ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΑΙ

ΜΗΝΙΑΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΝ ΕΤΟΣ 1959—1960	ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1960	Ι' ΤΟΜΟΣ	ΑΡΙΘ. ΤΕΥΧΟΥΣ 5

ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΟΙ ΛΥΣΕΩΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ (1)

Ὑπὸ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Θ. ΚΟΥΛΟΥΡΙΑΝΟΥ

Α'. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ἢ ΔΙΑΝΟΜΗΣ

Ἡ μέθοδος τῆς μεταφορᾶς ἢ διανομῆς (transportation or distribution method) εἶναι μία εἰδικὴ μορφὴ τῆς μεθόδου Simplex, χρησιμοποιουμένη κυρίως διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων μεταφορᾶς ἢ διανομῆς πρώτων ὑλῶν καὶ ἑτοίμων προϊόντων ἀπὸ τὰ κέντρα παραγωγῆς εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ χαμηλότερον μεταφορικὸν κόστος. Ἀρχικῶς, ἡ ἐξεταζομένη ἐνταῦθα μέθοδος ἐχρησιμοποιήθη εἰς τὰς βιομηχανίας πετρελαίου πρὸς ἐξεύρεσιν τοῦ πλέον οἰκονομικοῦ τρόπου διανομῆς τῶν προϊόντων τούτων ἀπὸ διϋλιστήρια ἐγκατεστημένα εἰς διαφόρους περιοχὰς μιᾶς χώρας εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως. Τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ μέθοδος τῆς μεταφορᾶς ἢ διανομῆς χρησιμοποιεῖται κυρίως διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων μεταφορικοῦ κόστους δὲν σημαίνει ὅτι αὕτη δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐξ ἴσου ἀποτελεσματικῶς καὶ διὰ τὴν λύσιν ἄλλης μορφῆς προβλημάτων. Προβλήματα ὡς τῆς κατανομῆς παραγγελιῶν εἰς διάφορα ἐργοστάσια ἢ τμήματα ἑνὸς ἐργοστασίου πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ μεγαλυτέρου δυνατοῦ κέρδους λύονται διὰ τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου ἐξ ἴσου καλῶς ὅσον καὶ δι' ἄλλων ὑπολογιστικῶν μεθόδων.

Τὸ μεγαλύτερον πλεονέκτημα τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ διανομῆς εἶναι ἡ ἁπλότης αὐτῆς καὶ ἑπομένως ἡ δυνατότης χρησιμοποιήσεώς της καὶ ὑπὸ ὑπαλλήλων στερουμένων εἰδικῆς μορφώσεως. Προβλήματα μεταφορᾶς τὰ ὁποῖα ἀντιμετωπίζουν ἐπιχειρήσεις μέσου καὶ μεγάλου μεγέθους δύνανται νὰ λυθοῦν διὰ τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου ὑπὸ ὑπαλλήλου στερουμένου εἰδικῆς μορφώσεως ἐντὸς ὀλίγων ὡρῶν καὶ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν συνήθων μηχανῶν γραφείου χωρὶς νὰ ἀπαιτῆται ἡ προσφυγὴ εἰς ἠλεκτρονικὰς ἀριθμομηχανάς. Κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ διὰ τῆς μεθόδου

1) Ἡ παροῦσα ἀνάλυσις βασίζεται κυρίως εἰς τὴν ἐργασίαν τῶν R. O. Ferguson καὶ L. F. Sargent «Linear Programming: Fundamentals and Applications» New York 1958.

τῆς μεταφορᾶς ἢ διανομῆς ὡς καὶ διὰ πάσης ἄλλης ὑπολογιστικῆς μεθόδου θεωρεῖται ὅτι ἰσχύουν αἱ βασικαὶ ὑποθέσεις τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως (1).

Ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ διανομῆς εἶναι ἡ ἰσότης προσφορᾶς καὶ ζητήσεως. Ἡ πρὸς διανομὴν δηλαδὴ ποσότης πρώτων ὑλῶν ἢ ἑτοίμων προϊόντων καὶ ἡ ζητουμένη ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, ἢ αἱ πρὸς ἐκτέλεσιν παραγγελίαι πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, μὲ τὴν διαθέσιμον δυναμικότητα τῶν ἐγκαταστάσεων. Ἐπὶ τῆς ἀναγκαίας αὐτῆς προϋποθέσεως δύναται βεβαίως νὰ ἀντιταχθῇ ὅτι ἡ ἰσότης αὕτη δὲν συναντᾶται πάντοτε εἰς τὴν πραγματικότητα, τοῦτο ὅμως δὲν ἀποτελεῖ ἐμπόδιον χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου, διότι ἂν ἐπὶ παραδείγματι ἡ ζήτησις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς προσφορᾶς ἡ ἐπιχείρησις δύναται νὰ ἀνταποκριθῇ εἰς τὴν μεγαλυτέραν ζήτησιν δι' ἀγορᾶς μέρους τῆς ἀπαιτουμένης ποσότητος ἐξ ἄλλων ἐπιχειρήσεων, ὁπότε ὡς κέρδος κατὰ μονάδα θὰ θεωρηθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τιμῆς ἀγορᾶς καὶ τιμῆς πωλήσεως. Ἐὰν ἀντιθέτως ἡ ζήτησις εἶναι μικροτέρα τῆς προσφορᾶς ἡ ἐπιχείρησις θὰ ἐμφανίζῃ ἀργοῦσαν παραγωγικὴν δυναμικότητα, ἥτις πιθανὸν νὰ αὐξάνῃ τὸ κατὰ μονάδα κόστος τῶν παραγομένων ἢ μεταφερομένων προϊόντων.

Ἐνταῦθα θὰ ὑπενθυμίσωμεν ὅτι τὰ ὑπὸ τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ διανομῆς λυόμενα προβλήματα, ὡς προβλήματα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως ἢ μεγιστοποιήσεως.

Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον μεταφορᾶς ἢ διανομῆς θὰ πρέπει νὰ γνωρίζωμεν: α) τὴν πρὸς διανομὴν ποσότητα ἑκάστου κέντρου παραγωγῆς ἢ τὴν διαθέσιμον δυναμικότητα ἑκάστου ἐργοστασίου, β) τὴν ζητουμένην ποσότητα ἑκάστου κέντρου καταναλώσεως ἢ τὴν ποσότητα ἑκάστης παραγγελίας καὶ γ) τὸ κατὰ μονάδα μεταφορικὸν κόστος ἐξ ἑκάστου κέντρου παραγωγῆς πρὸς ἕκαστον κέντρον καταναλώσεως ἢ τὸ κατὰ μονάδα κέρδος ἑκάστης παραγγελίας ἐκτελουμένης ὑπὸ τῶν διαφόρων ἐργοστασίων, ἀναλόγως τοῦ ἐὰν πρόκειται περὶ ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ συνολικοῦ μεταφορικοῦ κόστους ἢ μεγιστοποιήσεως τοῦ συνολικοῦ κέρδους.

Αἱ ἀνωτέρω ἀπαραίτητοι πληροφορίαι διαφέρουν προφανῶς ἀναλόγως τῆς φύσεως τοῦ ὑπὸ λύσιν προβλήματος.

Νομίζομεν ὅτι ἡ ἁπλῆ περιγραφὴ μιᾶς ὑπολογιστικῆς μεθόδου διὰ τῆς ἀπαριθμήσεως ὡρισμένων κανόνων οἵτινες θὰ πρέπει νὰ τηρηθοῦν δὲν εἶναι ὁ καλύτερος τρόπος νὰ ἐννοήσῃ ὁ ἀναγνώστης τὰ πλεονεκτήματα τῆς μεθόδου καὶ νὰ δυνηθῇ νὰ ἐφαρμόσῃ αὐτὴν διὰ τὴν λύσιν συγκεκριμένων προβλημάτων. Ἀντιθέτως, ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος θὰ δώσῃ εἰς τὸν ἀναγνώστην τὴν ἱκανότητα ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ἐννοήσῃ πληρέστερον τὴν μέθοδον, ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ καταφεύγῃ εἰς αὐτὸ ὁσάκις ἀντιμετωπίζῃ δυσκολίας κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν αὐτῆς εἰς τὴν πρᾶξιν.

Κατωτέρω παραθέτομεν τὰς γενικὰς γραμμὰς τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ

---

1) Ἴδε Α. Α. Λάζαρη «Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς» εἰς Ἐπιθ. Οἰκ. καὶ Κοινων. Ἐπιστημῶν 1956.

διανομῆς λύοντες συγχρόνως ἓν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως μεταφορικοῦ κόστους.

Τὸ πρόβλημα(1)

α) Δεδομένα. Οἱ κυλινδρόμυλοι Θεσσαλονίκης, Πειραιῶς, Καλαμάτας καὶ Χανίων ἐφοδιάζουν δι' ἀλεύρων τὰς πόλεις Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ Ζ.

Ἡ ἡμερησία παραγωγὴ ἀλεύρων τῶν κυλινδρομύλων ἔχει ὡς κάτωθι:

Θεσσαλονίκη	80	τόννοι
Πειραιεὺς	92	»
Καλαμάτα	68	»
Χανιὰ	50	»
Σύνολον	290	»

Ἡ ὑφ' ἑκάστης πόλεως ζητουμένη ἡμερησίως ποσότης ἀλεύρων ἔχει ὡς ἑξῆς:

Πόλις	Α	35	τόννοι
»	Β	70	»
»	Γ	30	»
»	Δ	40	»
»	Ε	48	»
»	Ζ	67	»
Σύνολον		290	»

Τὸ μεταφορικὸν κόστος κατὰ τόννον ἀπὸ τὰ κέντρα παραγωγῆς εἰς τὰ κέντρα καταναλώσεως ἐμφαίνεται εἰς τὸν κατωτέρω παρατιθέμενον πίνακα:

Πίναξ 1

Μεταφορικὸν κόστος κατὰ τόννον (εἰς δραχμὰς)

Κέντρα Καταναλώσεως / Κέντρα Παραγωγῆς	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ
Θεσσαλονίκη	– 300	– 400	– 200	– 100	– 500	– 400
Πειραιεὺς	– 200	– 200	– 300	– 400	– 400	– 100
Καλαμάτα	– 300	– 200	– 400	– 400	– 100	– 300
Χανιὰ	– 400	– 100	– 400	– 500	– 100	– 200

1) Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι ὑποθετικά.

Τὰ ἀρνητικὰ σημεῖα εἰς τὸν πίνακα ἐτέθησαν ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον διὰ νὰ δηλώσουν ὅτι πρόκειται περὶ κόστους, πέραν τούτου οὐδεμίαν ἄλλην σημασίαν ἔχουν, ἂν ἐπρόκειτο δὲ περὶ προβλήματος μεγιστοποιήσεως κέρδους οἱ ἀριθμοὶ τοῦ πίνακος θὰ ἦτο θετικῶς προσηρμοσμένοι.

Ἡ ἀνάγνωσις τοῦ πίνακος 1 δὲν παρουσιάζει δυσκολίας, ἕκαστος ἀριθμὸς παριστᾷ τὸ κατὰ τόννον κόστος μεταφορᾶς ἐκ τοῦ κέντρου παραγωγῆς εἰς τὴν σειρὰν τοῦ ὁποίου ἀνήκει, εἰς τὸ κέντρον καταναλώσεως εἰς τὴν στήλην τοῦ ὁποίου περιλαμβάνεται. Οὕτω, ὁ ἄνω ἀριστερὰ ἀριθμὸς —300 σημαίνει ὅτι τὸ μεταφορικὸν κόστος ἑνὸς τόννου ἀλεύρου ἐκ Θεσσαλονίκης εἰς τὸ καταναλωτικὸν κέντρον Α ἀνέρχεται εἰς 300 δραχμάς, ἀνάλογος εἶναι ἡ σημασία καὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος.

β) Ζητεῖται: Νὰ προγραμματισθῇ ἡ διάθεσις τοῦ προϊόντος εἰς τὰ διάφορα καταναλωτικὰ κέντρα εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ μικρότερον σ υ ν ο λ ι κ ὸ ν μεταφορικὸν κόστος, λαμβανομένων φυσικὰ ὑπ' ὄψιν τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως ἑκάστου κέντρου.

Περιγραφὴ τῆς μεθόδου καὶ λύσις τοῦ προβλήματος

1. *Ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος*

Τοποθετοῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν ὁποίων δηλοῦνται τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως εἰς πίνακα διπλῆς εἰσόδου, ὡς ὁ πίναξ 2, εἰς

Π ί ν α ξ 2

(Α' Πρόγραμμα) (εἰς τόννους)

Κέντρα Καταναλώσεως / Κέντρα Παραγωγῆς	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Διαθέσιμος ποσότης
Θεσσαλονίκη	35	45					~~80~~ ~~45~~ 0
Πειραιεύς		25	30	37			~~92~~ ~~67~~ ~~37~~ 0
Καλαμάτα				3	48	17	~~68~~ ~~65~~ ~~17~~ 0
Χανιά						50	~~50~~ 0
Ζητουμένη ποσότης	~~35~~ 0	~~70~~ ~~25~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ ~~3~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ ~~50~~ 0	290

τρόπον ὥστε ἡ διασταύρωσις ἑκάστης σειρᾶς μὲ ἑκάστην στήλην νὰ παριστᾷ μίαν δυνατὴν περίπτωσιν διαθέσεως τοῦ προϊόντος. Ὡς εἶναι προφανὲς δι' ἕκαστον καταναλωτικὸν κέντρον ὑφίστανται τόσαι περιπτώσεις ἐφοδιασμοῦ ὅσα τὰ κέντρα παραγωγῆς, καὶ διὰ τὰ κέντρα παραγωγῆς τόσαι περιπτώσεις διαθέσεως ὅσα τὰ κέντρα καταναλώσεως καὶ τοῦτο διότι ἅπασαι αἱ περιπτώσεις θεωροῦνται δυναταί.

Προχωροῦμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος διὰ τοῦ σχηματισμοῦ ἑνὸς πρώτου προγράμματος καὶ βελτιοῦμεν τοῦτο συνεχῶς ἕως ὅτου ἐπιτευχθῇ ἡ ἀρίστη λύσις. Ἡ ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος γίνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ «κανόνος τῆς Βορειόδυτικῆς γωνίας» (The Northwest Corner Rule), ὅστις εἰς γενικὰς γραμμὰς ἔχει ὡς ἑξῆς [1] : α) ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ἄνω ἀριστερὰ (Βορειοδυτικὸν) τετραγωνίδιον συγκρίνομεν τοὺς ἀριθμοὺς οἵτινες εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς σειρᾶς καὶ στήλης εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τετραγωνίδιον καὶ παριστοῦν τὴν διαθέσιμον καὶ ζητουμένην ποσότητα τῶν κέντρων παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως τῆς ἐν λόγῳ σειρᾶς καὶ στήλης. Εἰς τὸ παράδειγμά μας οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι 80 καὶ 35, β) τοποθετοῦμεν τὸν μικρότερον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν εἰς τὸ τετραγωνίδιον, θέτοντες αὐτὸν ἐντὸς κύκλου πρὸς διάκρισιν ἀπὸ ἄλλους ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι θὰ τοποθετηθοῦν ἀργότερον εἰς τὰ λοιπὰ τετραγωνίδια. Ἐὰν ὁ τοποθετούμενος ἀριθμὸς εἶναι ἐκεῖνος ὅστις παριστᾷ τὴν ὑπὸ τοῦ καταναλωτικοῦ κέντρου ζητουμένην ποσότητα, τότε προχωροῦμεν εἰς τὸ τετραγωνίδιον τῆς ἑπομένης στήλης, τῆς αὐτῆς σειρᾶς, συγκρίνοντες τὴν ὑπὸ τοῦ δευτέρου τούτου καταναλωτικοῦ κέντρου ζητουμένην ποσότητα μετὰ τῆς ὑπολοίπου διαθεσίμου ποσότητος τοῦ πρώτου κέντρου παραγωγῆς καὶ θέτομεν καὶ πάλιν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν εἰς τὸ τετραγωνίδιον. Ἡ ἐργασία συνεχίζεται ἕως ὅτου ὁλόκληρος ἡ διαθέσιμος ποσότης τοῦ κέντρου παραγωγῆς τῆς πρώτης σειρᾶς κατανεμηθῇ εἰς τὰ διάφορα κέντρα καταναλώσεως. Ἐὰν ὁ τοποθετούμενος (ὡς μικρότερος) ἀριθμὸς εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον παριστᾷ τὴν ὑπὸ τοῦ πρώτου κέντρου παραγωγῆς διαθέσιμον ποσότητα, τότε ἀντὶ τῆς πρὸς τὰ δεξιὰ πορείας κινούμεθα πρὸς τὰ κάτω ἐπὶ τῆς αὐτῆς στήλης ἕως ὅτου ὁλόκληρος ἡ ζήτησις τοῦ πρώτου καταναλωτικοῦ κέντρου ἱκανοποιηθῇ ἐκ τῶν διαφόρων κέντρων παραγωγῆς. Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς ἐργασίας μετὰ ἀπὸ κάθε τοποθέτησιν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς ποσότητας τῆς τελευταίας σειρᾶς καὶ στήλης τὸν τοποθετούμενον εἰς τὸ τετραγωνίδιον ἀριθμὸν καὶ συνεχίζομεν τὰς συγκρίσεις μὲ τὰ ὑπόλοιπα. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν ἐργασίαν εἰς τὰς ὑπολοίπους σειρὰς καὶ στήλας κινούμενοι ὁριζοντίως ἕως ὅτου ἐξαντλήσωμεν τὴν διαθέσιμον ποσότητα τοῦ κέντρου παραγωγῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ εἰς τὴν ἑπομένην σειρὰν καὶ καθέτως ἕως ὅτου ἱκανοποιηθῇ ὁλόκληρος ἡ ζήτησις τοῦ κέντρου καταναλώσεως, ὁπότε ἡ ἐργασία συνεχίζεται εἰς τὴν ἑπομένην στήλην.

Εἰς τὸ παράδειγμά μας ἡ πρώτη σύγκρισις γίνεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 80, τῆς πρώτης σειρᾶς, καὶ 35 τῆς πρώτης στήλης, τοποθετουμένου τοῦ

---

(1) Ἴδε Ferguson and Sargent, «Linear Programming», σελὶς 27.

τελευταίου εἰς τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον ὡς μικροτέρου. Ἀφαιρουμένου τοῦ ποσοῦ τούτου, εἰς μὲν τὸ τελευταῖον τετραγωνίδιον τῆς πρώτης στήλης λαμβάνομεν ὑπόλοιπον μηδὲν εἰς δὲ τὸ τελευταῖον τετραγωνίδιον τῆς πρώτης σειρᾶς ὑπόλοιπον 45. Ἡ δευτέρα σύγκρισις γίνεται μεταξὺ τοῦ 45 καὶ τοῦ 70 τῆς δευτέρας στήλης, τοποθετουμένου εἰς τὸ δεύτερον τετραγωνίδιον τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ ἀριθμοῦ 45. Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου λαμβάνομεν εἰς μὲν τὴν σειρὰν ὑπόλοιπον μηδέν, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἐξηντλήθη ἡ διαθέσιμος δυναμικότης τοῦ πρώτου κέντρου παραγωγῆς, εἰς δὲ τὴν στήλην ὑπόλοιπον 25, τὸ ὁποῖον ἐν συνεχείᾳ συγκρίνομεν μὲ τὸ 92 τῆς δευτέρας σειρᾶς, τοποθετοῦμεν τὸν μικρότερον ἀριθμόν, ἀφαιροῦμεν κ.λ.π. ἕως ὅτου ἅπασα ἡ διαθέσιμος ποσότης τῶν κέντρων παραγωγῆς ἐξαντληθῆ καὶ ἡ ζήτησις τῶν κέντρων καταναλώσεως ἱκανοποιηθῆ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον διαπιστοῦται ἀπὸ τὸ ἐὰν τὸ τελευταῖον τετραγωνίδιον ἑκάστου κέντρου παραγωγῆς καὶ καταναλώσεως δεικνύει ὑπόλοιπον μηδέν. Οἱ τοποθετούμενοι εἰς τὸν πίνακα κύκλοι ἰσοῦνται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν στηλῶν καὶ σειρῶν μεῖον ἕν. Εἰς τὸ παράδειγμά μας ὑπάρχουν 6 στῆλαι καὶ 4 σειραὶ ὁπότε ἔχομεν κύκλους $6+4-1=9$. Ὁ ἐφαρμοσθεὶς κανὼν τῆς «Βορειοδυτικῆς γωνίας» δὲν εἶναι δεσμευτικός, ἡ ἐκκίνησις δύναται νὰ γίνῃ καὶ ἀπὸ οἱονδήποτε ἄλλο τετραγωνίδιον, ἡ ἐφαρμογὴ ὅμως τοῦ ἐν λόγῳ κανόνος εἰς τὴν πρᾶξιν ἀπέδειξεν ὅτι οὗτος μειώνει τὴν ἐργασίαν καὶ εὐκολύνει τοὺς ὑπολογισμούς. Διὰ τῆς τοποθετήσεως τῶν ἐντὸς κύκλων ἀριθμῶν εἰς τὰ ἐπιλεγέντα τετραγωνίδια σχηματίζεται ἓν νέφος κύκλων μὲ κατεύθυνσιν ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω καὶ δεξιά. Ἡ ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος ἔχει ἐπιτευχθῆ καὶ ἐμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 2. Τὸ μεταφορικὸν κόστος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πρώτου προγράμματος ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ πίνακος 2 ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸν πίνακα 1 καὶ ἔχει ὡς κάτωθι :

Θεσσαλονίκη	*Πειραιεὺς*	*Καλαμάτα*	*Χανιὰ*
$35 \times -300 = -10.500$	$25 \times -200 = -5.000$	$3 \times -400 = -1.200$	$50 \times -200 = -10.000$
$45 \times -400 = -18.000$	$30 \times -300 = -9.000$	$48 \times -100 = -4.800$	
	$37 \times -400 = -14.800$	$17 \times -300 = -5.100$	
−28.500	−28.800	−11.100	−10.000

Συνολικὸν μεταφορικὸν κόστος $(-28.500) + (-28.800) + (-11.100) + (-10.000) = \mathbf{-78.400}$

2. Βελτίωσις τοῦ πρώτου προγράμματος πρὸς ἐπίτευξιν τῆς καλυτέρας λύσεως

Ἡ ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος δὲν σημαίνει συγχρόνως καὶ τὴν ἐπίτευξιν τῆς ἀρίστης λύσεως, ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἐλέγξωμεν κατὰ πόσον τὸ πρόγραμμα τοῦτο εἶναι τὸ οἰκονομικώτερον καὶ ἐν ἀρνητικῇ ἀπαντήσει νὰ ἐπιδιώξωμεν τὴν βελτίωσίν του.

Ὁ ἔλεγχος τοῦ προγράμματος γίνεται ὡς ἑξῆς :

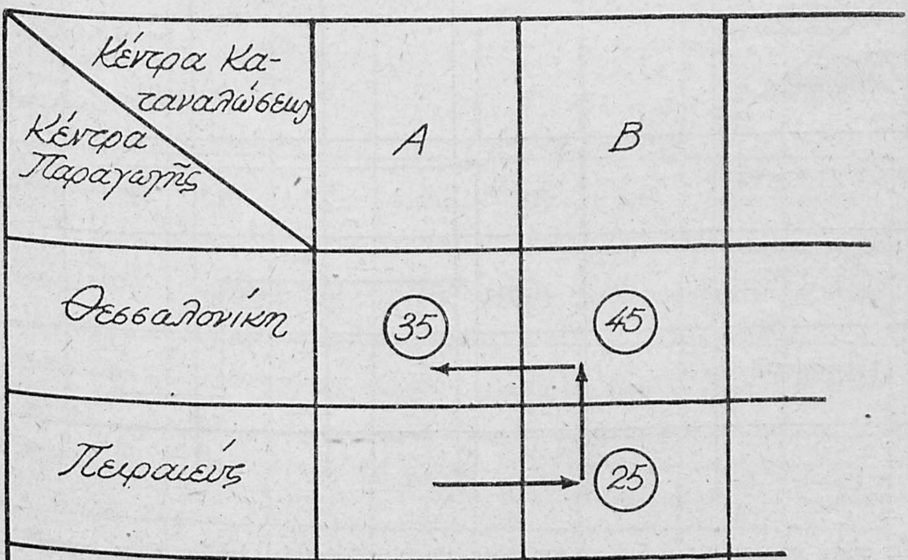
α) Συμπληρώνομεν τὰ τετραγωνίδια εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἐτέθησαν ἀριθμοὶ ἐντὸς κύκλων ἀκολουθοῦντες τὴν κάτωθι διαδικασίαν. Ἐκ τοῦ τετραγωνιδίου τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν συμπλήρωσιν,—εἶναι ἀδιάφορον ἀπὸ ποῖον τετραγωνίδιον θὰ ἀρχίσωμεν—κινούμεθα ὁριζοντίως ἐπὶ τῆς σειρᾶς εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἢ δεξιά, ἕως ὅτου συναντήσωμεν τετραγωνίδιον μὲ ἀριθμὸν ἐν κύκλῳ ἀπὸ τοῦ ὁποίου θὰ καταστῇ δυνατὸν διὰ στροφῆς 90 μοιρῶν, κινούμενοι πλέον καθέτως, νὰ συναντήσωμεν ἄλλο τετραγωνίδιον μὲ ἀριθμὸν ἐν κύκλῳ ἐκ τοῦ ὁποίου διὰ στροφῆς ἐπίσης 90 μοιρῶν θὰ κατορθώσωμεν ἀπ' εὐθείας ἢ μέσῳ ἄλλων τετραγωνιδίων μὲ ἀριθμοὺς ἐντὸς κύκλου καὶ κινούμενοι διὰ στροφῶν τῆς αὐτῆς γωνίας νὰ φθάσωμεν εἰς κύκλον τοποθετημένον εἰς τὴν αὐτὴν στήλην μὲ τὸ τετραγωνίδιον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐκκινήσαμεν καὶ τοῦ ὁποίου ἐπιζητοῦμεν τὴν συμπλήρωσιν. Διευκρινίζεται ὅτι ἀκολουθοῦμεν τὸ συντομώτερον δρομολόγιον καὶ ὅτι τὰ ἐνδιάμεσα τετραγωνίδια, μετὰ κύκλων ἢ ἄνευ, ὑπερπηδῶνται. Τὰ κατωτέρω σχέδια 1 καί 2 καθιστοῦν σαφῆ τὴν ἀνωτέρω περιγραφεῖσαν διαδικασίαν.

