SULLA RIPARTIZIONE GEOGRAFICA DELLE VENDITE E SULLA DISTRIBUZIONE DEI MEZZI DI TRASPORTO DI DIVERSA CAPACITA

MARIA PASSAQUINDICI — Roma

Representazione

In queste pagine viene studiato un metodo per determinare come una industria possa ripartire il suo prodotto o i suoi prodotti nei diversi luoghi di vendita in modo da rendere massimo il suo utile o, ciò che é la stessa cosa, da rendere minima la spesa.

Si suppone che questa industria possegga vari centri di distribuzione e vari centri di consumo, e che abbia a disposizione mezzi di trasporto di capacità eventualmente variabile da un mezzo all' altro. Questi mezzi di trasporto sono disponibili ai vari centri di distribuzione. Daprima viene determinata la suddivisione geografica dei centri di consumo, nel senso di definire i centri che devono essere riforniti, in parte o totalmente, do ogni centro di distribusione. Tale ripartizione viene effettuata una volta per tutte.

In un secondo tempo, conoscendo i centri di consumo che devono essere riforniti da ogni centro di distribuzione e i mezzi di trasporto disponibili presso questi ultimi, viene determinato come utilizzare in modo ottimo questi mezzi di trasporto : così potrà risultare più vantaggioso che un centro di consumo venga rifornito da più mezzi (che in totale depositano al centro in questione la quantità da esso richiesta), anziché da uno solo con capacità superiore o uguale alla domanda di esso centro. Tale distribuzione varia naturalmente da giorno, dipendendo dall' urgenza con la quale i centri di consumo richiedono il rifornimento.

Questo problema può essere risolto solo con l' ausilio di calcolatori elettronici.

La Soc. Olivetti Bull (Milano) col suo elaboratore elettronico Gamma ET ha risolto per la Soc. Imprese Italiane all' Estero (Torino) verso la fine del 1958 un problema che ha alcuni punti di contatto con la seconda parte di quello trattato in queste pagine. Si trattava di determi-

---

Ἡ συγγραφεὺς διδάσκει Ἐφαρμογὰς Μηχανογραφίας καὶ Ἠλεκτρονικῆς εἰς τὴν Σχολὴν Στατιστικῆς καὶ Μηχανογραφίας τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Ρώμης.

nare, nella costruzione di una diga, il programma dei getti di calcestruzzo. La diga era suddivisa in speroni ed il calcolatore stabili, giorno per giorno, su quali speroni era possibile eseguire un turno di getto ed il numero del turno, variabile da sperone a sperone : in 62 sec. veniva determinato il programma dei getti dell' intera diga per un giorno lavorativo (1).

Ripartizione Geografica delle vendite

1.— Supponiamo che una certa industria abbia **n** centri distribuzione (o di produzione) ed **m** centri di consumo da rifornire, i quali siamo distribuiti in una zona geografica abbastanza vasta.

Ogni centro di distribuzione abbia a disposizione dei mezzi di trasporto, la cui capacità, eventualmente variabile da un mezzo a un altro, sia **s**. Ogni mezzo si suppone possa compiere un solo viaggio al giorno. Per viaggio si intende un percorso che, partendo dal centro di distribuzione e toccando vari centri di consumo, ritorni al centro di distribuzione di partenza.

Può darsi, ciò che infatti comunemente accade, che alcuni centri consumo debbano essere riforniti più spesso di altri. Consideriamo allora un periodo di tempo tale che, durante esso, ogni centro possa essere rifornito un numero intero finito di volte. Se per esempio il centro A deve essere rifornito ogni 14 giorni, il centro B ogni 7 giorni, il centro C ogni 6 giorni e il centro D ogni 4 giorni, si considera il m.c.m. tra 14, 7, 6, 4. Tale m.c.m. é 84 ; il periodo di tempo da considerare é allora di 84 giorni. Durante questo periodo di tempo

A	verrà	rifornito	6	volte
B	»	»	12	»
C	»	»	14	»
D	»	»	21	»

Inoltre si determina la quantità disponibile nel periodo di tempo presso i vari centri di distribuzione.

