Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Ὑπὸ τοῦ κ. Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

Ἡ μαθηματικὴ θεωρία τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαμόρφωσιν μιᾶς γενικῆς μεθόδου λύσεως τῶν γραμμικῶν προβλημάτων, γνωστῆς ὑπὸ τὸ ὄνομα «ἀλγόριθμος simplex». Ἡ μέθοδος αὕτη χαρακτηρίζεται ὡς «ἀνιχνευτικὴ» (iterative) διότι ἐξετάζει συστηματικῶς διαφόρους λύσεις πρὸς ἀνεύρεσιν τῆς «ἀρίστης». Σημειοῦμεν κατωτέρω μερικὰ ἐκ τῶν κυριωτέρων πλεονεκτημάτων τῆς μεθόδου simplex :

α) Καθιστᾷ δυνατὴν τὴν λύσιν προβλημάτων προγραμματισμοῦ μεγάλης κλίμακος εἰς σχετικῶς βραχὺ χρονικὸν διάστημα.

β) Παρέχει τὰ μέσα αὐτομάτου ἐλέγχου τῶν ὑπολογισμῶν ὡς ἐπίσης καὶ κριτήρια βάσει τῶν ὁποίων καθορίζεται ἂν ἐπετεύχθη ἡ «ἀρίστη» λύσις, ἢ ἂν πρέπει νὰ συνεχισθοῦν οἱ ὑπολογισμοί.

γ) Δίδει χρησίμους πληροφορίας ὡς πρὸς τὰς οἰκονομικὰς ἐπιδράσεις πάσης ἀποκλίσεως ἀπὸ τὴν «ἀρίστην λύσιν».

δ) Δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν κοινωνικοοικονομικῶν προβλημάτων τύπου Leontief, τὰ ὁποῖα λόγῳ τοῦ μεγέθους των ἀπαιτοῦν συνήθως χρῆσιν δαπανηρῶν ἀριθμομηχανῶν ([1]).

ε) Ἀπὸ ἀπόψεως ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν, γενικῶς, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν μεγάλων συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων ἢ ἀνισοτήτων.

στ) Τέλος, σημαντικὸν πλεονέκτημα εἶναι ἡ ἁπλότης τῆς μεθόδου. Ἀνειδίκευτος ὑπάλληλος γραφείου δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ ταύτην ἀποδοτικῶς μετὰ ὀλιγοήμερον ἐξάσκησιν ([2]).

Ἡ ἐπακολουθοῦσα ἀνάλυσις—ἡ ὁποία ἀπευθύνεται κυρίως εἰς τοὺς ἐνδιαφερομένους νὰ ἀποκτήσουν πρακτικὴν ἀντίληψιν τῆς ὑπολογιστικῆς τεχνικῆς τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ—δὲν προϋποθέτει ἰδιαιτέραν μαθηματικὴν κατάρτισιν τοῦ ἀναγνώστου καὶ ἀπαιτεῖ μόνον προσεκτικὴν παρακολούθησιν τῆς διαδικασίας τῶν ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν.

---

1. Ὁμοίως δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν λύσιν μιᾶς κατηγορίας προβλημάτων τῆς θεωρίας «παιγνίων» ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῶν ὁποίων ἀρχίζει νὰ ἀναγνωρίζεται σήμερον (Βλ. κεφ. 19, 20 καὶ 24 εἰς Koopmans, T C., ed «Activity analysis of production and allocation», Cowles Commission for Research in Economics, 1951).

2. Ἡ διατύπωσις βεβαίως τοῦ προβλήματος ἀπαιτεῖ σχετικὴν πεῖραν καὶ γνῶσιν τῶν εἰδικῶν συνθηκῶν ἑκάστης περιπτώσεως προγραμματισμοῦ.

Διατύπωσις καὶ λύσις ἑνὸς τυπικοῦ προβλήματος προγραμματισμοῦ

1. *Μερικαὶ διευκρινήσεις*

Θὰ παρακολουθήσωμεν τὴν διαδικασίαν ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου simplex εἰς ἓν πρόβλημα προγραμματισμοῦ τῆς φανταστικῆς ἐπιχειρήσεως Α. Προηγουμένως εἶναι ἀνάγκη νὰ διευκρινήσωμεν μαθηματικάς τινας ἐννοίας τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν.

α) Διάνυσμα: Ὑπὸ τὸν ὅρον διάνυσμα θὰ ἐννοοῦμεν ἐνταῦθα μίαν στήλην ἀριθμῶν ἐγγραφομένων καθ' ὡρισμένην τάξιν, π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Οἱ ἀριθμοί, 1, 4 καὶ 3 ἀποτελοῦν στοιχεῖα τοῦ διανύσματος:

β) Πρόσθεσις διανυσμάτων: ἡ πρόσθεσις τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν διανυσμάτων αὐτῶν π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Πρόσθεσις διανυσμάτων εἶναι δυνατὴ μόνον ὅταν τὰ ἐπὶ μέρους διανύσματα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων.

γ) Πολλαπλασιασμὸς διανύσματος ἐπὶ ἀριθμόν: ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἑκάστου τῶν στοιχείων τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Π.χ.:

$$2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

δ) Γραμμικὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων: τὸ ἄθροισμα (ἢ διαφορὰ) τῶν διανυσμάτων αὐτῶν ἑκάστου πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν[1].

$$2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Τοὺς ἀριθμοὺς 2, 5 καὶ 3 καλοῦμεν συντελεστὰς ἢ ἁπλῶς πολλαπλασιαστάς. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀνωτέρω παραστάσεως γίνεται βάσει τῶν λεχθέντων. Πολλαπλασιάζομεν, πρῶτον, ἕκαστον διάνυσμα ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον ἀριθμόν:

---

1. Ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ἐν συνεχείᾳ προσθέτομεν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα καὶ λαμβάνομεν τελικῶς τὸ διάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 46 \\ 32 \\ 40 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Τὰς ἁπλᾶς αὐτὰς ἐννοίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν κατωτέρω. Οὐδεμία ἄλλη μαθηματικὴ γνῶσις ἀπαιτεῖται πρὸς παρακολούθησιν τῆς ἀναλύσεως, πλὴν βεβαίως στοιχειώδους ἀριθμητικῆς.

2. *Διατύπωσις τοῦ προβλήματος*

Ὑποθέσεις Α. Κατὰ τὸν χρόνον τοῦ ὑπολογισμοῦ ἡ ἐπιχείρησις Α δύναται νὰ διαθέσῃ 100, 80, 150 μονάδας (1) ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ ἀντιστοίχως. Τὸν περιορισμὸν αὐτὸν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὑπὸ μορφὴν διανύσματος:

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Τὸ σύμβολον Π_0 παριστᾷ συνοπτικῶς τὸ ἀνωτέρω διάνυσμα. Ἀνάλογα σύμβολα θὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις κατωτέρω. Τὸ Π_0 θὰ καλέσωμεν «διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν».

Β. Ἡ ἐπιχείρησις Α ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της πέντε διαφόρους παραγωγικὰς διαδικασίας, τὰς ὁποίας θὰ ἐκφράσωμεν διὰ τῶν διανυσμάτων Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, Π_5:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Pi_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Pi_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Τὰ ἀνωτέρω διανύσματα θὰ ὀνομάσωμεν «διανύσματα δράσεως» (2). Τὸ Π_1 σημαίνει ὅτι πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐξ ἑνὸς ὡρισμένου ἀγαθοῦ (3), ἀπαιτοῦνται 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α, 2 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β

1. Αἱ «μονάδες» μετρήσεως καθορίζονται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

2. Structural or activity vectors.

3. Αἱ διάφοροι παραγωγικαὶ διαδικασίαι δυνατὸν νὰ παράγουν ἑτεροειδῆ ἢ ὁμοειδῆ ἀγαθά. Ἐνταῦθα θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι παράγουν ἑτεροειδῆ ἀγαθά.

καὶ οὐδεμία μονὰς ἐκ τοῦ συντελεστοῦ γ(1). Ἀναλόγως ἑρμηνεύονται καὶ τὰ λοιπὰ διανύσματα.

Γ. Ἡ ἐπιχείρησις Α δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ταυτοχρόνως παραγωγικὰς διαδικασίας καὶ εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον δράσεως —ἂν βεβαίως αἱ συνολικῶς ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν δὲν ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια τὰ ὁποῖα καθορίζει τὸ διάνυσμα Π_0.

Δ. Τὸ καθαρὸν κέρδος ἐκ τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν (=διανυσμάτων δράσεως) Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5 χρησιμοποιουμένων εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος, εἶναι 2, 2, 3, 4 καὶ 6 νομισματικαὶ μονάδες ἀντιστοίχως. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ κέρδους ἀφαιρεῖται τὸ κατὰ μονάδα κόστος ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν ἀντιστοίχων ἀγαθῶν (2).

Αἱ ἀνωτέρω ὑποθέσεις καθορίζουν τὰς τεχνολογικὰς καὶ οἰκονομικὰς συνθήκας ἐντὸς τῶν ὁποίων δύναται νὰ κινηθῇ ἡ ἐπιχείρησις Α.

Τὸ πρόβλημα τώρα εἶναι νὰ καθορισθῇ βάσει τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν τὸ πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως. Τοῦτο σημαίνει καθορισμόν: α) τοῦ εἴδους τῶν χρησιμοποιηθησομένων παραγωγικῶν διαδικασιῶν καὶ β) τοῦ ἐπιπέδου δράσεως αὐτῶν, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐπιχείρησις νὰ ἐπιτύχῃ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος ἐκ τῆς πωλήσεως τῶν προϊόντων.

Ἂν θέσωμεν λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 καὶ λ_5, διὰ τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα δράσεως τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 καὶ Π_5 ἀντιστοίχως, τότε ἡ συνάρτησις $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5$$

ἐκφράζει τὸ κέρδος τὸ ὁποῖον ἡ ἐπιχείρησις ἐπιδιώκει νὰ καταστήσῃ μέγιστον ὑπὸ τὰς ἐνταῦθα ὑποθέσεις (3). Προφανῶς μερικὰ λ δυνατὸν νὰ λάβουν τιμὴν μηδέν (4), ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίστοιχος παραγωγικὴ διαδικασία δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ πρόγραμμα.

Ὁ τελικὸς περιορισμὸς τοῦ προγράμματος δράσεως τίθεται βεβαίως ὑπὸ τῆς ὑπαρχούσης ποσότητος συντελεστῶν παραγωγῆς. Δέον συνεπῶς νὰ εἶναι:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 \leqslant \Pi_0 \qquad (1)$$

---

1. Οἱ α, β, γ θεωροῦνται συντελεσταὶ παραγωγῆς ἀπὸ ἐπιχειρηματικῆς ἀπόψεως καὶ δὲν ἀνταποκρίνονται κατ' ἀνάγκην εἰς τὴν κλασσικὴν διαίρεσιν: ἐργασία, ἔδαφος, κεφάλαιον. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ πρόβλημα οἱοσδήποτε ἀριθμὸς παραγωγικῶν συντελεστῶν. Ὁ συντελεστὴς α ἐνταῦθα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς «χρηματικὸν κεφάλαιον», ὁπότε ἐξηγεῖται εὐκόλως πῶς εἶναι δυνατὴ ἡ παραγωγὴ μὲ δύο μόνον συντελεστὰς εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις.

2. Δυνατὸν τὸ κέρδος νὰ ὑπολογίζεται βάσει προβλεπομένων τιμῶν.

3. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τῆς παραγωγικῆς διαδικασίας Π_1 εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς μονάδος εἶναι 2. Ἂν συνεπῶς λ_1 εἶναι τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς Π_1 τότε θὰ ἔχωμεν $2\lambda_1$ διὰ τὸ συνολικὸν κέρδος ἐκ τῆς παραγωγικῆς ταύτης διαδικασίας. Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς διαδικασίας καὶ προσθέτοντες τὰ ἐπὶ μέρους γινόμενα λαμβάνομεν τὴν συνάρτησιν κέρδους $\varphi(\lambda)$.

4. Ὄχι ὅμως καὶ ἀρνητικήν.

ἤ, ἐκφράζοντες ἀριθμητικῶς τὰ διανύσματα:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 150 \end{bmatrix}$$

ἢ ἀναλυτικώτερον (συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ὑπὸ στοιχ. 1. δ λεχθέντα):

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 100 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 80 \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 &\leqslant 150 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ἡ σημασία τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων εἶναι προφανής: Ἡ πρώτη σημαίνει ὅτι ἡ συνολικῶς δαπανωμένη ποσότης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ προγράμματος δράσεως δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν συνολικῶς διατιθεμένην ποσότητα τῶν 100 μονάδων τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ. Ἀνάλογος ἑρμηνεία πρέπει νὰ δοθῇ καὶ εἰς τὰς ἄλλας δύο ἀνισότητας. Οὕτω τὸ σύστημα (2) σημαίνει ὅτι αἱ ὑπὸ τοῦ προγράμματος προβλεπόμεναι συνολικαὶ ποσότητες τῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνουν τὰς ἀντιστοίχως διαθεσίμους ποσότητας τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Συνοπτικῶς λοιπὸν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιχειρήσεως Α δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ (μὴ ἀρνητικαὶ) τιμαὶ τῶν λ, ὥστε:

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \text{μέγιστον}$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 \leqslant \Pi_0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν ἐν τούτοις εἶναι ἀνάγκη, διὰ λόγους διευκολύνσεως τῶν ὑπολογισμῶν, ὅπως μετατρέψωμεν τὰς ἀνωτέρω ἀνισότητας εἰς ἰσότητας. Ἡ μετατροπὴ μιᾶς ἀνισότητος εἰς ἰσότητα γίνεται δι' ἁπλῆς προσθήκης εἰς τὸ ἀσθενέστερον μέρος τῆς ἀνισότητος τῆς διαφορᾶς, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνισότητος ταύτης. Π.χ. ἡ ἀνισότης $5<8$ μετατρέπεται εἰς ἰσότητα ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τὴν διαφορὰν $8-5=3$. Ἡ ἀκολουθουμένη ἐνταῦθα διαδικασία μετατροπῆς τῶν ἀνισοτήτων εἰς ἰσότητας δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς. Ὁρίζομεν τρία νέα διανύσματα Π_6, Π_7, Π_8, τοιαῦτα ὥστε:

$$\Pi_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \Pi_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \Pi_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Οἰκονομικῶς, τὸ Π_6 σημαίνει ὅτι ἐπιτρέπει τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α. Τὰ Π_7 καὶ Π_8 ἐπιτρέπουν τὴν μὴ χρησιμοποίησιν μιᾶς μονάδος ἐκ τῶν συντελεστῶν β καὶ γ ἀντιστοίχως. Τὰ δύο μηδενικὰ εἰς ἕκαστον διάνυσμα σημαίνουν ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ δὲν ἀπαιτεῖ δαπάνας ἐκ τῶν δύο ἄλλων συντελεστῶν. Λόγῳ τῆς οἰκονομικῆς των σημασίας θὰ ὀνομάσωμεν τὰ Π_6, Π_7 καὶ Π_8 «διανύσματα ἀδρανείας» (1).

Ἂν τώρα ὡρισμέναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς μένουν ἀχρησιμοποίητοι, διότι εἶναι πολλάκις τεχνικῶς ἀδύνατος ἡ χρησιμοποίησις ὡρισμένων ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ ἄνευ ἀντιστοίχων ποσοτήτων ἐκ τῶν ἄλλων συντελεστῶν (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν), τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα ἀδρανείας πρέπει νὰ περιλαμβάνωνται εἰς τὸ πρόγραμμα δράσεως ὑπὸ κατάλληλα ἐπίπεδα. Θὰ ὀνομάσωμεν τὰ ἐπίπεδα ταῦτα «ἐπίπεδα ἀδρανείας», καθόσον χρησιμοποίησις εἰς οἱονδήποτε ἐπίπεδον ἑνὸς διανύσματος ἀδρανείας, σημαίνει ἁπλῶς μὴ χρησιμοποίησιν ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς. Αἱ τιμαὶ τῶν ἐπιπέδων ἀδρανείας δὲν δύνανται νὰ εἶναι μικρότεραι τοῦ μηδενὸς (δηλαδὴ ἀρνητικαί), οὔτε μεγαλύτεραι τῶν ποσοτήτων τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν.

Ἂν θέσωμεν λ_6. λ_7, λ_8 διὰ τὰ ἐπίπεδα ἀδρανείας Π_6, Π_7 καὶ Π_8 ἀντιστοίχως, τότε ἡ παράστασις (1) γίνεται:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 + \lambda_6\Pi_6 + \lambda_7\Pi_7 + \lambda_8\Pi_8 = \Pi_0 \qquad (3)$$

καὶ ἀναλυτικῶς:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_5 + 1\lambda_6 + 0\lambda_7 + 0\lambda_8 &= 100 \\ 2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 + 0\lambda_6 + 1\lambda_7 + 0\lambda_8 &= 80 \\ 0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1\lambda_4 + 2\lambda_5 + 0\lambda_6 + 0\lambda_7 + 1\lambda_8 &= 150 \end{aligned} \qquad (4)$$

Τὸ σύστημα (4) σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον τῶν παραγωγικῶς χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων συντελεστῶν σὺν τῷ συνόλῳ τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ποσοτήτων αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὰς συνολικῶς διαθεσίμους ποσότητας συντελεστῶν.

Ἂν τέλος ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ζημιοῦται ἡ ἐπιχείρησις A ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ὡρισμένων ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν (2), τότε τὸ καθαρὸν ἀποτέλεσμα ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὸ πρόγραμμα ὑφ' οἱονδήποτε ἐπίπεδον εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις $\varphi(\lambda)$ μένει ἀμετάβλητος.

Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λάβῃ ὁριστικὴν διατύπωσιν ὡς ἀκολούθως:

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ (μὴ ἀρνητικαὶ) τιμαὶ τῶν λ, τοιαῦται ὥστε:

$$\varphi(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 6\lambda_5 = \text{μέγιστον} \qquad (5)$$

ὑπὸ τὸν περιορισμόν:

$$\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2 + \lambda_3\Pi_3 + \lambda_4\Pi_4 + \lambda_5\Pi_5 + \lambda_6\Pi_6 + \lambda_7\Pi_7 + \lambda_8\Pi_8 = \Pi_0 \qquad (6)$$

---

1. Slack vectors ἢ disposable activities.

2. Δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ διαφυγὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν. Πάντως εἶναι ἐνδεχόμενον ὅπως ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων συντελεστῶν προκαλῇ ζημίας, ἂν π.χ. δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ διατήρησις καὶ ἐπαναχρησιμοποίησις αὐτῶν. (Βλ. καὶ ὑπ' ἀριθ. 2 παρατήρησιν εἰς 4 κατωτέρω).

Ἡ παράστασις (6), ἡ ὁποία εἶναι περιληπτικὴ μορφὴ τοῦ συστήματος (4), ἐπιδέχεται διαφόρους λύσεις. Ἡ ἐπιχείρησις Α ἐνδιαφέρεται μόνον δι' ἐκείνην τὴν λύσιν ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ ταυτοχρόνως τὴν (5), ἤτοι καθιστᾷ μέγιστον τὸ ἀναμενόμενον κέρδος. Ἡ μέθοδος simplex, περὶ τῆς ὁποίας ὡμιλήσαμεν εἰς τὸ προηγούμενον τμῆμα, χρησιμοποιεῖται ἀκριβῶς πρὸς ἀνίχνευσιν τῆς λύσεως ταύτης διὰ συστηματικῆς ἐξετάσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ λύσεων.

Π ρ ῶ τ ο ν σ τ ά δ ι ο ν ὑ π ο λ ο γ ι σ μ ῶ ν. Ἐκλέγομεν ὡς ἀφετηρίαν τῶν ὑπολογισμῶν τὴν ἁπλουστέραν «δυνατὴν» [1] λύσιν θέτοντες $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ καὶ $\lambda_6 = 100$, $\lambda_7 = 80$, $\lambda_8 = 150$ [2]. Ἡ λύσις αὕτη σημαίνει ὅτι οὐδεμία παραγωγικὴ διαδικασία χρησιμοποιεῖται (ἐφ' ὅσον τὰ ἐπίπεδα δράσεως τῶν διαθεσίμων παραγωγικῶν διαδικασιῶν εἶναι μηδέν), αἱ δὲ διατιθέμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραμένουν ἀχρησιμοποίητοι (ἤτοι ἀπορροφῶνται ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα λ_6, λ_7, λ_8 λαμβάνουν τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμήν). Κατὰ συνέπειαν καὶ τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι μηδέν :

$$\varphi(\lambda) = 2 \times 0 + 2 \times 0 + 3 \times 0 + 4 \times 0 + 6 \times 0$$

Πρὶν προχωρήσωμεν πρὸς εὕρεσιν καλλιτέρας λύσεως θὰ καταγράψωμεν συστηματικῶς τὰ τεχνικὰ καὶ οἰκονομικὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν ἀρχικὴν λύσιν ὡς κατωτέρω :

Πινάκιον α'.

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
↓	Β	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
	Π_6	100	1			2	2	1	2	2
	Π_7	80		1		2		1	1	2
	Π_8	150			1		1	2	1	2
Ο.Κ.	→					−2	−2	−3	−4	−6

Ἐὰν ἀφήσωμεν πρὸς στιγμὴν κατὰ μέρος τὴν τελευταίαν σειράν, τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ πινακίου εἶναι μᾶλλον σαφές.

α) Κάτωθεν τοῦ στοιχείου Β, τὸ ὁποῖον συμβολίζει τὴν λέξιν «βάσις»,

1. «Δυνατὴ» λύσις σημαίνει λύσις ἱκανοποιοῦσα τὴν παράστασιν (6) ὄχι ὅμως κατ' ἀνάγκην καὶ τὴν (5).

2. Οἱ λόγοι τῆς ἐκλογῆς αὐτῆς ἀναφέρονται κατωτέρω.

ἐγγράφονται τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα πρὸς κατάστρωσιν τοῦ ἑκάστοτε προγράμματος [1].

β) Κάτωθεν τοῦ Π_0 σημειοῦνται αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς α, β, γ. Ταυτοχρόνως ὅμως οἱ αὐτοὶ ἀριθμοὶ παριστοῦν τὰ ἐπίπεδα δράσεως (ἢ ἀδρανείας, ὡς ἐν προκειμένῳ) τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων τῆς βάσεως· ὡς δεικνύεται εἰς τὸ πινάκιον, αἱ 100, 80 καὶ 150 μονάδες ἐκ τῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ ἀντιστοίχως, καθορίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων Π_6, Π_7 καὶ Π_8. Οὕτω αἱ στῆλαι κάτωθεν τῶν Β καὶ Π_0 παριστοῦν ὁμοῦ τὸ ἑκάστοτε ἐκλεγόμενον πρόγραμμα δράσεως, ὡς καθορίζουσαι τὰ ἐκλεγόμενα διανύσματα καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.

γ) Εἰς τὰς ὑπολοίπους στήλας τοῦ πινακίου ἀναγράφονται πάντα τὰ χρησιμοποιούμενα διανύσματα (δράσεως ἢ ἀδρανείας) μετὰ τῶν στοιχείων αὐτῶν. Τὰ μηδενικὰ στοιχεῖα δὲν ἀναγράφονται. Κατὰ τὴν ταξινόμησιν τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἐτέθησαν πρὸ τῶν διανυσμάτων δράσεως διὰ λόγους εὐχερείας ὑπολογισμῶν.

δ) Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι πάντα τὰ διανύσματα $\Pi_0, \Pi_1, \ldots . \Pi_8$ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ [2] τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως Π_6, Π_7, Π_8.

Ἂν λάβωμεν π.χ. τὸ διάνυσμα διαθεσίμων συντελεστῶν Π_0 δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$\Pi_0 = 100\,\Pi_6 + 80\,\Pi_7 + 150\,\Pi_8$$

$$= 100\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 80\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 150\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}100\\80\\150\end{bmatrix} = \Pi_0$$

Εἰς τὸν ἀνωτέρω γραμμικὸν συνδυασμὸν ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων ἐτέθησαν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ διανύσματος Π_0. Ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ εἶναι ὅτι αἱ ὑπάρχουσαι ποσότητες τῶν συντελεστῶν α, β, γ, διατίθενται ἐξ ὁλοκλήρου, ἂν τὸ ἐκλεγόμενον πρόγραμμα περιλαμβάνῃ τὸ διάνυσμα Π_6 εἰς ἐπίπεδον 100, τὸ διάνυσμα Π_7 εἰς ἐπίπεδον 80 καὶ τὸ διάνυσμα Π_8 εἰς ἐπίπεδον 150. «Διατίθενται ἐξ ὁλοκλήρου» σημαίνει ἐνταῦθα — λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος — ὅτι δὲν χρησιμοποιοῦνται. Ἡ ἑρμηνεία εἶναι προφανῶς πλέον ἐνδιαφέρουσα ὅταν εἰς τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνωνται καὶ διανύσματα δράσεως (= παραγωγικαὶ διαδικασίαι), ὡς συμβαίνει εἰς τὰ πινάκια β' καὶ γ' κατωτέρω.

Ὁμοίως, τὸ διάνυσμα Π_4 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς :

$$\Pi_4 = 2\Pi_6 + 1\Pi_7 + 1\Pi_8$$

$$= 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \Pi_4$$

1. Θὰ καλοῦμεν ἐνίοτε τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος διανύσματα βάσεως.
2. Βλέπε τὰ ὑπὸ στοιχεῖα δ λεχθέντα της παραγρ. 1 τοῦ παρόντος τμήματος.

Εἰς τὸν συνδυασμὸν αὐτὸν ἐτέθησαν ὁμοίως ὡς πολλαπλασιασταὶ τῶν διανυσμάτων τὰ στοιχεῖα τοῦ Π_4. Γενικῶς πᾶν διάνυσμα τοῦ πινακίου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐκλεγομένου προγράμματος, ἂν θέσωμεν ὡς πολλαπλασιαστὰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

Ποία τώρα εἶναι ἡ οἰκονομικὴ ἔννοια τῆς ἐκφράσεως ἑνὸς διανύσματος δράσεως, π.χ. τοῦ Π_4, ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Σκεπτόμενοι ὡς καὶ προηγουμένως, δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἔννοιαν ταύτην ὡς ἑξῆς: Αἱ ἀπαιτούμεναι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν π.χ. τοῦ διανύσματος δράσεως Π_4, εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος, ἰσοῦνται ἀκριβῶς πρὸς τὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι ἀπορροφῶνται ἀπὸ τὰ διανύσματα: Π_6 εἰς ἐπίπεδον 2, Π_7 εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ Π_8 εἰς ἐπίπεδον 1. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἔχομεν ἐνώπιόν μας δύο διαφόρους συνδυασμοὺς τῆς αὐτῆς ποσότητος παραγωγικῶν συντελεστῶν. Δεδομένου ὅτι εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ γνωρίζωμεν τὸ καθαρὸν κέρδος ἑκάστου συνδυασμοῦ (διότι δίδεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος τὸ ὑφ' ἑκάστου διανύσματος ἀναμενόμενον καθαρὸν κέρδος), δυνάμεθα νὰ ἀποφασίσωμεν ἐὰν συμφέρῃ ἢ ὄχι ἡ ἀφαίρεσις ποσοτήτων συντελεστῶν ἀπὸ τὰ διανύσματα τοῦ προγράμματος, διὰ τὴν δραστηριοποίησιν ἑνὸς νέου διανύσματος. Ἐνταῦθα βεβαίως ἡ σύγκρισις αὕτη γίνεται αὐτομάτως διότι γνωρίζομεν ὅτι τὰ διανύσματα ἀδρανείας δίδουν μηδὲν καθαρὸν κέρδος, ὁπότε συμφέρει ὁπωσδήποτε ἡ εἰσαγωγὴ ἑνὸς διανύσματος δράσεως εἰς τὸ πρόγραμμα. Ὅταν ὅμως τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνῃ ἤδη διανύσματα δράσεως (ὡς εἰς τὰ ἑπόμενα πινάκια β' καὶ γ') τότε ἡ ἀνωτέρω σύγκρισις διὰ τοῦ τεχνάσματος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ εἶναι βασικὴ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς καλλιτέρας δυνατῆς λύσεως [1].

Ὡς θὰ παρετήρησεν ὁ ἀναγνώστης τὰ διανύσματα $\Pi_0, \Pi_1 \ldots \Pi_8$ ἐκφραζόμενα ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, δὲν ἀλλάσουν ἀριθμητικὴν μορφήν, παραμένοντα ὡς ἀκριβῶς ἐδόθησαν ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ προβλήματος. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει μόνον εἰς τὸ πρῶτον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν, λόγῳ τῆς ἀριθμητικῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας [2] τὰ ὁποῖα ἐξελέγησαν εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Οὕτω ἐκλέγοντες ὡς ἀφετηρίαν ἓν πρόγραμμα ἀπαρτιζόμενον ἀπὸ τὰ διανύσματα ἀδρανείας εἰς οὐδένα

1. Πᾶν διάνυσμα ἀδρανείας δύναται ἐπίσης νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος. Ἡ ἔννοια τοῦ συνδυασμοῦ αὐτοῦ δύναται νὰ καθορισθῇ κατ' ἀναλογίαν τῶν λεχθέντων διὰ τὰ λοιπὰ διανύσματα, λαμβανομένης βεβαίως ὑπ' ὄψιν τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας.

2. Ἐπειδὴ δηλαδὴ περιέχουν ἀνὰ μίαν μονάδα καὶ δύο μηδενικὰ ἕκαστον κατὰ τρόπον ὥστε χρησιμοποιούμενα εἰς τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν ἀφήνουν τὴν ἀριθμητικὴν φύσιν τῶν ἄλλων διανυσμάτων ἀναλλοίωτον. Μαθηματικῶς τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἀποτελοῦν τὴν ἀρχικὴν «βάσιν» τοῦ συστήματος ἢ τὰς συντεταγμένας ἑνὸς χώρου ν διαστάσεων ($\nu =$ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν) βάσει τῶν ὁποίων δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τὰ ὑπόλοιπα διανύσματα τοῦ προβλήματος, κείμενα ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χώρου.

σχεδὸν ὑπολογισμὸν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προβῶμεν κατὰ τὴν κατάστρωσιν τοῦ πρώτου πινακίου. Ἀρκεῖ νὰ καταγράψωμεν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν σειρὰν (πινάκ. α'). Οὗτος εἶναι εἷς ἐκ τῶν λόγων χρησιμοποιήσεως διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Ἕτερος, πλέον οὐσιώδης λόγος, εἶναι ὅτι διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἀποφεύγεται ἡ ὑπερπήδησις τῆς «ἀρίστης» δυνατῆς λύσεως, ἐφ' ὅσον ἀρχίζομεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀπὸ τὴν λύσιν ἐκείνην ἡ ὁποία δίδει καθαρὸν κέρδος μηδέν.

ε) Τὰ στοιχεῖα Κ.Κ. εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον τοῦ πινακίου σημαίνουν «καθαρὸν κέρδος». Ἡ φορὰ τῶν βελῶν δεικνύει ὅτι τὰ τετραγωνίδια τῆς ἔναντι σειρᾶς καὶ τῆς κάτωθεν στήλης χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἑκάστου διανύσματος. Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα ἀδρανείας ἔχουν καθαρὸν κέρδος μηδέν, τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια μένουν κενά, ἀναγράφεται δὲ μόνον τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ διανύσματα δράσεως, κατὰ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος.

στ) Εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου, ἔναντι τῶν στοιχείων Ο.Κ. (=ὁριακὸν κέρδος) ἐγγράφεται ἡ διαφορὰ καθαροῦ κέρδους ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς ὑπὸ στοιχεῖον δ ἀνωτέρω ὑποδειχθείσης συγκρίσεως. Ἂς ὑποθέσωμεν π.χ. ὅτι θέλωμεν νὰ καθορίσωμεν ποίαν ἐπίδρασιν θὰ ἔχῃ ἐπὶ τοῦ καθαροῦ κέρδους ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος δράσεως Π_3. Πρῶτον, ἐκφράζομεν τοῦτο ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως κατὰ τὰ γνωστά:

$$\Pi_3 = 1 \cdot \Pi_6 + 1 \cdot \Pi_7 + 2 \cdot \Pi_8$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις σημαίνει ὅτι ἡ ἀπαιτουμένη ποσότης συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ Π_3 εἰς ἐπίπεδον δράσεως 1, εἶναι ἴση μὲ τὰς ποσότητας συντελεστῶν τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν μὲ διάνυσμα Π_6 εἰς ἐπίπεδον 1, τὸ διάνυσμα Π_7 εἰς ἐπίπεδον 1 καὶ τὸ διάνυσμα Π_8 εἰς ἐπίπεδον 2.

Δεύτερον, συγκρίνομεν τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδουν οἱ δύο ἀνωτέρω συνδυασμοὶ [1] τῶν αὐτῶν ποσοτήτων συντελεστῶν παραγωγῆς. Γνωρίζομεν ὅτι πάντα τὰ διανύσματα ἀδρανείας φέρουν ἐξ ὑποθέσεως καθαρὸν κέρδος μηδὲν (ἤτοι, $1 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 0 = 0$, ὅπου τὰ τρία πρῶτα μηδενικὰ εἶναι τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν Π_6, Π_7, Π_8), τὸ δὲ Π_3 εἰς τὸ ἐπίπεδον δράσεως τῆς μονάδος φέρει κέρδος 3. Συγκρίνοντες συνεπῶς λαμβάνομεν $0 - 3 = -3$, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ ὁριακὸν κέρδος τοῦ διανύσματος Π_3 εἶναι 3 μονάδες [2]. Ἑπομένως ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ Π_3 εἰς τὸ πρόγραμμα δύναται νὰ βελτιώσῃ τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως. Κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον γίνεται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ «ὁριακοῦ κέρδους» ὅλων τῶν διανυσμάτων.

---

1. Ὡς παριστῶνται ἐκ τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως.

2. Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον τοῦ ὁριακοῦ κέρδους ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ Π_3 τίθεται ὡς ἀφαιρέτης, δὲν πρέπει δὲ νὰ ἐκλαμβάνεται ὡς ὁριακὴ ζημία ἡ ὁποία σημειοῦται διὰ θετικοῦ σημείου. Ὁ τρόπος αὐτὸς παρουσιάσεως ἔχει ὡρισμένα πλεονεκτήματα ἀπὸ ἀπόψεως ὑπολογισμοῦ.