Ἀνάλογον δρομολόγιον ἀκολουθεῖται προκειμένου καὶ περὶ τῶν λοιπῶν κενῶν τετραγωνιδίων.

Μετὰ τὴν χάραξιν τοῦ ἀκολουθητέου δρομολογίου θέτομεν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα + καὶ — εἰς τὰ τετραγωνίδια τὰ ὁποῖα ἐχρησιμοποιήθησαν ὡς σταθμοὶ κατὰ τὴν πορείαν τῆς ἐργασίας καὶ μεταφέρομεν εἰς αὐτὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἀντιστοίχων τετραγωνιδίων τοῦ πίνακος 1 (πίναξ κόστους κατὰ μονάδα).

Σχέδιον 1

Δρομολόγιον διὰ τὴν συμπλήρωσιν τοῦ τετραγωνιδίου Πειραιεύς, Α



Σχέδιον 2

Δρομολόγιον διὰ τὴν συμπλήρωσιν τοῦ τετραγωνιδίου Θεσσαλονίκη, Ε

Κέντρα Καταναλώσεως / Κέντρα Παραγωγῆς	Α	Β	Γ	Δ	Ε	
Θεσσαλονίκη	35	45				
Πειραιεύς		25	30	37		
Καλαμάτα				3	48	

Σχέδιον 3

Κέντρα Καταναλώσεως / Κέντρα Παραγωγῆς	Α	Β	Γ	Δ	Ε	
Θεσσαλονίκη		+ −400			− −500	
Πειραιεύς		− −200		+ −400		
Καλαμάτα				− −400	+ −100	

Τὸ αὐτὸ κάμνομεν καὶ διὰ τὸ τετραγωνίδιον τοῦ ὁποίου ἐπιζητοῦμεν τὴν συμπλήρωσιν, εἰς τὸ τετραγωνίδιον τοῦτο θέτομεν ἀρνητικὸν σημεῖον. Ἐφαρμόζοντες τὰ ἀνωτέρω ἐπὶ τοῦ παραδείγματός μας καὶ συγκεκριμένως διὰ τὴν συμπλήρωσιν τοῦ τετραγωνιδίου Θεσσαλονίκη, Ε, λαμβάνομεν τὸ σχέδιον 3.

Ἐκ τοῦ σχεδίου 3 εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν) ὅστις θὰ τεθῇ εἰς τὸ ὑπὸ συμπλήρωσιν τετραγωνίδιον. Πρὸς τοῦτο προσδιορίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν οἵτινες μετεφέρθησαν ἐκ τοῦ πίνακος 1 (πίναξ κόστους) προσημαίνοντες αὐτοὺς ἐναλλὰξ διὰ + καὶ –, ἀρχῆς γενομένης ἀπὸ τὸ τετραγωνίδιον τοῦ ὁποίου ἐπιζητοῦμεν τὸν ἀριθμόν. Διὰ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα θὰ ἔχομεν :

$$500 - 400 + 200 - 400 + 400 - 100 = 200$$

Ὁ ἀριθμὸς 200 τίθεται εἰς τὸ τετραγωνίδιον Θεσσαλονίκη, Ε, τοῦ πίνακος 2 τοῦ ὁποίου καὶ τὰ λοιπὰ τετραγωνίδια συμπληροῦνται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁπότε οὗτος λαμβάνει τὴν μορφὴν τοῦ πίνακος 3.

Ἐφ' ὅσον εἰς τὸν πίνακα ὑπάρχει ἀρνητικὸς ἀριθμὸς τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ πρόγραμμα εἶναι ἐπιδεκτικὸν βελτιώσεως, ἥτις καθίσταται δυνατὴ διὰ μετακινήσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐν κύκλῳ πρὸς τὸ τετραγωνίδιον μὲ τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Ὅταν οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι τοῦ ἑνός, τότε ἡ μετακίνησις γίνεται πρὸς τὸ τετραγωνίδιον μὲ τὸν μεγαλύτερον, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Εἰς τὸν πίνακα 3 ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι ὁ –500 καὶ ἑπομένως τὸ τετραγωνίδιον πρὸς τὸ ὁποῖον θὰ μετακινηθῇ ἕνας ἀριθμὸς ἐν κύκλῳ εἶναι τὸ Θεσσαλονίκη, Δ. Ἐρωτᾶται ὅμως ποῖος ἀπὸ τοὺς εὑρισκομέ-

Πίναξ 3

(Α' Πρόγραμμα)

Κέντρα Καταναλώσεως / Κέντρα Παραγωγῆς	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Διαθέσιμος ποσότης
Θεσσαλονίκη	35	45	– 300	– 500	200	– 100	~~80~~ ~~45~~ 0
Πειραιεύς	100	25	30	37	300	–200	~~92~~ ~~67~~ ~~37~~ 0
Καλαμάτα	200	0	100	3	48	17	~~68~~ ~~65~~ ~~17~~ 0
Χανιά	400	0	200	200	100	50	~~50~~ 0
Ζητουμένη ποσότης	~~35~~ 0	~~70~~ ~~25~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ ~~3~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ ~~50~~ 0	290

νους ἐντὸς κύκλων ἀριθμοὺς θὰ μετακινηθῇ; Ἀνατρέχομεν εἰς τὸ ἀκολουθηθὲν δρομολόγιον πρὸς προσδιορισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνιδίου πρὸς τὸ ὁποῖον θὰ γίνῃ ἡ μετακίνησις καὶ ἐκ τῶν θετικῶς προσημανσμένων τετραγωνιδίων ἐπιλέγομεν ἐκεῖνο μὲ τὸν μικρότερον ἐν κύκλῳ ἀριθμόν. Τὸ ἠκολουθηθὲν εἰς τὸ παράδειγμά μας δρομολόγιον ἐμφανίζεται εἰς τὸ σχέδιον 4.

Σχέδιον 4

Κέντρα Καταναλώσεως / Κέντρα Παραγωγῆς	Α	Β	Γ	Δ	
Θεσσαλονίκη	35	+ 45	−300	− −500	
Πειραιεύς		− 25	30	+ 37	

Τὰ θετικῶς προσημανσμένα τετραγωνίδια εἶναι τὸ Θεσσαλονίκη, Β καὶ τὸ Πειραιεύς, Δ μὲ τιμὰς 45 καὶ 37 ἀντιστοίχως καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς ὅστις θὰ πρέπει νὰ μετακινηθῇ εἶναι ὁ 37. Μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τοῦ ἀριθμοῦ μεταθέτομεν τοῦτον εἰς τὸ τετραγωνίδιον μὲ τὸν μικρότερον, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἀρνητικὸν ἀριθμὸν καὶ τοποθετοῦμεν τοὺς ὑπολοίπους κύκλους εἰς τὰς προηγουμένας των θέσεις ἀλλὰ ἄνευ ἀριθμῶν. Ἀκολουθοῦντες τὸν ἀρχικῶς ἐκτεθέντα κανόνα τῆς «Βορειοδυτικῆς γωνίας» συμπληρώνομεν τοὺς τοποθετηθέντας κενοὺς κύκλους διὰ καταλλήλων ἀριθμῶν σχηματίζοντες οὕτω ἓν νέον πρόγραμμα, τὸ ὁποῖον ἐν συνεχείᾳ, ἐλέγχωμεν ἂν εἶναι ἐπιδεκτικὸν βελτιώσεως καὶ ἡ ἐργασία συνεχίζεται ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς πρόγραμμα τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ τετραγωνίδια ἔχουν θετικοὺς ἀριθμούς. Τὸ τελευταῖον τοῦτο πρόγραμμα εἶναι τὸ πλέον οἰκονομικὸν καὶ τὸ τῆς ἐκτελέσεώς του προκῦπτον μεταφορικὸν κόστος τὸ μικρότερον δυνατόν. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι εἶναι δυνατὸν κατὰ τὴν πορείαν τῆς ἐργασίας ὁ ἀριθμὸς τῶν κύκλων νὰ καταστῇ μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν σειρῶν καὶ στηλῶν μεῖον ἕνα, ὁπότε εἰς τὴν θέσιν τοῦ μετακινουμένου κύκλου ἀφίνομεν ἕνα κύκλον μὲ τιμὴν μηδὲν καὶ τὸν χειριζόμεθα ὡς θετικὸν ἀριθμόν, εἰς τὸ παράδειγμά μας τοῦτο συνέβη εἰς τὸ 7ον πρόγραμμα.

Τὰ διάφορα προγράμματα ἀπὸ τοῦ δευτέρου μέχρι καὶ τοῦ τελευταίου ὡς καὶ τὸ μεταφορικὸν κόστος ἑκάστου ἐμφανίζονται εἰς τὰς ἑπομένας σελίδας.

Ἐκ τῆς ἑπομένης σειρᾶς προγραμμάτων εἶναι ἐμφανὴς ἡ συνεχὴς μείωσις τοῦ μεταφορικοῦ κόστους ἕως τὸ ἕβδομον πρόγραμμα. Οὕτω, ἐκ κόστους 78.400 δραχμῶν τοῦ πρώτου προγράμματος καταλήγομεν εἰς κόστος 38.500 δραχμῶν τοῦ ἑβδόμου προγράμματος, ποσὸν μικρότερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ἀρχικοῦ. Ἡ ἐκπόνησις τοῦ ὀγδόου προγράμματος ἐγένετο ἁπλῶς καὶ μόνον διὰ λόγους μεθοδολογικούς.Τὸ κόστος τοῦ προγράμματος τούτου εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ κόστος τοῦ ἀμέσως προηγουμένου του διότι ἡ μετακινουμένη ἀξία τοῦ τετραγωνιδίου Χανιά, Ζ εἶναι μηδὲν καὶ ἑπομένως οὐδεμία μεταβολὴ εἰς τὸ πρόγραμμα διανομῆς ἐπέρχεται. Σχετικῶς μὲ τὴν ἀρίστην λύσιν τοῦ προβλήτος θὰ πρέπει νὰ σημειωθῇ τὸ ἑξῆς: Ἡ ἐκπόνησις τοῦ προγράμματος διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται τὸ χαμηλότερον μεταφορικὸν κόστος δὲν σημαίνει συγχρόνως ὅτι ἕκαστον καταναλωτικὸν κέντρον προμηθεύεται τὴν ἀναγκαιοῦσαν εἰς αὐτὸ ποσότητα ἀγαθῶν ἐκ τοῦ κέντρου ἐκείνου παραγωγῆς ἐκ τοῦ ὁποίου τὸ κόστος μεταφορᾶς τῶν ἀγαθῶν εἶναι τὸ χαμηλότερον. Ἡ διὰ τοῦ καλυτέρου προγράμματος ἐπίτευξις τοῦ μικροτέρου κόστους ἀναφέρεται εἰς τὸ σ υ ν ο λ ι κ ὸ ν μεταφορικὸν κόστος καὶ οὐχὶ εἰς τὸ κόστος μεταφορᾶς τῶν εἰς τὰ καθ᾽ ἕκαστον καταναλωτικὰ κέντρα ἀναγκαιουσῶν ποσοτήτων. Οὕτω, εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐπιλυθὲν πρόβλημα ἐνῷ τὸ συνολικὸν μεταφορικὸν κόστος τοῦ ἑβδόμου προγράμματος εἶναι τὸ χαμηλότερον δυνατόν, διὰ τὸ καταναλωτικὸν κέντρον Α, ἐπὶ παραδείγματι, δὲν συμβαίνει τοῦτο. Προμηθευόμενον τὸ κέντρον Α, 10 τόννους ἐκ Θεσσαλονίκης καὶ 25 τόννους ἐκ Πειραιῶς πραγματοποιεῖ κόστος μεταφορᾶς $10 \times 300 + 25 \times 200 = 8.000$ δραχμὰς ἐνῷ ἂν ἐπρομηθεύετο ὁλόκληρον τὴν ἀναγκαιοῦσαν εἰς αὐτὸ ποσότητα ἐκ Πειραιῶς θὰ ἐπετύχανε κόστος $35 \times 200 = 7.000$ δρχ. ἤτοι κατὰ 1.000 δρχ. μικρότερον τοῦ πραγματοποιουμένου διὰ τοῦ καλυτέρου προγράμματος. Προφανῶς τοῦτο συμβαίνει διότι ἡ ὑπὸ τῶν κέντρων παραγωγῆς διαθέσιμος ποσότης ἐλήφθη ὡς δεδομένη καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸς ὁ ἐφοδιασμὸς τῶν κέντρων καταναλώσεως ἐκ τοῦ κέντρου παραγωγῆς ἐκ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνουν τὸ χαμηλότερον μεταφορικὸν κόστος ὁσάκις ἡ ζητουμένη ποσότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὑπὸ τοῦ κέντρου τούτου διατιθεμένης. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ Πειραιεὺς εἶναι τὸ εὐθηνότερον κέντρον ἐφοδιασμοῦ τόσον διὰ τὸ καταναλωτικὸν κέντρον Α ὅσον καὶ διὰ τὸ Ζ, ἡ συνολικῶς ὅμως ζητουμένη ποσότης ὑπὸ τῶν κέντρων τούτων ἀνέρχεται εἰς $35 + 67 = 102$ τόννους, ἥτις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ποσότητος τῶν 92 τόννων, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ παράγουν ἡμερησίως οἱ κυλινδρόμυλοι τοῦ Πειραιῶς. Ὡς ἐκ τούτου παρίσταται ἀνάγκη εὑρέσεως προγράμματος διὰ τοῦ ὁποίου νὰ ἀλληλοσυμψηφίζονται αἱ ἐπὶ μέρους πρόσθετοι καὶ ἐξοικονομούμεναι δαπάναι εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ χαμηλότερον σ υ ν ο λ ι κ ὸ ν μεταφορικὸν κόστος. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι προβλήματα τῆς μορφῆς τοῦ λυθέντος ἐνταῦθα ἔχουν ἔννοιαν μόνον εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας τὰ διάφορα παραγωγικὰ κέντρα ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν ἐπιχείρησιν ἢ τὸ πρόβλημα τοῦ κόστους ἐξετάζεται ἀπὸ κοινωνικοοικονομικῆς σκοπιᾶς.

Πρόγραμμα

2ον

Κέντρα Καταναλώσεως / Κέντρα παραγωγής	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Διαθέσιμος ποσότης
Θεσσαλονίκη	35	8	-300	37	700	400	~~80~~ ~~43~~ ~~8~~ 0
Πειραιεύς	100	62	30	500	800	300	~~92~~ ~~30~~ 0
Καλαμάτα	-300	-500	-400	3	48	17	~~68~~ ~~65~~ ~~17~~ 0
Χανιά	-100	-500	-300	200	100	50	~~50~~ 0.
Ζητουμένη ποσότης	~~35~~ 0	~~70~~ ~~62~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ ~~3~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ ~~50~~ 0	290

3ον

Θεσσαλονίκη	35	5	-300	40	200	-100	~~80~~ ~~40~~ ~~5~~ 0
Πειραιεύς	100	62	30	500	300	-200	~~92~~ ~~30~~ 0
Καλαμάτα	200	3	100	500	48	17	~~68~~ ~~65~~ ~~17~~ 0
Χανιά	400	0	200	700	100	50	~~50~~ 0
Ζητουμένη ποσότης	~~35~~ 0	~~70~~ ~~67~~ ~~62~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ ~~50~~ 0	290

4ον

Θεσσαλονίκη	35	300	5	40	500	200	~~80~~ ~~75~~ ~~40~~ 0
Πειραιεύς	-200	67	25	200	300	-200	~~92~~ ~~67~~ 0
Καλαμάτα	-100	3	100	200	48	17	~~68~~ ~~65~~ ~~17~~ 0
Χανιά	100	0	200	400	100	50	~~50~~ 0
Ζητουμένη ποσότης	~~35~~ 0	~~70~~ ~~3~~ 0	~~30~~ ~~25~~ 0	~~40~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ ~~50~~ 0	290

Κόστος Προγράμματος

Θεσσαλονίκη	Πειραιεύς	Καλαμάτα	Χανιά
35 X 300 = - 10,500	62 X -200 = -12,400	3 X -400 = -1.200	50 X -200 = -10.000
8 X -400 = - 3,200	30 X -300 = -9,000	48 X -100 = -4.800	
37 X -100 = - 3,700		17 X -300 = -5.100	
-17,400	-21.400	-11.100	10.000
Συνολικόν μεταφορικόν κόστος -17.400 - 21.400 - 11.100 - 10.000 = -59.900			

35 X -300 = -10,500	62 X -200 = -12,400	3 X -200 = - 600	50 X -200 = -10.000
5 X - 400 = - 2000	30 X -300 = - 9,000	48 X -100 = -4.800	
40 X -100 = - 4,000		17 X -300 = - 5.100	
- 16.500	- 21,400	-10,500	- 10,000
Συνολικόν μεταφορικόν κόστος - 16,500 - 21.400 - 10,500 - 10,000 = -58,400			

35 X -300 = -10.500	67 X -200 = - 13,400	3 X -200 = - 600	50 X -200 = -10.000
5 X -200 = - 1.000	25 X -300 = - 7.500	48 X -100 = -4.800	
40 X -100 = -4.000		17 X -300 = -5.100	
- 15.500	-20,900	-10,500	- 10,000
Συνολικόν μεταφορικόν κόστος - 15,500 - 20,900 - 10,500 - 10,000 = - 56.900			

Πρόγραμμα

5ον

Θεσσαλονίκη	35	300	5	40	500	400	~~80~~ ~~45~~ ~~50~~
Πειραιεύς	-200	50	25	200	300	17	~~92~~ ~~75~~ ~~50~~ 0
Καλαμάτα	-100	20	100	200	48	200	~~68~~ ~~48~~ 0
Χανιά	-100	-200	0	200	-100	50	~~50~~ 0
Ζητουμένη ποσότης	~~35~~ 0	~~70~~ ~~20~~ 0	~~30~~ ~~25~~ 0	~~40~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ ~~50~~ 0	290

6ον

Θεσσαλονίκη	10	100	30	40	300	200	~~80~~ ~~70~~ ~~30~~ 0
Πειραιεύς	25	50	200	400	300	17	~~92~~ ~~67~~ ~~50~~ 0
Καλαμάτα	100	20	300	400	48	200	~~68~~ ~~48~~ 0
Χανιά	100	-200	200	400	-100	50	~~50~~ 0
Ζητουμένη Ποσότης	~~35~~ ~~10~~ 0	~~70~~ ~~20~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ ~~17~~ 0	290

7ον

Θεσσαλονίκη	10	300	30	40	500	200	~~80~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
Πειραιεύς	25	200	200	400	500	67	~~92~~ ~~25~~ 0
Καλαμάτα	-100	20	100	200	48	0	~~68~~ ~~20~~ 0
Χανιά	100	50	200	400	100	0	~~50~~ 0
Ζητουμένη ποσότης	~~35~~ ~~10~~ 0	~~70~~ ~~20~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ 0	290

Κόστος Προγράμματος

35 X−300 = 10,500	50 X−200 = −10.000	20 X−200 = −4000	50 X−200 = −10,000
5 X−200 = −1,000	25 X−300 = −7.500	48 X−100 = 4.800	
40 X−100 = −4.000	17 X−100 = −1.700		
−15.500	−19.200	−8.800	−10.000
Συνολικόν μεταφορικόν κόστος − 15.500 − 19.200 − 8.800 − 10.000 = − 53.500			

10 X−300 = −3,000	25 X−200 = −5.000	20 X−200 = −4.000	50 X−200 = −10,000
30 X−200 = − 6.000	50 X−200 = −10.000	48 X−100 = −4.800	
40 X−100 = −4.000	17 X−100 = −1.700		
−13,000	−16.700	−8.800	−10,000
Συνολικόν μεταφορικόν κόστος − 13.000 − 16.700 − 8.800 − 10.000 = − 48.500			

10 X−300 = −3000	25 X−200 = −5,000	20 X−200 = −4.000	50 X−100 = −5000
30 X−200 = −6,000	67 X−100 = −6.700	48 X−100 = −4.800	0 X−100 = 0
40 −100 = −4,000			
−13,000	−11.700	−8.800	−5.000
Συνολικόν μεταφορικόν κόστος − 13.000 − 11.700 − 8.800 − 5000 = −38.500			

Π ρ ό γ ρ α μ μ α

8ον

Θεσσαλονίκη	10	200	30	40	400	200	~~80~~ ~~40~~ ~~10~~ 0
Πειραιεύς	25	100	200	400	400	67	~~92~~ ~~67~~ 0
Καλαμάτα	0	20	200	300	48	100	~~68~~ ~~48~~ 0
Χανιά	200	50	300	500	100	100	~~50~~ 0
Ζητουμένη ποσότης	~~35~~ ~~25~~ ~~10~~ 0	~~70~~ ~~20~~ 0	~~30~~ 0	~~40~~ 0	~~48~~ 0	~~67~~ 0	290

Κόστος Προγράμματος

10 X−300 = −3.000 30 X−200 = −6.000 40 X−100 = −4.000 −13.000	25 X−200 = −5.000 67 X−100 = −6.700 −11.700	0 X−300 = − 0 20 X−200 = −4000 48 X−100 = −4.800 −8.800	50 X−100 = −5.000 −5.000

Συνολικόν μεταφορικόν κόστος −13.000−11.700−8.800− 5.000= −38.500

Β'. ΜΕΘΟΔΟΣ MODI

Ἡ μέθοδος Modi ἢ «τροποποιημένη μέθοδος διανομῆς» (Modified Distribution Method), ὡς πολλάκις καλεῖται, βασίζεται ὡς καὶ ἡ Transportation Method ἐπὶ τῆς μεθόδου Simplex. Ὅπως ἡ Transportation Method, ἡ μέθοδος τῆς μεταφορᾶς, προέκυψεν ἀπὸ τὴν Simplex ὡς μία εἰδικὴ ἁπλοποιημένη μέθοδος διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν εἰδικῶν προβλημάτων τῶν ἐπιχειρήσεων, οὕτω καὶ ἡ μέθοδος Modi προῆλθεν ἀπὸ τὴν μέθοδον τῆς μεταφορᾶς κατόπιν διαφόρων προσθηκῶν καὶ ἁπλοποιήσεων, τὰς ὁποίας ὑπηγόρευσεν ἡ ἐφαρμογὴ τῆς πρώτης εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ ἡ ἀνάγκη ἀντιμετωπίσεως εἰδικῆς μορφῆς προβλημάτων τῆς ἐπιχειρηματικῆς ζωῆς κατὰ τὸν ἁπλούστερον δυνατὸν τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται ἐξοικονόμησις χρόνου καὶ προσπαθείας. Προβλήματα ὡς ἐκεῖνα τῆς κατανομῆς διαφόρων παραγγελιῶν τῶν πελατῶν μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἰς διάφορα ἐργοστάσια ἢ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἐπίτευξιν τοῦ μεγαλυτέρου δυνατοῦ κέρδους ἢ τῆς ἐκτελέσεως τῶν παραγγελιῶν εἰς τὸν μικρότερον δυνατὸν χρόνον, ὡς καὶ προβλήματα παρεμφεροῦς μορφῆς ἀντιμετωπίζονται ἐπιτυχῶς διὰ τῆς μεθόδου Modi:

Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου Modi πρὸς λύσιν ἑνὸς προβλήματος ὡς καὶ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν οἱασδήποτε ἄλλης μεθόδου Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἶναι ἀναγκαῖον κατ' ἀρχὴν νὰ ἐξετάσωμεν κατὰ πόσον τὸ πρόβλημα εἶναι δεικτικὸν γραμμικῆς ἀναλύσεως, κατὰ πόσον δηλαδὴ εἶναι πρόβλημα Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον διαπιστοῦται ἐκ τοῦ ἐὰν δύναται νὰ γίνουν δέκται εἰς τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν αἱ βασικαὶ ὑποθέσεις τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ὡς ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, τῆς διαιρετότητος κλπ. Ἐφ' ὅσον ἀποφανθῶμεν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δεκτικὸν γραμμικοῦ χειρισμοῦ καὶ ἡ φύσις του εἶναι τοιαύτη ὥστε ἡ μέθοδος Modi νὰ κρίνεται ὡς ἡ πλέον κατάλληλος διὰ τὴν λύσιν του τότε τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος θὰ πρέπει νὰ πληροῦν τὰς κάτωθι προϋποθέσεις διὰ νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ χρησιμοποίησις τῆς ἐν λόγῳ μεθόδου.

α) Ἡ βασικὴ προϋπόθεσις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου Modi εἶναι ἡ ἔκφρασις τῶν ποσοτικῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἄμεσον συγκρισιμότητα τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος μειώνουσα οὕτω σημαντικῶς τοὺς ἀπαιτουμένους ὑπολογισμούς. Ἡ φύσις τῆς κοινῆς μονάδος μετρήμεως δύναται νὰ εἶναι οἱαδήποτε (χρηματικὴ μονάς, χρονικὴ μονὰς κλπ.), χρησιμοποιεῖται ὅμως συνήθως ἡ ὥρα ἐργασίας μιᾶς μηχανῆς, ἐργοστασίου, ἐργάτου κλπ. θεωρουμένης ὡς προτύπου (standard), ὁπότε τὰ δεδόμενα τοῦ προβλήματος, διὰ καταλλήλων ὑπολογισμῶν, ἐκφράζονται εἰς ὥρας προτύπου μηχανῆς, προτύπου ἐργοστασίου, προτύπου ἐργάτου κλπ. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι ἡ ἔκφρασις αὕτη τῶν δεδομένων εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως εἶναι δύσκολος ἐργασία ἀπαιτοῦσα πολλάκις μακροὺς ὑπολογισμούς, ὑποθέσεις, μετρήσεις καὶ ἐκτιμήσεις τῶν διαφόρων στοιχείων τοῦ προβλήματος, ἀλλὰ εἶναι ἐπίσης ἀληθὲς ὅτι ἅπαξ καὶ πραγματοποιηθῆ ἡ ἐργασία αὕτη, ἀφ' ἑνὸς μὲν οἱ μετέπειτα ὑπολογισμοὶ εἶναι πολὺ ὀλιγώτεροι τῶν ἀπαιτουμένων κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς Simplex, ἀφ' ἑτέρου δὲ αἱ καθωρισθεῖσαι σχέσεις δύναται νὰ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν καὶ μελλοντικῶν προβλημάτων τῆς ἐπιχειρήσεως, ἐφ' ὅσον φυσικὰ δὲν ἐπῆλθον μεταβολαὶ εἰς τὴν φύσιν τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος.

