων, ἡ ἀρίστη δυνατὴ ἀξιοποίησις τοῦ κεφαλαίου.

Τὸ κριτήριον τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ κατὰ δύο τρόπους, ἀναλόγως τῆς διατυπώσεως τῶν σκοπῶν τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἂν π.χ. οἱ σκοποὶ οὗτοι συνίστανται εἰς τὴν ἐπίτευξιν ὡρισμένου ἐπιπέδου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, ἀρίστη δυνατὴ ἀξιοποίησις τοῦ κεφαλαίου σημαίνει χρησιμοποίησιν τῆς ἐλαχίστης δυνατῆς ποσότητος αὐτοῦ διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ὡς ἄνω σκοποῦ. Ἐπειδή, ὡς συμβαίνει συνήθως εἰς τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, τὸ ἐπιδιωκόμενον ἐπίπεδον ἐθνικοῦ εἰσοδήματος εἶναι ἀνώτερον ἀπὸ τὸ δυνάμενον νὰ πραγματοποιηθῇ βάσει τῆς ὑπαρχούσης ποσότητος κεφαλαίου τῆς οἰκονομίας, τὸ κριτήριον τῆς ἀρίστης λύσεως σημαίνει κυρίως ἐλαχιστοποίησιν τῶν ἐπενδύσεων (δηλαδὴ τῆς ποσότητος τοῦ νέου κεφαλαίου), αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς ὑπερβαλούσης τὰς ἀρχικὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομίας αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος.

Ἄν, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἡ εἰς τὴν διάθεσιν τῆς οἰκονομίας ποσότης κεφαλαίου εἶναι ὡρισμένη, ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προβλήματος τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ὑποδηλοῖ μεγιστοποίησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, τὸ δὲ κριτήριον τῆς λύσεως ταύτης θὰ εἶναι τότε ἡ μεγιστοποίησις τῆς εἰσοδηματικῆς ἀποδόσεως τοῦ κεφαλαίου.

Μεθοδολογικῶς ἡ πρώτη διατύπωσις εἶναι προτιμοτέρα, καθ' ὅσον εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως διατυποῦνται ὡς προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως. Ὁρίζεται δηλαδὴ ἐκ τῶν προτέρων ἡ ἐπιθυμητὴ αὔξησις τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ ἐπιδιώκεται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐλαχίστη δυνατὴ δαπάνη κεφαλαίου ἢ τῶν λοιπῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς ὡς ἄνω αὐξήσεως.

3. Εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους οἰκονομίας, πλὴν τοῦ κεφαλαίου, εὑρίσκεται συνήθως ἐν στενότητι καὶ ἡ εἰδικευμένη ἐργασία, ἐνίοτε δὲ (ὡς εἰς τὴν ἑλληνικὴν περίπτωσιν) καὶ ὁ συντελεστὴς ἔδαφος. Ἀλλ' ἡ αὔξησις τῆς ποσότητος τῆς εἰδικευμένης ἐργασίας, ὡς ἐπίσης καὶ ἡ αὔξησις τῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας ἀπὸ ἀπόψεως ἐδάφους εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως κεφαλαίου, πρὸς ἵδρυσιν ἐκπαιδευτηρίων, τεχνικῶν σχολῶν κλπ. ἢ πρὸς ἐκτέλεσιν ἐγγείων βελτιώσεων καὶ γενικῶς πρὸς δημιουργίαν νέων ἐδαφῶν. Οὕτω ἡ στενότης τῶν συντελεστῶν αὐτῶν ἀνάγεται τελικῶς εἰς τὴν στενότητα κεφα-

λαίου καὶ κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα βασίμως νὰ χρησιμοποιήσωμεν, πρὸς ἔλεγχον τῆς οἰκονομικότητος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, κριτήριον βασιζόμενον ἐπὶ τῆς στενότητος τοῦ κεφαλαίου.

4. Τὸ κριτήριον τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἐπενδύσεων (ἢ τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς εἰσοδηματικῆς ἀποδόσεως τῶν ἐπενδύσεων) χρησιμοποιεῖται κατὰ κανόνα εἰς θεωρητικὰς ἢ πρακτικὰς ἀναλύσεις ἀναφερομένας εἰς τὸν προγραμματισμὸν τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τῶν καθυστερημένων περιοχῶν. Ἡ χρησιμοποίησις ὅμως τοῦ κριτηρίου αὐτοῦ βασίζεται συνήθως ἐπὶ τῆς καλουμένης «μερικῆς μεθόδου ἀναλύσεως» (Partial Analysis), ἥτις δὲν λαμβάνει ὑπ᾿ ὄψιν τὴν ἀλληλεξάρτησιν μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν κλάδων. Οὕτω, ἐὰν π.χ. ἐκ δύο μεθόδων παραγωγῆς τοῦ αὐτοῦ προϊόντος, ἡ πρώτη μέθοδος ἀπαιτῇ ἄμεσον δαπάνην κεφαλαίου, ὑπὸ μορφὴν παγίων ἐγκαταστάσεων κλπ., μεγαλυτέρων τῆς δευτέρας, προκρίνεται, βάσει τοῦ κριτηρίου ἐλαχιστοποιήσεως κεφαλαίου, ἡ δευτέρα μέθοδος ὡς οἰκονομικωτέρα πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος. Ὁ τρόπος οὗτος ἐπιλογῆς παρέχει μὲν τὸ πλεονέκτημα τοῦ αὐτομάτου καθορισμοῦ τῆς «οἰκονομικωτέρας» μεθόδου εἶναι ὅμως ἐσφαλμένος, διότι ἀγνοεῖ τὰς διακλαδικὰς σχέσεις ἐντὸς τῆς οἰκονομίας καὶ τὰς συνεπείᾳ τῶν σχέσεων αὐτῶν ἐμμέσους ἐπιδράσεις ἐπὶ τοῦ κόστους κεφαλαίου ἑκάστου κλάδου. Πρὸς κατανόσιν τοῦ σφάλματος τοῦ ὡς ἄνω τρόπου χρησιμοποιήσεως τοῦ κριτηρίου οἰκονομικότητος τῶν ἐπενδύσεων δέον νὰ διακρίνωμεν τὰς ἐννοίας τοῦ ἀμέσου, ἐμμέσου καὶ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου.

5. Ἄμεσον κόστος κεφαλαίου εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἀπαιτουμένου παγίου κεφαλαίου ἀπὸ ἕνα κλάδον πρὸς πραγματοποίησιν δεδομένου ἐπιπέδου παραγωγῆς. Τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸ κόστος τῆς τρεχούσης παραγωγῆς τοῦ κλάδου τούτου. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τοῦ κλάδου εἶναι ἡ μονὰς τοῦ προϊόντος τότε τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου εἶναι ἁπλῶς ὁ συντελεστὴς κεφαλαιουχικότητος (Capital Output coefficient) τοῦ κλάδου τούτου.

Ἡ ἔννοια τοῦ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου ἀπορρέει ἐκ τῆς βασικῆς ἐννοίας τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν διαφόρων κλάδων. Ἐφ᾿ ὅσον ἕκαστος κλάδος χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του προϊόντα ἄλλων κλάδων (ὡς πρώτας ὕλας κλπ.) τὰ ὁποῖα διὰ νὰ παραχθοῦν προϋποθέτουν κόστος κεφαλαίου, ὁ δοθεὶς κλάδος εἶναι ἐμμέσως (λειτουργικῶς) ὑπεύθυνος διὰ τὸ κόστος τοῦτο. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ὁ δοθεὶς κλάδος δημιουργεῖ, διὰ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας του, κόστος κεφαλαίου εἰς τὴν οἰκονομίαν, ἄνευ τοῦ ὁποίου δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ οὗτος παραγωγικῶς. Τὸ κόστος τοῦτο εἶναι τὸ ἔμμεσον κόστος κεφαλαίου διὰ τὸν δοθέντα κλάδον. Ἂν ἀθροίσωμεν τὸ ἄμεσον κόστος καὶ τὸ ἔμμεσον κόστος κεφαλαίου, ἐφ᾿ ὅσον βεβαίως ἀναφέρονται ἀμφότερα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς, λαμβάνομεν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τοῦ κλάδου διὰ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον παραγωγῆς.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω διακρίσεων μεταξὺ ἀμέσου, ἐμμέσου καὶ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου, καθίσταται σαφὲς ὅτι ἡ σύγκρισις δύο μεθόδων παραγωγῆς τοῦ αὐτοῦ προϊόντος βάσει τῶν συντελεστῶν κεφαλαιουχικότητος αὐτῶν (δηλαδὴ βάσει τοῦ ἀμέσου κόστους κεφαλαίου ἑκάστης μεθόδου), πρὸς προσδιορισμὸν τῆς συμφερωτέρας ἐξ αὐτῶν διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν, δὲν εἶναι ὀρθή. Εἶναι δυνατὸν μία μέθοδος παραγωγῆς ἀπαιτοῦσα μικρότερον ἄμεσον κόστος κεφαλαίου ἀπὸ μίαν ἄλλην, νὰ καταναλίσκη συγκριτικῶς πρὸς τὴν δευτέραν σημαντικῶς μεγαλυτέρας ποσότητας πρώτων ὑλῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, μὲ ἀποτέλεσμα τὸ συνολικὸν κόστος τῆς πρώτης νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ συνολικὸν κόστος τῆς δευτέρας.

Ἡ μόνη δυνατὴ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῆς συνολικῆς (ἀμέσου καὶ ἐμμέσου) ἀναλώσεως κεφαλαίου εἰς ἑκάστην περίπτωσιν παραγωγῆς, εἶναι ἡ μέθοδος τῆς γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας (General Equilibrium Method) Ἡ μέθοδος αὕτη ὑπὸ τὴν ἀρχικήν της μορφὴν ἐβασίσθη, ὡς γνωστόν, εἰς τὰς ἐργασίας τῶν οἰκονομολόγων τῆς σχολῆς τῆς Λωζάννης Walras καὶ Pareto, ἀνεπτύχθη δὲ περαιτέρω ὑπὸ τοῦ Cassel. Ἡ χρησιμοποιουμένη σήμερον μέθοδος γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας ἀποτελεῖ μίαν ἐξειλιγμένην μορφὴν τοῦ ἀρχικοῦ ἀναλυτικοῦ σχήματος πρὸς τὴν κατεύθυνσιν κυρίως τῆς οἰκονομετρικῆς αὐτοῦ ἐφαρμογῆς καὶ εἶναι γνωστὴ ὡς «Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις» (Linear Economics) ἢ ὡς «Ἀνάλυσις Οἰκονομικῆς Δραστηριότητος» (Activity Analysis).

Ἡ βασικὴ ἔννοια τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως εἶναι ἡ ἔννοια τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. «Παραγωγικὴ Δραστηριότης» (Productive Activity) καλεῖται εἰς τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς μονάδος τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου ἢ ἄλλως ἡ συγκεκριμένη μέθοδος παραγωγῆς ἑνὸς προϊόντος.

6. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν τὸν τρόπον ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων ἐπὶ τῇ βάσει ἑνὸς ἀριθμητικοῦ παραδείγματος. Ἔστω π.χ. ὅτι μία ὑποθετικὴ οἰκονομία ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας I, II, III καὶ IV αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους 1, 2, 3 καὶ 4. Αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες σχηματίζουν «τεχνολογικὴν μήτραν τύπου Leontief» [1] ὡς δείκνυται εἰς τὸν Πίν. 1.

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I δεικνύει ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 νομισματικῆς μονάδος [2] τοῦ κλάδου 1, ἀπαιτεῖται ὡς πρώτη ὕλη κλπ., προϊὸν ἀξίας 0,2 ν.μ. τοῦ κλάδου 2, προϊὸν ἀξίας 0,2 ν.μ. τοῦ κλάδου 3 καὶ προϊὸν ἀξίας 0,1 ν.μ. τοῦ κλάδου 4. Αἱ ἀνωτέρω ποσότητες ἀποτελοῦν συνεπῶς «συντελεστὰς εἰσροῆς (Input Coefficients) τοῦ κλάδου 1 ἐν σχέσει πρὸς τοὺς ἄλλους κλάδους [3].

---

1) Τεχνολογικαὶ μῆτραι τύπου Leontief καλοῦνται εἰς τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν οἱ πίνακες εἰσροῶν—ἐκροῶν εἰς τοὺς ὁποίους καταγράφονται συστηματικῶς αἱ τεχνολογικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας.

2) Αἱ νομισματικαὶ μονάδες εἶναι ἐνταῦθα συμβατικὰ μεγέθη σταθερᾶς ἀξίας.

3) Πρὸς ἁπλούστευσιν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα τὸ ὑφ' ἑκάστου κλάδου

Πίναξ 1
Τεχνολογία ἐγχωρίων κλάδων

Παραγωγικαὶ δραστηριότητες	I	II	III	IV
Κλάδοι	1	2	3	4
1	1	0	–0,5	–0,1
2	–0,2	1	–0,2	–0,2
3	–0,2	–0,2	1	–0,6
4	–0,1	–0,4	0	1
Κεφάλαιον	–1,2	–1,5	–1,9	–2,1

Πλὴν τῶν ἀνωτέρω «εἰσροῶν» ἐκ τῶν κλάδων 2, 3 καὶ 4, ὁ κλάδος 1 χρησιμοποιεῖ ἐπίσης—πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. – κεφάλαιον ὑπο μορφὴν μηχανημάτων καὶ γενικῶς παγίων ἐγκαταστάσεων ἀξίας 1, 2 ν.μ. Τὸ στοιχεῖον 1,2 τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸν «συντελεστὴν κεφαλαιουχικότητος» τοῦ κλάδου 1, παριστᾷ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ἀξίας τοῦ χρησιμοποιουμένου ὑπὸ τοῦ κλάδου κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ καὶ τῆς ἀξίας τοῦ ὑπ' αὐτοῦ παραγομένου προϊόντος.

Ὁ συντελεστὴς κεφαλαιουχικότητος δὲν ἀποτελεῖ κόστος τῆς τρεχούσης παραγωγῆς, ὡς οἱ ἀναφερθέντες ἀνωτέρω συντελεσταὶ εἰσροῆς (1). Σημαίνει ἁπλῶς ὅτι πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. ἐκ τοῦ κλάδου 1 ἀπαιτοῦνται μηχανήματα καὶ λοιπαὶ πάγιαι ἐγκαταστάσεις ἀξίας 1,2 ν.μ. Τὰ μηχαματα καὶ αἱ ἐγκαταστάσεις αὗται δημιουργοῦν κόστος τρεχούσης παραγωγῆς μόνον κατὰ τὸ ποσοστὸν τῶν ἀποσβέσεών των. Ἀλλ' ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἀποσβέσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς εἰσροὰς τοῦ κλάδου 1 ἐκ τῶν λοιπῶν κλάδων, ὅτι δηλαδὴ λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν εἰς ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I. Πρὸς διάκρισιν τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιουχικότητος ἀπὸ τοὺς λοιποὺς συντελεστὰς ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος, θὰ ὀνομάζωμεν ἐνίοτε τὸν πρῶτον «ἀκραῖον στοιχεῖον», τοὺς δὲ δευτέρους «διακλαδικὰ στοιχεῖα» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος.

Τὸ ἀκραῖον καὶ τὰ διακλαδικὰ στοιχεῖα προσημαίνονται ἀρνητικῶς πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὸ παραγόμενον προϊὸν (ἀξίας 1 ν.μ.), τὸ ὁποῖον λαμβάνει θετικὸν σημεῖον.

Βάσει τῶν λεχθέντων περὶ τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I, δυνάμεθα τώρα νὰ ἑρμηνεύσωμεν ἀναλόγως καὶ τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς δραστη-

ἀπορροφώμενον ἴδιον προϊόν, δηλαδὴ ἀποκλείονται ἐκ τῆς ἀνωτέρω τεχνολογικῆς μήτρας αἱ «ἐνδοκλαδικαὶ» σχέσεις καὶ ἐμφανίζονται μόνον αἱ «διακλαδικαὶ» τοιαῦται.

1) Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι οἱ συντελεσταὶ εἰσροῆς τοῦ κλάδου 1 δὲν ἀποτελοῦν τὰ μοναδικὰ στοιχεῖα κόστους παραγωγῆς τοῦ κλάδου τούτου, καθ' ὅσον εἰς τὴν ἀνωτέρω τεχνολογικὴν μήτραν δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ εἰσροαὶ ἐργασίας καὶ ἄλλα στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἐπίσης κόστος παραγωγῆς.

ριότητας II, III καὶ IV. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης II δεικνύει ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. τοῦ κλάδου 2, ὁ κλάδος οὗτος πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ προϊόντα ἀξίας 0,2 ν.μ. καὶ 0,4 ν.μ. τῶν κλάδων 3 καὶ 4 ἀντιστοίχως καὶ κεφάλαιον, ὑπὸ μορφὴν μηχανημάτων καὶ λοιπῶν παγίων ἐγκαταστάσεων, ἀξίας 1,5 ν.μ. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης III δεικνύει ὅτι ὁ κλάδος 3 λαμβάνει προϊόντα ἀξίας 0,5 καὶ 0,2 ν.μ. ἐκ τῶν κλάδων 1 καὶ 2 ἀντιστοίχως καὶ χρησιμοποιεῖ κεφάλαιον ἀξίας 1,9 ν.μ. πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. Τέλος, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης IV ὑποδηλοῖ ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. τοῦ κλάδου 4 ἀπαιτοῦνται προϊόντα ἀξίας 0,1, 0,2 καὶ 0,6 ν.μ. τῶν κλάδων 1, 2 καὶ 3 ἀντιστοίχως καὶ κεφάλαιον ἀξίας 2,1 ν.μ.

Ἡ περιγραφεῖσα τεχνολογία παριστᾷ, ἐν ὀλίγοις, τὰς διακλαδικὰς ροὰς τῶν προϊόντων μεταξὺ τῶν κλάδων 1, 2, 3 καὶ 4 ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ποσὸν κεφαλαίου τὸ ὁποῖον ἕκαστος τῶν κλάδων τούτων χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ.

7. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς τὴν ἐν λόγῳ οἰκονομίαν ἐπιδιώκεται ἡ πραγματοποίησις ὡρισμένων σκοπῶν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ τίθεται τὸ ζήτημα τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων.

Ἀρίστη κατανομὴ τῶν ἐπενδύσεων σημαίνει κυρίως δύο τινά: α) Καθορισμὸν τῆς οἰκονομικωτέρας ἀπὸ ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου, παραγωγικῆς δραστηριότητος (ἢ μεθόδου παραγωγῆς) δι' ἕκαστον κλάδον (1), β) ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους τῶν ἀπαιτουμένων—κατὰ κλάδον καὶ ἐν τῷ συνόλῳ—ἐπενδύσεων. Εἰς τὸ παρὸν τμῆμα θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸν προσδιορισμὸν τῆς οἰκονομικωτέρας παραγωγικῆς δραστηριότητος μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἀνηκουσῶν εἰς τὸν αὐτὸν κλάδον καὶ δυναμένων νὰ χρησιμοποιηθοῦν (διαζευκτικῶς) εἰς τὴν παραγωγὴν ἑνὸς συγκεκριμένου προϊόντος. Τὰς παραγωγικὰς ταύτας δραστηριότητας θὰ ὀνομάσωμεν ὁμοκλαδικάς, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ παραγωγικὰς δραστηριότητας ἀνηκούσας εἰς διαφόρους κλάδους, τὰς ὁποίας χαρακτηρίζομεν ὡς συνεργαζομένας παραγωγικὰς δραστηριότητας, πρὸς ὑποδήλωσιν τῆς ἀμέσου ἢ ἐμμέσου ἀλληλεξαρτήσεώς των πρὸς παραγωγὴν τῶν διαφόρων προϊόντων. Πρὸς ἁπλούστευσιν, θὰ θεωρήσωμεν ὅτι ὑφίσταται πρόβλημα ἐπιλογῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος μόνον διὰ τὸν κλάδον 1 τῆς οἰκονομίας.

Κατὰ τὴν σύγκρισιν δύο (ἢ περισσοτέρων) ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων πρὸς ἐξακρίβωσιν τῆς οἰκονομικωτέρας μεταξὺ αὐτῶν παρουσιάζονται δύο βασικαὶ περιπτώσεις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, αἱ ὑπὸ σύγκρισιν παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθοῦν μὲ διανύσματα (2) ἄνισα καὶ ἀμέσως συγκρίσιμα, ὑπὸ τὴν στενὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν,

1) Ὡς παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἡ «εἰσαγωγὴ» ἑνὸς ἀγαθοῦ ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ.

2) Διάνυσμα ἀλγεβρικῶς καλεῖται πᾶσα στήλη (ἢ σειρὰ) ἀριθμῶν διατεταγμένων καθ' ὡρισμένην τάξιν. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται προφανῶς νὰ παρασταθῇ ὡς διάνυσμα καθ' ὅσον εἶναι στήλη ἀριθμῶν μὲ ὡρισμένην διάταξιν.

εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν μὲ διανύσματα ἄνισα μὲν ἀλλ' οὐχὶ ἀμέσως συγκρίσιμα μαθηματικῶς. Λεπτομερὴς ἀνάλυσις δι' ἑκάστην περίπτωσιν ἀκολουθεῖ ἀμέσως κατωτέρω.

Περίπτωσις Α'. Ἔστωσαν π.χ. πρὸς σύγκρισιν αἱ ὁμοκλαδικαὶ παραγωγικαὶ δραστηριότητες I καὶ I^+

$$I = \begin{array}{|c|} 1 \\ -0{,}2 \\ -0{,}2 \\ -0{,}1 \\ \hline -1{,}2 \end{array} \qquad I^+ = \begin{array}{|c|} 1 \\ -0{,}3 \\ -0{,}2 \\ -0{,}2 \\ \hline -1{,}2 \end{array}$$

Αἱ παραγωγικαὶ αὗται δραστηριότητες παριστῶνται ὡς βλέπομεν ἀπὸ διανύσματα ἄνισα καὶ ἀμέσως συγκρίσιμα μαθηματικῶς, καθ' ὅσον πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ πρώτου διανύσματος εἶναι ἀνὰ ἓν ἴσα ἢ (ἀλγεβρικῶς) μεγαλύτερα τῶν στοιχείων τοῦ δευτέρου διανύσματος: Ἔχομεν δηλαδὴ $I \geqslant I^+$

Τὸ σημεῖον $\geqslant$ σημαίνει ὅτι τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα εἶναι ὁπωσδήποτε ἄνισα ἔχουν ὅμως τινὰ ἐκ τῶν στοιχείων αὐτῶν ἴσα. Ἐπειδὴ τὸ θετικὸν στοιχεῖον τὸ ὁποῖον παριστᾶ τὴν μονάδα τοῦ παραγομένου προϊόντος εἶναι κοινὸν εἰς ἀμφότερα τὰ διανύσματα, ἡ ἀνισότης μεταξὺ αὐτῶν δύναται νὰ ἐκδηλωθῇ συνεπείᾳ ἀνισότητος ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἐκ τῶν ἀρνητικῶν στοιχείων. Μεγαλύτερον (1) εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἓν ἢ περισσότερα ἀρνητικὰ στοιχεῖα μικρότερα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἑτέρου διανύσματος. Μικρότερα ὅμως κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀρνητικὰ στοιχεῖα σημαίνει μικροτέρα κατανάλωσις πρώτων ὑλῶν κλπ., συνεπῶς μικρότερον συνολικὸν κόστος κεφαλαίου διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας οἱ ὁποῖαι παράγουν τὰς πρώτας ὕλας. Συνεπῶς μεγαλύτερον (ἀλγεβρικῶς) διάνυσμα ὑποδηλοῖ τελικῶς συμφερωτέραν, ἀπὸ ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου, παραγωγικὴν δραστηριότητα.

Περίπτωσις Β'. Μολονότι ἡ σύγκρισις δύο ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἀντιπροσωπευομένων διὰ ἀνίσων καὶ μαθηματικῶς ἀμέσως συγκρισίμων διανυσμάτων εἶναι ἁπλῆ, αὕτη δὲν παρουσιάζει μεγάλην πρακτικὴν ἀξίαν, διότι αἱ εὐκαιρίαι τοιαύτης συγκρίσεως δὲν εἶναι συνήθεις εἰς τὴν οἰκονομικὴν πρᾶξιν. Περισσότερον συνήθης εἶναι ἡ περίπτωσις τῶν διαφόρων ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι παριστῶνται ὑπὸ διανυσμάτων μὴ ἐπιδεχομένων ἄμεσον σύγκρισιν κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\geqslant$.

Δὲν ἔχομεν δηλαδὴ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς διανύσματος ἀνὰ ἓν ἴσα ἢ (ἀλγεβρικῶς) μεγαλύτερα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ ἑτέρου ἢ ἑτέρων διανυσμάτων. Οὕτω π.χ. δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφανθῶμεν δι' ἀπ' εὐθείας συγκρίσεως ποία ἐκ τῶν ἀκολούθων δύο παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἶναι συμφερωτέρα:

1) Ἀλγεβρικῶς.

$$I = \begin{vmatrix} 1 \\ -0,2 \\ -0,2 \\ -0,1 \\ -1,2 \end{vmatrix} \qquad I^{++} = \begin{vmatrix} 1 \\ -0,3 \\ -0,1 \\ 0 \\ -1,0 \end{vmatrix}$$

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I ἔχει τὸ δεύτερον στοιχεῖον αὐτῆς μεγαλύτερον (ἀλγεβρικῶς) τοῦ δευτέρου στοιχείου της I^{++} τὰ δὲ λοιπὰ (ἀρνητικὰ) στοιχεῖα μικρότερα (ἀλγεβρικῶς) τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς ἄλλης. Συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπώσωμεν δι' ἀπευθείας συγκρίσεως, ἀνισότητα μεταξὺ τῶν δύο διανυσμάτων.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰς ὡς ἄνω παραγωγικὰς δραστηριότητας πρέπει προηγουμένως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου αὐτῶν. Τὸ κόστος τοῦτο ἰσοῦται, ὡς ἐλέχθη, μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου. Τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου δὲν ἀπαιτεῖ ὑπολογισμόν, διότι δίδεται ἀμέσως ἐκ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιουχικότητος τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Τὸ ἔμμεσον κόστος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν διακλαδικῶν στοιχείων ἐπὶ τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τῶν ἀντιστοίχων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Οὕτω, ἂν π.χ. τ_2, τ_3 καὶ τ_4 παριστοῦν τὸ συνολικὸν κόστος τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων II, III καὶ IV (αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς κλάδους 2, 3 καὶ 4 τῆς δοθείσης τεχνολογικῆς μήτρας), τὸ ἔμμεσον κόστος κεφαλαίου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I θὰ εἶναι:

$$0.2.\tau_2 + 0.2.\tau_3 + 0.1\tau_4$$

Τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τ_1, διὰ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα I θὰ εἶναι τώρα:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \text{ἄμεσον κόστος τῆς I} + \text{ἔμμεσον κόστος τῆς I} \\ &= 1.2 + 0.2.\tau_2 + 0.2.\tau_3 + 0.1.\tau_4 \qquad (1) \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ μετὰ τῆς δραστηριότητος ταύτης συνεργαζόμεναι (ἀμέσως ἢ ἐμμέσως) παραγωγικαὶ δραστηριότητες τῶν ἄλλων κλάδων τῆς οἰκονομίας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ εἶναι καθωρισμένη ἡ τεχνολογικὴ μήτρα εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα διάνυσμα. Ὁμοίως σκεπτόμενοι, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ συνολικὸν κόστος ἑκάστης τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων:

$$II = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,2 \\ -0,4 \\ -1,5 \end{vmatrix} \qquad III = \begin{vmatrix} -0,5 \\ -0,2 \\ 1 \\ 0 \\ -1,9 \end{vmatrix} \qquad \text{καὶ } IV = \begin{vmatrix} -0,1 \\ -0,2 \\ -0,6 \\ 1 \\ -2,1 \end{vmatrix}$$

(αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν τεχνολογικὴν μήτραν εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I) ὡς ἀκολούθως:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1,5 + 0,2\tau_3 + 0,4\tau_4 \\ \tau_3 &= 1,9 + 0,5\tau_1 + 0,2\tau_2 \\ \tau_4 &= 2,1 + 0,1\tau_1 + 0,2\tau_2 + 0,6\tau_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἐξισώσεων καὶ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} \tau_1 \; -0,2\tau_2 \; -0,2\tau_3 \; -0,1\tau_4 &= 1,2 \\ -0,\tau_1 + \tau_2 - 0,2\tau_3 - 0,4\tau_4 &= 1,5 \\ -0,5,\tau_1 - 0,2\tau_2 + \tau_3 \; -0,\tau_4 &= 1,9 \\ -0,1\tau_1 - 0,2,\tau_2 - 0,6\tau_3 + \tau_4 &= 2,1 \end{aligned} \qquad (3)$$

Τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γραφῇ:

$$\begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 & -0.1 \\ 0 & 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.5 & -0.2 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & -0.6 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος αὐτοῦ λαμβάνομεν τὰς ἀκολούθους τιμὰς (1) διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας I, II, III, καὶ IV ἀντιστοίχως:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 3.75 \\ \tau_2 &= 4.98 \\ \tau_3 &= 4.76 \\ \tau_4 &= 6.32 \end{aligned} \qquad (5)$$

Ἂν τώρα θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα I μὲ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα I^{++} πρὸς ἐπιλογὴν τῆς οἰκονομικωτέρας μεταξὺ αὐτῶν, πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς I^{++}, ὡς ἐπράξαμεν ἤδη καὶ διὰ τὴν I, καὶ νὰ συγκρίνωμεν τὰς δύο τιμάς. Πρὸς τοῦτο, εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν I, II, III, IV, ἀντικαθιστῶμεν τὴν I διὰ τῆς I^{++} ὁπότε λαμβάνομεν τὴν νέαν τεχνολογίαν I^{++}, II, III, IV, ἥτις διαφέρει τῆς προηγουμένης μόνον κατὰ τὴν πρώτην (τὴν ὑπὸ κρίσιν) παραγωγικὴν δραστηριότητα. Ἐκ τῆς νέας τεχνολογίας σχηματίζομεν τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.3 & -0,1 & 0 \\ 0 & 1 & -0,2 & -0,4 \\ -0,5 & -0,2 & 1 & 0 \\ -0,1 & -0,2 & -0,6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \tau'_3 \\ \tau'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 1,9 \\ 2,1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

ὅπου τ'_1, τ'_2, τ'_3, τ'_4, εἶναι αἱ νέαι τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I^{++}, II, III καὶ IV ἀντιστοίχως.

---

(1) Ἀντὶ τοῦ ὅρου «συνολικὸν κόστος κεφαλαίου» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος χρησιμοποιοῦμεν τὸν ὅρον «τιμὴ» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \tau'_1 &= 2{,}83 \\ \tau'_2 &= 4{,}70 \\ \tau'_3 &= 4{,}24 \\ \tau'_4 &= 5{,}86 \end{aligned} \qquad (7)$$

Συγκρίνοντες τὰς τιμὰς τ_1 καὶ τ'_1 βλέπομεν ὅτι $\tau_1 > \tau'_1$. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι $\tau_2 > \tau'_2$, $\tau_3 > \tau'_3$ καὶ $\tau_4 > \tau'_4$, δηλαδὴ ὅτι πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς (τὰ τονούμενα τ) εἶναι μικρότεραι ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς πρώτης σειρᾶς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἀντικατάστασις τῆς I διὰ τῆς I^{++} εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν προεκάλεσε μείωσιν, ὄχι μόνον τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ τοῦ κλάδου 1, ἀλλ' ἐπίσης καὶ τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τῶν προϊόντων τῶν κλάδων 2, 3 καὶ 4. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις μεταξὺ τῶν δύο σειρῶν τιμῶν ἀποτελεῖ ἐπαρκὲς κριτήριον περὶ τῆς σκοπιμότητος ἀντικαταστάσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I διὰ τῆς ὁμοκλαδικῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I^{++}.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I καὶ I^{+} (περίπτ. α), εἴδομεν ὅτι ἡ πρώτη χρησιμοποιεῖ ὀλιγώτερον συνολικὸν κεφάλαιον τῆς δευτέρας διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ αὐτοῦ ἀγαθοῦ καὶ συνεπῶς εἶναι συμφερωτέρα ταύτης. Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἴδομεν ὅτι ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I^{++} εἶναι συμφερωτέρα τῆς I. Κατὰ συνέπειαν ἡ I^{++} εἶναι οἰκονομικωτέρα ἀμφοτέρων καὶ πρέπει νὰ προτιμηθῇ εἰς τὸ πρόγραμμα ἐπενδύσεων.

Ἡ ἐφαρμογὴ εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς ἀνωτέρω ὑποδειχθείσης ἐπιλογῆς τῶν ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων πρὸς καθορισμὸν τοῦ τρόπου κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων εἰς τὸ πρόγραμμα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, δημιουργεῖ σοβαρὰ ὑπολογιστικὰ προβλήματα. Ἡ ἀντιμετώπισις τῶν προβλημάτων αὐτῶν εἶναι ἐν τούτοις δυνατή, ὡς δεικνύεται εἰς εἰδικὴν μελέτην τοῦ ὑποφαινομένου (1), ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τὴν ἀναλυτικὴν ἐξέτασιν τοῦ ὅλου θέματος κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων.

Ἐνταῦθα ἐπεδιώχθη κυρίως νὰ τονισθῇ ὅτι βασικὸν κριτήριον κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων εἰς μίαν ὑπανάπτυκτον οἰκονομίαν, ὡς ἡ ἑλληνική, εἶναι τὸ συνολικὸν (ἄμεσον καὶ ἔμμεσον) κόστος κεφαλαίου καὶ ὅτι ὁ προσδιορισμὸς αὐτοῦ δὲν εἶναι δυνατὸς ἄνευ τῆς ἐφαρμογῆς εἰδικῆς μεθόδου ἀναλύσεως ἡ ὁποία θὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ διάφοροι οἰκονομικοὶ κλάδοι εὑρίσκονται εἰς σχέσιν ἀλληλεξαρτήσεως.

---

1) «Προγραμματισμὸς τῶν Ἐπενδύσεων διὰ τὴν Ἀνάπτυξιν τῶν Οἰκονομικῶς Καθυστερημένων Χωρῶν», Ἀθῆναι 1959 (πολυγραφημένον κείμενον).

INPUT – OUTPUT ANALISI ED ECONOMIE ASTRATTE

CONCETTI E PROPRIETA GENERALI

per SALVATORE CHERUBINO (a Pisa) *

§ 1. Proprietà algebriche delle tavole di input - output

1. Sia E un'economia abbastanza estesa le cui attività produttrici, in un certo intervallo di tempo (t_0, t_1), siano ripartite in n settori o industrie: 1, 2, ..., n. Diciamo $X_r > 0$ la produzione totale del settore r conseguita dal tempo t_0 al tempo t, $t_0 \leqq t \leqq t_1$; sia x_{rs} la porzione di X_r ceduta nello stesso intervallo (t_0, t) dal settore r a quello s; p_r sia il prezzo unitario di costo, all'istante t, della produzione X_r; indichiamo infine con Y_r quella parte non negativa della produzione di r che, nell' intervallo (t_0, t) vien dedicata al consumo. Sarà necessariamente:

$$x_{r1} + x_{r2} + \ldots + x_{rn} + Y_r \leqq X_r\,; \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{1. 1}$$

con le Y_r non tutte zero.

Poniamo:

$$a_{rs} = x_{rs} : X_s \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2. 1}$$

e consideriamo le matrici quadrate di ordine n:

$$\mathbf{x} = [x_{rs}]\,; \qquad \mathbf{a} = [a_{rs}] \tag{3. 1}$$

che diciamo rispettivamente m a t r i c e degli s c a m b i e matrice dei c o e f f i c i e n t i d i s c a m b i o. Esse sono entrambe non negative, cioè i loro elementi sono numeri reali positivi o zero, ma non tutti zero. Si indica questa proprietà scrivendo:

$$\mathbf{x} = [x_{rs}] \geqslant \mathbf{0}\,; \qquad \mathbf{a} = [a_{rs}] \geqslant \mathbf{0}. \tag{4. 1}$$

---

* 'Ο συγγραφεὺς εἶναι τακτικὸς καθηγητὴς τῆς Γεωμετρίας εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς
Πίζης, ὅπου ἀπὸ τὸ 1932 διδάσκει εἰς τὴν Σχολὴν Μηχανικῶν ἀνώτερα μαθηματικὰ καὶ εἰς τὴν
Οἰκονομικὴν Σχολὴν γενικὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν. Συνέγραψε πολυαρίθμους μαθηματικὰς ἐρ-
γασίας κυρίως ἐπὶ θεμάτων ἀναλυτικῆς γεωμετρίας καὶ λογισμοῦ μητρῶν. 'Από δεκαετίας
περίπου ἀσχολεῖται ἐπιτυχῶς μὲ τὴν σπουδὴν τῶν γραμμικῶν οἰκονομικῶν συστημάτων, ἔγινε
δὲ γνωστός, εἰς τοὺς κύκλους τῶν οἰκονομολόγων, ἀπὸ τὰς πρωτοτύπους καὶ μεθοδικὰς ἐργα-
σίας του ἐπὶ τῶν «ἀφηρημένων οἰκονομιῶν» (economie astratte). 'Η παροῦσα ἐργασία του,
ἥτις ἀποτελεῖ μίαν ἐνδιαφέρουσαν εἰσαγωγὴν εἰς τὸ θέμα τῶν ἀφηρημένων οἰκονομιῶν ἐν συ-
σχετισμῷ μὲ τὴν ἀνάλυσιν εἰσροῶν—ἐκροῶν, ἐγράφη εἰδικῶς διὰ τὴν παροῦσαν ἔκδοσιν τῆς
'Ανωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς.

I vettori orizzontali :

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n); \qquad \mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n); \qquad \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

i primi due positivi, il terzo non negativo ([1]), sono detti vettori delle produzioni totali, dei prezzi (unitari di costo) e dei consumi necessari, rispettivamente.

Le (2. 1) si compendiano nell'eguaglianza :

$$(2.\ 1') \qquad \mathbf{a} = \mathbf{x}\, Q^{-1}.$$

dove Q é la matrice diagonale di ordine n che ha per elementi principali le produzioni $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ delle n industrie (ed i rimanenti elementi tutti uguali a zero).

Le (1. 1), a causa delle (2. 1), si scrivono :

$$(I.\ 1) \qquad [\,I - \mathbf{a}\,]\, \mathbf{X}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1} \geqslant 0$$

Se nella (I. 1), cioè nella (1. 1), vale il solo segno eguale, si dice che si ha equilibrio di produzione, cioè che (in ogni istante) la produzione di ciascun settore è esattamente eguale alla somma delle vendite a tutti gli altri (compreso se stesso) e del consumo necessario Y_r.

2. Ciascun settore, per produrre, ha bisogno di forza - lavoro: indicheremo con $x_{n+1,s}$ la forza - lavoro impiegata nel settore s per produrre, nell' intervallo (0,t) la produsione totale X_s e considereremo il vettore positivo

$$(6.\ 1) \qquad a_{(n+1)} = (a_{n+1,1},\ a_{n+1,2},\ \ldots\ldots,\ a_{n+1,n})$$

nel quale si è posto :

$$(7.\ 1) \qquad a_{n+1,s} = x_{n+1,s} : X_s \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Il prezzo unitario, positivo, della forza - lavoro all' istante t s' indicherà p_{n+1} e si porrà :

$$(8.\ 1) \qquad x_{n+1,1} + x_{n+1,2} + \ldots + x_{n+1,n} = X_{n+1}.$$

La forza - lavoro funziona così come un settore di E che si dice primitivo perché la forza - lavoro non può esser prodotta da nessuna delle n industrie.

---

1) Si scrive $\mathbf{X} > 0$; $\mathbf{p} > 0$; $\mathbf{y} \geqq 0$.

Il segno $\geqq$ indica che ciascuna riga del primo membro non supera l'elemento corrispondente del secondo Il segno $\geqslant$ significa che fra gli elementi corrispondenti dei due membri vale il $\geqq$, ma non sempre il $>$, né l' $=$

Il simbolo I, di cui appresso, indica la matrice diagonale ad elementi principali tutti uguali a +1 (e gli altri ugualf a zero). L' indice −1 al piede di uu vettore orizzontale sta ad indicare che esso si scrive verticalmente.

Paragonando i costi si ha, ad esempio per il settore s:

(9. 1) $p_1 x_{1,s} + p_2 x_{2,s} + \ldots + p_n x_{n,s} + p_{n+1} x_{n+1,s} \leqq p_s X_s$; $(s=1, 2, \ldots, n)$.

Ne segue la relazione in matrici:

(II. 1) $$\mathbf{p}[\mathrm{I}-\mathbf{a}] \geqq \mathbf{Z} > 0$$

nella quale $\mathbf{Z}$ è il vettore, positivo, che ha per componenti i costi della forza - lavoro impiegata per produzione unitaria in ciascuno degli n settori. Si ha:

(10. 1) $$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = p_{n+1} a_{(n+1)}$$

ossia:

(10. 1') $$Z_r = p_{n+1} a_{n+1,r} \qquad (r=1, 2, \ldots, n)$$

3. Dalla (I. 1), indicando con P la matrice diagonale di elementi principali $p_1, p_2, \ldots, p_n$ segue che la matrice:

(11. 1) $$\mathbf{a}' = \mathrm{P}\,\mathbf{a}\,\mathrm{P}^{-1}$$

ha le somme degli elementi di ciascuna colonna tutte minori di +1, cioè che $[\mathrm{I}-\mathbf{a}']$ è una matrice leontieviana soddisfacente all'ipotesi forte (2). La matrice $[\mathrm{I}-\mathbf{a}]$ che compare nella (I. 1) — (II. 1) è simile ad $[\mathrm{I}-\mathbf{a}']$ quindi possiede le stesse proprietà strutturali di questa. In particolare, le radici caratteristiche di $\mathbf{a}$ sono tutte di modulo minore di 1; una almeno sarà positiva ed avrà massimo modulo; esiste l'inversa di $[\mathrm{I}-\mathbf{a}]$:

(12. 1) $$[\mathrm{I}-\mathbf{a}]^{-1} = [\mathbf{a}_{rs}] \qquad (r, s=1, 2, \ldots, n)$$

e risulta non negativa. In particolare, se $\mathbf{a}$ è irriducibile, cioè se nessun gruppo di settori di E compra o vende soltanto da se stesso, la (12. 1) è addirittura positiva (3), ciocè ha gli elementi tutti >0.

Dalle (I. 1) — (II. 1) si ha:

(I'. 1) $$\mathbf{X}_{-1} \geqq [\mathrm{I}-\mathbf{a}]^{-1}\mathbf{Y}_{-1}$$

(II'. 1) $$\mathbf{p} \geqq \mathbf{Z}[\mathrm{I}-\mathbf{a}]^{-1}$$

ed il vettore $\mathbf{p}$ riesce sempre positive come $\mathbf{Z}$, mentre $\mathbf{X}$ è non negativo

2) S. CHERUBINO: Sulle matrici leontieviane su un problema di programmazione lineare [«L' Industria» (1959) n. 2, pp. 156—164], § 1.

3) V. il mio Calcolo delle Matrici [CNR, Roma Cremonese (1957) cap. II, § 2, b), p. 133 ed f) - f') pp. 140 - 141]. Vedasi anche la mia Mem.: Sulle matrici quadrate non negative [Ann. Sc. Norm. Pisa, s. III, vol. X (1956) pp. 217 - 235] § 1, n. 1 p. 219.

insieme ad **Y**. Se però l' economia, cioè **a**, è irriducibile, **X** è positivo anche con **Y** semipositivo ($\mathbf{Y} \geqslant 0$).

Se vale l' equilibrio generale, nella (I. 1) — (II. 1) e nella (I'. 1)— —(II'. 1) vale il solo segno eguale e si ha che i vettori delle produzioni e dei prezzi determinano e sono determinati, univocamente, dai settori dei consumi necessari e dei costi di forza-lavoro impiegata, rispettivamente.

Se non vale l' equilibrio generale, **Y** e **Z** sono consumi e costi di forza - lavoro n e c e s s a r i, cioè m i n i m i.

4. Ricavando X_s da (I'. 1) e sostituendo nella (3. 1) si ottiene:

$$x_{r,s} \geqq \sum_{1}^{n}{}_h\, a_{rs}\, \alpha_{sh}\, Y_h \tag{13. 1}$$

Sostituendo invece nella (7. 1), si ha:

$$x_{n+1,s} \geqq \sum_{1}^{n}{}_h\, a_{n+1,s}\, \alpha_{sh}\, Y_n \tag{14. 1}$$

e che [4]:

$$\sum_{1}^{n}{}_s\, a_{rs}\, \alpha_{sh}\,; \qquad \sum_{1}^{n}{}_h\, a_{n+1,s}\, \alpha_{sh} = L_h \tag{15. 1}$$

sono rispettivamente gli aumenti minimi delle vendite del settore r a tutti gli altri e di forza - lavoro impiegata in tutti i settori provocati dall' acmento unitario di consumo necessario (minimo) nel settore h.

Dalla (II'. 1) si ottiene anche:

$$p_h \geqq p_{n+1} \cdot L_h \tag{16. 1}$$

quindi che il prezzo di costo della produzione del settore h non è minore (è uguale se siamo nell' equilibrio generale) del costo del maggior lavoro totale provocato dall' aumento unitario di consumo nello stesso settore h.

Questo fatto costituisce il principie del v a l o r e - l a v o r o (che sarebbe preferibile chiamare principio del p r e z z o - l a v o r o) [5].

§ 2. Le reazioni del mercato

5. Produzioni e prezzi sono soggetti alle cosiddette r e a z i o n i d i m e r c a t o le quali influiscono anche sulle velocità con cui produ-

---

4) S. CHERUBINO: S u i f o n d a m e n t i m a t e m a t i c i d e l l a t e o r i a d e l l' e q u i l i b r i o g e n e r a l e e c o n o m i c o [«L' Industria» (1956) n. 3, pag. 302 - 336] § 6, p. 316.

5) Cfr. Mem: cit. (4), § 6, c), p. 316.

zioni e prezzi variano nell'intervallo di tempo che si considera, che prendiamo coincidente con quello (t_0, t_1) cui si riferisce la tavola di input-output. Ciò vuol dire che il mercato dà luogo a delle relazioni fra i vettori $\mathbf{X}$ e $\mathbf{p}$ e le loro derivate $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$, $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ rispetto al tempo.

L'ipotesi più plausibile è che le velocità di produzione (di prezzo) dipendano esplicitamente dai prezzi (dalle produzioni).

Per comodità di trattazione matematica convien supporre che le relazioni in discorso siano lineari. E' poi avvio che le reazioni del mercato agiscono contemporaneamente su tutti i settori e non separatamente su ciascuno di essi, salvo casi molto particolari.

A questi requisiti rispondono relazioni come:

$$\text{(I. 2)} \qquad \begin{cases} \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)_{-1} = \mathcal{B}\mathbf{p}_{-1} \\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{-1} = \mathcal{T}\mathbf{X}_{-1} \end{cases}$$

nelle quali le lettere gotiche $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ denotano due matrici quadrate di ordine n ad elementi funzioni del tempo t variabile in (t_0, t_1).

Si osservi che, quali che siano i vettori $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ e $\mathbf{p}$, così $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ed $\mathbf{X}$, esistono sempre relazioni del tipo (I. 2). Soltanto 2n dei $2n^2$ elementi delle matrici $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ sono necessariamente impegnati dalle due coppie: restano liberi $2n(n-1)$ parametri che, con la loro arbitraria variabilità, consentono di adeguare il sistema (I. 2) al fenomeno del mercato, che riesce ben rappresentato dal sistema stesso.

Questo può anche scriversi:

$$\text{(I}'\text{. 2)} \qquad \frac{d}{dt}(\mathbf{X} \mid \mathbf{p})_{-1} = \mathcal{A}\cdot(\mathbf{X} \mid \mathbf{p})_{-1}$$

che è un sistema differenziale lineare omogeneo sulle 2n funzioni incognite $X_1, \dots, X_n$; $p_1, \dots, p_n$ elementi del vettore $(\mathbf{X} \mid \mathbf{p})$. La matrice $\mathcal{A}$ dei coefficienti è:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathcal{B} \\ \mathcal{T} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

coi quadranti delle prime, e delle ultime, n righe e colonne dati da matrici nulle (cioè ad elementi tutti zero). L'integrale generale di questo sistema si scrive:

$$\text{(II. 2)} \qquad (\mathbf{X} \mid \mathbf{p})_{-1} = \mathcal{X}(t)\,c_{-1}$$

nel cui secondo membro $\mathcal{X}(t)$ è la matrice quadrata di ordine **2n** matrizzante sinistro di $\mathscr{A}$, esteso all' intervallo (t_0, t_1) e c è un vettore orizzontale a 2n componenti determinazione iniziale (all' istante t_0) del vettore $(\mathbf{X} \mid \mathbf{p})$ (6). Ciò implica che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{T}$ soddisfino ad opportune condizioni, che supporremo verificate. Così appresso, per le condizioni via via implicitamente richieste.

Considerando la (II. 2) nello spazio lineare S_{2n} congiungente quelli delle produzioni e dei prezzi (che in esso poniamo assumano posizioni opposte) il bipoliedro costituito dai due coni poliedrali convessi descritti dai vettori $\mathbf{X}$ e $\mathbf{p}$ soddisfacenti alle (I. 1) — (II. 1), ossia alle (7):

$$\text{(III. 2)} \qquad [I - \mathbf{a}]\,\mathbf{X}_{-1} > 0\,; \qquad \mathbf{p}\,[I - \mathbf{a}] > 0$$

viene trasformato in se stesso da detta (II. 2), la quale porta il vettore c iniziale, che corrisponde a un punto fissato a piacere nel bipoliedro predetto, in un vettore, cioè in un punto, variabile col tempo appartenente allo stesso bipoliedro. Per ricordare che gli elementi della matrice $\mathscr{X}(t)$ sono funzioni del tempo, ossia che il vettore trasformato è variabile con t, e può descrivere tutto il bipoliedro delle produzioni - prezzi, la trasformazione (II. 2) si è detta e v o l u t i v a e si è parlato di evoluzione economica, conseguenza delle reazioni di mercato.

La matrice $\mathscr{X}(t)$, quindi la $\mathscr{A}$ che la determina, deve essere necessariamente sottoposta ad opportune restriazioni che consentono di affermare che la trasformazione avviene nel modo predetto. Se, ad es., la matrice $\mathscr{A}$ è costante e l' intervallo (t_0, t_1) è sufficientemente piccolo, si vede facilmente, utilizzando un noto risultato, essere necessario che la matrici $\mathscr{B}$ e $\mathscr{T}$ siano non negative (8).

§ 3. Concorrenza ed oscillabilità

6. In un intervallo di tempo abbastanza piccolo, nel quale la matrice $\mathscr{A}$ (cioè $\mathscr{B}$ e $\mathscr{T}$) possa ritenersi costante, le condizioni:

$$\text{(I. 3)} \qquad \mathscr{B} \geqslant \mathbf{0}\,, \qquad \mathscr{T} \geqslant \mathbf{0}$$

sono non solo necessarie ma anche sufficienti perchè il sistema (I. 2) ammetta soluzioni tutte positive qualunque siano le determinazioni iniziali

---

6) Vedi il mio C a l c o l o d e l l e M a t r i c i, cit. (3), cap. I, § 13, n. 49, p. 101.

7) S. CHERUBINO : S u l l' e v o l u z i o n e e c o n o m i c a [Rend. Mat. Roma (1958), vol. 17, pp. 231 - 261] § 2, pp. 239 - 241.

8) Cfr. «Fondamenti» cit. (4) §. p p. 322 - 324 e la mia Nota lincea : S u l l a d i n a m i c a e c o n o m i c a [Rend. Lincei, s VIII, vol. XXII (1957) pp. 281 - 285] nn. 2e 3, pp. 282 - 284. Per evidente ragione di continuità, **p** dato dalle (5) - (6) p. 283 deve inizialmente soddisfare la seconda delle (III - 2) con t = 0 ; analogamente per **X**.

delle produzioni e dei prezzi. La necessità vale per $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ costanti, la sufficienza anche per $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ variabili col tempo. Ci riferiamo qui alla sola positività dell' integrale generale (II. 2) prescindendo dalle (III. 2), cioè senza esigere l' appartenenza delle soluzioni ad un determinato bipoliedro di produzioni - prezzi. Le condizioni (I. 3) assicurano che il mercato opera in regime di libera concorrenza (perfetta) perché nessuna restrizione dovrà apportarsi alla libera scelta delle determinazioni iniziali dei vettori **X, p** cioè nessuna costrizione viene esercitata sui produttori - consumatori che quelle determinazioni scelgono. La piccolezza dell' intervallo di tempo durante il quale il mercato opera, cioè in cui sussiste il sistema (I. 2), serve ad assicurare che le reazioni, elementi delle matrici $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$, maniengono in tutto quell' intervallo le proprietà analitiche necessarie e sufficienti per l' integrabilità del sistema e che, verificandosi le (I. 3) in un certo istante t', esso si verifichino in un intorno conveniente di t'.

Se non valgono le (I. 3) la positività di tutte o parte delle soluzioni (II. 2) può verificarsi solo con conveniente scelta delle determinazioni iniziali di **X** e di **p** : si è allora in regime di concorrenza imperfetta. Se non si verificasse neppure questo fatto, il mercato sarebbe in crisi.

La costanza dei coefficienti di scambio, cioè della matrice **a** intervalli sufficientemente piccoli non si estende né ai coefficienti di scambio relativi alla forza - lavoro, né a quelli del consumo, altrimenti i prezzi (le produzioni) correnti sarebbero indipendenti dalle produzioni (dai prezzi) iniziali, ciò che non concorda col concetto di mercato (9).

7. Per esaminare se, quando e come la economia oscilla, consideriamo ancora il caso particolare in cui $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ siano costanti. Allora risulta :

(1. 3) $$\mathcal{X}(t) = e^{\mathcal{A}(t-t_0)}$$

e portando la matrice $\mathcal{A}$ nella forma cononica $\mathcal{A}_0$ e dicendo $(\mathbf{X} \mid \mathbf{p})_0$, c_0 i vettori trasformati di $(\mathbf{X} \mid \mathbf{p})$ e di a mediante la stessa trasformazione che porta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}_0$, si ha :

(2. 3.) $$(\mathbf{X} \mid \mathbf{p})_0 = c_0\, e^{D(t-t_0)}\, e^{J(t-t_0)}$$

ove D e J sono le parti principali e complementari (tra loro permutabili) di $\mathcal{A}_0$. La parte D è diagonale ed ha per lementi principali le radici carateri stiche di $\mathcal{A}$. Se α è una di queste radici ed è complessa, il secondo membro di (2. 3) possiede il fattore scalare :

9) S. CHERUBINO : *Sulle economie bipartite* [Gior. degli Economisti (Marzo - Aprile 1957)] § 3. Vedi anche la Nota Lincea cit. (8), n. 2, pp. 282 - 283.

$$e^{\alpha(t-t_0)} = \varrho\,[\,\text{sen}\,\alpha\,(t-t_0) + i\cos\alpha\,(t-t_0)\,] \tag{3. 3}$$

che oscilla tra $-\varrho$ e $+\varrho$. Se α è la radice immaginaria di massimo modulo, i corrispondenti settori trasformati compiranno oscillazioni di ampiezza non superiore a 2ϱ. Il periodo di oscillazione corrispondente si calcola immediatamente. L' ampiezza ed il periodo dell' oscillazione sono però condirionati dall' intervallo (t_0, t_1) che li restringe, a meno che esso non sia sufficientemente grande.

Invece di pensare $\mathscr{B}$ e $\mathscr{T}$ costanti in tutte l' intervallo (t_0, t_1) si può considerare un istante t' di esso, le corrispondenti determinazioni di $\mathscr{B}$ e $\mathscr{T}$ ed un intorno di t' in cui $\mathscr{B}$ e $\mathscr{T}$ varino abbastanza lentamente per potersi ritenere praticamente costanti.

Nell' ipotesi dell' equilibrio generale, il mercato può consierarsi operante sui consumi e sulle forze - lavoro impiegate, cioè sui vettori $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Z}$. Occorre trasformate il sistema (I. 2) mediante le (I. 1) — (II. 1) nelle quali varrà il solo segno eguale. Se $\mathbf{a}$ è costante, il sistema (II. 2) non muterà di aspetto, ma l' intervallo $(-\varrho, \varrho)$ ed il periodo di oscillazione verranno a dipendere anche dai coefficienti di scambio, perché ne dipenderà la matrice dei coefficienti del sistema, quindi ne dipenderanno le radici caratteristiche α.

Altre ipotesi particolari sono possibili (10).

8. Le (I'. 1) — (II'. 1) mostrano che per $\mathbf{a}$ costante, dall' accettabilità delle soluzioni del sistema differenziale lineare in $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ segua quella delle soluzioni di (I. 2), causa la non negatività della inversa della matrice $[\,I - \mathbf{a}\,]$. Non vale il viceversa.

Se $\mathbf{a}$ è variabile col tempo, il sistema trasformato di (I. 2) acquista la forma:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt}\right)_{-1} = \underline{P}(t)\,\mathbf{Y}_{-1} + \underline{Q}(t)\,\mathbf{Z}_{-1} \\ \left(\dfrac{d\mathbf{Z}}{dt}\right)_{-1} = \underline{R}(t)\,\mathbf{Y}_{-1} + \underline{S}(t)\,\mathbf{Z}_{-1} \end{cases} \tag{6. 3}$$

in cui vi sono 4 matrici d' ordine n i cui elementi rappresentano le reazioni del mercato. La positività del consumi $\mathbf{Y}$ e della forza - lavoro impiegata $\mathbf{Z}$ viene allora garantita dalla non negatività delle reazioni elementi delle matrici $\underline{Q}$ ed $\underline{R}$ insieme a quella degli elementi non principali di $\underline{Q}$ ed $\underline{S}$ (11).

---

10) Vedansi le due mie Memorie : Sull' analisi lineare delle interdipendenze industriali [«L'Industria» (1954) n. 2, pp. 151-178] § 4, n. 10 e «Fondamenti» cit. (4) § 8, nn. 16 a 19, pp. 319 - 327.

11) BELLMAN R., GLICKSBERG I. and GROSS O. : On some va-

Le espressioni di queste quattro matrici per mezzo di $\underline{P}$, $\mathcal{T}$ ed **a** mostrano ancora come la positività di **Y** e **Z** e quella di **X** e **p** non si equivalgono e che la positività di **X** e **p** segue da quella di **Y** e **Z** solo in termini finiti, cioé indipendentemente dall' intervento del mercato.

Riassumendo, il mercato, da solo, quò garantire la positività delle produzioni e dei prezzi, ma, anche se questa si verifica, non quò garantire la positività dei consumi e quella del lavoro impiegato nei singoli settori.

§ 4. Classificazione delle economie

9. Le studio delle proprietà del sistema differenziale (I. 2) porta anche a distinguere molti tipi di economia, dei quali enumereremo i più significativi.

Per approfondire l' analisi conviene riferirsi non ai settori di partenza, ma ad un settore aggregato secondo un vettore positivo o semipositivo costante indeterminato $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ e fare qualche opportuna posizione (12).

Riferendoci alla prima della (II. 2) poniamo:

(1. 4)
$$\mathcal{B} = B + p_1 B' + p_2 B'' + \ldots + p_n B^{(n)}$$

(2. 4)
$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \lambda B' \\ \lambda B'' \\ \vdots \\ \lambda B^{(n)} \end{bmatrix}$$

La matrice B si dice dei coefficienti delle reazioni generali; B', B'', ..., $B^{(n)}$ si dicono matrici delle reazioni specifiche. Si ha:

(3. 4)
$$\mathbf{p}^{\mathcal{M}} = \lambda [\mathcal{B} - B]$$

Considerato allora

(4. 4)
$$X = \lambda \mathbf{X}_{-1} = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$$

cioè la produzione del settore aggregato secondo il vettore λ positivo o semipositivo arbitrario, si ha:

(I. 4)
$$\frac{dX}{dt} = \lambda B \mathbf{p}_{-1} + \mathbf{p} S \mathbf{p}_{-1}$$

---

riational problems occurring in the theory of dynamic programming [Rend. Pal., s. II, t. III (1954) pp. 363 - 397] theorem 4, p. 376. Vedasi anche la mia Note lincea cit. (15) qui appresso, n.11, pp.17-18.

12) S. CHERUBINO : Su alcune proprità delle economie ripartite in settori e sulla loro classificazione dinamica [Politica economica, XLVII, III serie,(1957) pp.406-421] § 2, pp. 411-413.

con $S = \frac{1}{2}\left[\mathcal{M} + \mathcal{M}_{-1}\right]$ matrice reale simmetrica ad elementi funzioni bilineari delle reazioni specifiche e dei coefficienti o intensità di aggregazione $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$. Le due parti del secondo membro di (I. 4) si dicono rispettivamente: parte principale e parte complementare della velocità di produzione del settore aggregato secondo λ. Analoghe posizioni possono farsi sui prezzi, cioè mercè la seconda delle (II. 2).

Le parti principale e complementare possono essere, separatamente o congiuntamente, comunque sia fissato **p**, di valore > 0, < 0, $= 0$ qualunque sia λ, cioè incondizionatamente (od assolutamente) o con opportuna scelta di λ, ossia condizionatamente. E' facile trovare delle condizioni sufficienti, da imporre ai coefficienti di reazione in corrispondenza delle varie eventualità indicate; condizioni anche necessarie sono meno semplici e per le forme complementari esigono disuguaglianze non lineari nelle reazioni specifiche e nelle intensità λ_s di applicazione dei fattori provenienti dai singoli settori.

La produzione X è crescente in tutto l' intervallo (t_0, t_1) quando la forma principale risulta positiva insieme a quella complementare oppure positiva e maggiore del valore assoluto della seconda. Se questa seconda è sempre zero come accadrebbe, ad esempio, se $\mathcal{M}$ fosse emisimmetrica ($\mathcal{M} = -\mathcal{M}_{-1}$) allora si dice che l' economia è conservativa (assolutamente o condizionatamente secondo che λ resta arbitrario o soltanto opportuno).

Se la forma principale è sempre negativa mentre quella complementare è zero, con qualunque scelta di **p** l' economia si dice dissipativa, incondizionatamente o condizionatamente (cioè con λ arbitrario od opportuno).

Secondo che la produzione X resta crescente o decrescente in tutto (t_0, t_1) o in un pezzo di esso si dice che l' economia è progressiva o regressiva in tutto l' intervallo o in quel pezzo.

Le condizioni da imporre ai coefficienti di reazione perché si verifichino i casi indicati, o altri specificabili, devono esser compatibili con le condizioni di accettabilità delle soluzioni del sistema (I. 2). Se queste esigono le (I. 3) si ha necessariamente progressività delle produzioni (e dei prezzi) ([13]), indipendentemente da quello che accade per le parti principali e complementari.

Osservisi che la crescenza o decrescenza di X non equivale necessariamente a quella delle produzioni dei singoli settori, se non quando si tratti di progressività o regressività assoluta.

---

13) **Per i prezzi valgono relazzioni del tutto analoghe a quelle delle produzioni : queste relazioni possono dirsi duali di quelle stabilite per le produzioni.**

10. La produzione X può essere stazionaria, cioè di velocità zero, solo in punti isolati dell' intervallo (t_0, t_1) a meno che non sia senz' altro $\lambda\mathcal{B}=0$ in tutto o parte di (t_0, t_1) il che, se λ è arbitrario, implicherebbe che ivi fosse $\mathcal{B}=\mathbf{0}$ cioè la completa inattività del mercato delle produzioni.

D' altra parte, l' annullamento della velocità di X in un punto t' di (t_0, t_1) richiede che ivi si abbia $\lambda\mathcal{B}\mathbf{p}_{-1}=0$, il che, se $\mathbf{p}$ si vuole variabile comunque, richiede che ivi risulti:

$$\lambda\mathcal{B}=\lambda B+\mathbf{p}^{\mathcal{M}}=0 \tag{5. 4}$$

Se B è non singolare in t' si possono avere vettori λ che danno settori stazionari, uno per ogni determinazione dei prezzi pei quali $-\mathbf{p}^{\mathcal{M}}B^{-1}$ è positivo o semipositivo. Per $\mathbf{p}$ arbitrario, si avrebbe $\mathcal{M}B^{-1}\leqslant\mathbf{0}$ ciò che, tenendo presente la (2. 4), condiziona ulteriormente λ. Dunque settori stazionari con prezzi variabili comunque sono assai poco probabili. Se B è singolare, potrebbe non aversene nessuno oppure infiniti.

Il verificarsi di (5. 4) con λ assegnato, può far determinare uno o più vettori (anche infiniti) di prezzi che rendono stazionaria la produzione; ma ciò sempre e soltanto in istanti in cui det $\mathcal{B}=0$. I valori t' di (t_0, t_1) nei quali si verifica (5. 4) si dicono punti di stazionarietà per la produzione dell' economia ([14]).

§ 5. Programmazione

11. Le (I. 1) — (II. 1) consentono di fare una specie di programm azione, cioè danno la possibilità di fare previsioni più o meno attendibili. Infatti, assegnati i vettori **Y** e **Z** dei consumi e della forza - lavoro impiegata le relazioni richiamate determinano, in caso di equilibrio generale, i corrispondenti vettori **X** e **p** delle produzioni e dei prezzi. Ma ciò presuppone che la matrice **a** dei coefficienti di scambio rimanga inalterata in intervalli successivi a quello (t_0, t_1) cui si riferiva la tavola delle input-output. In altri termini si fa una estrapolazione della validità dei coefficienti di scambio in un intervallo di tempo più ampio.

Ci si può invece riferire al mercato, cioè al sistema diffenreziale (I. 2), quando i coefficienti di reazione di mercato possano esser previesti con buona approssimazione con mezzi sperimentali, cioè mediante rilevamenni statistici adeguati, mezzi di rapida calcoclazione e successive approssimazioni. Bisogna perciò introdurre un congruo metodo di calcolo: qui ne indicheremo uno che deriva direttamente dai fondamenti teorici ([15]).

---

14) Cfr. il ragionamento del n. 10, p. 417, della mia Mem cit. (12).

15) S. CHERUBINO: Sulla dinamica economica [Rend. Lincei, s. VIII, vol XXII (1957) pp. 281-285] nn. 3-4, pp. 283-285. Nella recensione in Math. Rev., Vol. 20, 5 May 1959, non vien fatto alcun cenno esplicito alle note 4 e 5; nè vien rilevata la dimostrazione della possibilità teorica della pianificazione economica.

Poniamo che siano praticamente note le reazioni specifiche dei varî settori, quindi che sia nota la parte complementare della velocità di produzione di un settore aggregato secondo ogni vettore λ. Allora si tratta di fissare i coefficienti di reazione generale, cioè B, in modo che la velocità di produzione di quel settore aggregato, con prezzi fissati a priori, sia determinata quantitativamente o qualitativamente, cioè risulti eguale oppure $\geqq$ ovvero $\leqq$ di un certo valore dato. Oppure, nota la matrice discriminante S della parte complementare, si vuol fissare il vettore $\mathbf{p}$ dei prezzi in modo che la velocità $\frac{dX}{dt}$ di quel settore aggregato sia non minore, o non maggiore, di un valore assegnato.

Se, ad esempio, si vuole che quella velocità riesca $\geqq k$, detto m il massimo valore assoluto delle radici caratteristiche di S, basta avere:

$$\lambda B \mathbf{p}_{-1} = k + m \tag{1. 5}$$

Possono facilmente fissarsi gli estremi tra i quali varia il vettore λB, con λ assegnato, per modo che la (1. 5.) possa soddisfarsi con $\mathbf{p}$ positivo opportuno. Naturalmente, è sufficiente conoscere m per approssimazione, cioè avere di S soltanto gli estremi fra i quali variano i suoi elementi[16].

Invece di agire sul settore pubblico o statale, cioè sulle reazioni generali, si può agire su un settore diverso, ad es. l' ultimo, quando siamo noti abbastanza bene gli estremi delle reazioni generali e di quelle specifiche dei rimanenti settori. Riunendo queste in un' unica matrice $\mathbf{B}$, somma dei primi n termini del secondo membro di (1. 4), si tratta di determinare il prezzo p_n e le reazioni $B^{(n)}$ in modo da avere:

$$\lambda [\mathbf{B} + p_n B^{(n)}] \mathbf{p}_{-1} > 0 \tag{2. 5.}$$

In $\mathbf{B}$ figurano linearmente tutti gli altri prezzi, che si suppongono dati, mentre di $B^{(n)}$ sarà generalmente possibile fissare a priori gli estremi inferiore e superiore. Dalla disuguaglianza (2. 5) se ne deducono una o più, di secondo grado in p_n: soddisfacendole sarà soddisfatta anche la (2. 5).

Può darsi che il vettore λ si voglia positivo ed arbitrario; allora la (2. 5) equivale alla:

$$[\mathbf{B} + p_n B^{(n)}] \mathbf{p}_{-1} > 0 \tag{3. 5}$$

Se i prezzi sono tutti i sconosciuti, per averli può convenire procedere per approssimazioni successive, cominciando col porre, in parentesi, tutti i prezzi eguali all' unità e determinando il vettore $\mathbf{p}$ fuori paren-

---

16) Converrà applicare il teorema a) del cap. II, § 2, p. 130, del mio Callcollo delle Matrici, cit. (2).

tesi col metodo esposto in una recente Memoria (17). La determinazione ottenuta si porterà in parentesi e si calcolerà con lo stesso procedimento una seconda determinazione del vettore **p** fuori parentesi; e così via. Quando si pervenga a valori dei prezzi $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ che si ritengono convenienti, questi si fisseranno e di conseguenza si determinerà p_n a mezzo del sistema di disuguaglianze quadratiche di cui si è discorso poco fa. La compatibilità di queste disuguaglianze, quindi la validità del processo descritto, può essere assicurata dalle reazioni specifiche dell' n^{mo} settore, cioè dagli elementi di $B^{(n)}$, quando siano indeterminate e purché soddisfino alle limitazioni imposte dagli estremi eventualmente già conosciuti.

§ 6. Le Economie astratte

12. Le proprietà esposte nei cinque paragrafi che precedono non dipendono dal significato attribuito alle parole «produzioni», «consumi», «prezzi», «lavoro» quindi ai vettori **X**, **Y**, **p**, **Z**. Il fatto che importa è che questi 4 enti siano legati a una matrice di numeri (reali) non negativi, da dirsi «degli scambi» verificantisi tra n «settori», la cui natura non occorre specificare e che abbiano significato le relazioni algebriche e differenziali scritte avanti. Le seconde presuppongono che quei 4 vettori ed i coefficienti di scabio a_{rs} siano funzioni di una stessa variabile t im un intervallo (t_0, t_1). Anche la mozione di «tempo» é puramente formale o convenzionale e la dipendenza da esso può essere sia esplicita che implicita; in quest' ultimo caso avviene mediatamente per mezzo di opportune funzioni di t, da dirsi p a r a m e t r i, disimpegnanti un ruolo matematicamente ben determinato, ma concettualmente non specificato.

Il concetto di «mercato» é anch' esso puramente convenzionale, in quanto espresso esclusivamente mediante il sistema differenziale lineare (I. 2). Questo implica che i vettori **X**, **p**, così pure **Y** e **Z**, siano funzioni continue e derivabili del tempo t, eventualmente derivabili più volte di seguito, come quando si voglia far intervenire anche le accelerazioni (18) e si desiderino sviluppi in serie. Ciò s' intende verificato in

---

17) S. CHERUBINO e M. PASSAQUINDICI: S u i s i s t e m i d i d i s u g u a g l i e n z e l i n e a r i e s u a l c u n e l o r o o p p l i c a z i o n i [Ann. Sc. Norm. Pisa, s. III, vol. XII (1958) pp 31 - 53] introduzione, pp. 37 - 40 e §§ 1-2-3, pp. 40 - 51. I prezzi, generalmente, non vengono determinati, ma conservano uma certa variabilità.

18) Le accelerazioni sono state introdotte in «Fondamenti» cit. (4), al § 8, n. 17, p. 324, per lo studio della possibile oscillabilità del sistema economico. A differenza di questa, nella Nota Lincea: S u l c o n c e t t o d i e c o n o m i a a s t r a t t a [Rend. Lincei, s. VIII, vol. XXVI (maggio 1959) pp. 656 - 661] n. 5, p. 659, le reazioni di mercato si suppongono senz' altro funzioni di t, quindi (t_0, t_1) può avere maggiore ampiezza.

tutto l' intervallo (t_0, t_1) in cui si considera l' Economia. L' intervallo predetto si dirà «ciclo» (teorico) dell' economia se in esso il sistema (I. 2) ammette un integrale generale (II. 2) che dà soluzioni accettabili almeno con oppotture determinazioni iniziali del vettore ($\mathbf{X} \mid \mathbf{p}$).

Nelle considerazioni che precedono restano pure indeterminati tanto il numero n dei settori che gli elementi della matrice $\mathbf{x}$ degli scambi, quindi i coefficienti di scambio, nonché le reazioni del mercato, cioé le matrici B, C. Il che vuol dire, fra l' altro, che le nostre premesse e le nostre deduzioni prescindono da esperienze di persone singole (fisiche, giuridiche o morali) ma sono basate su esperienze globali estese alla totalità degli enti od operatori che intervengono nei fenomeni che si studiano.

Questa estensione va intesa non in senso quantitativo bensì in senso qualitativo, fatte salve le proprietà algebrico - aritmetiche supposte verificate dalla matrice **a** e dai vettori **X**, **Y**, **p**, **Z**. Supponendo che questi vettori, con **a**, non soddisfino necessariamente ad eguaglianze, ma soltanto a diseguaglianze (sempre lineari, almeno per semplicità od in prima approssimazione), i vincoli imposti vengono ad essere del tutto elastici, quindi viene ad estendersi il campo di applicazione delle nostre considerazioni. Altrettanto, se si, vuole, può farsi per le relazioni fra i vettori medesimi e le loro derivate: cioé le (I. 2) potrebbero supporsi non più omogene, ma con termini noti di segno (invariabile) opportuno, sempre (finiti) e limitati [19].

Il punto di vista schizzato in quest' articolo, che può dirsi a s t r a t t o, ha anche il vantaggio di eliminare i molti inconvenienti e difficoltà cui dà luogo o che s'incontrano nella costruzione delle tavole di i n p u t- o u t p u t e nell' uso di esse [20]. Vengono eliminati anche i presupposti politico - sociali, ideologico - finalistici, ed edonistico - psicologici cui spesso sono subordinate le teorie moderne costruite apposta per spiegare o controllare fenomeni economici più o meno complessi. Ciò non significa che quei presupposti od interessi non meritino accoglimento o considerazione. E' però necessario porli bene in chiaro, in forma esplicita, onde trasformare l' economia teorica, che é necessariamente astratta, in sia pure particolari economie concrete.

13. E' abbastanza evidente, e perciò non ci soffermeremo su questi casi, che le proprietà esposte nei §§ 1 a 5, con opportuni adattamenti,

---

19) Si procederà allora come nel § 3, pp. 47-51 della Mem. di S. CHERUBINO - M. PASSAQUINDICI cit. (17).

20) Parecchi di questi iconnvenienti e difficoltà sono menzionati nella mia Nota: O s s e r v a z i o n i s u l l e e c o n o m i e a s t r a t t e [Politica Economica, a. XLIX, s. III (Ottobre 1959), pp. 1559 - 1573].

valgono anche nella teoria del commercio internazionale, nella qualle i settori economici sono i singoli paesi che trafficano fra di loro. Le stesse proprietà valgono nell' economia aziendale, quando per settore economico si intenda ogni singolo reparto e ogni singola attività che, nell'insieme, costituiscono l' azienda o che da questa derivano la loro ragione di essere.

Sempre nel campo dell' economia, un caso notevole, concettualmente alquanto diverso dai tre mentovari, é quello degli investimenti fatti e dei redditi percepiti nei singoli settori. Le proprietà formali, in questo caso si presentano come in quelli che precedono e l' inversa della matrice [I — **a**] assume le funzioni del moltiplicatire Keynesiano del campo scalare ([21]).

Il concetto di economia astratta non vale soltanto nel campo dell' economia politica, ma anche, ad es:, in quelli della biologia e della fisica. E' perciò che diciamo, al plurale, «Economie astratte».

Nel campo biologico, gli n settori, possono essere n specie di animali viventi nello stesso ambiente dal quale ricevono il cibo e lo elaborano per distribuirlo alle altre specie o per restituirlo all' ambiente. Le produzioni sono le quantità di cibo elaborato dalle siugole specie; i consumi sono le quantità di cibo elaborato restituito all' ambiente; il cibo si esprime in calorie ed il calore (cioé il cibo) preso dall' ambiente (o dalle specie che costituiscono cibo per le altre) ha la funzione della forza - lavoro. Il prezzo p_r indica il numero di calorie che assorbe, in media, ogni individuo della specie r; il prezzo del lavoro, cioé dell' unità di calore, é 1; Z_s indica la quantità di calore, sempre espressa in calorie, assorbito dalla specie s per produrre l' unità di cibo elaborato; $p_{n+1} = 1$.

Nel campo della fisica, gli n settori possono essere n masse di gas (r e a l i) diversi mantenute alla stessa temperatura costante in un ambiente chiuso. Scontrandosi molecole del gas A con molecole del gas B nel tempo (t_0, t), $t_0 \leqq t \leqq t_1$, il primo cede al secondo la quantità di energia X_{AB} non negativa; la pressione del gas A sulle pareti del recipiente provoca, nello stesso tempo (t_0, t) una perdita Y_A di energia totale X_A di A, utilizzabile per un lavoro esterno. Se X_B é l'energia totale di B, sempre all' istante t, $X_{AB} : X_B = a_{AB}$ é il coefficiente di scambio di energia tra A e B al tempo t. Il carole fornito dall' esterno all' ambiente per mantenere costante la temperatura disimpegna la funzione del lavoro; prezzo

---

21) S. CHERUBINO: *Sulla matrice-moltiplicatore per un sistema economico diviso in settori* [«L' Industria» 1952 (n. 3) pp. 346 - 374]. Alcune censiderazioni di questa memoria provengono dall'interprezione dei coefficienti di scambio come propensioni marginali ai consumi, il che può farsi anche negli altri casi. Cfr. anche: R. M. GOODWIN: *The Multiplier as Maṭtrix* [«Economic Journal», London, vol. LIX, n. 236 (dic. 1949) pp. 503 - 514].

di A all' istante t é la quantità di calore acquistata o consumata dall' unità di massa di A nell' intervallo (t_0, t). L' energia cinetica posseduta da A all' istante t funziona da capitale investito nel settore A durante (t_0, t). Se in ogni istante t l' energia posseduta da ciascun gas può ritenersi proporzionale alla massa, per prezzo di A si può intendere la massa di A corrispondente all' energia unitaria. Per prezzo p_{n+1} del calore fornito dall' esterno s'intende la massa di un certo combustibile impiegato per produrre una caloria: con questo combustibile si esprimeranno, nel primo caso, anche i prezzi delle n masse gassose.

Altri esempi di fenomeni rappresentabili con una tabella quadrata di numeri non negativi, tabella soddisfacente alle proprità aritmetiche esposte in questo articolo, possono presentarsi in altri capitoli della fisica o in altra scienza. Si ottengono così altre economie astratte concretizzate con particolari ipotesi sulla natura dei settori, delle produzioni, dei prezzi e delle condizioni cui questi si vuole soddisfino.

Articoli per professore Salv. Cherubino sull' «analisi economica lineare» e sull' «economie astratte».

1. Sulla matrice-moltiplicatore per un sistema economico diviso in settori [«L'Industria» (1952) n. 3, pp. 346-376].
2. Sull'analisi lineare delle interdipendenze industriali [«L'Industria» (1954) n. 2., pp. 154-178].
3. Sui fondamenti matematici dell'equilibrio generale economico [«Industria» (1956) n. 3, pp. 302-336].
4. Sulle economie bipartite [Giorn degli Economisti (marzo-aprile 1957) pp. 162-173].
5. Sulla dinamica economica [Rend. Lincei, s. VIII, vol. XXII, (marzo 1957) pp. 281-285).
6. Su alcune proprietà delle economie ripartite in settori e sulla loro classificazione dinamica [«Politica Economica», a XLVII IIIs. (giugno 1957) pp. 406-421].
7. Sulle matrici quadrate non negative [Ann. Sc. Norm. Pisa, S. III, vol. X (1956) pp. 217-235].
8. Calcolo delle Matrici [C.N.R., Roma, Cremonese (1957) pp. VI–332].
9. Sui sistemi di diseguaglianze lineari e su alcune loro applicazioni [Ann. Sc. Norm. Pisa, s. III; vol. XII (1958) pp. 31-53] (collabor. di Maria Passaquindici).
10. Sull'evoluzione economica (Principi di economia astratta) [Rend. Mat. Roma, vol. 17 (1958) pp. 231-261].
11. Sulle economie astratte [«Politica Economica», a. XLVIII, III s., (nov. 1958) pp. 1193-1204].
12. Sulle matrici leonteviane e su un problema di programmazione lineare [«L'Industria» (1959) pp. 156-164].
13. Sul concetto di economia astratta [Rend. Lincei, s. VIII, vol. XXVI, (maggio 1959) pp. 654-661].
14. Osservazioni sulle economie astratte [«Politica Economica», a. XLIX, III s., (ottobre (1959) pp. 1559-1573].

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἀνάλυσις εἰσροῶν - ἐκροῶν καὶ ἀφῃρημένη οἰκονομία

Ἡ μελέτη αὕτη τοῦ καθηγητοῦ Cherubino διαιρεῖται εἰς τὰς ἀκολούθους ἓξ παραγράφους :

§ 1. Ἀλγεβρικαὶ ἰδιότητες τῆς μήτρας εἰσροῶν - ἐκροῶν.
§ 2. Ἀντιδράσεις τῆς ἀγορᾶς.
§ 3. Ἀνταγωνισμὸς καὶ οἰκονομικὴ διακύμανσις.
§ 4. Ταξινόμησις τῶν διαφόρων οἰκονομιῶν.
§ 5. Προγραμματισμός.
§ 6. Ἀφῃρημέναι καὶ συγκεκριμέναι οἰκονομίαι.

Εἰς τὴν πρώτην παράγραφον ὁ σ. ἀσχολεῖται μὲ τὰς σχέσεις μεταξὺ παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως ἢ τιμῶν καὶ ἀπασχολήσεως ἐν συσχετισμῷ πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἐπιδράσεις αὐτῶν ἐπὶ τῆς μήτρας εἰσροῶν - ἐκροῶν. Εἰς περίπτωσιν γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας αἱ σχέσεις αὗται ἐπιτρέπουν τὸν σαφῆ προσδιορισμὸν διανυσμάτων παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως, τιμῶν καὶ εἰσοδήματος. Εἰς περίπτωσιν ἐλλείψεως ἰσορροπίας ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς μεγίστων ἢ ἐλαχίστων διανυσμάτων παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως ἢ τιμῶν καὶ εἰσοδήματος.

Πρὸς περιγραφὴν τῶν ἀντιδράσεων τῆς ἀγορᾶς ἡ δευτέρα παράγραφος εἰσάγει ἓν σύστημα γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μεταξὺ τοῦ διανύσματος τῆς παραγωγῆς καὶ τῶν τιμῶν καὶ τοῦ διανύσματος τοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς αὐτῶν. Πολλοὶ ἐκ τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος δὲν προσδιορίζονται διὰ νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ προσαρμογὴ τοῦ συστήματος εἰς τὰς συνθέτους συνθήκας τῆς ἀγορᾶς. Ἐπειδὴ ἡ παραγωγὴ καὶ αἱ τιμαὶ ἐκφράζονται δι' ἑνὸς πολυεδρικοῦ κυρτοῦ κώνου προσδιοριζομένου ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν γραμμικῶν ἀνισοτήτων, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται εἰς τὴν πρώτην παράγραφον, τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τοῦ διαφορικοῦ συστήματος δίδει ἀνεκτὰς λύσεις μόνον ἂν οἱ συντελεσταὶ ἱκανοποιοῦν τὰς δεδομένας συνθήκας τῆς ἀγορᾶς.

Εἰς τὴν τρίτην παράγραφον προσδιορίζονται αἱ συνθῆκαι τοῦ πλήρους καὶ ἀτελοῦς ἀνταγωνισμοῦ. Ἐξετάζεται ἐπίσης ἡ δυνατότης κυματοειδοῦς συμπεριφορᾶς τῆς οἰκονομίας ὡς καὶ ἡ ἔντασις καὶ ἡ περίοδος τοῦ κυματισμοῦ τούτου.

Εἰς τὴν παράγραφον 4 ταξινομοῦνται αἱ οἰκονομίαι ἐπὶ τῇ βάσει τῆς τεχνολογικῆς μήτρας αὐτῶν. Πλεῖσται παρατηρήσεις σχετικῶς μὲ τὴν κατανάλωσιν, ἀπασχόλησιν κ.λ.π. διατυποῦνται εἰς τὴν παράγραφον ταύτην.

Τὸ ἀντικείμενον τῆς παραγράφου 5 εἶναι ὁ προγραμματισμός, δηλαδὴ ἡ θεωρητικὴ διερεύνησις τῆς δυνατότητος τῆς κατευθύνσεως τῆς οἰκονομίας πρὸς ἐκπλήρωσιν τεθέντων σκοπῶν. Ὑπὸ τοῦ σ. ἐκτίθεται συνοπτικῶς μία μέθοδος δράσεως πρὸς ἐπίτευξιν προγραμματισθέντων σκοπῶν.

Ἡ ἕκτη καὶ τελευταία παράγραφος ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς «ἀφῃρημένης οἰκονομίας» ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ μαθηματικαὶ ἰδιότητες τοῦ συστήματος δὲν ἐπηρεάζονται ἀπὸ ἐννοίας ὡς ἡ «παραγωγή», «τιμαί», «κατανάλωσις», «ἀπασχόλησις», «κλάδος οἰκονομίας», «ἀγορὰ» κλπ. Εἰς τὴν ἰδίαν παράγραφον δίδονται μερικὰ παραδείγματα ἀφῃρημένων συστημάτων ἀπὸ τὴν οἰκονομίαν, τὴν βιολογίαν καὶ τὴν φυσικήν. Γενικῶς τοιαῦτα ἀφῃρημένα συστήματα εἶναι δυνατὸν νὰ διαμορφωθοῦν καὶ διὰ ἄλλα φαινόμενα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γενικὰς ἰδιότητας τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν παράγραφον ταύτην.