ALCUNI PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

per SALVATORE CHERUBINO

§ 1. **Massimizzazione o minimizzazione di un settore aggregato**

1. Consideriamo le due funzioni lineari delle produzioni e dei prezzi di un' economia E ripartita in n settori:

$$(1.\ 1) \qquad z = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots + \lambda_n X_n = \lambda \mathbf{X}_{-1}$$

$$(\mathbf{1}.\ 1) \qquad z = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \ldots\ldots + \mu_n p_n = \mu\, p_{-1}$$

vincolate dalle condizioni:

$$(2.\ 1) \qquad [\,I - \mathbf{a}\,]\,\mathbf{X}_{-1} \leqq \mu_{-1}$$

$$(\mathbf{2}.\ 1) \qquad \mathbf{p}\,[\,I - \mathbf{a}\,] \geqq \lambda$$

Poiché $[\,I - \mathbf{a}\,]^{-1}$ é una matrice non negativa (addirittura positiva se a, ossia l'economia E, é irriducibile) dalle (2. 1) — (**2**. 1) si ha:

$$(3.\ 1) \qquad \mathbf{X}_{-1} \leqq [\,I - \mathbf{a}\,]^{-1}\,\mu_{-1} = \mathbf{X}^0_{-1}$$

$$(\mathbf{3}.\ 1) \qquad \mathbf{p} \geqq \lambda\,[\,I - \mathbf{a}\,]^{-1} = \mathbf{p}^0$$

Essendo λ e μ due vettori positivi o semipositivi, anche **X** e **p** sono tali e si può scrivere:

$$(4.\ 1) \qquad z = \lambda \mathbf{X}_{-1} \leqq \lambda \mathbf{X}^0_{-1} = z^0$$

$$(\mathbf{4}.\ 1) \qquad \mathbf{z} = \mu \mathbf{p}_{-1} \geqq \mu \mathbf{p}^0_{-1} = \mathbf{z}^0$$

le quali ci dicono che z^0 e $\mathbf{z}^0$ sono rispettivamente massimo e minimo di z e **z**. Orbene, confrontando le (2. 1) — (**2**. 1) con le (I. 1) — (II. 1) della parte prima si vede che λ é un vettore di costi di forza - lavoro per produzioni unitarie non minore di quello necessario (quindi minimo) **Z** e che μ é un vettore di consumi non minore di quello **Y** dei consumi necessari (quindi minimo). Si é dunque ottenuto che:

a) Esistono produzioni e prezzi che massimizzano un costo di lavoro impiegato negli n settori e minimizzano il costo dei consumi: questo massimo e questo minimo risultano fra loro uguali. Quest'ultima affermazione segue dalle (3. 1) — (**3**. 1) sostituite nelle (4. 1) — (**4**. 1).

Analogamente, considerando le funzioni linearri:

(5. 1) $$^{+}z = \lambda_1\,^{+}X_1 + \lambda_2\,^{+}X_2 + \ldots + \lambda_n\,^{+}X_n = \lambda\,^{+}\mathbf{X}_{-1}$$

(**5.** 1) $$^{+}\mathbf{z} = \mu_1\,^{+}\mathbf{p}_1 + \mu_2\,^{+}\mathbf{p}_2 + \ldots + \mu_n\,^{+}\mathbf{p}_n = \mu\,^{+}\mathbf{p}_{-1}$$

sottoposte ai vincoli lineari:

(6. 1) $$[\,I - \mathbf{a}\,]\,\mathbf{X}_{-1} \geqq \mu^{+}_{-1}$$

(**6.** 1) $$\mathbf{p}\,[\,I - \mathbf{a}\,] \leqq \lambda^{+}$$

si ha che:

$$^{+}z^0 = \lambda^{+}\cdot\,^{+}\mathbf{X}^{0}_{-1} \qquad \text{con} \qquad ^{+}\mathbf{X}^{0}_{-1} = [\,I - \mathbf{a}\,]^{-1}\,\mu^{+}_{-1}$$

$$^{+}\mathbf{z}^0 = \,^{+}\mathbf{p}^0\cdot\mu^{+}_{-1} \qquad \text{con} \qquad ^{+}\mathbf{p}^0 = \lambda^{+}\,[\,I - \mathbf{a}\,]^{-1}$$

sono rispettivamente minimo e massimo, fra loro eguali, di ^{+}z e $^{+}\mathbf{z}$. Cioé, confrontando ancora con le (I. 1) — (II. 1) della parte prima, che ci dicono essere μ^{+} un vettore di consumi e λ^{+} un vettore di forza - lavoro impiegata non maggiori di qualli massimi, supposti fissati per E, si ha che:

b) Esistomo produzioni e prezzi che minimizzano un costo di lavoro impiegato e massimizzano un costo di consumi; questo massimo e questo minimo risultano fra loro eguali.

I vettori della forza - lavoro impiegata per produzioni unitarie nei singoli settori e dei consumi rispettivi si possono fissare ad arbitrio, entrambi positivi o semipositivi. Se il primo, cioé quello della forza - lavoro, si fissa positivo, anche il vettore dei prezzi che danno il massimo od il minimo risulta positivo; se si fissa positivo il seconco, cioé quello dei consumi, altrettanto accade pel vettore delle produzioni. Se l'economia é irriducibile i vettori dei prezzi e delle produzioni risultano entrambi positivi anche quando quelli della forza - lavoro impiegata e dei consumi siano semipositivi.

§ 2. Massimo e minimo della velocità di produzione e di prezzo

2. Abbiamo visto (p. I, § 4, 8) che le velocità di produzione e di prezzo relative ad un settore aggregato secondo il vettore λ positivo o semipositivo, posto:

(1. 2) $$\begin{cases} X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots + \lambda_n X_n = \lambda\mathbf{X}_{-1} \\ p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots\ldots + \lambda_n p_n = \lambda\mathbf{p}_{-1} \end{cases}$$

si esprimono con le relazioni differenziali:

$$(1.\ 2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \lambda B\,\mathbf{p}_{-1} + \mathbf{p}\,\mathcal{M}\,\mathbf{p}_{-1} \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = \lambda C\,\mathbf{X}_{-1} + \mathbf{X}\,\mathcal{X}\,\mathbf{X}_{-1} \end{cases}$$

Ponendo:

$$2S = \mathcal{M} + \mathcal{M}_{-1}\,; \qquad 2S' = \mathcal{X} + \mathcal{X}_{-1}$$

le parti complementari $\mathbf{p}\,\mathcal{M}\,\mathbf{p}_{-1}$, $\mathbf{X}\,\mathcal{X}\,\mathbf{X}_{-1}$ diventano rispettivamente le forme quadratiche $\mathbf{p}\,S\,\mathbf{p}_{-1}$, $\mathbf{X}\,S'\mathbf{X}_{-1}$, onde può scriversi:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda B\,\mathbf{p}_{-1} + \mathbf{p}_{-1} S\,\mathbf{p}_{-1}$$

$$\frac{dp}{dt} = \lambda C\,\mathbf{X}_{-1} + \mathbf{X}_{-1} S'\mathbf{X}_{-1}$$

Si ricordino le posizioni (1. 4) — (2. 4) della parte prima e le due analoghe:

$$(4.\ 2)\qquad \mathcal{T} = C + X_1 C' + X_2 C'' + \ldots\ldots + X_n C^{(n)}$$

$$(5.\ 2)\qquad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \lambda_1 C' \\ \lambda_2 C' \\ \vdots \\ \lambda_n C^{(n)} \end{bmatrix}$$

con le conseguenti relazioni:

$$(6.\ 2)\qquad \mathbf{p}\,\mathcal{M} = \lambda\,[\,\mathcal{B} - B\,]\,; \qquad \mathbf{X}\mathcal{X} = \lambda\,[\,\mathcal{T} - C\,]$$

$\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ essendo le matrici dei coefficienti del sistema differenziale lineare che rappresenta il mercato [parte I, (I. 2)].

In un intervallo di tempo abbastanza piccolo (t_0, t_1) in cui funziona il mercato, se si vuole essere in regime di libera concorrenza le matrici $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ devono essere non negative (n. 6, § 3, della parte prima) (1). Ne segue che sono tali anche B e C. Invero, ricordando che si é posto, con la (1. 4) della parte prima:

$$(4'.\ 2)\qquad \mathcal{B} = B + p_1 B' + p_2 B'' + \ldots\ldots + p_n B^{(n)}$$

si vede che ad un elemento negativo di B potrebbero farsi corrispondere, se occorre, reazioni specifiche tutte zero od abbastanza piccole in va-

1) Le condizione é necessaria; la sufficienza si ha se non si tien conto di **a**. Se le reazioni sono variabili col tempo, la non negatività di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{T}$ in (t_0, t_1) o in una sua porzione é condizione sufficiente per la positività delle soluzioni dell' integrale generale it tutto (t_0, t_1) o in quella porzione. Ma non édetto che esse soddisfino senz' altro alle (III. 2) della parte prima, che sono indispensabili perché **X** e **p** siano relativi alla matrice di scambi **a**.

lore assoluto, per modo che anche il corrispondente elemento di $\mathscr{B}$ sia negativo, onde verrebbe meno la concorrenza perfetta. La non negatività di B e C é anch' essa solo necessaria. Sarebbe necessaria anche la non negatività delle reazioni specifiche qualora le componenti dei vettori **p** e **X** non fossero limitate: il che non avviene quando, come si supporrà di qui a poco, questi vettori siano normalizzati.

Ne segue che i vettori λB e λC sono non negativi insieme alle parti principali delle velocità di produzione e di prezzo dei settori aggregati.

3. Supponiamo che i vettori λB e λC siano non nulli, quindi positivi o semipositivi; poniamo:

$$(7.\ 2) \qquad \lambda B = \mu\,; \qquad \lambda C = \lambda$$

e consideriamo le funzioni lineari:

$$(8.\ 2) \qquad \lambda B\mathbf{p}_{-1} = \mu\mathbf{p}_{-1}\,; \qquad \lambda C\mathbf{X}_{-1} = \lambda\mathbf{X}_{-1}$$

La prima di queste funzioni ammette il minimo e la seconda il massimo o *viceversa*, secondo che **p** ed **X** siano sottoposti ai vincoli:

$$(9.\ 2) \qquad \mathbf{p}[\,I - \mathbf{a}\,] \geqq \lambda\,; \qquad [\,I - \mathbf{a}\,]\mathbf{X}_{-1} \leqq \mu_{-1}$$

oppure agli altri:

$$(10.\ 2) \qquad \mathbf{p}[\,I - \mathbf{a}\,] \leqq \lambda\,; \qquad [\,I - \mathbf{a}\,]\mathbf{X}_{-1} \geqq \mu_{-1}$$

cioé secondo che i due vettori λ e μ siano non maggiori, o non minori, ordinatamente del vettore delle forze-lavoro necessarie per produzioni unitarie o del ventore dei consumi necessari. Il che non è detto che occade con λ, B, C qualunque. Quando accade, la parte principale della velocità di produzione (di prezzo) di un assegnato settore aggregato varia fra un minimo e un massimo non negativi determinati dal vettore di aggregazione ed ogni minimo (massimo) della parte principale di produzione eguaglia un ben determinato valore massimo (minimo) della velocità di prezzo.

Le determinazioni dei prezzi e delle produzioni che danno luogo al minimo od al massimo di $\lambda B\mathbf{p}_{-1}$ ed al massimo od al minimo di $\lambda C\mathbf{X}_{-1}$ relativi al fissato λ sono:

$$(11.\ 2) \qquad \mathbf{p}^0 = \lambda[\,I - \mathbf{a}\,]^{-1}\,; \qquad \mathbf{X}^0_{-1} = [\,I - \mathbf{a}\,]^{-1}\mu_{-1}$$

4. Nel sistema (I. 2) i prezzi e le produzioni possono supporsi normalizzati in modo che le loro somme siano uguali all' unità. Allora le parti complementari delle due velocità [2] ammetteranno come massimi e

---

2) Cfr. il § 3 del cap. II dell mio *Calcolo delle Matrici* [cit. (3) nella parte prima] propos. f) a p. 153. Non importa che ivi la normalizzazione si fa

minimi le radici caratteristiche delle loro matrici discriminanti S ed S'.

Riferendosi ai due spazi ad n dimensioni in cui variano tutti i prezzi e tutte le produzioni, con le limitazioni imposte dalla normalizzazione, questi massimi e minimi capitano tra la più piccola e la più grande radice caratteristica di ciascuna di dette matrici reali e simmetriche. Queste radici sono note almeno con approssimazione quando siano note le matrici S ed S' oppure gli estremi tra i quali esse variano [3]. Si tenga inoltre conto del che i prezzi e le produzioni variano soltanto nei due coni poliedrali convessi di cui al primo paragrafo della parte prima.

Si può allora rilevare che l' esistenza di determinazioni di **p** e di **X** che rendano massima o minima ciascuna parte delle due velocità é assicurata dal che esse sono funzioni continue definite nel poliedro convesso e limitato intersezione del rispettivo cono poliedrale convesso di equazione una delle (III. 2) della parte prima col corrispondente iperpiano ad n—1 dimensioni avente una delle due equazioni:

$$(12.\ 2)\qquad p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = 1\,; \qquad X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n = 1$$

Si conclude che, in regime di concorrenza perfetta, le velocità di produzione e di prezzo (normalizzati) di ogni settore aggregato di E variano oscillando intorno al massimo ed al minimo, entrambi non negativi, della parte principale, rimanendo in un ben determinato intervallo.

Le osservazioni fatte di sopra assicurano che vi sono mezzi per calcolare valori almeno approssimati degli estremi tra i quali variano dette velocità, basandosi su opportune ed adeguate rilevazioni statistiche.

L' ipotesi della normalizzazione di produzioni e prezzi è troppo restrittiva. Essa può sostituirsi con quella della limitazione, ammissibile almeno in intervalli finiti di tempo. Allora, invece della (12. 2) valgono le desuguaglianze:

$$(13.\ 2)\qquad p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n \leqq h$$

---

con altra posizione, diretta anch' essa ad ottenere che le variabili indipendenti restino in un insieme limitato. Qui le produzioni sono omogeneizzate considerandole in valore monetario.

3) Per un limite superiore e l' approssimazione della radice caratteristica di massimo modulo di una matrice si può consultare il mio *Calcolo delle Matrici*: cfr. principalmente il § 1 del cap. II (formula di HIRSCH) a p. 123; il § 3 del cap. III, teor. a) a p. 129 e, per l' approssimazione numerica, il § 1 dello stesso cap. III, pp. 201—205. Per un limite superiore eventualmente più basso, vedasi M. PICONE: *Sulla teoria delle matrici nel corpo complesso* (Boll. U.M.I. s. III, a. XIII (1958) pp. 1—6) p. 2. Proprietà relative alle radici caratteristiche si trovano anche in altre pagine del mio trattato. Per la radice di minimo modulo basta considerare la matrice inversa: se la data matrice fosse singolare il minimo modulo richiesto sarebbe zero.

Se sono dati solo gli estremi delle matrici S e S' converrà applicare il teorema (di LAPPO - DANILEVSKI) a p. 130.

(14. 2) $$X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n \leqq k$$

con h, k valori finiti opportuni. La conclusione di cui sopra resta invariata, esistendo massimo e minimo di entrambe le parti delle due velocità perchè prezzi e produzioni variano ancora in insiemi limitati.

§ 3. Surproduzione ed Accumulazione del Capitale

5. Siano $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ gli investimenti o capitali impiegati nei settori $1, 2, \ldots\ldots, n$ e $\mathbf{b} = [b_{rs}]$, $r, s = 1, 2, \ldots\ldots n$, la matrice non negativa dei coefficienti di capitale relativi ai singoli scambi. Misuriamo i capitali C_r con le stesse unità di misura che sono state usate per le corrispondenti produzioni (ovvero in moneta). Salvo casi di eccezione, da ritebersi antieconomici, potrà sempre supporsi:

(1. 3) $$\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n) \leqq \mathbf{X}, \qquad \mathbf{O} \leqq \mathbf{b} \leqq \mathbf{a}$$

quindi

(2. 3) $$\mathbf{bC} \leqq \mathbf{bX}_{-1} \leqq \mathbf{aX}_{-1}$$

Ponendo:

(3. 3) $$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{b}$$

dalla (I. 1) della parte prima e dalla (1. 3) di cui sopra, si ha:

(4. 3) $$[I - \bar{\mathbf{a}}]\mathbf{X}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1} + \mathbf{b}(\mathbf{X} - C)_{-1}$$

Supporremo inoltre (4):

(5. 3) $$[I - \mathbf{a}]\mathbf{C}_{-1} \geqq [I - \mathbf{a}]\mathbf{X}_{-1}$$

che ci permette di annoverare il vettore $\mathbf{C}$ dei capitali fra quelli che appartengono al cono poliedrale convesso:

(6. 3) $$[I - \mathbf{a}]x_{-1} \geqq 0; \qquad x > 0$$

cui appartiene il vettore $\mathbf{X}$ delle produzioni; il quale appartiene anche all' altro cono poliedrale convesso:

(7. 3) $$[I - \mathbf{b}]x_{-1} \geqq 0, \qquad x > 0$$

che contiene quello (6. 3). Si ha inoltre:

(8 3) $$\mathbf{p}[I - \mathbf{b}] \geqq \mathbf{p}[I - \mathbf{a}]$$

cosicché il vettore dei prezzi appartiene ai due coni poliedrali convessi duali di (6. 3) e (7. 3).

Qui si indica, come nella parte prima, con $\mathbf{y}$ il vettore dei consumi necessari e con $\mathbf{z}$ quello delle forze - lavoro necessarie impiegate per pro-

---

4) La (4. 6) a p. 249 della mia memoria *Sull' evoluzione economica*, cit. (6) nella parte prima, è da intendersi anche ivi come un'ipotesi *a priori*.

duzioni unitarie. In conseguenza delle (I. 1) — (II. 1) della parte prima e delle (5. 3) — (8. 3), si ha:

$$[I - \mathbf{b}]\mathbf{C}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1}; \qquad \mathbf{p}[I - \mathbf{b}] \geqq \mathbf{Z}$$

Tra le velocità degli investimenti e i relativi prezzi e fra le velocità di questi e gli investimenti possono scriversi due relazioni del tutto analoghe alle (I. 2) della parte prima, cioé:

$$(1.\ 3) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d\mathbf{C}}{dt}\right)_{-1} = \overline{\mathscr{B}}\mathbf{p}_{-1} \\ \left(\dfrac{d\mathbf{p}}{d\mathbf{t}}\right)_{-1} = \overline{\mathscr{T}}\mathbf{c}_{-1} \end{cases}$$

il cui integrale generale:

$$(11.\ 3) \qquad (\mathbf{C} \mid \mathbf{p}) = \overline{\mathscr{X}}(t)c_{-1}, \qquad c = (\mathbf{C}(o) \mid \mathbf{p}(o))$$

dà luogo alla trasformazione evolutiva del mercato dei capitali da investimento. Le proprietà di questo mercato possono studiarsi parallelamente a quelle del mercato delle produzioni e dei prezzi; questi ultimi possono pensari coincidenti con quelli dei rispettivi investimenti.

6) Della (I.1) della parte prima e dalla (2.3), si ha che:

$$(9.\ 3) \qquad [1 - \bar{\mathbf{a}}]\mathbf{X}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1} + \mathbf{b}\mathbf{C}_{-1}$$

Perciò il vettore:

$$(10.\ 3) \qquad [1 - \mathbf{a}]\mathbf{X}_{-1} - \mathbf{b}\mathbf{C}_{-1} - y_{-1}$$

in cui y indica un vettore di consumi possibili, quindi

$$[1 - \mathbf{a}]\mathbf{X}_{-1} \geqq y_{-1} \mathrel{\overline{\overline{>}}} \mathbf{Y}_{-1}$$

cresce col diminuire del consumo y sino a quello necessario **Y** e diminuisce col crescere del capitale investito **C** sino ad **X**.

Indicheremo con **S** echiameremo s u r p r o d u z i o n e ogni determinazione del vettore **S** soddisfaciente alla limitazione:

$$(11.\ 3) \qquad [1 - \mathbf{a}\ \mathbf{X}_{-1} - \mathbf{b}\mathbf{C}_{-1} - \mathbf{Y}_{-1} \geqq \mathbf{S}_{-1} \geqq [1 - \mathbf{a}]\mathbf{X}_{-1} - y_{-1}$$

La surproduzione **S** sarà funzione del tempo **t** variabile in (t_0, t_1), come **X**, **C**, **Y**, y, a, e **b**.

Scriviamo:

$$(12.\ 3) \qquad \mathbf{S}(t)_{-1} = \overline{\mathbf{Y}}(t)_{-1} - \mathbf{b}(t)\mathbf{C}(t)_{-1}$$

nella quale $\overline{\mathbf{Y}}(t)$ é un vettore soddisfaciente alla limitazione:

$$(13.\ 3) \qquad [1 - \bar{\mathbf{a}}]\mathbf{X}_{-1} - \overline{\mathbf{Y}}_{-1} \geqq \mathbf{Y}(t)_{-1} \geqq [1 - \bar{\mathbf{a}}]\mathbf{X}_{-1} - y_{-1}.$$

Poniamo infine:

(14. 3) $$\mathbf{C}(t)+\mathbf{S}(t)=\mathbf{F}(t)$$

che diremo capitale accumulato al tempo t.

Per comodità, faremo variare t da zero a t, porremo cioé, $t_0 = o$, $o \leqq t \leqq t_1$ ed indicheremo con i il tasso d'interesse, che supporremo costante in (o, t_1). Il costo totale di $F(t)$ alla fine dell'intervallo (o, t) computato all'inizio di detto intervallo, é dato dall'integrale:

(15.3) $$\psi(t)=\int_{o}^{t} e^{-it}\,\mathbf{p}(t)\dot{\mathbf{F}}(t)_{-1}\,dt$$

il cui integrando é:

(16.3) $$\varphi(t)=e^{-it}\,\mathbf{p}(t)[\dot{\mathbf{C}}(t)+\dot{\mathbf{S}}(t)]\ldots$$

in cui il punto sopra indica, secondo l'uso, la derivazione del vettore rispetto al tempo.

Per la (12.3), si ha:

(17.3) $$\dot{S}(t)_{-1}=\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{-1}-\frac{d\mathbf{b}}{dt}\mathbf{C}(t)_{-1}-\mathbf{b}(t)\dot{\mathbf{C}}(t)_{-1}$$

qui ndi:

(18.3) $$\varphi(t)=e^{-it}\,\mathbf{p}(t)\left(\dot{\bar{\mathbf{Y}}}(t)+[I-\mathbf{b}(t)]\,\dot{\mathbf{C}}(t)_{-1}-\frac{d\mathbf{b}}{dt}\mathbf{C}(t)_{-1}\right).$$

Per estremare l'integrale $\psi(t)$ occorre eguagliare a zero la variazone prima di esso, cioé porre [5]:

(19.3) $$\frac{d}{dt}\;\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\mathbf{C}}}=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{C}}$$

(20.3) $$\frac{d}{dt}\;\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\bar{\mathbf{Y}}}}=0.$$

A calcoli eseguiti si ha [6]:

(21.3) $$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=i\mathbf{p}$$

5) I due membri de (19. 3) sono i vettori le cui componenti sono le derivate parziali di φ rispetto alle componenti di $\dot{\mathbf{C}}$ e di $\mathbf{C}$. Analogamente per la (20. 3).

6) Cfr. S. Cherubino: Sull' evoluzione economica (Principi di economia astratta), già citat ta nella parte prima e qui nella nota (2), § 6, n. 18, p, 261. A pp. 256 - 257 di questa memoria alcuni segni $\leqq$ vanno cambiati in $\geqq$; a p. 258, rigo 7, invece di $\mu \geqq 0$, deve leggersi $\mu \geqq q$.

ossia :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)\, e^{-it} \tag{22.3}$$

con $\mathbf{p}(o)$ determinazione iniziale, arbitraria, positiva, del vettore $\mathbf{p}(t)$ dei prezzi all' inizio del tempo. Il capitale investito non vien soggetto a condizioni. Il massimo o minimo dell' integrale $\psi(t)$ é dunque:

$$\mathbf{p}(0) \int_0^t (\dot{\overline{\mathbf{Y}}}_{-1} + [I - \mathbf{b}]\dot{\mathbf{C}}_{-1} - \frac{db}{dt}\mathbf{C}_{-1})\, dt \tag{23. 3}$$

cioé:

$$\mathbf{p}(0) \int_0^t \dot{\mathbf{F}}(t)_{-1}\, dt = \mathbf{p}(0)\mathbf{F}(t)_{-1} \tag{24. 3}$$

7. Chiediamoci ora il massimo di:

$$z = \lambda\, \mathbf{C}(t)_{-1} + \lambda\, \mathbf{S}(t)_{-1}, \quad 0 \leqq t \leqq t_1 \tag{25.3}$$

cioé della somma degli investimenti e delle surproduzioni espressi in valore in un settore aggregato secondo il vettore positivo o semipositivo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Per semplicità di scrittura, ometteremo di indicare l'argomento t, che supporremo fissato per tutto quel che segue.

Prendiamo le variabili $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $S_1, S_2, \ldots, S_n$ come componenti di un vettore $\mathbf{x}$ orizzontale, cioé poniamo:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{C} \,|\, \mathbf{S}) \tag{26.3.}$$

e scriviamo la limitazione (11.3) sotto la forma:

$$c_{-1} \geqq A\, x_{-1} \geqq \overline{c}_{-1} \tag{27.3}$$

avendo posto:

$$c_{-1} = [I - \overline{\mathbf{a}}]\, \mathbf{X}_{-1} - \mathbf{Y}_{-1}\, ; \; \overline{c}_{-1} = [I - \overline{\mathbf{a}}]\, \mathbf{X}_{-1} - y_{-1} \tag{28.3}$$

$$A = [\mathbf{b} \,|\, I]. \tag{29.3}$$

I vettori c_{-1} e $\overline{c}_{-1}$ li diremo delle scorte o del risparmio.

La ricerca del massimo e del minimo del capitale accumulato si riduce cosi ai due problemi di programmazione lineare:

$$\text{(I.3)} \quad \begin{cases} \mathbf{z} = (\lambda|\lambda)\, x_{-1} \\ A\, \mathbf{x}_{-1} \leqq c_{-1} \end{cases} \qquad\qquad \text{(II.3)} \quad \begin{cases} \mathbf{z} = (\lambda|\lambda)\, x_{-1} \\ A\, x_{-} \geqq \overline{c}_{-1} \end{cases}$$

I vincoli (27.3) sussistono per ipotesi, ma, in generale, ciò non basta per la esistenza del massimo e del minimo di z. Per accertarsene, occorre e basta [7] che siano compatibili, ossia sussistano, anche i vincoli dei problemi duali, che si scrivono:

---

7) A. J. Goldman and A. W. Tucker: Theory of linear programming [in Linear inequalities and related sy-

(III.3) $\begin{cases} z = \xi c_{-1} \\ \xi A \geqq (\lambda|\lambda) \end{cases}$ (IV.3) $\begin{cases} z = \xi c_{-1} \\ \xi A \leqq (\lambda|\lambda) \end{cases}$

nei quali ξ é un vettore ad n componenti non negative, che s' interpreta come vettore di prezzi [8].

Limitiamoci ai vincoli del problema (III.3). Essi si scrivono:

(30.3) $$\xi \mathbf{b} \geqq \lambda ; \qquad \xi \geqq \lambda \geqq 0.$$

Ponendo:

(31.3) $$X = \xi - \mu$$

le (30.3) diventano:

(32.3) $$\mu \geqq \xi[-\mathbf{b}] ; \ \mu \geqq 0.$$

Poiché $\mathbf{0} \leqq \mathbf{b} \leqq \mathbf{a}$. le radici caratteristiche di $\mathbf{b}$ sono anch' esse tutte di modulo inferiore alla unità (e quello di massimo modulo é positiva) e si ha: $[I - \mathbf{b}]^{-1} \geqq \mathbf{0}$; anzi, se $\mathbf{b}$ é irriducibile, (quindi lo é anche $\mathbf{a}$) questa inversa é addirittura positiva [9].

Si può perciò sempre porre, con ν vettore positivo o semipositivo arbitrario $\leqq \mu$:

(33. 3) $$\xi[I - \mathbf{b}] = \nu ; \qquad 0 \leqslant \nu \leqq \mu$$

riuscendo, in conseguenza:

(34. 3) $$\xi = \nu[I - \mathbf{b}]^{-1} \geqq \nu \geqslant 0$$

Ne segue che:

(35. 3) $$\xi \mathbf{b} = \xi - \nu \geqq \xi - \mu = \lambda ; \qquad \xi \geqq \lambda$$

quindi i vincoli delle (III. 3) sono compatibili ed esiste il massimo di z coincidente in valore col minimo di ξ. Analogamente per i vincoli del problema (IV. 3).

Possiamo dunque affermare che: qualunque sia il vettore aggregato, esistino, sotto vincoli opportuni, determinazioni degli investimenti e delle surproduzioni degli n settori che massimizzano (o minimizzano) l' accumulazione del capitale e minimizzano (o massimizzano) il risparmio, eguagliandone i valori.

---

stems, ed. by H. H. Wuhn and A. W. Tucker, Princeton (1956) pp. 53—97] part 2, theorem 2, p. 61 e cor. I A p. 60.

8) Perciò, in luogo di ξ potrebbe scriversi $\mathbf{p}$.

9) Cfr. il mio Calcolo delle Matrici [cit. (3) nella parte I] cap. II, § 2 e la mia Mem. citata nella stessa nota (3), p. 219.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Τὸ ἄρθρον διαιρεῖται εἰς τὰς ἀκολούθους παραγράφους:

1) Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον εἰς τοὺς γενικοὺς οἰκονομικοὺς κλάδους.

2) Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον τῶν ταχυτήτων μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς καὶ τῶν τιμῶν.

3) Ὑπερπαραγωγὴ καὶ συσσώρευσις κεφαλαίου.

Εἰς τὴν πρώτην παράγραφον ἐξετάζονται δύο προβλήματα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ τὰ δίδυμα αὐτῶν. Τὰ προβλήματα ταῦτα ἀφοροῦν εἰς τὴν παραγωγὴν ἢ τὴν μέσην τιμὴν ἑνὸς γενικοῦ οἰκονομικοῦ κλάδου, δηλαδὴ κλάδου συνισταμένου ἀπὸ τὴν ἄρθροισιν ἐπὶ μέρους μικροτέρων κλάδων.

Εἰς τὴν δευτέραν παράγραφον ἐξετάζονται αἱ ταχύτητες μεταβολῆς τῆς παραγωγῆς καὶ τῶν τιμῶν καὶ διερευνῶνται τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα αὐτῶν, ἀνεξαρτήτως τοῦ βαθμοῦ γενικότητος τοῦ κλάδου.

Εἰς τὴν τρίτην παράγραφον ὁρίζεται ἡ ἔννοια τῆς ὑπερπαραγωγῆς καὶ συσσωρεύσεως κεφαλαίου καὶ προσδιορίζεται τὸ μέγιστον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπασχολουμένων κεφαλαίων καὶ τῆς ὑπερπαραγωγῆς βάσει τῆς τεχνικῆς τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.