β) Ἑτέρα ἀναγκαία προϋπόθεσις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου Modi εἶναι ἡ ἰσότης ἀπαιτουμένων καὶ ζητουμένων. Ἡ ζητουμένη ποσότης ἀγαθῶν ἐκφραζομένη εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα ἐκφραζομένην ἐπίσης εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα μετρήσεως. Εἶναι ἀληθὲς ὅτι τοῦτο σπανίως συμβαίνει εἰς τὴν πρᾶξιν. Εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης εἶναι μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν παραγγελιῶν. Ἡ διαπίστωσις αὕτη δὲν ἀναιρεῖ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα περὶ ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου Modi διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων αὐτῆς τῆς μορφῆς. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς γενομένης ἐνταῦθα ὑποθέσεως καὶ τῆς πραγματικότητος ἀντιμετωπίζεται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ λεγομένου «εἰκονικοῦ προϊόντος» καὶ τῆς «εἰκονικῆς μηχανῆς», ἀναλόγως τοῦ ἂν ἡ ζητουμένη ποσότης εἶναι μικροτέρα τῆς διαθεσίμου ἢ ἡ διαθέσιμος μικροτέρα τῆς ζητουμένης ἀντιστοίχως. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ «εἰκονικοῦ προϊόντος» ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διαθέσιμος ποσότης χρησιμοποιεῖται ὁλόκληρος ἀλλὰ τὸ προϊὸν τὸ μὴ πράγματι παραγόμενον (εἰκονικὸν προϊὸν) ἀποφέρει κέρδος μηδέν. Ἐπίσης διὰ τὸ προϊὸν τῆς «εἰκονικῆς μηχανῆς» ἡ ἐπιχείρησις δὲν ἔχει ἴδιον παραγωγικὸν κόστος ἀλλὰ προμηθεύεται τοῦτο δι' ἀγορᾶς ἐξ ἄλλων ἐπιχειρήσεων ὁπότε δυνατὸν οὐχὶ μόνον νὰ μὴν ἐπιτυγχάνῃ κέρδος ἀλλὰ ἀντιθέτως νὰ πραγματοποιῇ καὶ ζημίαν, κρίνεται ὅμως σκόπιμος ἡ ἱκανοποίησις καὶ τοῦ τμήματος τούτου τῆς ζητήσεως, καθ' ὑπέρβασιν τῶν παραγωγικῶν δυνατοτήτων, ἐκ λόγων πολιτικῆς τῆς ἐπιχειρήσεως.

Ὡς καὶ κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς μεθόδου μεταφορᾶς ἢ διανομῆς ἐλέχθη, ἡ ἁπλῆ ἀπαρίθμησις κανόνων δὲν νομίζομεν ὅτι εἶναι ὁ καλύτερος τρόπος ἐκμαθήσεως μιᾶς μεθόδου λύσεως προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἀντιθέτως, ἡ περιγραφὴ τῆς μεθόδου ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος δίδει τὴν εὐκαιρίαν εἰς τὸν ἀναγνώστην νὰ ἀφομοιώσῃ πληρέστερον τὴν ἀκολουθουμένην διαδικασίαν καὶ τὴν δυνατότητα νὰ καταφεύγῃ εἰς τὸ πρόβλημα ὁσάκις ἀντιμετωπίζει δυσκολίας κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου εἰς προβλήματα τῆς καθ' ἡμέραν ἐπιχειρηματικῆς ζωῆς.

Κατωτέρω ἐκθέτομεν περιληπτικῶς τὴν μέθοδον Modi λύοντες συγχρόνως ἓν πρόβλημα τῆς μορφῆς κατανομῆς παραγγελιῶν εἰς τὰ διάφορα ἐργοστάσια μιᾶς ἐπιχειρήσεως.

Τὸ πρόβλημα

α) Δεδομένα. Ἡ ἐπιχείρησις «Ὑφαντικὴ» διαθέτουσα τέσσαρα ἐργοστάσια τὰ ὑπ᾿ ἀριθμὸν I, II, III, καὶ IV ἔχει νὰ ἐκτελέσῃ παραγγελίας πελατῶν της διὰ τοὺς τύπους [1] ὑφασμάτων Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ Ζ. Ἡ ἑβδομαδιαία ζήτησις δι᾿ ἕκαστον τύπον ὑφάσματος καὶ ἡ ὡριαία δυνατὴ παραγωγὴ ἑκάστου ἐργοστασίου δι᾿ ἕκαστον τύπον ὑφάσματος ἐμφαίνονται εἰς τὸν πίνακα 1.

Πίναξ 1
Ζήτησις καὶ παραγωγικὴ ἱκανότης

Ζήτησις		Παραγωγικὴ ἱκανότης εἰς μέτρα ἀνὰ ὥραν			
Τύπος ὑφάσματ.	Μέτρα κατὰ ἑβδομάδα	Ἐργοστάσιον I	Ἐργοστάσιον II	Ἐργοστάσιον III	Ἐργοστάσιον IV
Α	2400	120	108	72	96
Β	1800	300	270	180	240
Γ	5500	100	90	60	80
Δ	6000	150	135	90	120
Ε	2000	200	180	120	160
Ζ	3600	180	—	—	—
Δείκτης παραγωγικῆς ἱκανότητος		1,00	0,90	0,60	0,80

Κατὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἀνωτέρω πίνακος ὑπετέθη, ἀφ᾿ ἑνὸς μὲν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις τῆς παραγγελίας διὰ ὕφασμα τύπου Ζ δύναται νὰ γίνῃ διὰ τεχνικοὺς ἔστω λόγους, μόνον ὑπὸ τοῦ ἐργοστασίου I, ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ ὅτι ἡ σχέσις τῆς παραγωγικῆς ἱκανότητος τῶν ἐργοστασίων θεωρεῖται ὅτι εἶναι ἡ αὐτὴ δι᾿ ὅλας τὰς παραγγελίας, ἐξ οὗ καὶ ὁ κοινὸς δείκτης παραγωγικῆς ἱκανότητος εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ πίνακος. Τόσον ἡ πρώτη, ὅσον καὶ ἡ δευτέρα ὑπόθεσις ἐγένοντο ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον διὰ λόγους ἁπλουστεύσεως τοῦ προβλήματος.

Ἡ τιμὴ πωλήσεως εἶναι ἑνιαία, διὰ τὸν αὐτὸν τύπον ὑφάσματος, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐργοστασίου παραγωγῆς, τὸ κατὰ μονάδα ὅμως κόστος διαφέρει τόσον ἀπὸ τύπον εἰς τύπον ὅσον καὶ ἀπὸ ἐργοστάσιον εἰς ἐργοστάσιον, ἀναλυτικῶς δὲ ἔχει ὡς ὁ πίναξ 2 δεικνύει.

Αἱ δυναταὶ ὧραι ἐργασίας τῶν ἐργοστασίων καὶ ὁ βαθμὸς παραγωγικῆς χρησιμοποιήσεως αὐτῶν ἔχει ὡς κάτωθι:

Ἐργοστάσιον	*I*	*II*	*III*	*IV*
Δυναταὶ ὧραι ἐργασίας ἑβδομαδιαίως	48	48	48	96 [2]
Βαθμὸς παραγωγικῆς χρησιμοποιήσεως μηχανημάτων	95%	90%	85%	80%

1) Κατωτέρω θὰ ὁμιλοῦμεν ἀδιαφόρως περὶ τύπου Α, Β, Γ,... ἢ παραγγελίας Α,Β,Γ,...
2) Τὸ ἐργοστάσιον IV ἀπασχολεῖ δύο «βάρδιες» ἐργατῶν.

Πίναξ 2

Κόστος, Τιμή, Κέρδος

(εἰς δραχμὰς ἀνὰ μέτρον)

Τύπος Ὑφάσματος	Κόστος				Τιμὴ Πωλήσεως	Κέρδος			
	I	II	III	IV		I	II	III	IV
Α	21	19	20	18	23	2	4	3	5
Β	8	7	9	6	10	2	3	1	4
Γ	27	26	25	24	30	3	4	5	6
Δ	19	17	15	14	21	2	4	6	7
Ε	12	15	12	11	16	4	1	4	5
Ζ	15	—	—	—	19	4	—	—	—

β) Ζητεῖται. Νὰ κατανεμηθοῦν αἱ παραγγελίαι εἰς τὰ διάφορα ἐργοστάσια κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται τὸ μεγαλύτερον δυνατὸν κέρδος.

Περιγραφὴ τῆς μεθόδου καὶ λύσις τοῦ προβλήματος

1. *Ἔκφρασις τῶν δεδομένων εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως*

Θεωροῦμεν τὸ ἐργοστάσιον I ὡς πρότυπον (standard) καὶ ὡς κοινὴν μονάδα μετρήσεως τὴν ὥραν ἐργασίας τούτου, ἐκφράζομεν δέ, τόσον τὴν ἑβδομαδιαίαν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα, ὅσον καὶ τὴν κατ' ἑβδομάδα ζήτησιν εἰς ὥρας ἐργασίας προτύπου ἐργοστασίου. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Προκειμένου περὶ τῆς διαθεσίμου παραγωγικῆς δυναμικότητος, πολλαπλασιάζομεν τὰς δυνατὰς ὥρας ἐργασίας ἑκάστου ἐργοστασίου ἐπὶ τὸν βαθμὸν παραγωγικῆς χρησιμοποιήσεως αὐτοῦ ὁπότε τὸ προκύπτον γινόμενον παριστᾷ τὰς παραγωγικὰς ὥρας τοῦ ἐργοστασίου. Αἱ ὧραι αὗται πολλαπλασιαζόμεναι μὲ τὸν δείκτην παραγωγικῆς ἱκανότητος τοῦ πίνακος 1 δίδουν τὴν παραγωγικὴν δυναμικότητα ἑκάστου ἐργοστασίου ἐκπεφρασμένην εἰς ὥρας ἐργασίας προτύπου ἐργοστασίου, τὸ ἄθροισμα τούτων παριστᾷ τὴν συνολικὴν διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα τῆς ἐπιχειρήσεως. Σχετικῶς μὲ τὴν ζήτησιν ἡ ἐργασία εἶναι κατὰ πολὺ ἁπλουστέρα. Διαιροῦντες τὴν ἑβδομαδιαίαν ζήτησιν διὰ τῆς ὡριαίας παραγωγικῆς ἱκανότητος τοῦ προτύπου ἐργοστασίου, δι' ἕκαστον τύπον ὑφάσματος κεχωρισμένως, λαμβάνομεν τὴν ζητουμένην ὑφ' ἑκάστου τύπου παραγωγικὴν δυναμικότητα. Οἱ ἐν λόγῳ ὑπολογισμοὶ διὰ τὸ ὑπὸ λύσιν πρόβλημα ἐμφαίνονται εἰς τοὺς πίνακας 3 καὶ 4.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν συνολικῶν μεγεθῶν τῶν δύο κατωτέρω πινάκων προκύπτει ὅτι ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης τῆς ἐπιχειρήσεως εἶναι κατὰ 19,4 ὥρας προτύπου ἐργοστασίου μεγαλυτέρα τῆς ἀπαιτουμένης διὰ τὴν

Πίναξ 3

Διαθέσιμος Παραγωγική Δυναμικότης

Ἐργοστάσιον	Δυναταὶ ὧραι ἐργασίας	Βαθμὸς παραγωγικῆς χρησ/σεως	Παραγωγικαὶ ὧραι ἐργασίας	Δείκτης παραγωγικῆς ἱκανότητος	Διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης εἰς ὥρας πρ.ἐρ.
I	48	95%	45,6	1,00	45,68
II	48	90%	43,2	0,90	38,88
III	48	85%	40,8	0,60	24,48
IV	96	80%	76,8	0,80	61,44
Συνολικὴ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης 170,40					

Πίναξ 4

Ζητουμένη Παραγωγικὴ δυναμικότης

Τύπος Ὑφάσματος	Ζητούμενα μέτρα καθ' ἑβδομάδα	Παραγ/κὴ ἱκανότης Ἐργοστ. I εἰς μέτρα ἀνὰ ὥραν	Ζητουμένη παρ/κὴ δυναμικότης εἰς ὥρας προτύπου ἐργοστασίου
Α	2400	120	20
Β	1800	300	6
Γ	5500	100	55
Δ	6000	150	40
Ε	2000	200	10
Ζ	3600	180	20
Συνολικὴ ζητουμένη παραγωγικὴ δυναμικότης 151			

παραγωγὴν τῶν ζητουμένων ποσοτήτων (170,4 — 151 = 19,4). Ὡς ἐκ τούτου, συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω βασικὴν προϋπόθεσιν ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου Modi, θὰ πρέπει νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ πρόβλημα «εἰκονικὸν προϊόν».

Πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὴν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος θὰ πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἀνὰ ὥραν ἐργασίας προτύπου ἐργοστασίου, τόσον διὰ τοὺς καθ' ἕκαστον τύπους ὑφάσματος, ὅσον καὶ διὰ τὰ καθ' ἕκαστον ἐργοστάσια. Ὁ ὑπολογισμὸς εἶναι ἁπλὸς καὶ συνίσταται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ κατὰ μονάδα κέρδους, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἀπὸ τὸν πίνακα 2, ἐπὶ τὴν ὡριαίαν παραγωγικὴν ἱκανότητα τοῦ προτύπου ἐργοστασίου ὡς αὕτη ἐμφανίζεται εἰς τοὺς πίνακας 1 καὶ 4. Οἱ ἀνωτέρω ὑπολογισμοὶ διὰ τὸ ὑπὸ λύσιν πρόβλημα περιλαμβάνονται εἰς τοὺς πίνακας 5 καὶ 5α.

Πίναξ 5

Κέρδος ἀνὰ ὥραν προτύπου ἐργοστασίου

(εἰς δραχμὰς)

Τύπος ὑφάσματος	Ἐργοστάσιον	Κέρδος	Κατάταξις παραγγελιῶν ἀπὸ ἀπόψεως κέρδους
Α	I	2 X 120 = 240	5η
	II	4 X 120 = 480	
	III	3 X 120 = 360	
	IV	5 X 120 = 600	
		Σύνολον 1680	
Β	I	2 X 300 = 600	1η
	II	3 X 300 = 900	
	III	1 X 300 = 300	
	IV	4 X 300 = 1200	
		Σύνολον 3000	
Γ	I	3 X 100 = 300	4η
	II	4 X 100 = 400	
	III	5 X 100 = 500	
	IV	6 X 100 = 600	
		Σύνολον 1800	
Δ	I	2 X 150 = 300	2η
	II	4 X 150 = 600	
	III	6 X 150 = 900	
	IV	7 X 150 = 1050	
		Σύνολον 2850	
Ε	I	4 X 200 = 800	3η
	II	1 X 200 = 200	
	III	4 X 200 = 800	
	IV	5 X 200 = 1000	
		Σύνολον 2800	
Ζ	I	4 X 180 = 720	6η

Πίναξ 5α

Κέρδος ἀνὰ ὥραν προτύπου ἐργοστασίου

Ἐργοστάσιον / τύπος ὑφάσματος	I	II	III	IV
A	240	480	360	600
B	600	900	300	1200
Γ	300	400	500	600
Δ	300	600	900	1050
E	800	200	800	1000
Σύνολον	2240	2580	2860	4450
Σειρὰ κέρδους	4ον	3ον	2ον	1ον

Ὁ τύπος Ζ δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸν πίνακα 5α διότι οὗτος δύναται νὰ παραχθῇ μόνον ὑπὸ τοῦ ἐργοστασίου Ι καὶ ἑπομένως δὲν ἀντιμετωπίζομεν, ὡς πρὸς αὐτόν, πρόβλημα κατανομῆς, ἀφαιροῦμεν ἁπλῶς ἀπὸ τὴν παραγωγικὴν δυναμικότητα τοῦ· ἐργοστασίου Ι τόσας ὥρας, ὅσαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς ζητουμένης ποσότητος ὑφάσματος τύπου Ζ, ὁπότε διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν λοιπῶν τύπων, τὸ ἐργοστάσιον Ι εἰσέρχεται εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς δυναμικότητός του.

2. *Ἐκπόνησις τοῦ πρώτου προγράμματος*

Ἔχοντες ἐκφράσει τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως εἴμεθα πλέον ἕτοιμοι νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐκπονοῦντες ἓν πρῶτον πρόγραμμα καὶ βελτιώνοντες τοῦτο ἕως ὅτου ἐπιτευχθῇ ἡ καλυτέρα (οἰκονομικωτέρα) δυνατὴ λύσις. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

α) Τοποθετοῦμεν εἰς πίνακα διπλῆς εἰσόδου ὡς ὁ πίναξ 6, ὁριζοντίως μὲν τοὺς διαφόρους τύπους τοῦ παραχθησομένου προϊόντος, καθέτως δὲ τὰ διάφορα ἐργοστάσια, τάσσοντες ἀμφότερα κατὰ σειρὰν σπουδαιότητος ἀπὸ ἀπόψεως κέρδους ὡς καθωρίσθησαν εἰς τοὺς πίνακας 5 καὶ 5α. Διὰ τοὺς ἀνωτέρω ἀναφερθέντας λόγους ὁ τύπος Ζ δὲν εἰσέρχεται εἰς τὸν πίνακα. Ἐπειδὴ εἰς τὸ πρόβλημα ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης εἶναι μικροτέρα τῆς ζητουμένης προστίθεται εἰς τὸν πίνακα μία ἐπὶ πλέον στήλη διὰ τὸ «εἰκονικὸν» προϊόν. Εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν καὶ στήλην τοῦ πίνακος θέτομεν τὴν ζητου-

Πίναξ 6

Πρόγραμμα 1ον

	Τύπος ὑφάσματος	Β	Δ	Ε	Γ	Α	Εἰκονικὸν προϊόν	Διαθέσιμος δυναμικότης εἰς ὥρας προτύπου ἐργοστασίου
Ἐργοστάσιον	Στῆλαι / Σειραί	1200	1050	1000	600	680	440	
IV	0	1200 / 6	1050 / 40	1000 / 10	600 / 5,44	600 / 680	0 / 440	~~61,44~~, ~~55,44~~, ~~15,44~~, ~~5,44~~, 0
III	−100	300 / 1100	900 / 950	800 / 900	500 / 24,48	360 / 580	0 / 340	~~24,48~~ 0
II	−200	900 / 1000	600 / 850	200 / 800	400 / + 25,08	480 / − 13,80	0 / 240	~~38,88~~, ~~13,80~~, 0
I	−440	600 / 760	300 / 610	800 / 560	300 / 160	240 / + 6,20	0 / 19,40	~~25,60~~, ~~19,40~~, 0
Ζητουμένη δυναμικότης εἰς ὥρας προτύπου ἐργοστασίου		~~6~~ 0	~~40~~ 0	~~10~~ 0	~~55~~ ~~49,56~~ ~~25,08~~ 0	~~20~~ ~~6,20~~ 0	~~19,40~~ 0	150,40 [1]

μένην καὶ διαθέσιμον παραγωγικὴν δυναμικότητα κατὰ τύπον παραγγελίας καὶ ἐργοστάσιον ἀντιστοίχως. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα λαμβάνονται ἐκ τῶν πινάκων 3 καὶ 4. Προφανῶς, ἡ παραγωγικὴ δυναμικότης τοῦ ἐργοστασίου Ι ἐμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα μικροτέρα τῆς πραγματικῆς κατὰ 20 ὥρας ὅσαι δηλαδὴ ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς παραγγελίας Ζ (45,6 − 20 = 25,6).

β) Κατανέμομεν τὰς παραγγελίας διὰ τοὺς διαφόρους τύπους ὑφάσματος εἰς τὰ ἐργοστάσια, ἀκολουθοῦντες τὸν περιγραφέντα εἰς τὴν μέθοδον «Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς» κανόνα τῆς «Βορειοδυτικῆς Γωνίας» προχωροῦντες εἰς τὴν ἑπομένην σειρὰν μόνον ἐφ᾽ ὅσον ἐξαντλήσωμεν τὴν δυναμικότητα τῆς πρώτης, τοποθετοῦμεν δὲ τοὺς ἀριθμοὺς ἐντὸς κύκλων πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοὺς λοιποὺς ἀριθμοὺς οἱ ὁποῖοι θὰ τοποθετηθοῦν ἀργότερον εἰς τὰ τετραγωνίδια ([2]).

γ) Εἰς τὴν ἄνω δεξιὰ γωνίαν ἑκάστου τετραγωνιδίου, εὑρισκομένου εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν στηλῶν καὶ σειρῶν ποὺ ἀνήκουν εἰς τοὺς διαφόρους τύπους προϊόντος ἀφ᾽ ἑνός, καὶ ἐργοστάσια ἀφ᾽ ἑτέρου, τοποθετοῦμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν ἐκφράζοντα τὸ κέρδος τοῦ ἐργοστασίου ἐκ τῆς παραγωγῆς ἐκείνου τοῦ

---

1) Ἀναφέρει τῆς συνολικῆς διαθεσίμου παραγωγικῆς δυναμικότητος κατὰ 20 ὥρας διατεθείσας διὰ τὴν παραγγελίαν Ζ.

2) Ὡς καὶ κατὰ τὴν μέθοδον τῆς «Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς» ὁ ἀριθμὸς τῶν τοποθετουμένων κύκλων θὰ πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν στηλῶν σὺν τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν μεῖον ἕνα. Ἀναφορικῶς μὲ τὸν ἀνωτέρω κανόνα ἰσχύουν τὰ κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς προηγουμένης μεθόδου λεχθέντα.

τύπου τοῦ προϊόντος εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τὸ τετραγωνίδιον. Τὰ ἐν λόγῳ στοιχεῖα λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πίνακος 5 καὶ τίθενται ἐντὸς τριγώνων πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως μετὰ τῶν λοιπῶν. Ὡς εἶναι προφανές, διὰ τὰ τετραγωνίδια τῆς στήλης τοῦ εἰκονικοῦ προϊόντος οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι μηδέν.

δ) Ὑπολογίζομεν τὸ προκύπτον κέρδος ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος, πολλασιάζοντες τοὺς ἐν κύκλῳ ἀριθμοὺς μὲ τοὺς ἐντὸς τῶν τριγώνων ἀριθμοὺς τῶν τετραγωνιδίων εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι τοποθετημένοι, καὶ ἀθροίζομεν τὰ γινόμενα.

Διὰ τὸ πρῶτον πρόγραμμα τοῦ ὑπὸ λύσιν προβλήματος ἔχομεν:

6,00	×	1200	=	7 200	Δρχ.
40,00	×	1050	=	42 000	»
10,00	×	1000	=	10 000	»
5,44	×	600	=	3 264	»
24,48	×	500	=	12 240	»
25,08	×	400	=	10 032	»
13,80	×	480	=	6 624	»
6,20	×	240	=	1 488	»
19,40	×	0	=	0	»
				92 848	»
Παραγγελία Ζ					
20	×	720	=	14 400	»
Σύνολον				107 248	»

Ἤτοι, τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ πρώτου προγράμματος ἀνέρχεται εἰς 107 248 δρχ.

3. *Ἔλεγχος τοῦ προγράμματος διὰ τὴν δυνατότητα βελτιώσεώς του*

Ὡς καὶ κατὰ τὴν περιγραφὴν τῆς μεθόδου «Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς» ἐλέχθη, κατὰ τὸ στάδιον ἐλέγχου τοῦ προγράμματος ζητοῦμεν νὰ ἀνεύρωμεν ἐὰν εἶναι δυνατὴ ἡ αὔξησις ἢ μείωσις τοῦ ἀποτελέσματος, ἀναλόγως ἂν πρόκειται περὶ προβλήματος μεγιστοποιήσεως κέρδους ἢ ἐλαχιστοποιήσεως κόστους, διὰ μετακινήσεως ἑνὸς ἢ περισσοτέρων κύκλων, διὰ τὸ σύνολον ἢ μέρος τῆς ἐντὸς αὐτοῦ ἀναγραφομένης ποσότητος, ἐκ τῆς ἀρχικῆς του θέσεως εἰς ἄλλο ἢ ἄλλα τετραγωνίδια ἐπιτυγχανομένης οὕτω μιᾶς νέας, περισσότερον οἰκονομικῆς, κατανομῆς τῶν παραγγελιῶν εἰς τὰ διάφορα ἐργοστάσια.

Προκειμένου περὶ τῆς μεθόδου Modi διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ ὁ ἔλεγχος τοῦ προγράμματος, κατ' ἀρχὴν θὰ πρέπει νὰ συμπληρώσωμεν δι' ἀριθμῶν τὰ τετραγωνίδια εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τεθῆ κύκλοι. Διὰ νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ συμπλήρωσις τῶν ἐν λόγῳ τετραγωνιδίων θὰ πρέπει πρῶτον νὰ σιμπληρωθοῦν δι' ἀριθμῶν τὰ κενὰ τετραγωνίδια ποὺ εὑρίσκονται παραπλεύρως τῆς λέξεως «Στῆλαι» καὶ κάτω τῆς λέξεως «Σειραὶ» (πίναξ 6).

Δυνάμεθα νὰ ἐκκινήσωμεν ἀπὸ οἱονδήποτε τετραγωνίδιον θέτοντες εἰς αὐτὸ ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, συνήθως ἀρχίζομεν ἀπὸ τὸ πρῶτον τετραγωνίδιον τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀμέσως κάτω ἀπὸ τὴν λέξιν «Σειραὶ» καὶ θέτομεν εἰς αὐτὸ τὸν ἀριθμὸν μηδέν. Ἐπειδή, ἡ ἐντὸς τριγώνου τιμὴ ἑκάστου τετραγωνιδίου εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει τεθῆ κύκλος, πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ τετραγωνιδίου τῆς στήλης καὶ τοῦ τετραγωνιδίου τῆς σειρᾶς εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τὸ περιέχον κύκλον τετραγωνίδιον (1). Ἡ συμπλήρωσις τῶν τετραγωνιδίων τῶν εὑρισκομένων παραπλεύρως τῆς λέξεως «Στῆλαι» καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἀμέσως κάτω αὐτῶν τετραγωνίδια περιέχουν κύκλον γίνεται δι' ἁπλῆς ἀναγραφῆς εἰς αὐτὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐντὸς τῶν τριγώνων (2). Ἐργαζόμενοι ἀναλόγως συμπληροῦμεν καὶ τὰ λοιπὰ τετραγωνίδια τὰ ἀπέναντι καὶ κάτω τῶν λέξων «Στῆλαι» καὶ «Σειραί».

Ἡ κατανόησις τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας θὰ καταστῇ κατὰ πολὺ εὐχερεστέρα ἐὰν ὁ ἀναγνώστης παρακολουθῇ αὐτὴν ἐπὶ τοῦ πίνακος 6. Ἐπ' εὐκαιρίᾳ σημειοῦμεν ὅτι ἡ ἐκμάθησις τῆς ὅλης μεθόδου, καθίσταται εὐκολωτάτη ἐὰν ὁ ἀναγνώστης παρακολουθῇ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐργαζόμενος ἐπὶ ἰδιαιτέρου χάρτου.

Μετὰ τὴν συμπλήρωσιν τῶν τετραγωνιδίων, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἔναντι καὶ κάτω τῶν λέξεων «Στῆλαι» καὶ «Σειραὶ» ἀντιστοίχως προχωροῦμεν εἰς τὴν συμπλήρωσιν τῶν τετραγωνιδίων τοῦ πίνακος εἰς τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν τεθῆ κύκλοι, θέτοντες εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν τιμῶν τοῦ πρώτου τετραγωνιδίου τῆς στήλης καὶ τῆς σειρᾶς εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν ὁποίων κεῖται τὸ ὑπὸ συμπλήρωσιν τετραγωνίδιον. Ἡ τιμὴ τοῦ τετραγωνιδίου Ε, ΙΙ, ἐπὶ παραδείγματι εἶναι $(1000)+(-200)=800$, καὶ τοῦ Α, ΙΙΙ θὰ εἶναι $(680)+(-100)=580$, ἐργαζόμενοι ἀναλόγως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν καὶ τῶν λοιπῶν.

Μετὰ τὴν συμπλήρωσιν ὅλων τῶν κενῶν τετραγωνιδίων τοῦ πίνακος συγκρίνομεν τὴν τιμὴν ἑκάστου τετραγωνιδίου ποὺ δὲν περιέχει κύκλον μὲ τὴν τιμὴν τοῦ ἐν αὐτῷ τετραγωνιδίου καὶ ἐφ' ὅσον ἡ πρώτη εἶναι μικροτέρα τῆς δευτέρας τὸ πρόγραμμα εἶναι δεκτικὸν βελτιώσεως, τὸ ἄριστον πρόγραμμα ἐπιτυγχάνεται μόνον ὅταν ἡ τιμὴ ἑνὸς ἑκάστου τετραγωνιδίου (3) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον ἐντὸς αὐτοῦ.

---

1) Ἂν παραστήσωμεν διὰ Κ τὴν τιμὴν ἑνὸς ἑκάστου τετραγωνιδίου εὑρισκομένου ἔναντι τῆς λέξεως «Στῆλαι», διὰ Σ τὴν τιμὴν ἑνὸς ἑκάστου τετραγωνιδίου κειμένου κάτωθι τῆς λέξεως «Σειραὶ» καὶ διὰ Τ τὴν τιμὴν τοῦ τριγώνου ἑκάστου τετραγωνιδίου τὸ ὁποῖον περιέχει κύκλον, τότε θὰ ἔχωμεν $Κ+Σ=Τ$. Διὰ τὸ τετραγωνίδιον Ε, IV ἐπὶ παραδείγματι, θὰ ἔχωμεν: $Σ=Ο$ καὶ $Τ=1000$ ὁπότε $Κ+Ο=1000$ $Κ=1000$.

2) Τοῦτο ἰσχύει ἐφ' ὅσον ἡ ἐκκίνησις ἐγένετο ἐκ τοῦ πρώτου τετραγωνιδίου κάτωθεν τῆς λέξεως «Σειραὶ» καὶ ἐφ' ὅσον ἐτέθη ὡς τιμὴ αὐτοῦ τὸ μηδέν.

3) Μὴ περιέχοντος κύκλον.

Ἡ ὕπαρξις τετραγωνιδίου μὲ τιμὴν μικροτέραν τῆς τιμῆς τοῦ ἐν αὐτῷ τριγώνου σημαίνει ὅτι, διὰ τῆς μετακινήσεως πρὸς τὸ τετραγωνίδιον αὐτὸ ἑνὸς κύκλου, μὲ τὴν συνολικὴν αὐτοῦ τιμὴν ἢ μὲ μέρος αὐτῆς θὰ ἐπιτύχωμεν βελτίωσιν τοῦ ἀποτελέσματος.

4. *Ἐκπόνησις τοῦ δευτέρου προγράμματος*

Ἐφ' ὅσον διαπιστωθῆ ἡ δυνατότης βελτιώσεως τοῦ προγράμματος, ἡ ἀκολουθουμένη πρὸς τοῦτο διαδικασία εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκείνην κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς «Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς». Ἐκκινοῦντες ἀπὸ τὸ τετραγωνίδιον ποὺ ἔχει τιμὴν μικροτέραν τῆς τιμῆς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τριγώνου (*) ἀκολουθοῦμεν δρομολόγιον ὅμοιον πρὸς τὸ περιγραφὲν εἰς τὴν μέθοδον τῆς «Μεταφορᾶς ἢ Διανομῆς» καὶ προσημαίνομεν τὰ τετραγωνίδια κατὰ τὰ ἐκεῖ λεχθέντα. Εἰς τὸ ὑπὸ λύσιν πρόβλημα τὸ ἐν λόγῳ τετραγωνίδιον εἶναι τὸ Γ, Ι καὶ τὸ ἀκολουθηθὲν δρομολόγιον ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 6. Ἐκ τῶν τετραγωνιδίων τῶν προσημανσμένων θετικῶς ἐκλέγομεν ἐκεῖνο μὲ τὴν μικροτέραν ἐντὸς κύκλου τιμὴν καὶ ἐν προκειμένῳ τὸ Α, Ι. Τὴν ἐν κύκλῳ τιμὴν τοῦ ἐπιλεγέντος τετραγωνιδίου προσθέτομεν εἰς τὴν τιμὴν τῶν ἀρνητικῶς προσημανσμένων τετραγωνιδίων καὶ τὴν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν τιμὴν τῶν θετι-

Πίναξ 7

Πρόγραμμα 2ον

	Τύπος ὑφάσματος	Β	Δ	Ε	Γ	Α	Εἰκονικὸν προϊόν	Διαθέσιμος δυναμικότης εἰς ὥρας προτύπου ἐργοστασίου
Ἐργοστάσιον	Στῆλαι / Σειραί	1200	1050	1000	600	680	300	
IV	0	1200 / 6	1050 / 40	+ 1000 / 10	− 600 / 5,44	600 / 680	0 / 300	61,44
III	−100	300 / 1100	900 / 950	800 / 900	500 / 24,48	360 / 580	0 / 200	24,48
II	−200	900 / 1000	600 / 850	200 / 800	400 / 18,88	480 / 20	0 / 100	38,88
I	−300	600 / 900	300 / 750	800 / 700	+ 300 / 6,20	240 / 380	0 / 19,40	25,60
Ζητουμένη δυναμικότης εἰς ὥρας προτύπου ἐργοστασίου		6	40	10	55	20	19,40	150,40 (1)

1) Διαφέρει τῆς συνολικῆς διαθεσίμου παραγωγικῆς δυναμικότητος κατὰ 20 ὥρας διατεθείσας διὰ τὴν παραγγελίαν Ζ.

*) Ἐὰν ὑφίστανται πλείονα τοῦ ἑνὸς τοιαῦτα τετραγωνίδια εἶναι ἀδιάφορον ἀπὸ ποῖον τετραγωνίδιον θὰ ἐκκινήσωμεν.

κῶς προσημανσμένων τοιούτων. Μετὰ ταῦτα μετακινοῦμεν τὸν κύκλον μὲ τὴν ἐν αὐτῷ τιμὴν εἰς τὸ τετραγωνίδιον ἐκ τοῦ ὁποίου ἐκκινήσαμεν. Οὕτω, τὸ δεύτερον πρόγραμμα ἔχει ἐκπονηθῆ. Τὸ δεύτερον πρόγραμμα διὰ τὸ ὑπὸ λύσιν πρόβλημα ἐμφανίζεται εἰς τὸν πίνακα 7.

Μετὰ ταῦτα ὑπολογίζομεν τὸ πραγματοποιούμενον ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ δευτέρου τούτου προγράμματος ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον θὰ πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ πρώτου προγράμματος προκειμένου περὶ κέρδους, ἢ μικρότερον ἐκείνου προκειμένου περὶ κόστους ([1]). Ἐνταῦθα σημειοῦμεν ὅτι, ἡ αὔξησις τοῦ ἀποτελέσματος θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς τιμῆς (ὧραι προτύπου ἐργοστασίου) τοῦ μετακινουμένου κύκλου, ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῆς τιμῆς τοῦ τετραγωνιδίου πρὸς τὸ ὁποῖον μετακινεῖται ὁ κύκλος ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ ἐν αὐτῷ τριγώνου. Εἰς τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν:

$$(300-160)\times 6{,}20 = 868 \text{ δρχ.}$$

Ὑπολογίζοντες τὸ κέρδος τοῦ δευτέρου προγράμματος λαμβάνομεν:

6,00	× 1200	=	7 200	Δρχ.
40,00	× 1050	=	42 000	»
10,00	× 1000	=	10 000	»
5,44	× 600	=	3 264	»
24,48	× 500	=	12 240	»
18,88	× 400	=	7 552	»
20,00	× 480	=	9 600	»
6,20	× 300	=	1 860	»
19,40	× 0	=	0	»
			93716	»
Παραγγελία Ζ				
20	× 720	=	14 400	»
Σύνολον			108 116	Δρχ.

Τὸ συνολικὸν τοῦτο κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως, συγκρινόμενον πρὸς τὸ κέρδος τοῦ πρώτου προγράμματος, εἶναι πράγματι κατὰ 868 δρ. μεγαλύτερον (108 116 – 107 248 = 868).

5. *Ἔλεγχος πρὸς περαιτέρω βελτίωσιν τοῦ ἀποτελέσματος*

Ἡ βελτίωσις τοῦ προγράμματος διὰ τῆς ἐκπονήσεως τοῦ δευτέρου τοιούτου δὲν σημαίνει συγχρόνως ὅτι τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶναι καὶ τὸ καλύτερον δυ-

1) Οἱ ὅροι «κέρδος» καὶ «κόστος» χρησιμοποιοῦνται ἐνταῦθα ὡς ἀντιπροσωπευτικοὶ τῶν δύο κατηγοριῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ἤτοι τῶν προβλημάτων μεγιστοποιήσεως καὶ ἐλαχιστοποιήσεως.

νατόν. Διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν ἐὰν τὸ ἐκπονηθὲν δεύτερον πρόγραμμα δύναται νὰ βελτιωθῇ, ἐργαζόμεθα ὡς καὶ κατὰ τὸν ἔλεγχον τοῦ πρώτου. Συγκρίνομεν τὰς τιμὰς τῶν τετραγωνιδίων—τῶν μὴ περιεχόντων κύκλον—μὲ τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένων τριγώνων, ἐκλέγομεν τὸ τετραγωνίδιον —ἐφ' ὅσον ὑπάρχει— τὸ ὁποῖον ἔχει τιμὴν μικροτέραν τοῦ τριγώνου, χαράσσωμεν τὸ δρομολόγιον κ.λ.π. συνεχίζοντες τὴν ἐκπόνησιν διαδοχικῶν προγραμμάτων ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς πρόγραμμα τοῦ ὁποίου αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν τετραγωνιδίων—τῶν μὴ περιεχόντων κύκλον—εἶναι μικρότεραι τῶν τιμῶν τῶν ἀντιστοίχων τριγώνων.

Εἰς τὸ λυόμενον ἐνταῦθα πρόβλημα τὸ «ἄριστον» ἀποτέλεσμα ἐπιτυγχάνεται εἰς τὸ τρίτον πρόγραμμα.

Πίναξ 8

Πρόγραμμα 3ον (ἄριστον)

	Τύπος ὑφάσματος	Β	Δ	Ε	Γ	Α	Εἰκονικὸν προϊόν	Διαθέσιμος δυναμικότης εἰς ὥρας προτύπου ἐργοστασίου.
Ἐργοστάσιον	Στῆλαι / Σειραί	1200	1050	1000	600	680	200	
IV	0	1200 / 6	1050 / 40	1000 / 3,80	600 / 11,64	600 / 680	0 / 200	61,44
III	—100	300 / 1100	900 / 950	800 / 900	500 / 24,48	360 / 580	0 / 100	24,48
II	—200	900 / 1000	600 / 850	200 / 800	400 / 18,88	480 / 20	0 / 0	38,88
I	—200	600 / 1000	300 / 850	800 / 6,20	300 / 400	240 / 480	0 / 19,40	25,60
Ζητουμένη δυναμικότης εἰς ὥρας προτύπου ἐργοστασίου		6	40	10	55	20	19,40	150,40 (1)

Ἡ αὔξησις τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ τρίτου προγράμματος θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω :

$$(800 - 700) \times 6{,}20 = 620 \text{ δρχ.}$$

Τὸ συνολικὸν κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως θὰ ἀνέρχεται εἰς 108 736 δρχ. ἀναλυόμενον ὡς κάτωθι :

---

1) Ἀναφέρει τῆς συνολικῆς διαθεσίμου παραγωγικῆς δυναμικότητος κατὰ 20 ὥρας διατεθείσας διὰ τὴν παραγγελίαν Ζ.

6,00	×	1200	=	7200	Δρχ.
40,00	×	1050	=	42 000	»
3,80	×	1000	=	3 800	»
11,64	×	600	=	6 984	»
24,48	×	500	=	12 240	»
18,88	×	400	=	7 552	»
20,00	×	480	=	9 600	»
6,20	×	800	=	4 960	»
19,40	×	0	=	0	»
				94 336	»
Παραγγελία Ζ					
20	×	720	=	14 400	»
Σύνολον				108 736	Δρχ.

Κατὰ τὴν ἐκπόνησιν διαδοχικῶν προγραμμάτων, εἶναι πιθανὸν νὰ ἐμφανισθῇ περίπτωσις καθ' ἣν ἡ τιμὴ ἑνὸς ἢ πλειόνων τετραγωνιδίων—ἄνευ κύκλου—εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀξίαν τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τριγώνου. Ὡς εἶναι προφανὲς εἰς τοιαύτας περιπτώσεις βελτίωσις τοῦ προγράμματος δὲν εἶναι δυνατή ([1]). Παρὰ ταῦτα, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ τετραγωνίδιον τῆς ἀνωτέρω μορφῆς ὡς τετραγωνίδιον ἐπιτρέπον τὴν βελτίωσιν τοῦ ἀποτελέσματος καὶ νὰ προβῶμεν εἰς τὴν ἐκπόνησιν νέου προγράμματος τοῦ ὁποίου, τὸ μὲν ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς ἐκεῖνο τοῦ προηγουμένου προγράμματος, πλὴν ὅμως θὰ παρέχῃ εἰς τὴν ἐπιχείρησιν εὐκαμψίαν ἀναφορικῶς πρὸς τὴν κατανομὴν τῶν παραγγελιῶν εἰς τὰ διάφορα ἐργοστάσια.

6. *Ἔκφρασις τοῦ ἀποτελέσματος εἰς πραγματικὰς μονάδας*

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος ὡς αὕτη ἐμφανίζεται εἰς τὸ τελευταῖον «ἄριστον», πρόγραμμα δὲν εἶναι εὐκόλως νοητὴ ὑπὸ τῶν ἰθυνόντων τὰς ἐπιχειρήσεις, ἄλλωστε ἡ ἔκφρασις τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος καὶ τῆς λύσεως τούτου εἰς «κοινὴν μονάδα μετρήσεως» ἐγένετο ἀποκλειστικῶς καὶ μόνον διὰ ὑπολογιστικοὺς λόγους. Ὡς ἐκ τούτου, παρίσταται ἀνάγκη νὰ ἐκφρασθῇ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἰς πραγματικὰς μονάδας, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δίδεται σαφὴς ἀπάντησις εἰς τὸ τεθὲν ὑπὸ τοῦ προβλήματος ἐρώτημα.

Ἡ ἀκολουθουμένη πρὸς τοῦτο διαδικασία εἶναι ἁπλουστάτη καὶ συνίσταται κατὰ βάσιν εἰς ἁπλῆν διαίρεσιν τῶν ὡρῶν προτύπου ἐργοστασίου διὰ τοῦ δείκτου τοῦ πίνακος 1 καὶ τὴν σύνθεσιν τῶν δεδομένων ὑπὸ μορφὴν πίνακος.

Διὰ τὸ χρησιμοποιηθὲν ἐνταῦθα παράδειγμα ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα 9.

---

1) Ἐφ' ὅσον φυσικὰ δὲν ὑφίστανται ἄλλα τετραγωνίδια μὲ τιμὴν μικροτέραν τῆς τοῦ τριγώνου των.

Πίναξ 9

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἰς πραγματικὰ μεγέθη

Τύπος ὑφάσματος	Ἐργοστάσιον	Ὧραι προτύπου ἐργοστασίου	Δείκτης παραγωγικῆς ἱκανότητ.	Πραγματικαὶ ὧραι ἐργασίας	Μέτρα ἀνὰ ὥραν	Παραγομένη ποσότης (εἰς μέτρα)	Ζητουμένη ποσότης (εἰς μέτρα
Α	II	20	0,90	22,22	108	2400	2400
Β	IV	6	0,80	7,50	240	1800	1800
Γ	IV	11,64	0,80	14,55	80	1164	5500
	III	24,48	0,60	40,80	60	2448	
	II	18,88	0,90	20,98	90	1888	
Δ	IV	40	0,80	50,00	120	6000	6000
Ε	IV	3,80	0,80	4,75	160	760	2000
	I	6,20	1,00	6,20	200	1240	
Ζ	I	20	1,00	20,00	180	3600	3600

Ἐπὶ τοῦ τρόπου κατασκευῆς τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Ἡ συμπλήρωσις τῶν τριῶν πρώτων στηλῶν γίνεται εὐκόλως ἐκ τοῦ τελευταίου προγράμματος καὶ ἐν προκειμένῳ ἐκ τοῦ πίνακος 8, εἰς τὴν τετάρτην στήλην ἁπλῶς μεταφέρομεν τὸν δείκτην τοῦ πίνακος 1, ἐνῶ ἡ συμπλήρωσις τῆς πέμπτης, γίνεται διὰ διαιρέσεως τῶν δεδομένων τῆς τρίτης στήλης τοῦ πίνακος διὰ τοῦ δείκτου τῆς τετάρτης στήλης. Ἡ ὑπὸ τὸν τίτλον «Μέτρα ἀνὰ ὥραν» ἕκτη στήλη συμπληροῦται ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 1 ἢ δὲ ἑβδόμη διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεδομένων τῆς πέμπτης καὶ ἕκτης στήλης τοῦ πίνακος. Ἡ τελευταία στήλη τοῦ πίνακος ἀποτελεῖ ἁπλῆν ἀντιγραφὴν τῆς ἀντιστοίχου στήλης τοῦ πίνακος 1.

Ἐκ τοῦ τελευταίου ὑπ' ἀριθμὸν 9 πίνακος δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ἄλλον πίνακα εἰς τὸν ὁποῖον νὰ ἐμφανίζωνται αἱ ὧραι ἐργασίας ἑκάστου ἐργοστασίου διὰ τὴν παραγωγὴν ὁλοκλήρου τῆς ποσότητος, ἢ μέρους αὐτῆς ἑκάστου τύπου ζητουμένου ὑφάσματος. Ὁ πίναξ 10 παρέχει τὰς ἀνωτέρω πληροφορίας ἀναφορικῶς μὲ τὸ λυθὲν πρόβλημα.

Ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, βασικὴ προϋπόθεσις διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου Modi εἶναι ἡ ἰσότης διαθεσίμου καὶ ζητουμένης παραγωγικῆς δυναμικότητος ἐκφραζομένων εἰς κοινὴν μονάδα μετρήσεως. Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ παρετηρήθη ὅτι ἡ ἰσότης αὕτη σπανίως συναντᾶται εἰς τὴν πρᾶξιν, καὶ ὡς ἐκ τούτου παρίσταται ἀνάγκη προσαρμογῆς τῆς μεθόδου ὥστε νὰ δύναται νὰ ἀνταποκριθῇ εἰς τὰς ἀπαιτήσεις τῆς καθ' ἡμέραν ἐπιχειρητικῆς ζωῆς. Εἰς τὰς περιπτώσεις ἐκείνας εἰς τὰς ὁποίας ἡ διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ζητουμένης, ἡ προσαρμογὴ καθίσταται δυνατὴ διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ λεγομένου «εἰκονικοῦ προϊόντος» ὡς ἐγένετο καὶ εἰς τὸ ἀνωτέρω λυθὲν πρόβλημα. Ἀντιθέτως, εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ ζητουμένη

Πίναξ 10

Κατανομὴ τῶν πραγματικῶν ὡρῶν ἐργασίας ἑκάστου ἐργοστασίου

Ἐργοστάσιον / Τύπος ὑφάσματος	I	II	III	IV
Α		22,22		
Β				7,50
Γ		20,98	40,80	14,55
Δ				50,00
Ε	6,20			4,75
Ζ	20,00			
Σύνολον	26,20	43,20	40,80	76,80
Διαθέσιμος παραγωγικὴ δυναμικότης	45,60	43,20	40,80	76,80
Ἀργοῦσα παραγωγικὴ δυναμικότης	19,40	0	0	0

δυναμικότης εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαθεσίμου, προσαρμόζομεν τὴν μέθοδον διὰ τῆς εἰσαγωγῆς «εἰκονικοῦ ἐργοστασίου». Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν ἡ ἀκολουθουμένη διαδικασία πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος εἶναι κατὰ βάσιν ὁμοία πρὸς ἐκείνην τῆς πρώτης περιπτώσεως ὅτε ἡ διαθέσιμος δυναμικότης ἦτο μεγαλυτέρα τῆς ζητουμένης. Ἐπανάληψις τῆς διαδικασίας νομίζομεν ὅτι θὰ ἀπέβαινε κουραστικὴ διὰ τὸν ἀναγνώστην χωρὶς νὰ προσθέτῃ τίποτε τὸ οὐσιῶδες εἰς τὰ μέχρι τοῦδε ἐκτεθέντα (1).

Ἡ μέθοδος Modi *εἰς προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως*

Ὡς γνωστόν, τὰ προβλήματα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ὡς προβλήματα «ἀριστοποιήσεως» δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς δύο βασικὰς κατηγορίας: α) προβλήματα «μεγιστοποιήσεως», β) προβλήματα «ἐλαχιστοποιήσεως». Τὸ ἀνωτέρω λυθὲν πρόβλημα ἀνήκει εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ὡς ἀποβλέπον εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους τῆς ἐπιχειρήσεως. Ὡς ἐλέχθη ὅμως ἀνωτέρω, ἡ μέθοδος Modi δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς ὅλας τὰς κατη-

1) Λύσιν προβλήματος τῆς δευτέρας αὐτῆς μορφῆς ἴδε: R. O. Ferguson and L. F. Sargent «Linear Programming: Fundamentals and Applications» N. York, 1958, σελ. 58.

γορίας προβλημάτων Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, ἐφ' ὅσον βεβαίως ἡ φύσις τοῦ προβλήματος τὸ ἐπιτρέπει. Θὰ ἠδυνάμεθα ὡς ἐκ τούτου νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον Modi καὶ εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἀντὶ τῆς μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους ἐζητεῖτο ἡ ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὡρισμένα ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος, ὡς ἡ τιμὴ πωλήσεως ἐπὶ παραδείγματι, δὲν θὰ ἦσαν ἀναγκαῖα, θὰ ἀπητεῖτο δὲ διάφορος ἐν μέρει ταξινόμησις τῶν δεδομένων, πλὴν ὅμως ἡ διαδικασία εἶναι κατὰ βάσιν ἡ αὐτὴ πρὸς τὴν ἀκολουθηθεῖσαν. Ὡς ἐκ τούτου πρὸς ἀποφυγὴν παραθέσεως ἐκ νέου τῶν αὐτῶν πινάκων σημειώνομεν κατωτέρω τὰς κυριωτέρας διαφορὰς κατὰ τὴν ἀκολουθουμένην διαδικασίαν :

α) Ὑποθέτομεν τὴν τιμὴν πωλήσεως ὡς δεδομένην χωρὶς νὰ ἀπαιτῆται ἀκριβὴς προσδιορισμὸς αὐτῆς ὡς κατὰ τὴν περίπτωσιν μεγιστοποιήσεως τοῦ κέρδους. Ἀντὶ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ κατὰ ἐργοστάσιον καὶ παραγγελίαν κέρδους ὑπολογίζομεν τὸ κόστος, κατασκευάζοντες πίνακα τῆς μορφῆς τοῦ πίνακος 5 καὶ μεταφέρομεν τοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὰ τρίγωνα τοῦ πίνακος τοῦ προγράμματος.

β) Εἰς τὴν στήλην «εἰκονικὸν προϊὸν» ἀντὶ μηδὲν θέτομεν ἕνα γράμμα ἔστω Μ ὑποθέτοντες ὅτι τοῦτο παριστᾷ ἀριθμὸν ἀπείρως μεγάλον, τὸ Μ δὲν εἰσέρχεται εἰς τοὺς προϋπολογισμούς.

γ) Προκειμένου νὰ ἐλεγχθῇ ἡ δυνατότης βελτιώσεως τοῦ προγράμματος, καὶ ἐπειδὴ παριστῶμεν τὸ κόστος διὰ θετικῶν ἀριθμῶν, ἀναζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα τετραγωνίδιον, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ εἶναι μ ε γ α λ υ τ έ ρ α τῆς τιμῆς τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τριγώνου. Ἀκολουθοῦντες τὴν γνωστὴν διαδικασίαν φθάνομεν εἰς πρόγραμμα τοῦ ὁποίου αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν τετραγωνιδίων εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ α ι τῶν τιμῶν τῶν τριγώνων, τὸ πρόγραμμα τοῦτο εἶναι τὸ ἄριστον (1).

1) Λύσιν προβλήματος ἐλαχιστοποιήσεως κόστους ἴδε εἰς R. O. Ferguson and L. F. Sargent, ἔνθ. ἀνωτ., σελὶς 66.