Γενικῶς ὅταν ὑπάρχῃ ἓν ἢ περισσότερα ἀρνητικὰ στοιχεῖα εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου, βελτίωσις τοῦ συνολικοῦ κέρδους εἶναι δυνατὴ δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὸ πρόγραμμα ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων. Κατ' ἀντιστοιχίαν ὅταν ἓν στοιχεῖον εἶναι θετικὸν ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος μειώνει τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως, ὡς τοῦτο καθορίζεται ὑπὸ τοῦ ἤδη ἐκλεγέντος προγράμματος. Ὅταν ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου εἶναι μηδέν, οὔτε κέρδος οὔτε ζημία προκαλοῦνται ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων εἰς τὸ πρόγραμμα.

Λόγῳ τῆς φύσεως τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας, τὰ ὁποῖα δίδουν κέρδος μηδέν, οὐδεμία σχεδὸν σκέψις ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατάρτισιν τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου α'. Ἁπλῶς ἐγγράφομεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

Κατόπιν τῶν ὅσων ἤδη ἐλέχθησαν, ἁπλῆ ἐπισκόπησις τοῦ πινακίου α' δεικνύει ὅτι ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἐπιτύχῃ καθαρὸν κέρδος ἂν μεταβάλῃ τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα. Τὸ πρόβλημα εἶναι τώρα πῶς θὰ γίνῃ ἡ μεταβολή. Εἰδικώτερον πρέπει νὰ καθορισθοῦν: α) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ πρόγραμμα, β) Ποῖον διάνυσμα πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος.

Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιχείρησις ἐνδιαφέρεται διὰ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος, λογικὸν εἶναι νὰ ἐπιζητῆται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον δίδει τὸ μεγαλύτερον ὁριακὸν κέρδος. Ἐνταῦθα τὸ διάνυσμα αὐτὸ εἶναι τὸ Π_5 εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ κέρδος 6 μονάδες. Γενικῶς, ἐπιβάλλεται ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, ὁ εὑρισκόμενος εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πινακίου [1].

Πρὸς καθορισμὸν τοῦ διανύσματος τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ προγράμματος, ἀντικαθιστώμενον ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως: Ἐφ' ὅσον Π_5 εἶναι τὸ πλέον ἐπικερδὲς διάνυσμα, συμφέρει ἡ χρησιμοποίησις αὐτοῦ εἰς τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ποσότητος τῶν ἐν ἀδρανείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, κυρίως δὲ [2] ἐκ τῆς ποσότητος τοῦ ἐν σχετικῇ (ὡς πρὸς τὰς τεχνολογικὰς συνθήκας τοῦ Π_5) ἀνεπαρκείᾳ εὑρισκομένου συντελεστοῦ. Ὁ ἐν σχετικῇ ἀνεπαρκείᾳ συντελεστὴς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μικρότερον ἐκ τῶν πηλίκων, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται ἂν διαιρέσωμεν τὰς ποσότητας καὶ τῶν τριῶν συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ Π_5. Ἐνταῦθα ἔχομεν $100/2=50$, $80/2=40$, $150/2=75$, συνεπῶς ὁ συντελεστὴς β εἶναι ὁ ἐν σχετικῇ

1. Ἂν ὑπάρχουν εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν δύο ἢ περισσότεροι ἴσοι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ μὲ ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέραν τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῶν ἄλλων ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐκλέγεται πρὸς εἰσαγωγὴν εἰς τὸ πρόγραμμα οἱονδήποτε ἐκ τῶν διανυσμάτων τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς ἴσους ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

2. Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν.

ἀνεπαρκείᾳ εὑρισκόμενος καὶ καθορίζει ἀνώτατον ἐπίπεδον δράσεως τοῦ Π_5 40 μονάδας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁλόκληρος ἡ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β ($40 \times 2 = 80$) χρησιμοποιεῖται ὑπὸ τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα Π_7 (τὸ ὁποῖον ὑποδηλοῖ ἀδράνειαν τοῦ συντελεστοῦ β), δὲν ἔχει θέσιν εἰς τὸ πρόγραμμα. Γενικῶς, πρὸς καθορισμὸν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος: Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ Π_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν (1) στοιχείων τοῦ εἰσερχομένου διανύσματος καὶ καθορίζομεν ἐν συνεχείᾳ ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα τὸ διάνυσμα τοῦ προγράμματος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ μικρότερον πηλίκον (2). Τὸ εἰσερχόμενον» διάνυσμα Π_5 καὶ τὸ «ἐξερχόμενον» διάνυσμα Π_7 καταδεικνύονται διὰ τῶν ἐντόνων καθέτων καὶ ὁριζοντίων γραμμῶν τοῦ πινακίου.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ περατοῦται τὸ πρῶτον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν. Μηχανικῶς αἱ μέχρι τοῦδε ὑποδειχθεῖσαι κινήσεις ἔχουν ὡς ἀκολούθως :

α) Κατάστρωσις τοῦ πινακίου α' βάσει δοθεισῶν πληροφοριῶν : ἐγγραφὴ εἰς τὸ πινάκιον τῶν διανυσμάτων δράσεως καὶ ἀδρανείας κατὰ τὴν ὑποδειχθεῖσαν τάξιν· ἐγγραφὴ τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ καθαρὰ κέρδη τῶν διανυσμάτων εἰς τὰ οἰκεῖα τετραγωνίδια τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ πινακίου· ἐγγραφὴ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου (βλ. πινάκ. α').

β) Καθορισμὸς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος βάσει τοῦ ἀρνητικοῦ στοιχείου μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, τοῦ εὑρισκομένου εἰς τὴν τελευταίαν σειράν.

γ) Καθορισμὸς τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος βάσει τοῦ μικροτέρου ἐκ τῶν πηλίκων τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ Π_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν στοιχείων τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος.

Καταφαίνεται ὅτι ὁ χρόνος τοῦ μηχανικοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ πινακίου α' εἶναι ἐλάχιστος.

Δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν. Μὲ ἀφετηρίαν τὰς πληροφορίας τοῦ πινακίου α', προχωροῦμεν εἰς τὸ δεύτερον στάδιον τῶν ὑπολογισμῶν ἐκ τῶν ὁποίων τελικῶς συντίθεται τὸ πινάκιον β'.

---

1. Δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν τὰ μηδενικὰ καὶ τὰ ἀρνητικὰ στοιχεῖα.

2. Ἂν εὑρεθοῦν δύο ἢ περισσότερα πηλίκα ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως : Διαιροῦμεν τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀμέσως δεξιὰ τῶν διαιρετέων τῶν ἴσων πηλίκων (καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου κατὰ σειρὰν διανύσματος ἀδρανείας), διὰ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ «εἰσερχομένου», διανύσματος· τὸ διάνυσμα τῆς βάσεως τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον ἐκ τῶν οὕτω ληφθέντων πηλίκων, χαρακτηρίζεται ὡς «ἐξερχόμενον» διάνυσμα. Ἂν δύο ἢ περισσότερα ἐκ τῶν νέων πηλίκων, εἶναι ἴσα καὶ μικρότερα τῶν ἄλλων πηλίκων, συνεχίζεται ὁ ὑπολογισμὸς καθ' ὅμοιον τρόπον, μὲ διαιρετέους τὰ ἀμέσως ἑπόμενα στοιχεῖα κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὑρεθῇ ἓν (ἀλγεβρικῶς) μικρότερον πηλίκον.

Πινάκιον β'.

Κ.Κ.	→					2	2	3	4	6
↓	B	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
	Π_6	20	1	-1			2		1	
→ 6	Π_5	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	Π_8	70		-1	1	-2	1	1		
Ο.Κ.	→	240		3		4	-2		-1	

Τὸ πινάκιον β' διαφέρει σημαντικῶς ἀπὸ τὸ πινάκιον α'. Αἱ διαφοραὶ ὀφείλονται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ διανύσματος Π_7 διὰ τοῦ διανύσματος Π_5 εἰς τὴν βάσιν. Λόγῳ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης κατέστη ἀναγκαῖον, ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ὑπολογισθοῦν ἐκ νέου τὰ ἐπίπεδα τῶν διανυσμάτων τοῦ προγράμματος, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ ἀναπροσαρμοσθοῦν τὰ στοιχεῖα πάντων τῶν διανυσμάτων (Π_1–Π_8) εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται ἓν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, μὲ πολλαπλασιαστὰς τὰ στοιχεῖα τοῦ ὑπ' ὄψιν διανύσματος.

Δὲν εἶναι δύσκολον νὰ ἑρμηνευθῇ οἰκονομικῶς διατὶ ἀπαιτεῖται ὑπολογισμὸς νέων ἐπιπέδων διὰ τὰ διανύσματα τῆς βάσεως. Καθωρίσθη ἤδη ὅτι τὸ ἀνώτατον δυνατὸν ἐπίπεδον δράσεως τοῦ Π_5 εἶναι 40 μονάδες. Διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ Π_5 εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἀπαιτοῦνται : 1) ὁλόκληρος ἡ ἐν ἀδρανείᾳ ποσότης τοῦ συντελεστοῦ β (συνεπῶς τὸ Π_7 ἀφαιρεῖται ἐκ τῆς βάσεως), 2) 80 μονάδες (2×40), ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα Π_6 ἐξακολουθεῖ νὰ παραμένῃ εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον ἀδρανείας 20 μονάδας ($=100-80$), 3) 80 μονάδες ἐκ τοῦ συντελεστοῦ γ καὶ συνεπῶς τὸ διάνυσμα ἀδρανείας Π_8 παραμένει εἰς τὸ πρόγραμμα μὲ ἐπίπεδον 70 μονάδας ($=150-80$).

Ἡ ἀριθμητικὴ ἀναπροσαρμογὴ τῶν διανυσμάτων Π_1–Π_8, οὕτως ὥστε νὰ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, εἶναι ἀναγκαία, ὡς ἤδη ἐλέχθη, διὰ τὴν σύγκρισιν τοῦ καθαροῦ κέρδους ἑκάστου διανύσματος μὲ τὸ καθαρὸν κέρδος τὸ ὁποῖον δίδει ἡ αὐτὴ ποσότης συντελεστῶν χρησιμοποιουμένη ὅμως ὑπὸ τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως. Ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς θὰ καταφανῇ ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης καταρτίσεως ἄλλου καλλιτέρου προγράμματος ἢ ἐὰν τὸ ἤδη καταρτισθὲν εἶναι τὸ ζητούμενον.

Μηχανικῶς ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου β, γίνεται ὡς ἀκολούθως :

α) Αἱ δύο πρῶται σειραὶ τοῦ πινακίου α' μεταφέρονται εἰς τὸ πινάκιον β' ἄνευ οὐδεμιᾶς μεταβολῆς (1).

β) Εἰς τὴν βάσιν ἀναγράφεται τὸ διάνυσμα Π_5 ἀντὶ τοῦ διανύσματος Π_7. Ἀριστερὰ τοῦ Π_5 ἀναγράφεται τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ διανύσματος 6 νομισματικαὶ μονάδες.

γ) Διαιροῦνται πάντα τὰ στοιχεῖα τὰ εὑρισκόμενα εἰς τὴν σειρὰν τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος Π_7 εἰς τὸ πινάκιον α', διὰ τοῦ στοιχείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς αὐτῆς καὶ τῆς στήλης τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκιον α'. Τὰ προκύπτοντα πηλίκα ἐγγράφονται εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκιον β'. Οὕτω π.χ. τὸ ἕβδομον στοιχεῖον τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_5 (πινάκ. β') προσδιορίζεται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ στοιχείου 1, ἑβδόμου εἰς τὴν σειρὰν ἔναντι τοῦ Π_7 εἰς τὸ πινάκ. α', διὰ τοῦ στοιχείου 2 τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς αὐτῆς σειρᾶς καὶ τῆς στήλης τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκ. α'. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἐλέγξῃ δι' ἀναλόγων ὑπολογισμῶν τὰς λοιπὰς ἐγγραφὰς τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ Π_5 εἰς τὸ πινάκ. β'.

δ) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου β' χρειάζεται περισσοτέραν προσοχήν. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ τετραγωνίδιον τ τοῦ πινακίου β' (2).

1) Εὑρίσκομεν τὸ στοιχεῖον τοῦ ἀντιστοίχου τετραγωνιδίου τ' εἰς τὸ πινάκιον α' (3).

2) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ εὑρεθὲν στοιχεῖον τοῦ τ' τὸ γινόμενον: τοῦ στοιχείου τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ τ' καὶ τῆς στήλης τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος, εἰς τὸ πινάκιον α' ἐπὶ τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διασταυρώσεως τῆς στήλης τοῦ τ εἰς τὸ πινάκ. β' καὶ τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἰς τὸ πινάκ. β'.

3) Τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν ἐγγράφομεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον τ (τοῦ πινακ. β').

Διὰ νὰ κατανοηθῇ ὁ τελευταῖος ὑπολογισμὸς χρειάζεται παρακολούθησις τῶν ὑποδεικνυομένων κινήσεων ἐπὶ τῶν πινακίων α' καὶ β'. Μὲ ὀλίγην ἐξάσκησιν ὁ ὑπολογισμὸς αὐτὸς γίνεται σχεδὸν αὐτομάτως, ὡς δύναται νὰ διαπιστώσῃ ὁ ἀναγνώστης πειραματιζόμενος βάσει τῶν δεδομένων τῶν πινακίων α' καὶ β'. Δίδομεν ἐνταῦθα μερικὰ παραδείγματα:

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ πρῶτον στοιχεῖον τοῦ

---

1. Ὅταν τὰ πινάκια τοῦ ὑπολογισμοῦ ἐνσωματοῦνται εἰς ἕνα πίνακα, δὲν ἀπαιτεῖται βεβαίως ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν.

2. τ δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε τετραγωνίδιον ἐκτὸς βεβαίως τῶν τετραγωνιδίων τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος τὰ ὁποῖα ὑπολογίζονται κατὰ τὰ ὑπὸ στοιχεῖον γ' ἀναγραφόμενα.

3. Τὸ στοιχεῖον τοῦτο δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.

Π_0 εἰς τὸ πινάκ. β'. 1) Τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον εἰς τὸ πινάκ. α' εἶναι 100. 2) Ἀπὸ τὸ 100 ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον τοῦ στοιχείου 2 (εὑρισκομένου εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ 100 μὲ τὴν στήλην τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκ. α'), ἐπὶ τὸ στοιχεῖον 40 (τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς στήλης τοῦ πρὸς ὑπολογισμὸν στοιχείου καὶ τῆς σειρᾶς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος Π_5 εἰς τὸ πινάκ. β'). 3) Ἐγγράφομεν τὴν διαφορὰν 100–80=20 εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον κάτωθεν τοῦ Π_0.

Καθ' ὅμοιον τρόπον, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τετάρτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_6 εἰς τὸ πινάκιον β' (διασταύρωσις στήλης Π_8 καὶ τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_6) ἔχομεν: $0-2\times 0=0$.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἕκτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 (διασταυρώσεις τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 καὶ τῆς στήλης Π_2) ἔχομεν: $1-2\times 0=1$.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς σειρᾶς ἔναντι Π_8 ἔχομεν: $0-2\times 1/2=-1$, κ.ο.κ.

ε) Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακ. β' γίνεται, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχεῖον δ' λεχθέντων, εἴτε δι' ἐφαρμογῆς τῶν ὑπὸ στοιχεῖον στ' (πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν) λεχθέντων. Οὕτω, πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τρίτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πίνακ. β' ἔχομεν: $0-(-6\times 1/2)=3$ ἢ $[0\times(-1)+6\times 1/2+0\times(-1)]-0=3$ ὅπου 0,6,0 (ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν) παριστοῦν τὸ καθαρὸν κέρδος τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ὁποίων θὰ ἠδύνατο νὰ ἐκφρασθῇ τὸ διάνυσμα Π, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ τρίτον στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἕκτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πιν. β' ἔχομεν $(-2)-(-6)\times 0=-2$ ἢ $(2\times 0+0\times 6+1\times 0)-2=-2$.

Ἐπειδὴ οἱ ὡς ἄνω δύο τρόποι ὑπολογισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμοι, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ταυτοχρόνως πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ἐγγραφῶν ἑκάστου νέου πινακίου. Ἂν δηλαδὴ παρατηρηθῇ διαφορὰ ἀποτελέσματος τῶν δύο ὑπολογισμῶν σημαίνει ὅτι ἔγινε λάθος εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ πινακίου.

Μετὰ τὴν ἀποπεράτωσιν τῶν ὡς ἄνω ὑπολογισμῶν, ἃς ἐξετάσωμεν τώρα τὸ πινάκιον β'. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ νέον πρόγραμμα (Π_6 : 20, Π_5 : 40, Π_8 : 70) εἶναι καλλίτερον ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν (Π_6 : 100, Π_7 : 80, Π_8 : 150) διότι δίδει καθαρὸν κέρδος 240 νομισματικὰς μονάδας (40×6). Τὸ καθαρὸν κέρδος καταγράφεται ὡς πρῶτον στοιχεῖον τῆς τελευταίας σειρᾶς [1]. Παρατηροῦμεν ὅμως ἐπίσης ὅτι δύο ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, ὅπερ σημαίνει ὅτι εἶναι δυνατὴ περαιτέρω βελτίωσις τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάσιν τοῦ διανύσματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ τὸ ἀρνητικὸν στοιχεῖον μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμὴν ἤτοι τοῦ Π_2 καὶ δι' ἀφαιρέσεως Π_6, ἐπειδὴ $20/2<70/1$. Ἑπομένως οἱ ὑπολογισμοὶ δέον νὰ συνεχισθοῦν διὰ τὴν κατάρτισιν νέου πινακίου.

---

1. Τὸ στοιχεῖον αὐτὸ μολονότι δὲν ὑποδηλοῖ ὁριακὸν κέρδος, τίθεται εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν διότι ἐξομοιοῦται ὑπολογιστικῶς πρὸς τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς σειρᾶς ταύτης.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ δίδομεν τὸ γενικὸν κριτήριον τῆς μεθόδου simplex περὶ τῆς συνεχίσεως ἢ μὴ τῶν ὑπολογισμῶν.

Κριτήριον simplex. Μετὰ τὴν κατάρτισιν ἑκάστου πινακίου: 1) Ἂν ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς φέρουν ἀρνητικὸν σημεῖον, βελτίωσις τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος εἶναι δυνατή, καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ συνεχίζονται, ἐκτός, 2) ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος εἶναι μὴ θετικὰ ([1]) ὁπότε συνήθως σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει λανθασμένην διατύπωσιν· 3) ἂν πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικὰ ([2]), τὸ ἐν λόγῳ πινάκιον περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ μέγιστον οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα δίδεται ἐκ τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς.

Συνέχεια ὑπολογισμῶν. Ἡ κατάστρωσις τοῦ ἑπομένου πινακίου γίνεται βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου β', ὅπως ἀκριβῶς ἐγένετο ἡ κατάστρωσις τοῦ πινακίου β' βάσει τῶν πληροφοριῶν τοῦ πινακίου α'.

Πινάκιον γ'.

K.K.	→					2	2	3	4	6
	B	Π_0	Π_6	Π_7	Π_8	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
→ 2	Π_2	10	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{2}$	
6	Π_5	40		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	Π_8	60	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2		1	$-\frac{1}{2}$	
O.K.	→	$\boxed{260}$	1	2		4				

Ἐκ τῆς ἐπισκοπήσεως τοῦ πινακ. γ' συνάγεται ὅτι: α) Τὸ καθαρὸν κέρδος τοῦ νέου προγράμματος (260 ν. μ.) εἶναι ἀνώτερον τοῦ καθαροῦ κέρδους τοῦ προηγουμένου προγράμματος (240 ν. μ.). β) Οὐδὲν ἐκ τῶν στοιχείων τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι ἀρνητικόν· συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον simplex, τὸ πινάκιον γ' περιέχει τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως, ἤτοι Π_2: 10, Π_5: 40 καὶ Π_8: 60 καὶ οἱ ὑπολογισμοὶ πρέπει νὰ σταματήσουν. Τὸ ζητούμενον μέγιστον κέρδος εἶναι 260 νομισματικαὶ μονάδες.

Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ πινακ. β' ἱκανοποιοῦν ἐπίσης τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Οὕτω ἔχομεν :

---

1. Ἤτοι ἀρνητικὰ ἢ μηδέν.
2. Ἤτοι θετικὰ ἢ μηδέν.

Ἐπίπεδον δράσεως	$\Pi_1 = \lambda_1 = 0$
» »	$\Pi_2 = \lambda_2 = 10$
» »	$\Pi_3 = \lambda_3 = 0$
» »	$\Pi_4 = \lambda_4 = 0$
» »	$\Pi_5 = \lambda_5 = 40$
Ἐπίπεδον ἀδρανείας	$\Pi_6 = \lambda_6 = 0$
» »	$\Pi_7 = \lambda_7 = 0$
» »	$\Pi_8 = \lambda_8 = 60$ (1)

Συνεπῶς αἱ (5) καὶ (6) γίνονται:

$$\varphi(\lambda) = 2\times0+2\times10+3\times0+4\times0+6\times40 = 260 = \text{μέγιστον}$$

καὶ $0\cdot\Pi_1+10\cdot\Pi_2+0\cdot\Pi_3+0\cdot\Pi_4+40\cdot\Pi_5+0\cdot\Pi_6+0\cdot\Pi_7+60\cdot\Pi_8=\Pi_0$ ἢ ἀναλυτικώτερον:

$$0\times2+10\times2+0\times1+0\times2+40\times2+0\times1+0\times0+60\times0=100$$
$$0\times2+10\times0+0\times1+0\times1+40\times2+0\times0+0\times1+60\times0= 80$$
$$0\times0+10\times1+0\times2+0\times1+40\times2+0\times0+0\times0+60\times1 =150$$

Ἐκθέτομεν κατωτέρω συστηματικῶς τὸ εὑρεθὲν πρόγραμμα:

«Ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως τῆς ἐπιχειρήσεως Α.

Ἐπιλεγεῖσαι Παραγ. Διαδικασίαι (Ε.π.δ.)	Ἐπίπεδον δράσεως Ε.π.δ.	Κέρδος κατὰ μονάδα Ε.π.δ.	Σύνολον κέρδος ἐξ ἑκάστης Ε.π.δ.	Συνολικὸν κέρδος τοῦ προγράμματος	Ἀχρησιμοπ. ποσότης συντ/στῶν
Π_2	10	2	20	$\boxed{260}$	60 μον. ἐκ τοῦ συντ. γ
Π_5	40	6	240		

4. *Παρατηρήσεις.*

1. Τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τοῦ πινακίου μεγιστοποιήσεως (2) παρουσιάζουν ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον.

α) Τὸ πρῶτον στοιχεῖον παριστᾷ πάντοτε τὸ «μέγιστον» δυνατὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα (κέρδος, παραγωγὴ κλπ.).

β) Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων διαθεσίμων

---

1. Ἡ μὴ χρησιμοποίησις τῶν 60 μονάδων ὀφείλεται προφανῶς εἰς τὴν ἔλλειψιν ἀντιστοίχων ποσοτήτων ἐκ τῶν συμπληρωματικῶν συντελεστῶν α καὶ β (ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν).

2. «Πινάκιον μεγιστοποιήσεως» καλεῖται συνήθως τὸ τελευταῖον πινάκιον τῶν ὑπολογισμῶν εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως.

ποσοτήτων συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα, λαμβάνομεν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος. Οὕτω ἐνταῦθα: $1\times100+2\times80+0\times150=260$.

Ἡ σχέσις αὕτη ὀφείλεται εἰς τὴν λεγομένην «δυαδικὴν» φύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Κατὰ τὴν θεωρίαν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἕκαστον πρόβλημα μεγιστοποιήσεως ἔχει λύσιν ἴσην πρὸς τὴν λύσιν τοῦ ἀντιστοίχου «διδύμου προβλήματος» ἐλαχιστοποιήσεως καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ λύσεις τῶν δύο προβλημάτων δίδονται ὑπὸ τοῦ τελικοῦ πινακίου τῶν ὑπολογισμῶν. Ἐνταῦθα τὰ στοιχεῖα 1, 2, 0 τῆς τελευταίας σειρᾶς, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰ διανύσματα ἀδρανείας, εἶναι λύσεις τοῦ διδύμου προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως. Ἡ ἀνάπτυξις τῆς σημασίας τῆς δυαδικῆς φύσεως τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἐκφεύγει τῶν πλαισίων τῆς παρούσης εἰσαγωγικῆς ἐργασίας. Τὴν ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσαν σχέσιν δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ χρησιμοποιήσωμεν πρὸς τελικὸν ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῶν ὑπολογισμῶν. Ἄν, ὁ ἐν ἀρχῇ τῆς παρούσης παραγράφου (β) ἀναφερόμενος ὑπολογισμός, δίδῃ ἀποτέλεσμα διάφορον τοῦ πρώτου στοιχείου τῆς τελευταίας σειρᾶς, τότε οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι λανθασμένοι.

γ) Τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας σειρᾶς εἶναι μὴ ἀρνητικά· τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν βάσιν ἑνὸς ἐκ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων δὲν αὐξάνει τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα, δυνατὸν δὲ νὰ τὸ μειώσῃ (περίπτωσις τοῦ Π_1).

2. Ὑπετέθη ὅτι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ποσοτήτων ἐξ ἑνὸς συντελεστοῦ δὲν ζημιώνει τὴν ἐπιχείρησιν. Ἂν ὅμως αἱ μὴ χρησιμοποιούμεναι ποσότητες προκαλοῦν ζημίας, λόγῳ π.χ. ἀδυναμίας διατηρήσεως αὐτῶν ἢ ἐξόδων ἀποθηκεύσεως κλπ., τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως πρέπει νὰ μειωθῇ ἀντιστοίχως. Εἶναι δυνατὸν τότε νὰ ἀπαιτῆται συνέχισις τῶν ὑπολογισμῶν πρὸς εὕρεσιν καλλιτέρου προγράμματος ὑπὸ τὰς νέας συνθήκας ([1]).

3. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων πινακίων ὑπολογισμοῦ δὲν εἶναι συνήθως μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς, δυνατὸν δὲ νὰ εἶναι πολὺ μικρότερος. Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν ὑπολογισμῶν συνιστῶνται τὰ ἀκόλουθα: α) Χρῆσις τετραγωνισμένου χάρτου διὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν πινακίων. β) Ἐνσωμάτωσις τῶν πινακίων εἰς ἕνα συνεχῆ πίνακα, οὕτως ὥστε νὰ ἀποφεύγεται ἡ ἐπανάληψις τῶν δύο πρώτων σειρῶν καὶ νὰ διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς ἑκάστου πινακίου δι' ἀμέσου συσχετίσεως πρὸς τὸ προηγούμενον πινάκιον. γ) Ὅταν τὸ «εἰσερχόμενον» διάνυσμα ἔχει ἓν ἢ περισσότερα μηδενικὰ στοιχεῖα, τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν σειρῶν τῶν μηδενικῶν στοιχείων, μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τοῦ νεο-καταρτιζομένου πινακίου. Ὁμοίως, πάντα τὰ στοιχεῖα

1. Ἡ περίπτωσις αὕτη μολονότι ἀναμφισβητήτου πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος δὲν ἀναφέρεται εἰς τὴν φιλολογίαν τοῦ Γ.Π. Ὁ γράφων διεβεβαιώθη κατόπιν ἐπανειλημμένων πειραματισμῶν, ὅτι ὁ χειρισμὸς τῆς παρούσης περιπτώσεως εἶναι δυνατὸς ἄνευ οὐσιαστικῆς ἀλλοιώσεως τῆς περιγραφείσης τεχνικῆς.

τῶν στηλῶν αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς μηδενικὰ στοιχεῖα τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος μεταφέρονται ἀναλλοίωτα εἰς τὰς ἀντιστοίχους θέσεις τοῦ νεοκαταρτιζομένου πινακίου. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν μηδενισμὸν τοῦ ὑπὸ στοιχ. δ, παρ. 3 τοῦ παρόντος τμήματος (δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν) προσδιοριζομένου γινομένου. Εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις εἶναι, νομίζομεν, σκόπιμον νὰ σημειοῦνται αἱ ἐν λόγῳ στῆλαι ἢ σειραί, τὰ δὲ στοιχεῖα των νὰ μεταφέρωνται ἀμέσως εἰς τὸ νέον πινάκιον.

4. Εἶναι δυνατὴ ἡ παράλειψις τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας πρὸς συντόμευσιν τῶν ὑπολογισμῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ἐξασφαλίζεται ὅμως τὸ ὑπ' ἀριθ. (1) ἀνωτέρω, κριτήριον τελικοῦ ἐλέγχου.

5. Τὸ ληφθὲν ἐνταῦθα πρόβλημα εἶναι βεβαίως εὐκολώτατον [1] καὶ δύναται νὰ λυθῇ καὶ δι' ἄλλων μεθόδων. Ἡ μέθοδος simplex ἐσχεδιάσθη διὰ τὴν λύσιν πολὺ συνθετωτέρων προβλημάτων. Ἐχρησιμοποιήσαμεν ἐν τούτοις τὸ ἀνωτέρω ἁπλοῦν πρόβλημα δι' εὐκολίαν ἀναπτύξεως τῆς μεθόδου καὶ διότι ἡ διαδικασία λύσεως τῶν συνθέτων προβλημάτων εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδία μὲ τὴν ἐνταῦθα χρησιμοποιηθεῖσαν.

6. Διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως ἀκολουθεῖται ἡ περιγραφεῖσα διαδικασία τῆς μεθόδου simplex, μὲ μικρὰς μόνον ἀλλαγὰς ὑπαγορευομένας ὑπὸ τῆς φύσεως τῶν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως [2].

5. *Περίληψις.*

Ἡ διαδικασία λύσεως τῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως δύναται νὰ συνοψισθῇ ὡς ἀκολούθως :

α) Ταξινόμησις καὶ ἔλεγχος τῶν πληροφοριῶν. Ἀπαιτοῦνται συνήθως πληροφορίαι περί : 1) τῆς ποσότητος καὶ τοῦ εἴδους τῶν διαθεσίμων οἰκονομικῶν μέσων (συντελεστῶν παραγωγῆς ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν), 2) τῶν διαθεσίμων μεθόδων δράσεως (παραγωγικῶν διαδικασιῶν ὑπὸ εὐρεῖαν ἔννοιαν) καὶ 3) τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (κέρδους, παραγωγῆς κλπ.) τὸ ὁποῖον ἐπιζητεῖται ὅπως καταστῇ μέγιστον.

β) Ἐπιλογὴ διανυσμάτων ἀδρανείας.

γ) Διατύπωσις τοῦ προβλήματος (καὶ ἔλεγχος τῆς «γραμμικότητος» αὐτοῦ.)

δ) Κατάρτισις τοῦ πινακίου α' δι' εἰσαγωγῆς τῶν πληροφοριῶν καὶ τῶν διανυσμάτων ἀδρανείας εἰς τὰς οἰκείας θέσεις καὶ δι' ἐγγραφῆς τῶν στοιχείων τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετραγωνίδια τῆς τελευταίας σειρᾶς μὲ ἀντίθετον σημεῖον.

---

1. Μὲ ὀλίγην πεῖραν ἡ ἐκτέλεσις τῶν ὑπολογισμῶν δύναται νὰ γίνῃ ἐντὸς πενταλέπτου.

2. Charnes A., W. W. Cooper, and A. Henderson. «An introduction to Linear Programming», New York, 1953. Neuman, P., «Some calculations of least - cost diets», Oxford Bulletin of Statistics, Aug. 1954.

ε) Καθορισμὸς τοῦ «εἰσερχομένου» διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3 ἀνωτέρω, πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν).

ς') Καθορισμὸς τοῦ «ἐξερχομένου» διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3, πρῶτον στάδιον ὑπολογισμῶν).

ζ) Κατάστρωσις τοῦ δευτέρου πινακίου ὡς ἀκολούθως :

1) Εἰσαγωγὴ τοῦ νέου διανύσματος εἰς τὴν βάσιν.

2) Ὑπολογισμὸς τῶν στοιχείων τῆς σειρᾶς ἔναντι τοῦ νέου διανύσματος (ὡς ἐν παρ. 3, δεύτερον στάδιον ὑπολογ.).

3) Ὑπολογισμὸς τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πινακίου (ὡς ἐν παρ. 3, δεύτερον στάδιον ὑπολογισμῶν).

η) Ἐπισκόπησις τοῦ δευτέρου πινακίου πρὸς καθορισμόν :

1) Τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος τοῦ νέου προγράμματος.

2) Τῆς δυνατότητος περαιτέρω βελτιώσεως τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος (ἐφαρμογὴ «κριτηρίου simplex»).

Ἂν ὑπάρχῃ δυνατότης βελτιώσεως, τότε ἐπιβάλλεται :

θ) Κατάρτισις τρίτου πινακίου κατὰ τὰ γνωστά, κ.ο.κ. μέχρις ὅτου ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ κριτηρίου simplex δείξῃ ὅτι ἐπετεύχθη τὸ «ἄριστον» πρόγραμμα δράσεως ἢ ὅτι λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἀδύνατος.

ι) Ἔλεγχος τῆς ὀρθότητος τῶν ἐγγραφῶν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ὑπὸ στοιχ. β' τῆς παρ. 4 κριτηρίου.

ια) Ἔλεγχος τῆς οἰκονομικῆς λογικῆς τοῦ «ἀρίστου» προγράμματος δράσεως διὰ συσχετίσεως πρὸς τὰ δεδομένα καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

ιβ) Συστηματικὴ ἔκθεσις τοῦ εὑρεθέντος «ἀρίστου» προγράμματος δράσεως διὰ σαφοῦς καθορισμοῦ : 1) τοῦ εἴδους καὶ τοῦ ἐπιπέδου δράσεως τῶν παραγωγικῶν διαδικασιῶν αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν, 2) τοῦ συνολικῶς ἐπιτυγχανομένου οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος, 3) τῶν μὴ χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τοῦ προγράμματος ποσοτήτων ἐκ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς.