

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ* ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΛΥΣΕΩΣ ΔΙ' ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΕΓΚΕΦΑΛΟΥ

Τοῦ κ. ΣΠΥΡΟΥ Ε. ΠΕΦΑΝΗ

Προγραμματιστοῦ καὶ Μηχανικοῦ Ἑλεκτρονικῶν Ἑγκεφάλων

Γ Ε Ν Ι Κ Α

Ἔνα ἀπὸ τὰ πιὸ σπουδαῖα πλεονεκτήματα καὶ χαρακτηριστικὰ τῶν Ἑλεκτρονικῶν Ἑγκεφάλων εἶναι ἡ ἰκανότης των νὰ δίδουν λύσιν εἰς προβλήματα, ποὺ περιλαμβάνουν μεγάλον ὄγκον δυσκόλου ὑπολογιστικῆς ἐργασίας. Ὑπάρχουν πράγματι προβλήματα, ποὺ οἱ ἄνθρωποι ἀποφεύγουν νὰ λύσουν ἐξ αἰτίας τοῦ ὄγκου τῶν ὑπολογισμῶν καὶ ἐπίσης τοῦ μεγάλου χρόνου, ποὺ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν λύσιν των. Ὅπωςδὴποτε οἱ Ἑλεκτρονικοὶ Ἑγκεφάλοι, ἐκτὸς τῆς ταχύτητος, ἔχουν καὶ τὸ ἐπίσης σπουδαῖον χαρακτηριστικὸν νὰ περιορίζουν εἰς τὸ ἐλάχιστον τὰς πιθανότητας λαθῶν.

Μία κατηγορία προβλημάτων ποὺ διὰ τὴν λύσιν των ἀπαιτοῦν τὴν ἐκτέλεσιν μεγάλου ἀριθμοῦ πράξεων καὶ ἐπίσης μεγάλην προσοχὴν διὰ νὰ μὴ γίνουν λάθη, εἶναι τὰ προβλήματα συστημάτων μεγάλου ἀριθμοῦ γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ γενικώτερα τὰ προβλήματα μητρῶν. Τὰ προβλήματα αὐτὰ παρουσιάζουν μεγάλο ἐνδιαφέρον καὶ ἐμφανίζονται εἰς οἰκονομοτεχνικὰς μελέτας (ἐλαχιστοποίησης κόστους μεταφορᾶς, ὀρθολογικῆ διατάξις συντελεστῶν

* Σημείωσις : Εἰς τὴν μελέτην μας ἀναφερόμεθα εἰς συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ἰσαριθμους πρὸς τὰς ἐξισώσεις ἀγνώστους. Διὰ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ἀγνώστους πλείονας τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξισώσεων, τὰ ὁποῖα συναντῶνται συχνὰ εἰς μελέτας γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐφαρμόζεται διάφορος τῆς περιγραφομένης μέθοδος λύσεως, γνωστὴ ὡς μέθοδος Simplex.

παραγωγής, μεγιστοποιήσις ἀποδόσεως κ.λ.π.), επίσης ἐμφανίζονται εἰς μελέ-
τας κατασκευῶν, στατιστικῆς ἢ ἀκόμη καὶ ὡς ἀριθμητικαὶ λύσεις εἰς συστή-
ματα διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Κατωτέρω ἀναλύεται μέθοδος λύσεως συστημάτων μεγάλου ἀριθμοῦ
γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ἰσαριθμούς ἀγνώστους καὶ ἀντιστροφῆς μητρῶν μὲ
τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκέφαλον Univac 120. Ἡ ἰδίᾳ μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρ-
μοσθῆ γενικῶς εἰς Ἡλεκτρονικοὺς Ἐγκεφάλους οἱ δὲ περιορισμοὶ ποὺ τίθενται
εἶναι ἡ μνημονικὴ ἰκανότης τῆς μηχανῆς καὶ ἡ ἀσφάλεια ὑπολογισμῶν ποὺ τὴν
χαρακτηρίζει, φυσικὰ δὲ καὶ ἡ ἰκανότης τοῦ προγραμματιστοῦ ποὺ θὰ θέσῃ,
τὸ πρόβλημα.

A. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΑΠΑΛΕΙΦΗΣ
(General Elimination)

α. Συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων.

Δίδεται τὸ κατωτέρω σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ ζητοῦνται ἀφ-
τιμαὶ τῶν ἀγνῶστων:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \dots + \alpha_{1v} X_v &= K_1 \\
 \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 + \dots + \alpha_{2v} X_v &= K_2 \\
 \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3 + \dots + \alpha_{3v} X_v &= K_3 \\
 \dots & \dots \\
 \alpha_{v1} X_1 + \alpha_{v2} X_2 + \alpha_{v3} X_3 + \dots + \alpha_{vv} X_v &= K_v
 \end{aligned} \tag{1}$$

Τὸ σύστημα τοῦτο κατὰ τὰ θεωρήματα τοῦ λογιμοῦ μητρῶν δύναται
νὰ θεωρηθῆ ὅτι προκύπτει ἀπὸ πολλαπλασιασμόν τῆς μήτρας A ἐπὶ τὸ ἀνυ-
σμα τῶν ἀγνῶστων X ὡς κατωτέρω κατὰ τὴν σχέσηιν $A \cdot X = K$

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1v} \\
 \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2v} \\
 \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3v} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \alpha_{v1} & \alpha_{v2} & \alpha_{v3} & \dots & \alpha_{vv}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_v \end{bmatrix} \tag{2}$$

Θεωροῦντες τὴν στήλην τῶν τιμῶν τῶν ἐξισώσεων (K_1, K_2 κ.λ.π.) ὡς
τελευταίαν στήλην τῆς μήτρας δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τῆς γενι-
κῆς ἀπαλειφῆς. Διὰ νὰ ἔχωμεν δὲ καὶ σύγχρονον ἔλεγχον τῆς ὀρθῆς ἐξελίξεως τῶν
πράξεων τῆς ἀπαλειφῆς προσθέτομεν εἰς τὴν μήτραν ἀκόμη μίαν στήλην ποὺ
περιλαμβάνει τὰ ὀριζόντια σύνολα τῶν σειρῶν τῆς μήτρας.

Ὡστε τελικῶς ἡ διάταξις ἐπὶ τῆς ὁποίας θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον
τῆς ἀπαλειφῆς ἔχει τὴν μορφήν:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c|c}
 \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1,v} & | & K_1 & | & \Sigma_1 \\
 \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2,v} & | & K_2 & | & \Sigma_2 \\
 \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{3,v} & | & K_3 & | & \Sigma_3 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & | & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & | & \dots \\
 \alpha_{v,1} & \alpha_{v,2} & \alpha_{v,3} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{v,v} & | & K_v & | & \Sigma_v
 \end{array} \right] \quad (3)$$

Ο μαθηματικός τύπος που χρησιμοποιείται δια την άπαλειφην είναι ο εξής :

$$\alpha_{(\sigma-1)(u-1)} = \alpha_{\sigma u} - \frac{\alpha_{\sigma 1} \cdot \alpha_{1 u}}{\alpha_{11}} \quad (4)$$

όπου :

$$\alpha_{(\sigma-1)(u-1)} = \text{Ο νέος όρος μετά την άπαλειφην εις την θέσιν του όρου } \alpha_{\sigma u}$$

$$\alpha_{\sigma u} = \text{Ο τυχαίος όρος του συστήματος}$$

$$\alpha_{\sigma 1} = \text{Ο πρώτος όρος της στήλης του } \alpha_{\sigma u}$$

$$\alpha_{1 u} = \text{Ο πρώτος όρος της σειρας του } \alpha_{\sigma u}$$

$$\alpha_{11} = \text{Ο πρώτος όρος της πρώτης σειρας και της πρώτης στήλης του συστήματος.}$$

Σημείωσις : Πριν επιχειρήσωμεν εφαρμογήν της μεθόδου αυτής πρέπει αι εξισώσεις του συστήματος να τακτοποιηθούν ώστε κατά την πρόοδον της εφαρμογής της μεθόδου της γενικής άπαλειφής να ισχύη πάντα $\alpha_{11} \neq 0$, άλλως ή λύσις είναι άδύνατος ως προκύπτει εκ της άνωτέρω σχέσεως (4).

Εφαρμόζοντες τον μαθηματικόν τύπον (4) εις όλους τους όρους της διατάξεως (3) θα λάβωμεν μίαν νέαν διάταξιν της μορφής (3) με μίαν σειράν και μίαν στήλην όλιγωτέραν, δεδομένου ότι όλοι οι όροι της πρώτης σειρας και όλοι οι όροι της πρώτης στήλης μηδενίζονται.

$$\text{Π.χ.} \quad \alpha_{(\sigma-1)(K-1)} = \alpha_{11} - \frac{\alpha_{11} \cdot \alpha_{11}}{\alpha_{11}} = 0$$

$$\text{ή} \quad \alpha_{(\sigma-1)(K-1)} = \alpha_{v1} - \frac{\alpha_{v1} \cdot \alpha_{11}}{\alpha_{11}} = 0$$

Εάν τώρα πραγματοποιήσωμεν άναγωγήν της διατάξεως που προέκυψε μετά την πρώτην άπαλειφην εις διάταξιν συστήματος εξισώσεων ως ή (1) άνωτέρω, θα λάβωμεν σύστημα με ένα άγνωστον όλιγώτερον. Συγκεκριμένως θα έχη άπαλειφθη ο άγνωστος X_1 .

Προχωρούντες κατ' αυτόν τον τρόπον μετά (v-1) άπαλειφάς θα έχωμεν μίαν εξίσωσιν της μορφής :

$$\alpha_{11}^{(v-1)} X_v = K_1^{(v-1)} \quad (5)$$

Ἄλλὰ ἡ (5) εἶναι ἐξίσωσις με ἐν ἀγνωστον τὴν τιμὴν τοῦ ὁποίου ὑπολογίζομεν εὐκόλως.

Ἄφοῦ εὑρεθῆ οὕτω ἡ τιμὴ τοῦ ἐνὸς ἀγνώστου τοῦ X_n ὀπισθοχωροῦμεν πλεόν εἰς τὴν διάταξιν πού εἶχομεν πρὸ τῆς $(n-1)$ ἀπαλειφῆς (σύστημα 2 ἐξισώσεων με 2 ἀγνώστους) καὶ εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν καὶ δευτέρου ἀγνώστου, τοῦ $X_{(n-1)}$. Ἐν συνεχείᾳ ὀπισθοχωροῦμεν εἰς τὴν διάταξιν πού εἶχομεν πρὸ τῆς $(n-2)$ ἀπαλειφῆς (σύστημα 3 ἐξισώσεων με 3 ἀγνώστους) καὶ διὰ ἀντικαταστάσεως εὐρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ τρίτου ἀγνώστου, τοῦ $X_{(n-2)}$ κ.ο.κ. Διὰ τῆς μεθόδου αὐτῆς (Back Substitution) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν προοδευτικὰ τὰς τιμὰς ὄλων τῶν ἀγνώστων.

β. Σύγχρονος ὑπολογισμὸς ὄλων τῶν ἀγνώστων.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος παρ' ὄλον πού ἐμφανίζεται σχετικῶς ἀπλῆ καὶ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῆ διὰ τὴν λύσιν συστημάτων μικρᾶς τάξεως ἀκόμη καὶ με συνήθεις ἀριθμομηχανὰς γραφείου, δὲν συνιστᾶται δι' ἐφαρμογὴν εἰς τοὺς ἠλεκτρονικοὺς Ἐγκεφάλους. Τοῦτο διότι καὶ περισσότερον χρόνον ἀπαιτεῖ καὶ διαφοροὶ πρόσθετοι χειρισμοὶ χρειάζονται καὶ συχνὰ ἀπαιτεῖται ἡ κατάστρωσις δύο προγραμμάτων, ἐνὸς διὰ τὴν ἀπαλειφὴν καὶ ἐνὸς διὰ τὴν δι' ἀντικατάστασιν εὑρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων.

Εἶναι ὅμως δυνατὸν ἡ μήτρα τῆς ἀνωτέρω διατάξεως (3) νὰ συμπληρωθῆ με μίαν ἀρνητικὴν μοναδιαίαν μήτραν με n σειρὰς καὶ n στήλας ὡς ἐξῆς :

α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{1n}		K_1		Σ_{10}
α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{2n}		K_2		Σ_{20}
α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{3n}		K_3		Σ_{30}
.
.
α_{n1}	α_{n2}	α_{n3}	α_{nn}		K_n		Σ_{n0}

(6)

-1	0	0	0		0		0
0	-1	0	0		0		0
0	0	-1	0		0		0
.
.
0	0	0	-1	

Εἰς τὴν διάταξιν (6) δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν γενικὸν μαθηματικὸν τύπον ἀπαλειφῆς (4). Μετὰ τὴν πρῶτην ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου (4) ἂν ἀγνοή-

σώμεν τήν στήλην τῶν ὀριζοντίων συνόλων, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖται ἀποκλειστικῶς διὰ λόγους ἐλέγχου, θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\
 0 & \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 & . & . & . & . & \alpha_{1(v-1)}^1 & K_1^1 \\
 0 & \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 & . & . & . & . & \alpha_{2(v-1)}^1 & K_2^1 \\
 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & \alpha_{(v-1)1}^1 & \alpha_{(v-1)2}^1 & . & . & . & . & \alpha_{(v-1)(v-1)}^1 & K_{(v-1)}^1 \\
 \hline
 0 & \alpha_{v1}^1 & \alpha_{v2}^1 & . & . & . & . & \alpha_{v(v-1)}^1 & K_v^1 \\
 0 & -1 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\
 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & -1 & 0
 \end{array} \quad (7)$$

Συνεχίζοντες τήν ἐφαρμογήν τοῦ τύπου (4) μετὰ ἀπὸ (v) ἀπαλειφᾶς θὰ λάβωμεν τήν κατωτέρω διάταξιν :

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & \alpha_1 \\
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & \alpha_2 \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 & \alpha_v
 \end{array} \quad (8)$$

Ἡ διάταξις αὕτη ὁμως εἶναι ἐν ἄνυσμα πού περιλαμβάνει (v) ὄρους, τὰς τιμὰς τῶν (v) ἀγνώστων, πού προέκυψαν ὅλοι συγχρόνως.

‘Η μέθοδος αυτή εκτός του πλεονεκτήματος της ταχύτητας λύσεως δι’ Ηλεκτρονικού Έγκεφάλου και εκτός του ότι μᾶς δίδει συγχρόνως τὰς τιμὰς ὄλων τῶν ἀγνώστων μπορεί νὰ εφαρμοσθῆ διὰ τὴν ταυτόχρονον λύσιν τοῦ ἰδίου συστήματος διὰ περισσοτέρας τῆς μιᾶς στήλας τιμῶν τῶν ἐξισώσεων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπλῶς προστίθενται εἰς τὴν μήτραν περισσότεραι στήλαι μὲ τὰς τιμὰς τῶν ἐξισώσεων.

γ. Ἀντιστροφή Μητρῶν

‘Η ἀνωτέρω περιγραφείσα μέθοδος γενικῆς ἀπαλειφῆς (General Elimination) δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ γενικῶς καὶ διὰ τὴν ἀντιστροφήν μητρῶν. Καὶ ὡς εἶναι γνωστὸν τὸ πρόβλημα τῆς ἀντιστροφῆς μητρῶν εἶναι κατὰ κάποιον τρόπον ἐπακλόουθον τοῦ προβλήματος τῆς λύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων μεγάλης τάξεως μὲ ἰσαριθμούς πρὸς τὰς ἐξισώσεις ἀγνώστους. Συχνὰ ἀντὶ νὰ ζητῆται ἡ λύσις ἑνὸς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων δι’ ὠρισμένην σειρὰν ἢ δι’ ὠρισμένας σειρὰς τιμῶν ἐξισώσεων (σταθερῶν) ζητεῖται ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ συστήματος ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ποὺ περιέχει νὰ ὑπολογίζωνται δι’ οἰανδήποτε σειρὰν τιμῶν ἐξισώσεων (σταθερῶν) δι’ ἀπλῆς ἀντικαταστάσεως.

‘Ο μετασχηματισμὸς ποὺ πρέπει νὰ γίνῃ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς εἶναι γνωστὸς ὡς ἀντιστροφή τῆς μήτρας τοῦ συστήματος (Matrix Inversion). Τὸ πρόβλημά μας λοιπὸν εἶναι: Μὲ δεδομένον τὸ σύστημα (1), ἐπομένως μὲ δεδομένην τὴν μήτραν τῆς διατάξεως (2), νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀντίστροφος μήτρα καὶ ἀντιστοίχως τὸ ἀντίστροφον τοῦ συστήματος (1). Ἀπὸ τὴν γενικὴν μαθηματικὴν θεωρίαν περὶ μητρῶν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ἀντίστροφος τῆς διατάξεως (2) θὰ ἔχη τὴν μορφήν:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{i_{11}} & \alpha^{i_{12}} & \alpha^{i_{13}} & \dots & \dots & \dots & \alpha^{i_{1v}} \\ \alpha^{i_{21}} & \alpha^{i_{22}} & \alpha^{i_{23}} & \dots & \dots & \dots & \alpha^{i_{2v}} \\ \alpha^{i_{31}} & \alpha^{i_{32}} & \alpha^{i_{33}} & \dots & \dots & \dots & \alpha^{i_{3v}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{i_{v1}} & \alpha^{i_{v2}} & \alpha^{i_{v3}} & \dots & \dots & \dots & \alpha^{i_{vv}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ K_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ X_v \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ἐκ τῆς διατάξεως (9) ἀνωτέρω καθίσταται σαφές ὅτι μὲ δεδομένην τὴν ἀντίστροφον μήτραν (A⁻¹) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκόλως τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων X_{1, 2, 3, . . . , v}, δι’ οἰανδήποτε σειρὰν τιμῶν τῶν σταθερῶν (K₁, K₂, K₃, K_v) δι’ ἀπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς ἀντιστρόφου μήτρας (A⁻¹) ἐπὶ τὸ ἄνυσμα τῶν σταθερῶν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μήτρας ἐπὶ ἄνυσμα. Ὅ,τι θὰ χρειασθῆ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτὸν εἶναι ἢ ἐκτέλεσις ἀπλῶν προσθέσεων (ἢ καὶ ἀφαιρέσεων) ἐπὶ ἐκάστης σειρᾶς διὰ τὴν εὔρεσιν τῆς τιμῆς ἐκάστου ἀγνώστου.

Διὰ νὰ εἶναι δὲ τοῦτο σαφέστερον καὶ ἀπλούστερον, σημειοῦμεν κατωτέρω ὅτι ἡ διάταξις (9) μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ σημειομένου πολλαπλασιασμοῦ λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11}^i K_1 + \alpha_{12}^i K_2 + \alpha_{13}^i K_3 + \dots + \alpha_{1v}^i K_v &= X_1 \\
 \alpha_{21}^i K_1 + \alpha_{22}^i K_2 + \alpha_{23}^i K_3 + \dots + \alpha_{2v}^i K_v &= X_2 \\
 \alpha_{31}^i K_1 + \alpha_{32}^i K_2 + \alpha_{33}^i K_3 + \dots + \alpha_{3v}^i K_v &= X_3 \\
 \vdots & \\
 \alpha_{v1}^i K_1 + \alpha_{v2}^i K_2 + \alpha_{v3}^i K_3 + \dots + \alpha_{vv}^i K_v &= X_v
 \end{aligned} \tag{10}$$

Ἐκεῖνο πού μᾶς ἐνδιαφέρει ἐδῶ εἶναι ἡ μέθοδος ἐκτελέσεως τῶν ἀπαραίτητων ὑπολογισμῶν διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τῆς μήτρας (A) ἐκ τῆς διατάξεως (2) ἀνωτέρω καὶ τὴν εὑρεσιν τῆς ἀντιστρόφου τῆς (A⁻¹) ὡς δίδεται εἰς τὴν διάταξιν (9).

Ἡ περισσότερον προσφερομένη μέθοδος διὰ τοὺς Ἠλεκτρονικούς Ἐγκυφάλους καὶ συγχρόνως ἡ περισσότερον ἀπλῆ εἶναι πάλιν ἡ μέθοδος τῆς γενικῆς ἀπαλειφῆς, ἡ ἴδια ὡς περιγράφεται ἀνωτέρω διὰ τὴν λύσιν συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων. Ἀρκεῖ διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν ἀντιστροφὴν εἰς τὴν θέσιν τῆς στήλης τῶν σταθερῶν νὰ θέσωμεν μίαν μοναδιαίαν μήτραν μὲ ν σειρὰς καὶ ν στήλας, ὅσας αἱ σειραὶ καὶ αἱ στήλαι τῆς πρὸς ἀντιστροφὴν μήτρας. Βεβαίως καὶ ἐδῶ διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου τῆς γενικῆς ἀπαλειφῆς θὰ συμπληρώσωμεν τὴν μήτραν μὲ τὴν ἀρνητικὴν μοναδιαίαν κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς μεθόδου λύσεως συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων.

Μετὰ τὰς συμπληρώσεις αὐτὰς ἡ δεδομένη πρὸς ἀντιστροφὴν μήτρα θὰ λάβῃ τὴν διάταξιν:

α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{1v}	1	0	0	0
α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{2v}	0	1	0	0
α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{3v}	0	0	1	0
.
.
α_{v1}	α_{v2}	α_{v3}	α_{vv}	0	0	0	1

-1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0
.
.
0	0	0	-1	0	0	0	.	.

(11)

Εἰς τὴν διάταξιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὸν γενικὸν μαθηματικὸν τύπον τῆς ἀπαλειφῆς :

$$\alpha_{(\sigma-1)(\mu-1)} = \alpha_{\sigma\mu} - \frac{\alpha_{\sigma 1} \cdot \alpha_{1\mu}}{\alpha_{11}}$$

ἐπαναληπτικῶς δι' ὅλας τὰς θέσεις. Μετὰ (ν) ἀπαλειφῆς προκύπτει ἡ πλήρης ἀντίστροφος μήτρα ἢ (A⁻¹) ὡς φαίνεται εἰς τὴν κατωτέρω διάταξιν :

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
.
.
0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	α^i_{11}	α^i_{12}	α^i_{13}	α^i_{1v}
0	0	0	0	α^i_{21}	α^i_{22}	α^i_{23}	α^i_{2v}
0	0	0	0	α^i_{31}	α^i_{32}	α^i_{33}	α^i_{3v}
.
.
0	0	0	0	α^i_{v1}	α^i_{v2}	α^i_{v3}	α^i_{vv}

(12)

Πρὶν ὅμως προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ προγράμματος Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου διὰ τὴν λύσιν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ τὴν ἀντίστροφὴν μητρῶν πρέπει ἐδῶ νὰ κάμωμεν μίαν κατὰ τὸ δυνατόν σύντομον παρένθεσιν διὰ νὰ ἀναφερθῶμεν εἰς τὴν συγκρότησιν καὶ τὰ γενικά χαρακτηριστικά τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων.

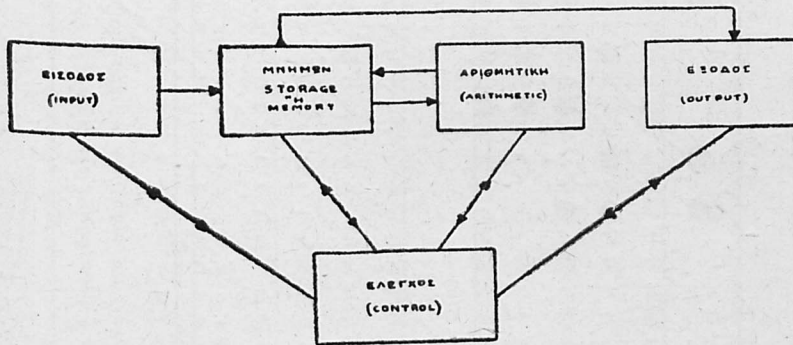
**B. ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΙΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΕΓΚΕΦΑΛΩΝ**

a. Γενικά

Ἡλεκτρονικὸς Ἐγκέφαλος εἶναι κάθε αὐτόματος ἠλεκτρονικὴ μηχανὴ ποὺ ἐκτελεῖ ὑπολογισμοὺς καὶ ἐξάγει συμπεράσματα βάσει προγράμματος μὲ μεγάλην ταχύτητα. Ἐνας ἄλλος ὀρισμὸς παράλληλος πρὸς τὸν δοθέντα τὸν ὁποῖον διετύπωσεν ὁ Willis H. Ware εἶναι: *«Ἡλεκτρονικὸς Ἐγκέφαλος εἶναι ἓνα σύστημα ἢ μία συσκευὴ, ἢ ὁποῖα ἐπεξεργάζεται πληροφορίας διὰ μιᾶς λογικῆς πορείας καὶ δίδει ἀποτελέσματα».*

Γενικῶς οἱ Ἠλεκτρονικοὶ Ἐγκεφάλοι συγκροτοῦνται ἀπὸ πέντε κύρια τμήματα:

- 1) τὴν Εἴσοδον (Input),
- 2) τὸν Μνήμονα (Memory ἢ Storage),
- 3) τὸν Ἀθροιστὴν ἢ Ἀριθμητικὸν Τμήμα (Accumulator ἢ Arithmetic),
- 4) τὴν Ἐξοδον (Output),
- 5) τὸ Τμήμα Ἐλέγχου (Control Unit) (σχ. 1).



Σχ. 1 Σχηματικὸν διάγραμμα ἐσωτερικῆς ὁργανώσεως Ἠλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου.

Αἱ ἀρμοδιότητες ἐνὸς ἐκάστου τῶν τμημάτων εἶναι ἐν συντομίᾳ αἰ κάτωθι :

β. Ἡ Εἴσοδος

Τὸ τμήμα τοῦτο περιλαμβάνει τὰ κυκλώματα ἀναγνώσεως καὶ εἰσαγωγῆς τῶν πληροφοριῶν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς μηχανῆς. Αἱ πληροφορίες εἰς τοὺς Ἠλεκτρονικοὺς Ἐγκεφάλους δίδονται συνήθως ὑπὸ μορφήν διατρήσεων ἐπὶ διατρήτων δελτίων (σχ. 2) ἢ ἐπὶ διατρήτου ταινίας (σχ. 3) ἢ ὑπὸ μορφήν μαγνητικῶν ἐγγραφῶν ἐπὶ μαγνητικῆς ταινίας (σχ. 4). Ποῖον μέσον παροχῆς πληροφοριῶν χρησιμοποιεῖται ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κατασκευὴν καὶ τὰ εἰδικὰ χαρακτηριστικὰ γνωρίσματα τοῦ Ἠλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου.

Ἡ καταγραφή τῶν πληροφοριῶν ἐπὶ τῶν δελτίων ἢ τῆς ταινίας γίνεται πάντοτε μὲ κώδικα καὶ ἀπὸ εἰδικὰς βοηθητικὰς μηχανάς.

γ. Ὁ Μνήμων

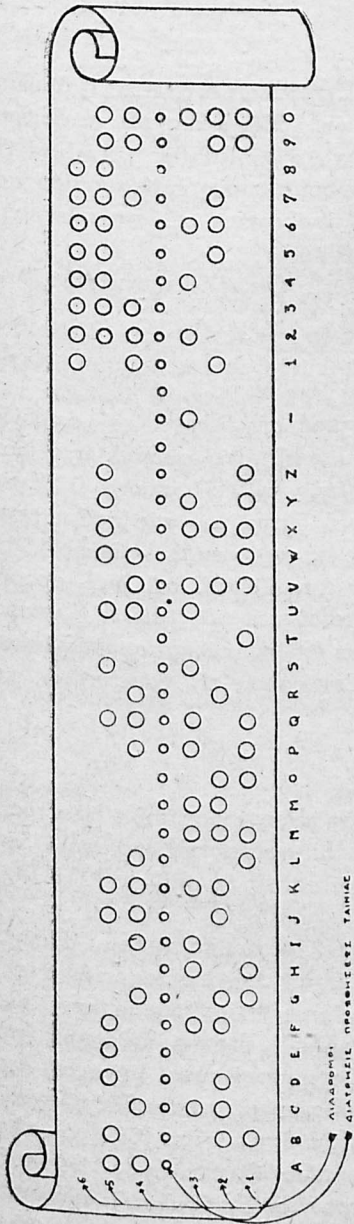
Ὁ μνήμων γενικῶς εἰς τοὺς Ἠλεκτρονικοὺς Ἐγκεφάλους περιλαμβάνει κυκλώματα καὶ μηχανισμοὺς ἀπομνημονεύσεως τῶν πληροφοριῶν ποὺ εἰσέρχονται, τῶν πληροφοριῶν ποὺ κυκλοφοροῦν ἐντὸς τῆς μηχανῆς καὶ τῶν πληροφοριῶν ποὺ ἐξέρχονται ἐξ αὐτῆς. Ὑπὸ τὴν τριπλῆν αὐτὴν ἀποστολὴν τοῦ ὀ μνήμων ἐκτελεῖ σημαντικὸν ρόλον εἰς τὴν ὅλην λειτουργίαν τοῦ Ἠλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου.

Ἀπὸ ἀπόψεως κατασκευῆς, οἱ μνήμονες ὅπως καὶ τὰ τμήματα εἰσόδου

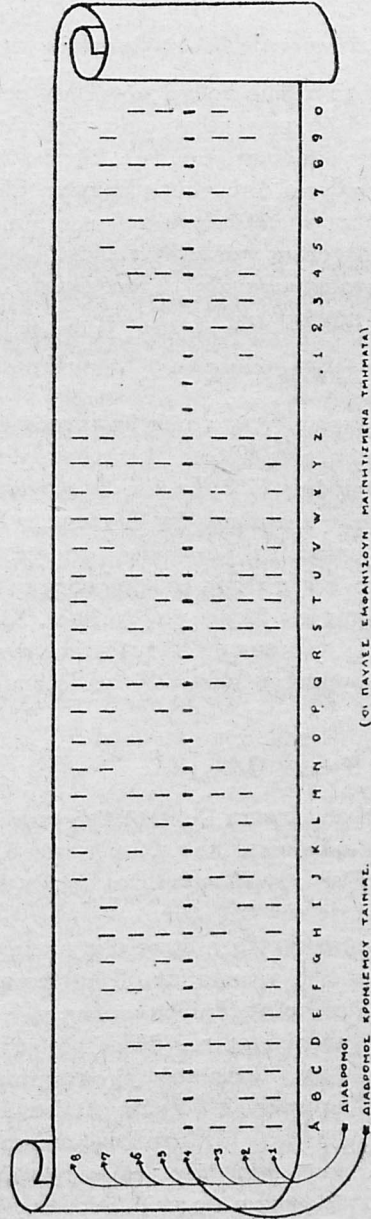
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ			
12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12			
34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34			
56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56			
78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78			
1 2 3 4	5 6 7 8	9 10 11 12	13 14 15 16	17 18 19 20	21 22 23	24 25 26 27	28 29 30 31	32 33 34 35	36 37 38 39	40 41 42 43	44 45 46 47	48 49 50 51	52 53 54 55	56 57 58 59	60 61 62 63	64 65 66 67	68 69 70 71	72 73 74 75	76 77 78 79	80 81 82 83	84 85 86 87	88 89 90	
Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω											
12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	12 12	
34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	34 34	
56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	56 56	
78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	78 78	

BH T C Printed in U.S.A. REMINGTON RAND P.

Σχ. 2 Αιχμηρο δελτίο με διαγώνους επ' αυτού τους δυαδικούς συνδυασμούς του άλφαβήτου και των αριθμών. Επί του δελτίου αυτόν είναι δυνατή η διάκριση 90 ψηφίων ή άλφαβητικών στοιχείων.



Σχ 3 Διάτρητος ταινία 6 διαδρόμων (καυαλιών) με διατρήτους έπ' αβήης τους δυαδικούς συνδυασμούς του άλφαβήτου και των άριθμών.



(ΟΙ ΠΑΥΣΕ ΕΚΦΑΝΙΣΘΥΝ ΚΑΤΗΤΗΡΕΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ)

Σχ 4. Μαγνητική ταινία 7 διαδρόμων (καυαλιών) με τους δυαδικούς συνδυασμούς του άλφαβήτου και των άριθμών. (Οι μαγνητικές έγγραφές εις την ποσμηματικότητα δεν είναι όρατές)

τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων, εἶναι κυκλώματα μηχανικά, ἠλεκτρικά καὶ ἠλεκτρονικά. Συχνὰ συναντῶνται καὶ οἱ μνήμονες μαγνητικῶν πυρήνων (Magnetic Core) καὶ ἐπίσης οἱ μνήμονες μαγνητικά τύμπανα (Magnetic Drums).

δ. Ὁ Ἀθροιστὴς ἢ Ἀριθμητικὸν τμήμα

Εἰς τὸ τμήμα τοῦτο τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων ἐκτελεῖται ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ λογικὴ ἐπεξεργασία τῶν πληροφοριῶν. Ἐδῶ ἐξάγονται τὰ ἀριθμητικὰ ἢ λογικὰ συμπεράσματα. Εἰς τὰ κυκλώματα Accumulator ἢ Arithmetic τροφοδοτοῦνται ἀπὸ τοὺς μνήμονας αἱ πληροφορίαι πρὸς ἐπεξεργασίαν καὶ ἀπὸ ἰδιαιτέρα κυκλώματα τοῦ Accumulator παρέχονται τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐπεξεργασίας πάλιν εἰς τοὺς μνήμονας.

Κατασκευαστικῶς τὰ κυκλώματα Arithmetic εἶναι ἠλεκτρονικά ἢ ἠλεκτρονικά—μηχανικά.

ε. Ἡ Ἐξόδος

Τὸ τμήμα τοῦτο τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων ἐλέγχει καὶ ἀποδίδει τὰς πληροφορίας ἐξόδου. Αἱ πληροφορίαι ἐξόδου (τὰ ἀποτελέσματα) ἀποδίδονται ὑπὸ μορφήν κώδικος καί, ἀναλόγως τοῦ τύπου τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου εἶναι διατρήσεις ἐπὶ διατρήτων δελτίων ἢ διατρήτου ταινίας ἢ μαγνητικαὶ ἐγγραφαὶ ἐπὶ μαγνητικῆς ταινίας. Συχνά, εἰς τοὺς μεγάλους ἰδίως Ἡλεκτρονικούς Ἐγκεφάλους, αἱ πληροφορίαι ἐξόδου ἀποδίδονται καὶ ὑπὸ μορφήν καταχωρημένων λέξεων καὶ ἀριθμῶν. Χρησιμοποιοῦνται πρὸς τοῦτο ἠλεκτρονικαὶ μηχαναὶ ποὺ συνδέονται εἰς τὰ κυκλώματα ἐξόδου καὶ «μεταφράζουν» καὶ ἀποδίδουν ἀμέσως τὸν κώδικα ἐξόδου τοῦ Ἐγκεφάλου εἰς χαρακτῆρας καὶ ἀριθμούς.

στ. Τὸ Τμήμα Ἐλέγχου

Τὰ κυκλώματα Control ἐλέγχουν ὅλην τῆς λειτουργίαν τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου καὶ κατευθύνουν πᾶν ὅ,τι γίνεται μέσα εἰς τὴν μηχανήν. Ἐπιδροῦν καὶ εἰς τὴν *Ἐξοδον* καὶ εἰς τὸν *Μνήμονα* καὶ εἰς τὸ τμήμα *Υπολογισμῶν* καὶ εἰς τὴν *Ἐξοδον*.

Διὰ νὰ ἐκτελέσῃ ὁμως τὴν εὐρείαν ἀποστολήν του τὸ τμήμα Ἐλέγχου ἢ ὡς εἶπω ὁ Ἐγκέφαλος τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου, χρειάζεται τὴν στενὴν συνεργασίαν τοῦ «*Προγραμματιστοῦ*» (Programmer). Προγραμματιστὴς εἶναι ὁ στενὸς συνεργάτης τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου, εἶναι ὁ ἄνθρωπος ποὺ τὸν κατευθύνει. Χωρὶς τοὺς Programmers αἱ θαυμασταὶ αὐταὶ μηχαναὶ, ποὺ τόσα πολλὰ μποροῦν νὰ κάνουν, εἶναι ἓνα ἄβουλο σύνολον καλωδίων, λυχνιῶν καὶ μετᾶλλων ποὺ δὲν ἔχει καμμίαν ἰκανότητα. Θὰ ἐπιθυμοῦσα ἐδῶ νὰ τελειώσω τὴν παρένθεσιν περὶ Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων (λεπτολόγος ἀνάπτυξης τοῦ θέματος γίνεται εἰς τὸ βιβλίον μου «Ἡλεκτρονικοὶ Ἐγκέφαλοι»), φθάνοντας εἰς τὸν ἄνθρωπον, τὸν ὁποῖον οἱ Ἡλεκτρονικοὶ Ἐγκέφαλοι, ἓνα ἀπὸ τὰ τελειότερα δημιουργήματά του, δὲν καταργοῦν, δὲν ξεπερνοῦν, οὔτε κἂν τὸν φθά-

νουν, τὸν ὀδηγοῦν ὅμως εἰς τὴν θέσιν πού πρέπει, εἰς τὴν ἔκδοσιν ὀδηγιῶν, εἰς τὴν διατύπωσιν κατευθύνσεων, εἰς τὴν κατάστρωσιν προγραμμάτων, ἐνῶ τὸν ἀπαλλάσσουν ἀπὸ καταθλιπτικὸν ὄγκον ἐργασιῶν, πού καταδαπανοῦν τὸν χρόνον καὶ τὴν σκέψιν του.

**Γ. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΕΓΚΕΦΑΛΟΥ UNIVAC 120
ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

Γ Ε Ν Ι Κ Α

Ἦδη εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς μελέτης μας ἀνελύθη τὸ πρόβλημά μας ἐν συνεχείᾳ δὲ ἐδόθησαν τὰ γενικὰ χαρακτηριστικὰ τῶν Ἠλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων. Τὸ παρὸν Γ' καὶ τελευταῖον μέρος τῆς μελέτης μας ἀναφέρεται εἰς τὴν κατάστρωσιν προγράμματος διὰ τὴν λύσιν συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων δι' Ἠλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου Univac 120. Τὸ ἴδιον αὐτὸ πρόγραμμα ὡς θὰ ἀναλυθῆ κατωτέρω δύναται μὲ ὀρισμένης ἐλαφρᾶς μεταβολᾶς νὰ χρησιμοποιηθῆ καὶ διὰ τὴν ἀντιστροφὴν μητρῶν. Ἐπιθυμία μου εἶναι νὰ δώσω ἓνα κατὰ τὸ δυνατόν ἀπλούστερον πρόγραμμα διὰ νὰ εἶναι τοῦτο εὐκολώτερον κατανοητόν. Μάλιστα διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἀντὶ νὰ χρησιμοποιήσω ὀρθόδοξον τεχνικὴν προγραμματισμοῦ τοῦ Univac 120 ἐπὶ ὀρισμένων τυποποιημένων διαγραμμάτων θὰ δώσω ἀπλοποιημένον σχέδιον προγράμματος.

Δεδομένα τοῦ προβλήματος

Οἱ ὅροι τῆς μήτρας π.χ. τῆς διατάξεως 2 (Α' μέρος) καὶ αἱ σταθεραὶ (K_1, K_2, \dots, K_n).

Ζητοῦνται

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ($X_1, X_2, X_n, \dots, X_n$).

Πρῶτος βρόγχος λύσεως

Τὸ πρόβλημα θὰ λυθῆ δι' Ἐγκεφάλου Univac 120 καὶ ἐπειδὴ ἡ μηχανὴ αὐτὴ λειτουργεῖ μὲ διάτρητα δελτία (βλέπε σχ. 2) τὰ δεδομένα νὰ τροφοδοτηθοῦν εἰς τὸν Ἐγκέφαλον ὑπὸ μορφήν διατρήσεων ἐπὶ τῶν δελτίων. Ἐπίσης καὶ τὰ ἀποτελέσματα θὰ ἐκδοθοῦν ἀπὸ τὸν Univac ὡς διατρήσεις ἐπὶ δελτίων. Σχεδιάζομεν ἐπὶ ἐνὸς λευκοῦ (ἀχρησιμοποίητου) δελτίου τὰς θέσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διατρηθοῦν τὰ δεδομένα. Ὡστε τὸ δελτίον λαμβάνει τὴν μορφήν τοῦ σχ. 5, ἥτοι:

Στήλαι :	1	ἕως	3	Ἀριθμὸς ἀπαλειφῆς
» :	5	»	7	Ἀριθμὸς σειρᾶς τῆς μήτρας
» :	9	»	11	Ἀριθμὸς στήλης τῆς μήτρας

Στήλαι :	13	»	22	Τιμαί τῶν ὄρων τῆς μήτρας μὲ πέντε δεκαδικὰ ($\alpha_{\sigma\kappa}$)
» :	24	»	33	Τιμαί τῶν πρώτων ὄρων τῶν σειρῶν (α_{σ_1})
» :	35	»	44	Τιμαί τῶν πρώτων ὄρων τῶν στηλῶν ($\alpha_{1,\kappa}$)
Στήλη :	45			Χαρακτηρισμὸς τοῦ Δελτίου τοῦ περιέχοντος τὸν ὄρον α_{11}
Στήλαι :	12,23	καὶ	34	Τὸ σύμβολον τῶν $\alpha_{\sigma\kappa}$, α_{σ_1} καὶ $\alpha_{1,\kappa}$ ἀντιστοίχως (θετικὰ ἢ ἀρνητικὰ) καὶ συγκεκριμένως διὰ τοὺς ἀρνητικούς ὄρους διατρυπᾶται τὸ μηδὲν τὸ ὅποιον ὁ Ἐγκέφαλος θεωρεῖ ὡς πλὴν (-).

Μετὰ τὴν σχεδίασιν τοῦ δελτίου διατρυπῶμεν διὰ Διατρητικῆς Μηχανῆς, τῆς ὁποίας ὁ χειρισμὸς εἶναι ἐν πολλοῖς ὁ αὐτὸς μὲ τὸν χειρισμὸν κοινῆς γραφομηχανῆς, ἐπὶ δελτίων τὴν ἀρχικὴν μήτραν.

Χρησιμοποιοῦμεν ἀνὰ ἓν δελτίον δι' ἕκαστον ὄρον μήτρας. Διατρυπῶμεν ἐπίσης δελτία διὰ τοὺς ὄρους τῆς ἀρνητικῆς μοναδιαίας μήτρας τῆς διατάξεως 6.

Μετὰ τὴν διάτρησιν καὶ τὴν ἐπαλήθευσιν τῆς ὀρθότητος διατρήσεως τῶν ὄρων τῆς μήτρας, τῶν ὄρων τῆς ἀρνητικῆς μοναδιαίας μήτρας καὶ τῶν λοιπῶν στοιχείων ἐπὶ τῶν δελτίων προχωροῦμεν διὰ τῆς Διαλογικῆς Μηχανῆς Διατρήτων Δελτίων εἰς ταξινομήσιν τῶν δελτίων ὥστε νὰ λάβουν τὴν ἕξιν σειρᾶν. (Χρησιμοποιοῦ μόνον τοὺς ἀριθμοὺς σειρῶν καὶ στηλῶν τῆς μήτρας) : 11, 12, 13, 14, 1ν, 21, 22, 23, 24, 2ν, 31, 32, 33, 34, 3ν, 41, 42, 43, 44, 4ν, ν1, ν2, ν3, ν4, νν.

Μετὰ τὴν διαλογὴν τῶν δελτίων (σημειωτέον ὅτι ἡ διαλογικὴ μηχανὴ εἶναι μηχανὴ αὐτόματος καὶ ταξινομεῖ μὲ ταχύτητα 48.000 στηλῶν ὥριαίως) εἶναι ὅλα ἔτοιμα διὰ νὰ τροφοδοτηθοῦν τὰ δελτία εἰς τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκέφαλον.

Ὁ Ἡλεκτρονικὸς Ἐγκέφαλος ἐκτελῶν τὸ κατωτέρω πρόγραμμα τοῦ δύναται νὰ διατρυπᾷ τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν τοῦ ἐπὶ τοῦ ἰδίου δελτίου εἰς τὴν κάτω ζώνην (βλέπε σχ. 5) ἢ ἐπὶ λευκοῦ δελτίου πού ἀκολουθεῖ ἕκαστον δελτίον τῆς ἀρχικῆς μήτρας. Προτιμῶμεν (διὰ λόγους ὀργανωτικῶν τῆς λειτουργίας τῶν μηχανῶν καὶ διὰ νὰ δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν αὐτομάτως διὰ τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου τὰ δελτία τῆς ἀρχικῆς μήτρας ἀπὸ τὰ δελτία ἐκείνης πού προκύπτει μετὰ τὴν ἀπαλειφήν) τὴν διάτρησιν τῶν ἀποτελεσμάτων ἐπὶ δελτίου λευκοῦ. Διὰ τοῦτο πρὶν τροφοδοτήσωμεν τὰ δελτία εἰς τὸν Ἐγκέφαλον χρειάζεται παρεμβολὴ λευκῶν δελτίων (ἀδιατρήτων), ὥστε τὰ δελτία μας νὰ λάβουν τὴν τάξιν : Ἐνα διάτρητον—ἕνα λευκὸν κ.ο.κ. Ἡ ἐργασία τῆς παρεμβολῆς λευκῶν δελτίων ἐκτελεῖται πάλιν δι' αὐτομάτου μηχανῆς, τῆς συζευκτικῆς.

Τὰ δελτία τροφοδοτοῦνται πλέον εἰς τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκέφαλον ὁ ὁποῖος δι' ἕκαστον ζευγὸς δελτίων ἐκτελεῖ τὸ κατωτέρω πρόγραμμα :

1. Τροφοδοτεῖ τὸ πρῶτον δελτίον εἰς τὸν θάλαμον ἀναγνώσεως.
2. Ἀναγιγνώσκει τὸ δελτίον.
3. Ἐλέγχει τὴν ὀρθὴν σειρὰν δελτίων (ἤτοι δελτίον 11—δελτίον λευκόν,

Υπόδειγμα Διατάξεως Δεσφών

Αριθμός Ανατίθεσης	Αριθμός Σελίδας	Αριθμός Στήλης	Υποβλ.	Όσο	Υποβλ.	Όσο	Υποβλ.	Όσο	Υποβλ.	Όσο	Υποβλ.	Όσο
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34
56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56
78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78
9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34
56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56
78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78
9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+	9+
40	47	45	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90								

Printed in U.S.A.

δελτίον 12—δελτίον λευκόν, δελτίον 13—δελτίον λευκόν κ.ο.κ. κατά τὰ ἀνωτέρω).
Εἰς περίπτωσιν λαυθασμένης σειρᾶς δελτίων σταματᾷ καὶ δίδει σχετικὴν ἔνδειξιν.

4. Ἀναγνωρίζει τὰ διάτρητα καὶ τὰ λευκὰ δελτία καὶ διὰ τὰ διάτρητα (δελτία μήτρας) προχωρεῖ εἰς τὴν βαθμίδα 5, διὰ τὰ λευκὰ εἰς τὴν βαθμίδα 23.

5. Ἀναγιγνώσκει τὸν ἀριθμὸν ἀπαλειφῆς (στῆλαι 1—3 τοῦ δελτίου) καὶ προσθέτει ἕνα. Τὸ ἀποτέλεσμα ἀπομνημονεύεται ὡς νέος ἀριθμὸς ἀπαλειφῆς εἰς οἰκεῖον μῆμονα.

6. Ἀναγιγνώσκει τὸν ἀριθμὸν σειρᾶς (στῆλαι 5—7 τοῦ δελτίου) καὶ ἀφαιρεῖ ἕνα. Τὸ ἀποτέλεσμα ἀπομνημονεύεται ὡς νέος ἀριθμὸς σειρᾶς εἰς οἰκεῖον μῆμονα.

7. Ἀναγιγνώσκει τὸν ἀριθμὸν στήλης (στῆλαι 9—11 τοῦ δελτίου) καὶ ἀφαιρεῖ ἕνα. Τὸ ἀποτέλεσμα ἀπομνημονεύεται ὡς νέος ἀριθμὸς στήλης εἰς οἰκεῖον μῆμονα.

8. Ἀρχίζει τὴν ἔρευναν πρὸς ἀνεύρεσιν τοῦ δελτίου 11 (τοῦ πρώτου τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ τῆς πρώτης στήλης) τῆς νέας μήτρας ποῦ θέλει προκύψει μετὰ τὴν παροῦσαν ἀπαλειφήν. Πρὸς τοῦτο ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν νέον ἀριθμὸν σειρᾶς—ποῦ ἔχει ἀπομνημονεύσει ὡς ἄνω (βαθμῆς 6) — τὴν μονάδα. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, ὁ νέος ἀριθμὸς σειρᾶς εἶναι μηδὲν (πρόκειται διὰ τὴν σειρὰν ποῦ ἀπαλείφεται—μηδενίζεται ἐξ ὀλοκλήρου κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὸ Α' μέρος τῆς μελέτης) ὥστε δὲν συντρέχει λόγος περαιτέρω διερευνήσεως καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 13. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν ὁ νέος ἀριθμὸς σειρᾶς εἶναι 1 ἢ πλεόν τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζει τὴν ἔρευναν εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

9. Ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προηγουμένης βαθμίδος τὴν μονάδα. Ἄν τὸ νέον ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ νέος ἀριθμὸς σειρᾶς εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὥστε ἡ ἔρευνα σταματᾷ καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 13. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, ἔχομεν ἀνεύρει δελτίον (ὄρον) τῆς πρώτης σειρᾶς τῆς νέας μήτρας. Διὰ τοῦτο τὸ πρόγραμμα συνεχίζει καὶ εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα τὴν ἔρευναν καὶ διὰ δελτίου (ὄρου) τῆς πρώτης στήλης τῆς νέας μήτρας.

10. Ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν νέον ἀριθμὸν στήλης — ποῦ ἔχει ἀπομνημονεύσει εἰς τὴν βαθμίδα 7 — τὴν μονάδα. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν ὁ νέος ἀριθμὸς στήλης εἶναι μηδὲν (πρόκειται διὰ τὴν στήλην ποῦ ἀπαλείφεται—μηδενίζεται ἐξ ὀλοκλήρου κατὰ τὰ ἐκτεθέντα εἰς τὸ Α' μέρος τῆς παρούσης μελέτης) ὥστε δὲν συντρέχει λόγος περαιτέρω διερευνήσεως καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 13. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν, ὁ νέος ἀριθμὸς στήλης εἶναι 1 ἢ πλεόν τοῦ ἑνὸς καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζει τὴν ἔρευναν εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα 11.

11. Ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προηγουμένης βαθμίδος τὴν μονάδα. Ἄν τὸ νέον ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ νέος ἀριθμὸς στήλης εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὥστε ἡ ἔρευνα σταματᾷ καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 13. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, ἔχομεν ἀνεύρει δελτίον (ὄρον) τῆς πρώτης στήλης τῆς νέας μήτρας. Δεδομένου

ὅμως ὅτι ὁ ὅρος οὗτος εἶναι καὶ ὅρος τῆς πρώτης σειρᾶς τῆς νέας μήτρας ὡς προέκυψεν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔρευναν τοῦ προγράμματος εἰς τὰς βαθμίδας 8 καὶ 9 καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ πρώτη σειρά καὶ ἡ πρώτη στήλη συναντῶνται εἰς τὴν θέσιν μὲ δείκτας 11, ἔχομεν ἀνεύρει τὸν πρῶτον ὅρον τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ τῆς πρώτης στήλης τῆς νέας μήτρας ποῦ θὰ προκύψῃ μετὰ τὴν παροῦσαν ἀπαλειφήν. Ὡστε τὸ πρόγραμμά μας συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 12.

12. Ἐκτελεῖται ἡ πρόσθεσις $1 + 0$ καὶ ὁ Ἐγκέφαλος ἀπομνημονεύει τὴν μονάδα εἰς οἰκείον μνήμονα διὰ νὰ τὴν διατρυπήσῃ εἰς τὴν στήλην 45 τοῦ λευκοῦ δελτίου ποῦ ἀκολουθεῖ καὶ νὰ τὸ χαρακτηρίσῃ ἔτσι ὡς τὸ δελτίον (ὄρον) μὲ δείκτας 11 τῆς νέας μήτρας (τὸ πρῶτον δελτίον — ὄρος).

13. Ἐλέγχει ἐὰν τὸ παρὸν διάτρητον δελτίον εἶναι τὸ πρῶτον δελτίον τῆς παλαιᾶς μήτρας — ὡς γνωστὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τὸ δελτίον τοῦτο πρέπει νὰ ἔχη διάτρησιν μονάδος εἰς τὴν στήλην 45. Ἀφαιρεῖ διὰ τοῦτο ἀπὸ ὅ,τι ἀναγιγνώσκει εἰς τὴν στήλην 45 τὴν μονάδα. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, τὸ παρὸν διάτρητον δελτίον δὲν εἶναι τὸ πρῶτον τῆς μήτρας καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 16. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικόν ἔχομεν ἀνεύρει τὸ πρῶτον δελτίον τῆς μήτρας καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα 14.

14. Ἐκτελεῖ τὴν διαίρεσιν $1 : \alpha_{11}$ διὰ νὰ ἀνεύρῃ ἂν τὸ α_{11} εἶναι ἡ ὄχι μηδέν. Εἰς τὴν περίπτωσιν μηδενικοῦ α_{11} ἔχομεν ἀδύνατον διαίρεσιν ἀριθμοῦ : μηδενὸς καὶ ὁ Ἐγκέφαλος σταματᾷ καὶ δίδει σχετικὴν ἔνδειξιν. Ἄν $\alpha_{11} \neq 0$ τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

15. Ἀπομνημονεύεται εἰς οἰκείον μνήμονα ὁ ὅρος α_{11} δηλαδὴ ὁ ὅρος $\alpha_{\sigma\kappa}$ τοῦ παρόντος δελτίου δεδομένου ὅτι εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς μήτρας καὶ θὰ χρησιμοποιηθῇ κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς ὄλων τῶν ὄρων τῆς νέας μήτρας (λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ σημεῖον τοῦ ὄρου $+$ ἢ $-$ ἀναλόγως τῆς διατρήσεως μηδενὸς ἢ μὴ εἰς τὴν στήλην 12 τοῦ δελτίου τὴν ὁποῖαν ὁ Ἐγκέφαλος ἀναγιγνώσκει). Ἐν συνεχείᾳ προχωρεῖ εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

16. Ἀναγιγνώσκει τοὺς συντελεστὰς α_{1k} (στήλαι 35—44 τοῦ δελτίου) καὶ $\alpha_{\sigma 1}$ (στήλαι 24—33 τοῦ δελτίου) καὶ τοὺς πολλαπλασιάζει. Τὸ ἀποτέλεσμα ἀπομνημονεύεται εἰς οἰκείον μνήμονα καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα. (Λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ἐπίσης τὰ σημεία $-$ ἢ $+$ ἀναλόγως τῆς διατρήσεως μηδενὸς ἢ ὄχι εἰς τὰς στήλας 34 καὶ 23).

17. Διαιρεῖ τὸ προηγούμενον ἀποτέλεσμα διὰ τοῦ ὄρου α_{11} τὸν ὁποῖον ἔχει ἀπομνημονεύσει ὡς ἄνω εἰς τὴν βαθμίδα 15. Ἀπομνημονεύει τὸ νέον ἀποτέλεσμα εἰς οἰκείον μνήμονα καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα. (Ἀπομνημονεύει ἐπίσης καὶ τὸ σημεῖον του $+$ ἢ $-$).

18. Ἀναγιγνώσκει τὸ $\alpha_{\sigma\kappa}$ τοῦ παρόντος δελτίου (στήλαι 13—22) καὶ τὸ σημεῖον του (στήλη 12) καὶ ἀφαιρεῖ ἀπὸ αὐτὸ τὸ προηγούμενον ἀποτέλεσμα. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως αὐτῆς εἶναι ὁ νέος ὅρος τῆς μήτρας ($\alpha_{(\sigma-1)(\kappa-1)}$) ὁ ὁποῖος ἀπομνημονεύεται εἰς οἰκείον μνήμονα διὰ νὰ διατρυπηθῇ εἰς τὰς στήλας 13—22 τοῦ λευκοῦ δελτίου ποῦ ἀκολουθεῖ. (Τὸ σημεῖον του $+$ ἢ $-$ εἰς τὴν στήλην 12). Τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

19. Ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ μνήμονος ἀριθμοῦ σειρᾶς ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς σειρᾶς τοῦ παρόντος δελτίου. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικὸν τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ παρὸν διάτρητον δελτίον ἀνήκει εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν μὲ τὸ προηγούμενον του καὶ τὸ πρόγραμμα προωθείται εἰς τὴν βαθμίδα ἀπορρίψεως δελτίου. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικὸν τὸ παρὸν δελτίον ἀνήκει εἰς ἄλλην σειρὰν ἀπὸ τὸ προηγούμενον του καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 20.

20. Ἀπομνημονεύεται ὁ ἀριθμὸς σειρᾶς τοῦ παρόντος δελτίου εἰς οἰκίον μνήμονα καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 21. (Πρόκειται περὶ τοῦ πρώτου δελτίου — ὅρου σειρᾶς).

21. Δεδομένου ὅτι διὰ νὰ φθάσῃ τὸ πρόγραμμα εἰς τὴν παρούσαν βαθμίδα ἔχομεν ἀλλαγὴν σειρᾶς τῆς μήτρας πρέπει νὰ ἀλλάξῃ καὶ ὁ ἀπομνημονευμένος πρῶτος ὅρος σειρᾶς. Διὰ τοῦτο τὸ ἀποτέλεσμα τῆς βαθμίδος 18 (βλέπε ἀνωτέρω) ποῦ εἶναι ὁ νέος ὅρος τῆς μήτρας εἶναι συγχρόνως καὶ ὁ νέος πρῶτος ὅρος τῆς σειρᾶς τῆς μήτρας ποῦ ἀκολουθεῖ, ὥστε ἀπομνημονεύεται εἰς οἰκίον μνήμονα διὰ νὰ διατρυπηθῇ εἰς τὴν οἰκίαν θέσιν (στήλαι 35—44, τὸ σημεῖον του εἰς τὴν στήλην 35), τῶν λευκῶν δελτίων τῆς σειρᾶς ποῦ ἀκολουθεῖ. Ὁ ὅρος αὐτὸς θὰ ἀλλάξῃ πλέον ὅταν τὸ πρόγραμμα ἀνεύρῃ νέαν ἀλλαγὴν σειρᾶς τῆς μήτρας.

22. Τὸ πρόγραμμα ὑπολογισμῶν καὶ διερευνησέων διὰ τὸ παρὸν διάτρητον δελτίον ἔληξε καὶ διὰ τοῦτο τὸ δελτίον ἀπορρίπτεται καὶ τροφοδοτεῖται νέον δελτίον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εἶναι λευκόν. Πάντως τὸ πρόγραμμα διὰ τὸ νέον δελτίον ἀκολουθεῖ τὰς βαθμίδας 1, 2, 3 καὶ 4 καὶ συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 23.

23. Διατρυπᾷ ἐπὶ τοῦ λευκοῦ πλέον δελτίου τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν ποῦ ἐξετελέσθησαν ἐπὶ τοῦ προηγούμενου δελτίου ὡς ἑξῆς:

- Εἰς τὰς στήλας 1—3 τὸν νέον ἀριθμὸν ἀπαλειφῆς,
- Εἰς τὰς στήλας 5—9 τὸν νέον ἀριθμὸν σειρᾶς,
- Εἰς τὰς στήλας 9—11 τὸν νέον ἀριθμὸν στήλης,
- Εἰς τὰς στήλας 13—22 τὸν νέον ὅρον $\alpha_{\sigma\kappa}$ μετὰ τὴν ἀπαλειφὴν [τὸν ὅρον $\alpha_{(\sigma-1)(\kappa-1)}$] καὶ εἰς τὴν στήλην 12 τὸν ἀριθμὸν 0 ἐφ' ὅσον ὁ ὅρος εἶναι ἀρνητικός.
- Εἰς τὰς στήλας 35—44 τὸν πρῶτον νέον ὅρον τῆς σειρᾶς τῆς μήτρας εἰς τὴν ὁποῖαν (σειρὰν) ἀνήκει τὸ δελτίον (ὅρος) δηλαδὴ τὸν νέον ὅρον α_{κ} καὶ εἰς τὴν στήλην 34 τὸν ἀριθμὸν 0 ἐφ' ὅσον ὁ ὅρος εἶναι ἀρνητικός.
- Εἰς τὴν στήλην 45 τὸν ἀριθμὸν 1 (1ον δελτίον—ὅρος τῆς νέας μήτρας) ἂν ἐξετελέσθῃ ἡ βαθμὶς 12 τοῦ προγράμματος διὰ τὸ προηγούμενον διάτρητον δελτίον.

24. Μηδενίζονται πλέον ὅλοι οἱ μνήμονες τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου ἐκτὸς ἐκείνων ποῦ περιέχουν πληροφορίας ποῦ θὰ χρησιμοποιοῦν καὶ εἰς τὰ ἐπόμενα δελτία (ὄρους). Δηλαδὴ μηδενίζονται ὅλοι οἱ μνήμονες ἐκτὸς τῶν ἑξῆς:

- α) Τοῦ μηνήμονος πού περιέχει τὸν ὄρον α_{11} ,
- β) Τοῦ μηνήμονος πού περιέχει τὸν ἀριθμὸν σειρᾶς δελτίου,
- γ) Τοῦ μηνήμονος πού περιέχει τὸν νέον ὄρον α_{1k} τῆς σειρᾶς πού διέρχεται διὰ τῆς μηχανῆς καὶ
- δ) Τοῦ μηνήμονος πού ἐνθυμεῖται τὴν σειρὰν τῶν δελτίων (διάτρητον-λευκὸν κ.λ.π.

25. Τέλος, τὸ πρόγραμμα ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀπόρριψιν τοῦ δελτίου τὸ ὁποῖον πλέον ὡς δελτίον τῆς νέας μήτρας, ἀπορρίπτεται εἰς ἄλλον ὑποδοχέα δελτίων καὶ αὐτομάτως ὁ Ἐγκεφάλος τροφοδοτεῖ νέον δελτίον, τὸ ὁποῖον ἀκολουθεῖ τὸ ἀνωτέρω ἀναλυόμενον πρόγραμμα.

Τὸ ἀνωτέρω πρόγραμμα ἐπαναλαμβάνεται συνεχῶς μέχρις ὅτου ἐξαντληθοῦν ὅλα τὰ δελτία τῆς μήτρας. Μὲ τὸ τέλος τῆς διαδρομῆς ὄλων τῶν δελτίων διὰ τοῦ Ἐγκεφάλου ἔχομεν εἰς τὴν ἐξοδὸν τοῦ δύο σειρᾶς δελτίων:

- α) Τὰ δελτία τῆς ἀρχικῆς μήτρας τὰ ὁποῖα πλέον μᾶς εἶναι ἄχρηστα εἰς τὸν πρῶτον ὑποδοχέα δελτίων ἐξόδου καὶ
- β) Τὰ δελτία τῆς νέας μήτρας πού προκύπτουν μετὰ τὴν ἀπαλειφήν. Εἰς τὸν δεύτερον ὑποδοχέα δελτίων ἐξόδου τοῦ Ἐγκεφάλου. Ἡ μήτρα αὐτὴ ἔχει μίαν σειρὰν καὶ μίαν στήλην ὀλιγωτέραν τῆς προηγουμένης. Τοῦτο δὲ φαίνεται εἰς τὴν πράξιν ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τὰ δελτία τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν πρῶτην σειρὰν καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὴν πρῶτην στήλην τῆς μήτρας παραμένουν λευκά, χωρὶς καμμίαν διάτρησιν καὶ τὰ ἀπορρίπτομεν.

Ὁ ἀνωτέρω περιγραφεῖς εἶναι ὁ πρῶτος «βρόγχος» ἐπιλύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ ἀντιστροφῆς μητρῶν. Πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὸν δεύτερον καὶ τελευταῖον «βρόγχον» δίδεται κατωτέρω σχηματικῶς τὸ πρόγραμμα τοῦ Ἐγκεφάλου Univac 120 πού περιλαμβάνει τὸν πρῶτον «βρόγχον».

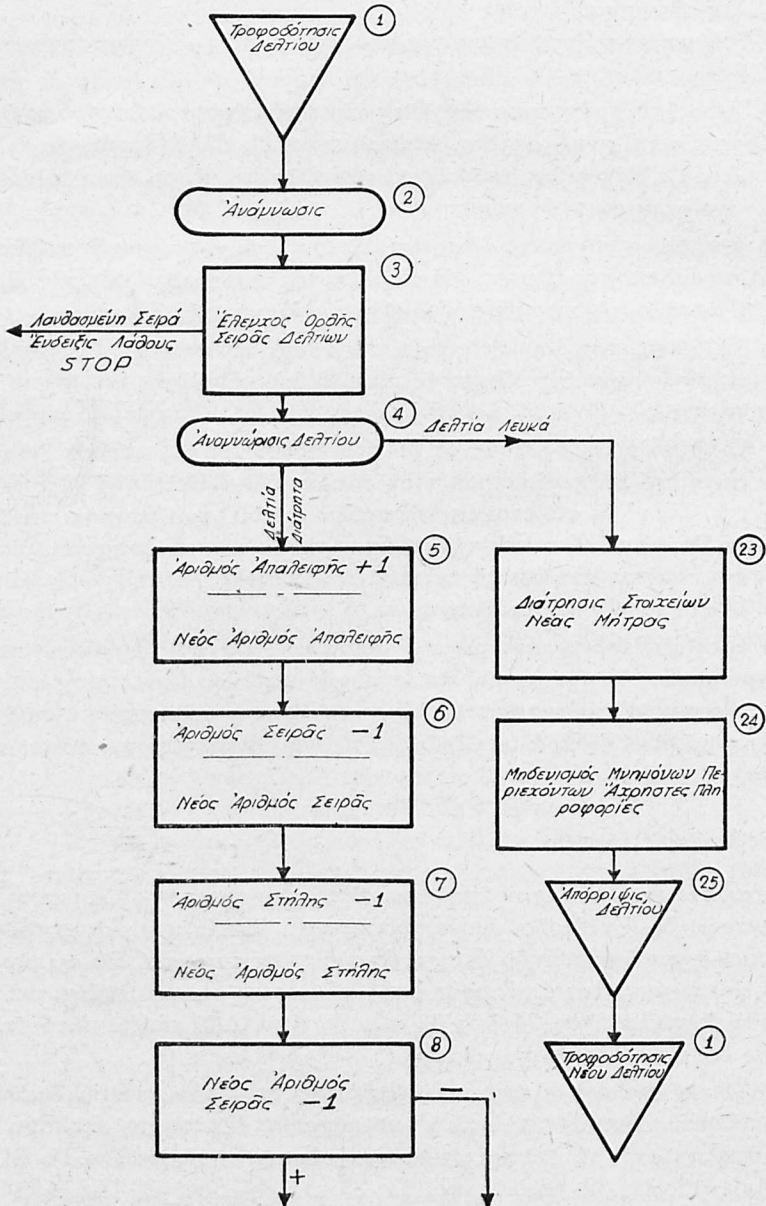
Δεύτερος βρόγχος λύσεως

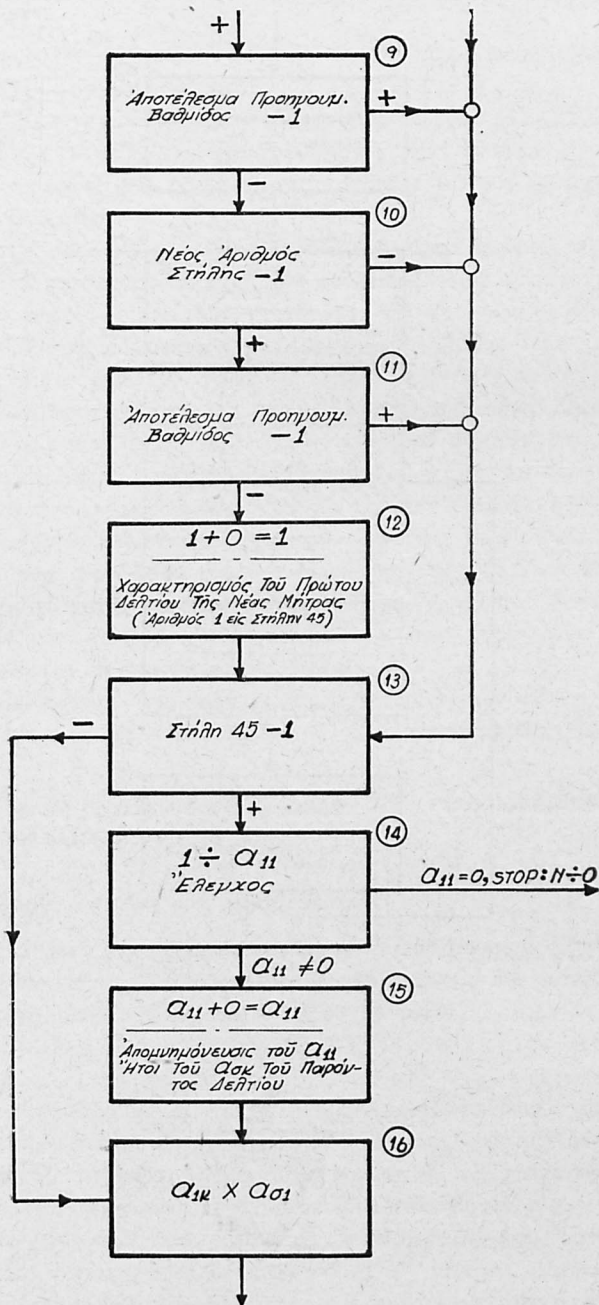
Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ πρώτου «βρόγχου» τοῦ προγράμματος ἀπὸ τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκεφάλον ἔχουν προκύψει τὰ δελτία τῆς νέας μήτρας ἐπὶ τῶν ὁποίων ἔχουν διατρυπηθῆ ὅλα τὰ ἀπαραίτητα στοιχεῖα διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἐπομένην ἀπαλειφήν ἐκτὸς τῶν ὄρων α_{01} πού πρέπει νὰ διατρυπηθοῦν εἰς τὰς στήλας 24 ἕως 33 τῶν δελτίων. Διὰ τοῦτο ἐκτελεῖται ὁ κατωτέρω δεύτερος «βρόγχος», ὡς ἑξῆς:

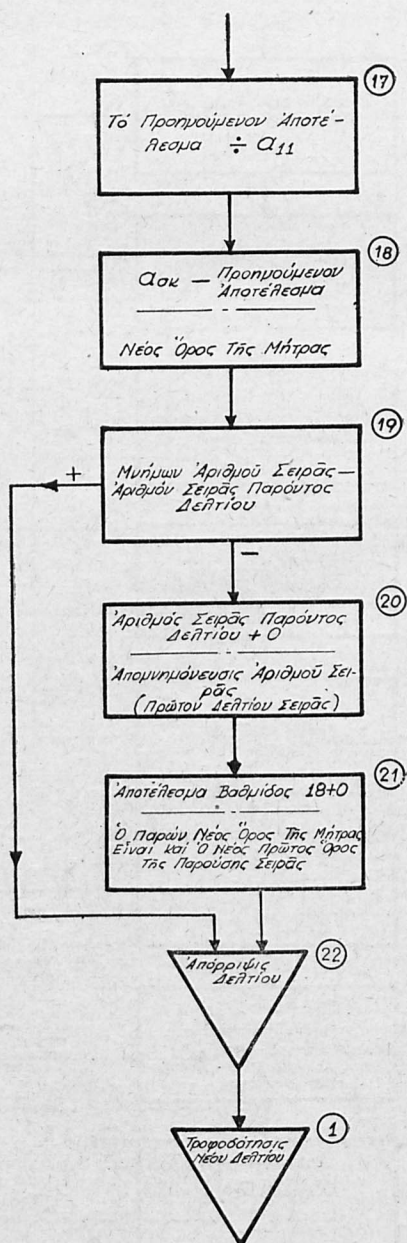
Τὰ δελτία τῆς νέας μήτρας πού προέκυψαν μετὰ τὴν πρῶτην ἀπαλειφήν τροφοδοτοῦνται πλέον εἰς τὴν διαλογικὴν μηχανήν. Ἐκτελεῖται διολογὴ κατ' ἀριθμὸν στήλης ὥστε τὰ δελτία νὰ λάβουν τώρα τὴν διάταξιν: 11, 21, 31, 41, . . . v_1 , 12, 22, 32, 42, . . . v_2 , 13, 23, 33, 43, . . . v_3 , 14, 24, 34, 44, . . . v_4 , 1v, 2v, 3v, 4v, . . . vv.

Μετὰ τὴν διάταξιν αὐτὴν τὰ δελτία τροφοδοτοῦνται ἐκ νέου εἰς τὸν Ἡλεκ-

**Σχηματικόν διάγραμμα προγράμματος UNIVAC 120
διὰ τὸν πρῶτον βρόγχον
τῆς λύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἑξισώσεων καὶ ἀντιστροφῆς μητρῶν**







τρονικόν Ἐγκέφαλον ὁ ὁποῖος ἐκτελεῖ τὸν κατωτέρω δεῦτερον βρόγχον τοῦ προγράμματος.

1. Τροφοδοτεῖ τὸ πρῶτον δελτίον εἰς τὸν θάλαμον ἀναγνώσεως.

2. Ἀναγιγνώσκει τὸ δελτίον.

3. Ἐλέγχει τὴν ὀρθὴν σειρὰν (διαδοχὴν) δελτίων (11, 21, 31, 41 . . . ν1, 12, 22, 32, 42 . . . ν2 κ.λ.π.). Ἐὰν ἡ διαδοχὴ τῶν δελτίων εἶναι λαυθασμένη ὁ Ἐγκέφαλος σταματᾷ καὶ δίδει σχετικὴν ἔνδειξιν λάθους ἂν ὄχι προχωρεῖ εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

4. Ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ μηνήμονος ἀριθμοῦ στήλης τὸν ἀριθμὸν στήλης τοῦ παρόντος δελτίου. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι θετικὸν τὸ παρὸν δελτίον (ὄρος) ἀνήκει εἰς τὴν ἰδίαν στήλην μὲ τὸ προηγούμενον δελτίον (ὄρος) καὶ ἐπομένως τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν βαθμίδα 7 ὅπου διατρυπᾶται ὁ ὄρος $\alpha_{\sigma 1}$ εἰς τὰς στήλας 24—33 καὶ ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 0 εἰς τὴν στήλην 23 ἐφ' ὅσον ὁ $\alpha_{\sigma 1}$ εἶναι ὄρος ἀρνητικὸς. Ἄν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἀρνητικόν, ἔχομεν ἀλλαγὴν στήλης ὅποτε τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

5. Ἀπομνημονεύεται ὁ ἀριθμὸς στήλης τοῦ παρόντος δελτίου εἰς οἰκεῖον μνήμονα καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

6. Ἀπομνημονεύεται ὁ ὄρος $\alpha_{\sigma k}$ τοῦ παρόντος δελτίου εἰς οἰκεῖον μνήμονα. Πρόκειται περὶ τοῦ ὄρου $\alpha_{\sigma 1}$ διὰ ὀλόκληρον τὴν στήλην πού ἀκολουθεῖ.

7. Διατρυπᾶται ὁ ὄρος $\alpha_{\sigma 1}$ εἰς τὰς στήλας 24—33 τοῦ δελτίου καὶ ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 0 εἰς τὴν στήλην 23 ἂν ὁ $\alpha_{\sigma 1}$ εἶναι ὄρος ἀρνητικὸς καὶ τὸ πρόγραμμα συνεχίζεται εἰς τὴν ἐπομένην βαθμίδα.

8. Ἀπορρίπτεται τὸ δελτίον εἰς τὴν ἐξοδὸν καὶ αὐτομάτως τὸ πρόγραμμα ἐπανέρχεται εἰς τὴν βαθμίδα 1 διὰ νὰ τροφοδοτηθῇ τὸ ἐπόμενον δελτίον.

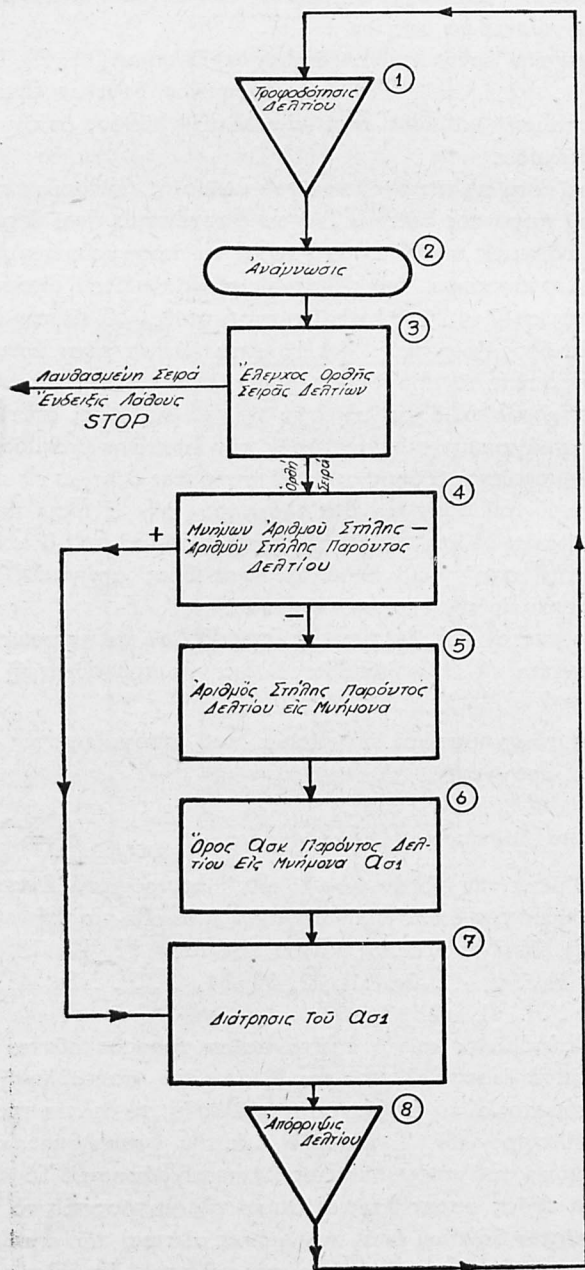
Ἀκολουθεῖ τὸ σχηματικὸν διάγραμμα τοῦ προγράμματος univas 120 διὰ τὸν δεῦτερον βρόγχον.

Γενικὸν κύκλωμα λύσεως τοῦ προβλήματος

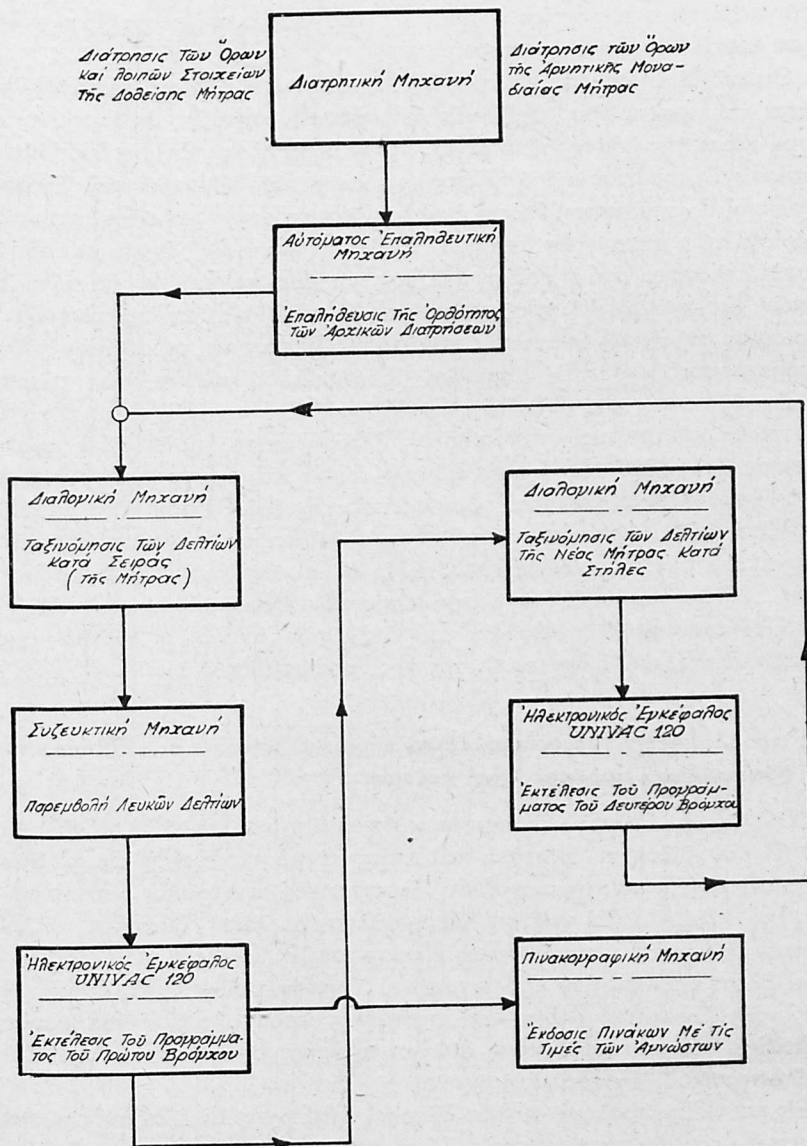
Τὰ δελτία μετὰ τὴν ἐξοδὸν τῶν ἐκ τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου τροφοδοτοῦνται ἐκ νέου εἰς τὴν διαλογικὴν μηχανὴν ἢ ὁποῖα τὰ ταξινομεῖ κατὰ σειρὰν (τῆς μήτρας) ὥστε νὰ λάβουν ἐκ νέου τὴν τάξιν 11, 12, 13, 14, 1ν, 21, 22, 23, 24, 2ν, 31, 32, 33, 34, 3ν, 41, 42, 43, 44, 4ν, ν1, ν2, ν3, ν4 νν.

Μετὰ τὴν αὐτόματον αὐτὴν ἐπεξεργασίαν τροφοδοτοῦνται εἰς τὴν συζευκτικὴν ὥστε μετὰ ἕκαστον διάτρητον δελτίον νὰ παρεμβληθῇ ἓνα λευκόν. Ἀφοῦ καὶ ἡ αὐτόματος αὐτὴ ἐπεξεργασία ἐκτελεσθῇ, τὰ δελτία τροφοδοτοῦνται ἐκ νέου εἰς τὸν Ἡλεκτρονικὸν Ἐγκέφαλον διὰ τὴν ἐπανάληψιν καὶ τῶν δύο ἀνωτέρω «βρόγχων» τοῦ προγράμματος ὡς περιεγράφησαν. Τὸ κύκλωμα αὐτὸ ἐπαναλαμβάνεται τόσας φορές ὅσας αἱ σειραὶ τῆς μήτρας. Εἰς τὸ τέλος προκύπτουν ἐπὶ διατρήτων δελτίων ὅλαι συγχρόνως αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων (βλέπε καὶ διάταξιν 8 εἰς τὸ Α' μέρος τῆς παρουσίης μελέτης). Τὰ δελτία αὐτὰ τροφο-

Σχηματικόν διάγραμμα προγράμματος UNIVAC 120
 διά τόν δεύτερον βρόγchon τῆς λύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἑξισώσεων
 καί ἀντιστροφῆς μητρῶν



Σχηματικὸν διάγραμμα κυκλοφορίας διατρήτων δελτίων διὰ τῶν μηχανῶν κατὰ τὴν λύσιν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ τὴν ἀντίστροφὴν μητρῶν



Σημείωσις : Τὰ δελτία ὁδηγοῦνται εἰς τὴν πινακογραφικὴν μηχανὴν μόνον μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν ἢ διαδρομῶν διὰ τοῦ κλειστοῦ κυκλώματος μηχανῶν : Διαλογικὴ – συζευκτικὴ – Univac – Διαλογικὴ – Univac – Διαλογικὴ κ.ο.κ.

δοτούνται πλέον εις τὴν λογιστικὴν πινακογραφικὴν μηχανήν, ἡ ὁποία ἀποκρυπτογραφεῖ τὰς διατρήσεις καὶ ἐκδίδει πίνακα μετὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Διὰ τὸ ἀπλοποιηθῆναι περισσότερο ἀπὸ φάσεις λύσεως τοῦ προβλήματος δίδεται κατωτέρω τὸ γενικὸν σχηματικὸν διάγραμμα «κυκλοφορίας» τῶν διατρήτων δελτίων διὰ τῶν μηχανῶν.

Θεωρῶ δὲ ἐπάναγκες νὰ τοῖσω ἐδῶ πάλιν ὅτι ἡ ἰδίᾳ διαδικασία λύσεως τηρεῖται καὶ προκειμένου περὶ τῆς ἀντιστροφῆς μητρῶν ὡς ἐτονίσθη εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς μελέτης μετὰ ἐλαφρὰς μόνον μεταβολὰς. Ἐπίσης ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν νὰ μνημονεύσω ὅτι τὰ προγράμματα τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου Univac ποὺ ἐχρησιμοποιήθησαν ἀνωτέρω καὶ ἐπίσης τὸ ὅλον σύστημα «κυκλοφορίας» τῶν διατρήτων δελτίων διὰ τῶν μηχανῶν, ἔχουν συντεθῆ ἔτσι ὥστε νὰ ἀπλουστεύεται ἡ μελέτη διὰ τοὺς μὴ μεμνημένους εἰς τὰ τῶν Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων. Ἡ προσπάθειά μου δὲ αὕτη τῆς ἀπλουστεύσεως ἐγίνετο εἰς ὠρισμένα σημεῖα εἰς βάρος τῆς ταχύτητος λύσεως καὶ μετὰ αὐξήσιν τοῦ χρόνου χρησιμοποίησεως τῶν μηχανῶν. Ἐπιθυμῶ δι' αὐτῶν τῶν τελευταίων γραμμῶν νὰ τοῖσω ὅτι διὰ τὸν Ἐγκέφαλον Univac 120 εἶναι δυνατόν νὰ καταστρωθῆ περισσότερο πολὺπλοκον πρόγραμμα τὸ ὁποῖον δίδει ταχύτεραν καὶ ἐπίσης ἀπλουστέραν διὰ τοὺς εἰδικούς λύσιν, τὸ πρόγραμμα ὅμως τοῦτο θὰ ἦτο δυσκολώτερον νὰ παρακολουθηθῆ εἰς τὴν ἐξέλιξίν του ἀπὸ μὴ εἰδικούς καὶ ἐπειδὴ ἡ μελέτη μου αὕτη ἀπευθύνεται εἰς εὐρύτερον ἀναγνωστικὸν κοινὸν τὸ ἀπέφυγα. Διὰ τῆς ἰδίας δὲ μεθόδου ἀλλὰ μετὰ συνθετώτερον πρόγραμμα τοῦ Univac 120 ὁ γράφων ἐπέτυχε τὴν λύσιν τῶν 2 συστημάτων τῶν 24 γραμμικῶν ἐξισώσεων μετὰ 24 ἀγνώστους τοῦ ΟΛΠ τῶν ὁποίων ἡ διάταξις καὶ αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων δίδονται εἰς τὰς ἐπομένους σελίδας.

Λύσις προβλημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ μητρῶν δι' Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων 2ας καὶ 3ης τάξεως.

Ὁ Univac 120 ποὺ ἐχρησιμοποιήθη διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τοῦ ΟΛΠ ποὺ δίδονται ἀνωτέρω καὶ ἐπίσης ἐχρησιμοποιήθη ὡς τὸ βασικὸν «ἐργαλεῖον» εἰς τὴν μελέτην μας εἶναι Ἡλεκτρονικὸς Ἐγκέφαλος διατρήτων δελτίων (1ης τάξεως). Ἐν τούτοις τὰ προβλήματα αὐτὰ δύναται νὰ λυθοῦν ταχύτερον διὰ τῶν μεγαλυτέρων Ἡλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων (2ας καὶ 3ης τάξεως, βλέπε βιβλίον μου «Ἡλεκτρονικοὶ Ἐγκέφαλοι», Ἀθήναι 1959). Μάλιστα εἰς τοὺς Ἐγκεφάλους 2ας καὶ 3ης τάξεως ὅπου αἱ μνημονικαὶ ἰκανότητες εἶναι πολὺ μεγάλαι σπανίως εἶναι ἀνάγκη νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ ἄλλαι ἐκτὸς τοῦ Ἡλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου μηχαναί.

Εἰς τοὺς Ἐγκεφάλους αὐτοὺς ὅλαι αἱ ἐπεξεργασίαι ἐκτελοῦνται τελείως αὐτομάτως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς μηχανῆς μετὰ τὴν ἐλαχίστην παρεμβολὴν τοῦ ἀνθρωπίνου παράγοντος. Ὅμως τὰ προγράμματα λειτουργίας τῶν Ἡλεκτρονικῶν αὐτῶν Ἐγκεφάλων, εἶναι ἐξόχως πολὺπλοκα καὶ διὰ τὴν κανανόσιν των ἢ ἔστω καὶ τὴν ἀπλήν παρακολουθήσιν των ἀπαιτεῖται ὑψηλοῦ ἐπιπέδου εἰδικεῖσις εἰς τὴν τεχνικὴν προγραμματισμοῦ καὶ χρησιμοποίησός των.

Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ Συστήματος Νο 1

$W_1 = - 1096,36996$	$W_{13} = - 789,43994$
$W_2 = - 529,60354$	$W_{14} = - 214,30165$
$W_3 = - 0 -$	$W_{15} = + 371,20000$
$W_4 = + 719,67477$	$W_{16} = + 958,68916$
$W_5 = + 1259,76336$	$W_{17} = + 1405,01845$
$W_6 = + 1455,39944$	$W_{18} = + 1570,43361$
$W_7 = + 1496,48326$	$W_{19} = + 1605,81591$
$W_8 = + 1313,79397$	$W_{20} = + 1447,99426$
$W_9 = + 817,99987$	$W_{21} = + 1022,55568$
$W_{10} = + 174,25054$	$W_{22} = + 455,54611$
$W_{11} = - 400,59434$	$W_{23} = - 130,04734$
$W_{12} = - 971,91410$	$W_{24} = - 706,30726$

Σημείωσις: Ὡς τιμὴ τῆς σταθερᾶς Β ἐλήφθη τὸ 100.

Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ Συστήματος Νο 2

$W_1 = + 1517,71188$	$W_{13} = + 1608,65293$
$W_2 = + 715,51408$	$W_{14} = + 809,52539$
$W_3 = + - 0 -$	$W_{15} = + 114,29362$
$W_4 = - 468,95040$	$W_{16} = - 397,73968$
$W_5 = - 749,05093$	$W_{17} = - 706,52151$
$W_6 = - 842,72195$	$W_{18} = - 809,42927$
$W_7 = - 830,61135$	$W_{19} = - 799,48487$
$W_8 = - 732,85142$	$W_{20} = - 694,59558$
$W_9 = - 438,74072$	$W_{21} = - 380,35816$
$W_{10} = + 55,75113$	$W_{22} = + 137,58877$
$W_{11} = + 755,31282$	$W_{23} = + 832,53210$
$W_{12} = + 1555,81113$	$W_{24} = + 1631,16696$

Σημείωσις: Ὡς τιμὴ τῆς σταθερᾶς Κ ἐλήφθη τὸ 100.

Οί λόγοι αὐτοί ἐπέβαλον εἰς τὸν γράφοντα νὰ ἀποφύγη τὴν ἀναφορὰν εἰς τὴν μελέτην μας προγράμματος Ἑλεκτρονικῶν Ἐγκεφάλων 2ας καὶ 3ης τάξεως.

Γενικαὶ τινες Παρατηρήσεις

Οἱ τιμαὶ τῶν ὄρων

Διὰ τῆς ἀναλυθείσης μεθόδου δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν οἰασδήποτε τάξεως συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ἰσαριθμούς ἀγνώστους ἢ νὰ ἀντιστρέψωμεν οἰασδήποτε τάξεως μήτραν. Συνιστάται ἐν τούτοις ὅπως πρὶν ἢ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου διαμορφώσωμεν κατὰ τὸ δυνατόν τοὺς ὅρους τῆς μήτρας ὥστε νὰ ἀποφευχθῇ ἡ δημιουργία ὄρων μὲ πλείονα τῶν 10 ψηφίων, ὅση εἶναι ἡ μνημονικὴ ἰκανότης ἐκάστης μονάδος τοῦ μνήμονος τῆς μηχανῆς. Ἐν πάσει ὁμως περιπτώσει καὶ οἱ ἀριθμοὶ μὲ πλείονα τῶν 10 ψηφίων εἶναι δυνατόν νὰ καλυφθοῦν διὰ τῆς καταστρώσεως καὶ τοῦ προσθέτου βοηθητικοῦ προγράμματος.

Ἡ κυρία διαγωνίος τῆς μήτρας

Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἔχει ἐπίσης ἡ ἀρχικὴ διάταξις τῆς κυρίας διαγωνίου τῆς μήτρας πρὶν προχωρήσωμεν εἰς τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου ὡς ἐγράφη ἤδη καὶ ἀνωτέρω. Εἰς τὴν κυρίαν διαγωνίον πρέπει κατὰ τὸ δυνατόν νὰ τίθενται οἱ μεγαλύτεροι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὄροι τῆς μήτρας καὶ εἶναι ὀπωσδήποτε γνωστὸν ὅτι ὀδηγούμεθα εἰς ἀδυναμίαν λύσεως ἐὰν ἔστω καὶ εἰς ὅρος τῆς κυρίας διαγωνίου ἔχει τιμὴν μηδενικὴν.

Ἡ μέθοδος κινητῆς ὑποδιαστολῆς (Floating Decimal)

Εἰς συνθετώτερον πρόγραμμα λύσεως παρομοίων προβλημάτων διὰ τοῦ Univac 120 εἶναι δυνατὴ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῆς κινητῆς ὑποδιαστολῆς τῶν ὄρων (Floating Decimal). Κατὰ τὴν μέθοδον αὐτὴν ὅλοι οἱ ἐντὸς τοῦ Ἑλεκτρονικοῦ Ἐγκεφάλου κυκλοφοροῦντες ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν θέσιν ὑποδιαστολῆς ἀνεξαρτήτως τῆς ἀπολύτου τιμῆς των συνοδεύονται δὲ ἀπὸ δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ 10 διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῆς ἀπολύτου τιμῆς των ὅταν τοῦτο χρειασθῇ.

Π.χ. Οἱ ἀριθμοὶ :

$$123,45 - 12,345 - 1,2345$$

δύναται νὰ γραφοῦν καὶ νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀπὸ τὸν Ἐγκέφαλον ὡς :

$$1,2345 \times 10^2 - 1,2345 \times 10^1 - 1,2345 \times 10^0$$

Ἡ ταχύτης τοῦ Univac 120

Ἡ μεγίστη ταχύτης τροφοδοτήσεως δελτίων διὰ τοῦ Univac 120 εἶναι 9000 δελτία ἀνὰ ὥραν. Ἡ περιγραφείσα ἀνωτέρω μέθοδος ἐκμεταλλεύεται τὴν πλήρη ταχύτητα τῆς μηχανῆς. Ἐν τούτοις ἡ λύσις ἐπιβραδύνεται λόγῳ τῆς συχνῆς παρεμβολῆς τῶν ἄλλων μηχανῶν (διαλογικῆς καὶ συζευκτικῆς) καὶ τοῦ παράγοντος ἀνθρώπου. Διὰ συνθετώτερον πρόγραμμα ὡς ἐκεῖνο ποὺ ὁ γράφων ἐφήρμοσε διὰ τὴν λύσιν τῶν 2 συστημάτων τοῦ ΟΛΠ, ἡ ταχύτης τοῦ Ἐγκεφάλου ἦτο 7500 δελτία ἀνὰ ὥραν. Ἐν τούτοις ἡ λύσις ἦτο ταχύτερα λόγῳ τῆς ἀραιωτέρας παρεμβολῆς ἄλλων μηχανῶν καὶ τοῦ παράγοντος ἀνθρώπου.