Si deve ora procedere innanzi tutto alla ripartizione geografica delle vendite, cioé determinare quali e quanti centri di consumo devono essere riforniti, totalmente o parzialmente, da ogni centro di distribuzione. Supponiamo che la domanda non superi l'offerta, cioé che la quantità disponibile presso i centri di distribuzione, sempre nel considerato periodo di tempo, non sia inferiore alla quantità di prodotto richiesta. Se così non fosse, si dovrebbe procedere a una politica di espansione del

1. In questo articolo, per capacità si é intesa la portata massima in volume; se si pensa la capacità come portata massima in peso, allora il costo unitario é quello dell' unità di peso, e la quantità richiesta o disponibile é espressa nell' unità di peso.

mercato, tenendo presente di dover soddisfare a precise condizioni economiche e di gestione aziendale.

Nella supposta ipotesi, si considerino le distanze tra i centri di consumo e i centri di distribuzione, e tra esse si scelga la distanza minima (se non é unica, la scelta é arbitraria tra la minime).

Questa distanza viene ad identificare un centro di consumo e un centro di distribuzione. Può darsi che la domanda di questo centro di consumo superi l'offerta del centro di distribuzione scelto: in questo caso lo si rifornirà parzialmente e si passerà a considerare le distanze tra il centro di consumo rifornito parzialmente e i vari centri di distribuzione, per determinare il centro di distribuzione, o i centri di distribuzione, che ne deve completare il rifornimento. Se non si verifica questo caso, il centro di consumo e il centro di distribuzione si dicono «compatibili». Indichiamoli con C_{11} e D_1 rispettivamente. Poiché D_1 rifornisce C_{11}, D_1 avrà disponibile per gli altri centri di consumo la quantità totale diminuita di quella inviata a C_{11}. Ora si considera D_1 e, sempre considerando prima le distanze inferiori, si determinano i centri di consumo che D_1 deve ancora rifornire. Se esiste un numero di centri di consumo, la cui domanda totale uguaglia l'offerta di D_1, si escludono essi centri di consumo e D_1, e si riprende l'esame della nuova situazione come avanti. Se invece si arriva a un centro di consumo che può venire solo parzialmente rifornito da D_1, allora la nuova situazione differisce dalla iniziale per il fatto che da essa vengono esclusi D_1 e i centri di consumo da esso riforniti totalmente, mentre il centro di consumo rifornito parzialmente figurerà con domanda inferiore e si partirà da esso per determinare, sempre in base alla distanza minima, quale altro centro di distribuzione prendere in considerazione.

Così si procede e si perviene a una ripartizione geografica, che diremo di «base».

Bisogna ora procadere, se é possibile, a modificare tale ripartizione, in modo da ottimizzarla, relativamente ad una funzione che andremo ad esplicitare, indi a ricercare.

Si é detto che presso ogni centro di distribuzione sono disponibili mezzi di trasporto di diversa capacità, il cui costo al km. varia a seconda della quantità trasportata e della capacità. Consideriamo allora la generica capacità s e dividiamo l'intervallo (0,s) in intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra. Tale divisione dipende da s, cioé dalla capacità:

$$0 = q_0 \qquad q_1 \qquad q_2 \qquad \cdots \qquad q_{r-1} \qquad q_r = s$$

fig. 1

In ognuno di questi intervalli il costo di trasporto al km. é costante, fissato s, ed il suo andamento é rappresentato in fig. 2.

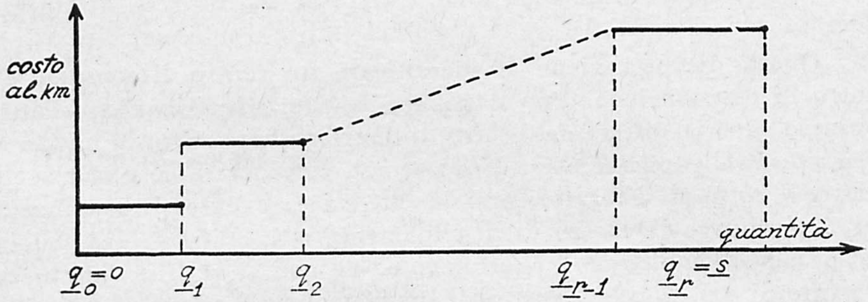

fig. 2

Cosi un mezzo di trasporto di capacità s, disponibile al centro di distribuzione h, che trasporta una quantità compresa tra q_h e q_{h+1} costerà, per trasporatre tale quantità al centro di consumo k:

$$c_{hs, q_{h+1}} \; d_{hk}$$

dove con d_{hk} si intende la distanza in km. tra il centro di distribuzione h e il centro di consumo k, e $c_{hs,q_{h+1}}$ é il costo al km. per trasportare una quantità maggiore di q_h e minore o uguale a q_{h+1} col mezzo di trasporto di capacità s disponibile in h. Si calcoli allora per ogni mezzo di trasporto la quantità media trasportata nel periodo di tempo considerato e quindi il costo medio per ogni km. e per ogni unita di volume trasportata. Per il mezzo di trasporto considerato avanti tale media si indicherà con $\bar{c}_{hs}$. Si calcoli poi la media di questi costi medi (che dipendono da s) per tutte la capacità relativamente a ogni centro di distribuzione: così per il centro di distribuzione h tale media si indica con $\bar{c}_h$. Poniamo:

$$\bar{c}_h \, d_{hk} = \bar{c}_{hk}$$

ed indichiamo con x_{hk} la quantità in volume trasportata in media nel periodo di tempo considerato dal centro di distribuzione h a quello di consumo k.

La funzione da rendere minima é:

$$f = \bar{c}_{11}x_{11} + \bar{c}_{12}x_{12} + \ldots + \bar{c}_{1m}x_{1m} + \ldots + \bar{c}_{2m}x_{2m} + \ldots + \bar{c}_{n1}x_{n1} + \ldots + \bar{c}_{nm}x_{nm}$$

I vincoli sono, indicando con X_k la quantità media richiesta dal centro di consumo k e con Y_h la quantità media disponibile al centro di distribuzione h nel periodo di tempo considerato:

$$x_{h1} + x_{h2} + \ldots + x_{nm} \leqq Y_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$
$$x_{1k} + x_{2k} + \ldots + x_{nk} = X_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

Nel caso in cui la domanda uguagli l'offerta, nel primi gruppo di vincoli non varrà mai il segno $<$.

Ognuno dei vincoli verrà ripetuto tante volte quanti sono i tipi di merce da considerare (tale osservazione vale anche per ogni termine della funzione f): qui per semplicità é stata considerato il caso di una sola merce. Questo problema si risolve evidentemente col metodo classico del simplesso. Si arriva perciò a una «ottima» ripartizione geografica, definendo in tal modo quali e quanti centri di consumo devono essere riforniti interamente o parzialmente da ogni centro di distribuzione.

Distribuzione dei mezzi di trasporto

2. Consideriamo ora una qualsiasi zona di distribuzione: in essa vi sarà un solo centro di distribuzione con uno o più centri di consumo; il centro di distribuzione avrà a sua disposizione un certo numero p di mezzi di trasporto; per semplicità non teniamo conto dell'indice relativo alla zona di distribuzione, perché consideriamo ogni singola zona separatamente, ma teniamo conto dell'indice 1, 2, . . . , p, che indica il mezzo di trasporto considerato. Sarà:

$$c_{ts,q_{h+1}}, \qquad t = 1, 2, \ldots, p$$

il costo per km. del mezzo t, di capacità s, disponibile al centro di distribuzione considerato, quando trasporta una quantità compresa tra q_h e q_{h+1} oppure q_{h+1}.

Si consideri il circuito minimo che parte dal centro di distribuzione e che, tornando ad esso, passa per tutti i centri di consumo. Ordiniamo questi ultimi secondo l'ordine in cui si succedono lungo il tragitto ed indichiamoli:

$$C_1, C_2, \ldots, C_l$$

Il problema che ora ci si pone é quello di determinare come i vari mezzi di trasporto distribuiscono la merce lungo questo percorso. Se qualche centro di consumo non é collegato che al dentro di distribuzione, tale centro verrà rifornito indipendentemente dagli altri, utilizzando il mezzo più conveniente, scelto in base alla domanda della merce. Scartiamo questo caso, che non presenta alcuna difficoltà.

Alcuni centri avranno necessità di essere riforniti con la massima urgenza, altri no. Distinguiamo perciò i centri di consumo in due categorie:

centri di massima urgenza: $C_1, C_2, \ldots, C_{l'}$ $\qquad l' \leqslant l$
centri di minor urgenza: $C_{l+1}, \ldots, C_l$

I centri di massima urgenza li chiameremo centri di urgenza 1 (ciò significa che questi centri vanno riforniti immediatamente, cioé nel primo giorno lavorativo); quelli di minor urgenza li diremo contri di urgenza

>1, cioé di urgenza 2, 3, 4, ... (ciò vuol dire che essi verranno riforniti il 2°, 3°, 4°, ... giorno lavorativo).

Esaminiamo il problema, considerando le varie eventualità.

Si possono verificare 3 casi :

1° = i mezzi di trasporto non riescono a rifornire totalmente tutti i centri di urgenza 1.

2° = i mezzi di trasporto possono trasportare merce per rifornire totalmente solo i centri di urgenza 1.

3° = i mezzi di trasporto possono rifornire anche centri di urgenza > 1.

3. Consideriamo il 1° caso.

I centri di urgenza 1 richiedono le quantità (anche ora supponiamo che sia richiesta una sola merce; il considerare più merci porta solo alcune complicazioni di carattere formale):

$$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_{l'}$$

e la quantità disponibile sia Y.

I mezzi di trasporto disponibili costino al km. rispettivamente:

$$c_{1s}, \; c_{2s}, \; \ldots\ldots, \; c_{ps}$$

dove s indica la capacità del mezzo di trasporto, e c_{ts} $(t=1, 2, \ldots., p)$ varia a seconda della capacità e della quantità trasportata.

Con K_{qr} si indichi la distanza in km. tra C_q e C_r.

Si hanno allora i vincoli :

$$(1) \quad X_1 + X_2 + \ldots + X_{l'} \leqq Y$$

$$(2) \quad \sum_{1}^{q}{}_t \, x_{ut} \leqslant X_u \qquad \begin{array}{l}(u = 1, 2, \ldots, l') \\ (t = 1, 2, \ldots, p)\end{array}$$

$$(3) \quad \sum_{1}^{l'}{}_u \, x_{ut} = s \qquad s = \text{variabile a seconda del mezzo}$$

dove x_{ut} indica la quantità scaricata nel centro di consumo u dal mezzo di trasporto t. Nei vincoli (2) vale almeno una volta il segno $<$.

La funzione da minimizzare é :

$$f = \sum_{1}^{p}{}_t \left[K_{01} c_{ts,s} + K_{12} c_{ts,(s'-x_{1t})} + K_{23} c_{ts,(s-x_{1t}-x_{2t})} + \ldots + K_{l'0} c_{ts,0}\right]$$

Il primo e l'ultimo termine di ogni membro della sommatoria sono costanti, perché sono costanti le quantità K_{01}, $K_{l,0}$, $c_{ts,s}$ e $c_{ts,0}$. Perciò la funzione f si riduce a :

$$f = \sum_{1}^{p}{}_t \left[K_{12} c_{ts,(s-x_{1t})} + \ldots\ldots + K_{l'-1,l'} c_{ts,(s-x_{1t}-\ldots-x_{l'-1,t})}\right]$$

La parentesi al terzo indice di c significa che va considerato l'estremo superiore dell'intervallo in cui cade la quantità fra parentesi: cioé (q'), per es., é l'estr. sup. dell'intervallo in cui cade (q'). Il 2° caso é analogo a questo, tranne che nelle relazioni (2) il $\leqslant$ é sostituito dall' $=$.

4. Il 3° caso considera punti di urgenza maggiori di 1.
I vincoli ora sono:

$$(1)\quad X_1 + X_2 + \ldots + X_l \leqq Y$$

$$(2)\quad \sum_{1}^{p}{}_t\, x_{ut} = X_u \qquad \begin{array}{l}(t = 1, 2, \ldots, p)\\ (u = 1, 2, \ldots, l')\end{array}$$

$$(2')\quad \sum_{1}^{p}{}_t\, x_{u't} \leqq X_{u'} \qquad (u' = l'+1, \ldots, l)$$

$$(3)\quad \sum_{1}^{l}{}_i\, x_{it} = s \qquad s = \text{variabile a seconta del mezzo}$$

La nuova funzione f é evidente: basta infatti sostituire a l', l. E' chiaro che nel rifornire i centri di urgenza maggiore di 1 bisogna dare la precedenza a quelli di urgenza 2, poi a quelli di urgenza 3, e così via. Qui per semplicità i centri di urgenza maggiori di 1 si sono considerati tutti di uguale urgenza: il considerarli di diverse urgenze non complica affatto il problema.

5. E' evidente che tale problema non si può risolvere con il metodo classico del simplesso, perché nella funzione f da ottimizzare non figurano i costi costanti: essi infatti lo sono solo in intervalli, e rappresentano perciò funzioni continue con un numero finito di discontinuità.

Supponiamo allora di avere trovato una soluzione qualunque al problema e di avere calcolato il relativo valore di f.

Sia essa una soluzione «base». Costruiamo la tavola del simplesso.

Se i c_{ts} fossero costanti si sceglierebbe una variabile non di base in modo opportuno (ad es. come nel metodo del simplesso) e relativamente ad essa una variabile di base che viene sostituita colla variabile non di base che ne ha determinato la scelta: in tal modo si migliora di volta in volta il valore della funzione f.

Qui non é possibile procedere in questo modo, perché la sostituzione delle variabili di base e non di base, scelte come nel metodo classico del simplesso, può non portare alcum contributo, cioé non migliorare — in questo caso diminuire — il valore di f, e anzi peggiorare la situazione. Si opera però in modo analogo, cioé si opera su ogni variabile non di base come si operava sulla variabile prescelta nel metodo classico del simplesso; per ognuna di esse si sceglie la variabile di base da sostituire. Si calcola il valore della funzione f in ognuno di questi casi (tanti quante sono le variabili non di base) e, scegliendo il minore fra essi e quello calcolato relativamente alla soluzione base che ha determinato la tavola del simplesso in questione, si decide quali variabili (una di base e una non di base) entrano in gioco per migliorare il valore di f. Scelte le variabili, si forma la nuova base e si calcola il nuovo valore di f.

Il processo si arresta quando un tale scambio non porta alcum miglioramento all'ultimo valore calcolato di f.

E' evidente che 'utilizzo dei calcolatori elettronici, é indispensabile in entrambi i problemi.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὸ ἄρθρον ἐξετάζονται δύο προβλήματα: Τὸ πρῶτον πρόβλημα ἀφορᾷ εἰς τὴν γεωγραφικὴν κατανομὴν τῶν πωλουμένων ἀγαθῶν διὰ μεταφορικῶν μέσων διαφόρου δυναμικότητος. Τὸ κόστος μεταφορᾶς μεταβάλλεται καὶ ἐξαρτᾶται τόσον ἐκ τῆς μεταφερομένης ποσότητος, ὅσον καὶ ἐκ τῆς δυναμικότητος τῶν μεταφορικῶν μέσων. Κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις τῆς συνολικῆς δυναμικότητος τῶν μεταφορικῶν μέσων ἐμφανίζεται ὡς μία συνάρτησις μὲ ὡρισμένον ἀριθμὸν ἀσυνεχειῶν. Τὸ δεύτερον πρόβλημα εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῶν συναρτήσεων—κριτηρίων βάσει τῶν ὁποίων τὸ κόστος διανομῆς τῶν πωλουμένων ἀγαθῶν ἐλαχιστοποιεῖται. Τὰ ὡς ἄνω προβλήματα δύνανται νὰ λυθοῦν μόνον τῇ βοηθείᾳ ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν.