ΑΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΑΣ ΣΕΙΡΑΣ

Ὑπὸ Ε. Δ. ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ

Τακτικοῦ Καθηγητοῦ Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς Σχολῆς

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν καὶ ἰδίως κατὰ τὴν γραφικὴν τούτων ἐπισκόπησιν καθίσταται πολλάκις φανερὸν ὅτι αἱ μεταβολαί, ἐν χρόνῳ, τῶν ποσοτικῶν ἐκδηλώσεων ἑνὸς φαινομένου οἰκονομικοῦ ἢ δημογραφικοῦ, παρουσιάζουν ἐναλλασσομένας φάσεις ἄνωθι ἢ κάτωθι τῆς κανονικῆς αὐτοῦ πορείας, ἥτις ὀφείλεται εἰς τὴν αἰωνόβιον τάσιν (trend). Αἱ μεταβολαὶ αὗται, ὅταν πρόκειται διὰ μακροχρονίους παρατηρήσεις, παρουσιάζουν κυματοειδῆ ἢ κυκλικὴν μορφὴν κατὰ τὴν γραφικὴν τούτων ἀπεικόνισιν καὶ καλοῦνται κύκλοι.

Ὡς γνωστόν, ἡ διαδρομὴ ἑνὸς φαινομένου ἐν τῷ χρόνῳ, ἐκφραζομένη διὰ μιᾶς χρονολογικῆς σειρᾶς, εἶναι σύνθετος καὶ πρὸς διευκόλυνσιν τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως τοιαύτης τινὸς σειρᾶς ἔχει γίνει δεκτὸν νὰ θεωρῆται ὡς συνισταμένη τεσσάρων κυρίως κινήσεων, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται συνιστῶσαι τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς. Αἱ κινήσεις αὗται εἶναι ἡ μακροχρόνιος τάσις, ἡ ἐποχικὴ κίνησις, ἡ κυκλικὴ κίνησις καὶ ἡ ἄρρυθμος ἢ διαταρακτικὴ τοιαύτη. Σκοπὸς τῆς παρούσης μελέτης εἶναι ἡ πλήρης στατιστικὴ ἀνάλυσις τῆς κυκλικῆς συνιστώσης[1].

Ἡ σπουδὴ τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων παρουσιάζει δυσχερείας, λόγῳ ἐλλείψεως ρυθμικότητος τούτων, ἥτις εἶναι ἰδιαιτέρως αἰσθητὴ εἰς τὰ οἰκονομικὰ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν διὰ ποσοτικῶν δεδομένων τὰς διαδοχικὰς φάσεις ἀναπτύξεως ἢ κάμψεως τῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος.

Λόγῳ ὅμως τῆς μεγάλης σημασίας τὴν ὁποίαν ἔχουν, κυρίως διὰ τοὺς οἰκονομολόγους, αἱ κυκλικαὶ κινήσεις καὶ αἱ προκαλούμεναι ἑκάστοτε κρίσεις εἰς τὴν οἰκονομικὴν ζωὴν τῶν διαφόρων χωρῶν, οἱ στατιστικοὶ ἔχουν ἀπὸ μακροῦ ἐπιδοθῆ εἰς σοβαρωτάτας ἐρεύνας, αἱ ὁποῖαι ἀποσκοποῦν εἴτε εἰς τὴν ἑρμηνείαν τῆς φύσεως τῶν κινήσεων τούτων, εἴτε ἁπλῶς εἰς τὴν ἐμπειρικὴν περιγραφὴν τοῦ φαινομένου, μὲ ἀντικειμενικὸν σκοπὸν πάντοτε τὴν πρόβλεψιν.

Αἱ συνήθεις μέθοδοι διὰ τὴν σπουδὴν τῶν κυκλικῶν κινήσεων εἶναι: α) Ἡ μέθοδος τῶν καταλοίπων (méthode de résidus), β) Ἡ ἄμεσος μέθοδος, γ) Ἡ μέθοδος τοῦ μέσου κύκλου (Mitchell) καὶ δ) Ἡ ἁρμονικὴ ἀνάλυσις.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ

2. **Περίπτωσις ἐτησίων δεδομένων.**

Ἐπειδὴ τὰ ἐτήσια δεδομένα εἶναι ἀπηλλαγμένα ἐποχικῆς ἐπιδράσεως δύνανται ταῦτα νὰ θεωρηθοῦν ὡς συνιστάμενα μόνον ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς τάσεως (trend), ἀπὸ τὴν κυκλικὴν κύμανσιν καὶ τυχαίαν ἢ ἄρρυθμον τοιαύτην.

1. Βλ. σχετικῶς: E. Morice καὶ F. Chartier: Στατιστικὴ Ἀνάλυσις, σελ. 466-508, Κ. Ἀθανασιάδου: Στατιστική, Μέρος τρίτον, σελ. 142-192, Croxton and Cowden: Ἐφηρμοσμένη Γενικὴ Στατιστική, σελ. 540-571.

Καὶ ἂν τεθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ τρεῖς αὗται συνιστῶσαι εἶναι πολλαπλασιαστικαί, τότε δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν τὸ κάτωθι σχῆμα διὰ τυχοῦσαν τιμὴν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων:

$$D_i = T_i\, C_i \cdot R_i$$

ἔνθα D_i ἡ τιμὴ ἀρχικοῦ δεδομένου χρονολογικῆς σειρᾶς διὰ τὸ ἔτος i, T_i ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς τάσεως, C_i ἡ κυκλικὴ συνιστῶσα καὶ R_i ἡ ἄρρυθμος τοιαύτη. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἂν διαιρέσωμεν διὰ T_i ἡ προηγουμένη σχέσις μᾶς παρέχει:

$$\frac{D_i}{T_i} = C_i \cdot R_i$$

ἤτοι τὴν κυκλικὴν συνιστῶσαν πολλαπλασιασμένην ἐπὶ τὴν ἄρρυθμον τοιαύτην. Ἡ τελευταία αὕτη συνιστῶσα θεωρεῖται κατὰ κανόνα ἀμελητέα.

3. **Περίπτωσις μηνιαίων δεδομένων.**

Ἡ σπουδὴ τῆς κυκλικῆς κυμάνσεως γίνεται κυρίως ἐπὶ μηνιαίων δεδομένων ἐφ' ὅσον ὁ κύκλος δὲν εἶναι πολὺ μακρός. Ἡ περιοδικότης αὕτη τῆς κυκλικῆς κινήσεως προσιδιάζει περισσότερον διότι ἐπιτρέπει τὴν καλυτέραν δυνατὴν παρακολούθησιν τῆς κυμάνσεως, ἰδιαιτέρως εἰς περίοδον οἰκονομικῆς κρίσεως.

Ἡ ὀρθόδοξος, ὅπως ἀποκαλεῖται, αὐτὴ μέθοδος τῶν καταλοίπων δύναται νὰ λάβῃ διαφόρους μορφὰς συμφώνως πρὸς τὰς γινομένας δεκτὰς ὑποθέσεις ὡς πρὸς τὴν φύσιν καὶ τὸν τρόπον καθ' ὃν αἱ συνιστῶσαι συνθέτουν τὰ δεδομένα τῶν παρατηρήσεων. Πάντως, ἡ σημαντικότης τῆς κυκλικῆς κυμάνσεως ἐκφράζεται γενικῶς διὰ τοῦ λόγου:

$$\frac{D_i - T_i}{T_i}$$

τῆς ἀποκλίσεως $D_i - T_i$ τῆς ὀφειλομένης εἰς τὴν κυκλικὴν συνιστῶσαν πρὸς τὴν τιμὴν τῆς τάσεως T_i θεωρουμένης ὡς τῆς κανονικῆς στάθμης τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς.

4. **Ὑπόθεσις πρώτη (συνιστῶσαι πολλαπλασιαστικαί).**

Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν αὐτὴν τὰ ἀρχικὰ μηνιαῖα δεδομένα τὰ ὁποῖα παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον D ἐκφράζονται διὰ τῆς ἀκολούθου σχέσεως:

$$D = T \cdot (1 + C) \cdot (1 + S) \cdot (1 + Z)$$

ἔνθα T ἡ τιμὴ τῆς τάσεως καὶ $(1 + C)$, $(1 + S)$, $(1 + Z)$ πολλαπλασιαστικοὶ συντελεσταί, καθαρῶς ἀριθμητικοί, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ χαρακτηρίζει τὰς κυμάνσεις τῶν δεδομένων D τὰς ὀφειλομένας εἰς τὸν κύκλον, εἰς τὴν ἐποχικότητα καὶ τὰς διαφόρους ἀρρύθμους κινήσεις.

Ἀφοῦ προσδιορισθοῦν αἱ τιμαὶ T τῆς γενικῆς τάσεως, διὰ τῶν ἤδη γνωστῶν μεθόδων, καὶ τῶν ἐποχικῶν συντελεστῶν $1 + S$ λαμβάνομεν τὸ πηλίκον:

$$\frac{D}{T\,(1+S)} = (1+C) \cdot (1 + Z)$$

Λόγῳ ὅμως τῆς ἀσημάντου τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ $(1 + Z)$ δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν:

$$\frac{D}{T\,(1+S)} \simeq 1 + C.$$

Ἐὰν $\frac{D}{1+S} = D'$, τότε ἡ προηγουμένη σχέσις λαμβάνει τὴν ἰσοδύναμον μορφήν :

$$\frac{D'}{T} \simeq 1 + C$$

ἢ
$$\frac{D' - T}{T} = C$$

5. **Ὑπόθεσις δευτέρα (Αἱ τρεῖς συνιστῶσαι ἀνάλογοι πρὸς τὴν τάσιν).**

Βάσει τῆς δευτέρας αὐτῆς ὑποθέσεως ἔχομεν τὴν σχέσιν :

$$D = T\,(1 + C + S + Z)$$

ἔνθα ὁ παράγων $1 + C + S + Z$ εἶναι ἀριθμητικὸς συντελεστὴς τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται καθ' ἕκαστον μῆνα ἀπὸ τὴν κυκλικὴν συνιστῶσαν (C), τὴν ἐποχικὴν κίνησιν (S) καὶ τὴν ἄρρυθμον τοιαύτην (Z).

Κατὰ κανόνα αἱ τιμαὶ C, S καὶ Z εἶναι πολὺ μικραί, τουλάχιστον αἱ δύο τελευταῖαι.

Ἑπομένως τὸ γινόμενον $(1 + C)\,(1 + S)\,(1 + Z)$ τῆς πρώτης ὑποθέσεως, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς $1 + C + S + Z + CZ + CS + SZ + CSZ$, δύναται νὰ ληφθῇ κατὰ μεγίστην προσέγγισιν οὕτω :

$$(1 + C)\,(1 + S)\,(1 + Z) \simeq 1 + C + S + Z + CS + CZ + SZ$$

καὶ ἂν παραλειφθοῦν οἱ τρεῖς τελευταῖοι ὅροι ὡς ποσότητες ἀμεληταῖαι λαμβάνομεν :

$$(1 + C)\,(1 + S)\,(1 + Z) \simeq 1 + C + S + Z$$

ἤτοι καταλήγομεν εἰς τὴν παραδοχὴν ὅτι ὁ συντελεστὴς $1 + C + S + Z$ εἶναι μία προσέγγισις τοῦ θεωρηθέντος κατὰ τὴν πρώτην ὑπόθεσιν :

$$(1 + C)\,(1 + S)\,(1 + Z).$$

Ἡ παραδοχὴ αὕτη προσκρούει εἰς τὴν τιθεμένην κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ συντελεστοῦ $1 + S$ ἀρχὴν ὅτι οὗτος ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐξω-ἐποχικὴν κίνησιν (τάσιν + κύκλον) καὶ οὐχὶ εἰς τὴν τάσιν μόνον. Ἐξ οὗ ἡ δευτέρα αὕτη ὑπόθεσις φαίνεται στερουμένη λογικῆς καὶ μαθηματικῆς αὐστηρότητος ἐνῶ εἰς τὴν πρᾶξιν δὲν παρουσιάζει μεγάλην ἀπόκλισιν.

Μὲ τὰς ἀνωτέρω παραδοχὰς λαμβάνομεν :

$$\frac{D}{T} = 1 + C + S + Z$$

ἢ
$$\frac{D}{T} - (1 + S) = C + Z \simeq C.$$

6. **Ὑπόθεσις τρίτη (συνιστῶσαι ἀθροιστικαί).**

Ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἐκφράζεται μὲ τὴν ἰσότητα :

$$D = T + C + S + Z$$

ἔνθα D τὰ ἀρχικὰ δεδομένα, T μέρος τοῦ D ὀφειλόμενον εἰς τὴν γενικὴν τάσιν, C μέρος τοῦ D ὀφειλόμενον εἰς τὴν κυκλικὴν κύμανσιν, S μέρος τοῦ D ὀφειλόμενον εἰς τὴν ἐποχικὴν κίνησιν καὶ Z ὁμοίως μέρος τοῦ D ὀφειλόμενον εἰς τὰς διαφόρους ἀρρύθμους κινήσεις. Σημειωτέον ὅτι C, S, Z ἐνταῦθα εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως πρὸς τὰ D καὶ T καὶ οὐχὶ ἀριθμητικοὶ συντελεσταὶ ὡς εἰς τὰς δύο προηγουμένας ὑποθέσεις.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως συνάγεται ἡ ἰσότης:

$$\frac{(D-S)-T}{T}=\frac{C+Z}{T}$$

ἥτις ἐκφράζει τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῶν δεδομένων ἅτινα ἀπηλλάγησαν τῆς ἐποχικότητος (D — S) καὶ τῆς τάσεως T ὡς ποσοστὸν τῆς τάσεως. Ἐὰν δὲ Z θεωρηθῇ ποσότης ἀμελητέα, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον σχέσιν:

$$\frac{(D-S)-T}{T}=C$$

ἔνθα τώρα C ἀριθμητικὸς συντελεστής.

7. Σύγκρισις τῶν τριῶν ὑποθέσεων.

Αἱ δύο τελευταῖαι ὑποθέσεις ὁδηγοῦν πρακτικῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον ὡς εἶναι εὔκολον νὰ καταδειχθῇ.

Ἡ πρώτη τῶν ὑποθέσεων μᾶς ἔδωκε τὴν προσεγγιστικὴν ἰσότητα:

$$\frac{D}{T(1+S)}\simeq 1+C$$

ἥτις γράφεται οὕτω:

$$C_1=\frac{D}{T(1+S)}-1 \qquad (1)$$

Ἡ δευτέρα τῶν ὑποθέσεων ὡδήγησεν ὁμοίως εἰς τὴν προσεγγιστικὴν σχέσιν:

$$C_2\simeq\frac{D}{T}-(1+S) \qquad (2)$$

ἔνθα οἱ δεῖκται 1 καὶ 2 ἐτέθησαν ἁπλῶς πρὸς διάκρισιν. Βλέπομεν ὅτι:

$$C_2=C_1\,(1+S) \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (3) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ C_1 καὶ C_2 εἶναι τοσοῦτον ἀσθενεστέρα ὅσον τὸ $1+S$ πλησιάζει τὴν μονάδα.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα [1]:

Δίδονται: $D=18{,}4 \quad T=22{,}246 \quad 1+S=1{,}038$

Τότε:
$$100\,C_1=\frac{18{,}4\times 100}{22{,}246\times 1{,}038}-100=-20{,}3$$

καὶ
$$100\,C_2=100\cdot\frac{18{,}4}{22{,}246}-103{,}8=-21{,}1$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς δευτέρας ὑποθέσεως θὰ συνέπιπτε πρὸς τὸ τοιοῦτο τῆς τρίτης.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ἐφαρμόζεται ἡ πρώτη ὑπόθεσις, θεωρουμένη ὡς λογικωτέρα.

---

1. E. Morice καὶ F. Chartier: Στατιστικὴ Ἀνάλυσις, σελ. 471.

8. **᾿Απάλειψις τῶν ἀρρύθμων ἢ διαταρακτικῶν κινήσεων.**

῾Η ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος τῶν καταλοίπων, ὡς εἶναι φανερόν, ἀφήνει ὡς κατάλοιπον, ἐκτὸς τῆς κυκλικῆς συνιστώσης καὶ ὅλας τὰς συμπτωματικὰς ἢ ἀρρύθμους κινήσεις, αἱ ὁποῖαι κατὰ τὰς τεθείσας ἀνωτέρω ὑποθέσεις θεωροῦνται ἀμελητέαι. Διὰ τὴν ἐξάλειψιν καὶ τῶν κινήσεων τούτων, κατὰ τὸ μέτρον τοῦ δυνατοῦ, ἐξομαλύνουν τὴν σειρὰν τῶν καταλοίπων διὰ τῆς μεθόδου τῶν κινητῶν μέσων.

Συνήθως ἕκαστος μέσος, διὰ τὴν διαμόρφωσιν τῆς τελικῆς σειρᾶς, λαμβάνεται ὡς μέσος τριῶν ἢ πέντε ὅρων τῆς σειρᾶς τῶν καταλοίπων καὶ μάλιστα σταθμικὸς μὲ συντελεστὰς 1, 2, 1 προκειμένου περὶ τριμηνιαίου κινητοῦ μέσου καὶ τοιούτους 1, 2, 4, 2, 1 προκειμένου περὶ κινητοῦ μέσου πέντε διαδοχικῶν μηνῶν.

9. Πολὺ συχνὰ ὁ σκοπὸς τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων εἶναι ἡ σύγκρισις περισσοτέρων σειρῶν. ῾Ο συνηθέστερος πρὸς τοῦτο τρόπος εἶναι νὰ ἀπεικονίσωμεν γραφικῶς τὰς κυκλικὰς κυμάνσεις ἑκάστης σειρᾶς. ῾Η ἀνάγνωσις μιᾶς τοιαύτης γραφικῆς παραστάσεως εἶναι δυσχερὴς ὅταν τὸ εὖρος τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων τῶν σειρῶν εἶναι διάφορον. Πρὸς διευκόλυνσιν τῆς συγκρίσεως χρησιμοποιοῦμεν διαφόρους κλίμακας διὰ τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων. ᾿Εν τούτοις καὶ μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν δημιουργεῖται δυσχέρεια εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν γραφικῶν παραστάσεων ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν σειρῶν εἶναι μέγας.

Οὕτω κρίνεται ἱκανοποιητικωτέρα ἡ ἀναγωγὴ ἑκάστης σειρᾶς κυκλικῶν κυμάνσεων εἰς ποσοστὰ τῆς μέσης ἀποκλίσεως τετραγώνου αὐτῆς. ῾Η ἀπόκλισις αὕτη ἐκφράζεται ὡς γνωστόν, διὰ τῆς σχέσεως :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma c^2}{n} - \left(\frac{\Sigma c}{n}\right)^2}$$

καὶ τὰ ἑκατοστιαῖα ποσοστὰ παρέχονται πλέον διὰ τῆς σχέσεως :

$$c' = \frac{100\,c}{\sigma}$$

῾Η ἀνωτέρω περιγραφεῖσα μέθοδος τῶν καταλοίπων, παρὰ τοὺς μακροὺς ὑπολογισμοὺς τοὺς ὁποίους ἀπαιτεῖ, τυγχάνει σχεδὸν γενικῆς ἐφαρμογῆς λόγῳ τῆς ἁπλότητός της.

10. **᾿Εφαρμογή.**

Κατωτέρω παρέχομεν πίνακας ὑπολογισμῶν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐποχικῶν συντελεστῶν ἐπὶ τῶν δεδομένων τῆς κυκλοφορίας τραπεζογραμματίων ἀπὸ ᾿Ιανουαρίου 1952 μέχρι Σεπτεμβρίου 1958, τῆς τάσεως καὶ τῆς κυκλικῆς συνιστώσης ἐπὶ τῇ βάσει τῆς πρώτης ὑποθέσεως (συνιστῶσαι πολλαπλασιαστικαί).

ΠΙΝΑΞ I

Προσδιορισμὸς ἐποχικότητος κυκλοφορίας Τραπεζογραμματίων

(Μέθοδος τῶν κινητῶν μέσων. Περίοδος Ἰαν. 1952—Σεπτ. 1958)

Ἔτος i=(1,2,..ν)	Μὴν κ=(1,2...12)	Ἀρχικὰ δεδομένα εἰς ἑκατ. Φικ (1)	Ἄθροισμα 12 διαδοχικῶν μηνῶν (2)	Ὁλικὸν δύο διαδοχικῶν ἀθροισμάτων (3)	Κινητὸς μέσος $\bar{Φ}ικ$ (4)	Λόγοι $100\frac{Φικ}{\bar{Φ}ικ}$ (5)
i=1	1952 1	1.972				
	2	1.061				
	3	1.901				
	4	2.022				
	5	1.985				
	6	1.945				
	7	2.042	25.171	52.736	2.114	97
	8	2.182	25.565	51.510	2.146	102
	9	2.246	25.945	52.403	2.183	103
	10	2.216	26.458	53.370	2.224	100
	11	2.223	26.912	54.192	2.258	98
	12	2.476	27.280	54.943	2.289	108
i=2	1953 1	2.236	27.663	55.820	2.326	102
	1	2.341	28.157	56.901	2.371	99
	3	2.414	28.744	58.213	2.426	100
	4	2.476	29.469	59.863	2.494	99
	5	2.353	30.394	61.738	2.572	91
	6	2.328	31.344	63.715	2.655	88
	7	2.536	32.371	65.701	2.738	93
	8	2.769	33.330	67.493	2.812	98
	9	2.971	34.163	69.063	2.878	103
	10	3.141	34.900	70.767	2.949	106
	11	3.173	35.867	72.647	3.027	105
	12	3.503	36.780	74.504	3.104	115
i=3	1954 1	3.325	37.724	76.288	3.179	105
	2	3.174	38.564	78.827	3.284	97
	3	3.151	39.263	79.167	3.299	96
	4	3.443	39.904	80.249	3.344	103
	5	3.266	40.345	80.966	3.374	97
	6	3.272	40.621	81.627	3.401	96
	7	3.376	41.006	82.397	3.433	98
	8	3.468	41.391	83.309	3.471	100
	9	3.612	41.918	84.458	3.519	103
	10	3.582	42.540	85.682	3.570	100
	11	3.449	43.142	86.884	3.620	95
	12	3.888	43.742	88.098	3.671	106
i=4	1955 1	3.710	44.356	89.303	3.721	100
	2	3.701	44.947	90.556	3.773	98
	3	3.773	45.609	91.879	3.828	99

Ἔτος i=(1,2...ν)	Μὴν κ=(1,2...12)	Ἀρχικὰ δεδομένα εἰς ἑκατ. Φικ (1)	Ἄθροισμα 12 διαδοχικῶν μηνῶν (2)	Ὁλικὸν δύο διαδοχικῶν ἀθροισμάτων (3)	Κινητὸς μέσος Φικ (4)	Λόγοι $100\frac{Φικ}{Φικ}$ (5)
	4	4.045	46.270	93.432	3.893	104
	5	3.866	47.162	95.328	3.972	97
	6	3.886	48.166	97.395	4.058	96
	7	3.967	49.229	99.569	4.149	96
	8	4.130	50.340	101.920	4.247	97
	9	4.273	51.580	104.386	4.349	98
	10	4.474	52.806	106.896	4.454	100
	11	4.453	54.090	109.638	4.568	97
	12	4.951	55.548	112.556	4.690	106
i=5	1956 1	4.821	57.008	115.315	4.805	100
	2	4.941	58.307	117.816	4.909	101
	3	4.999	59.509	120.279	5.012	100
	4	5.329	60.770	122.533	5.106	104
	5	5.324	61.763	124.523	5.188	103
	6	5.346	62.760	126.719	5.280	101
	7	5.266	63.959	128.675	5.361	98
	8	5.332	64.716	130.015	5.417	98
	9	5.534	65.299	131.269	5.469	101
	10	5.467	65.970	132.778	5.532	99
	11	5.450	66.808	134.191	5.591	97
	12	6.150	67.383	135.244	5.635	109
i=6	1957 1	5.578	67.861	136.468	5.686	98
	2	5.524	68.607	138.210	5.758	96
	3	5.670	69.603	140.283	5.842	97
	4	6.167	70.680	142.616	5.942	104
	5	5.899	71.936	145.023	6.043	97
	6	5.824	73.087	147.154	6.131	95
	7	6.012	74.067	149.253	6.219	97
	8	6.328	75.186	151.477	6.311	100
	9	6.611	76.291	153.778	6.407	103
	10	6.723	77.487	155.929	6.497	103
	11	6.601	78.442	155.929	6.586	100
	12	7.130	79.617	160.356	6.681	107
i=7	1958 1	6.700	80.739	162.878	6.786	99
	2	6.629	82.139	165.492	6.895	96
	3	6.866	83.353	167.687	6.987	98
	4	7.122	84.334			
	5	7.074				
	6	6.946				
	7	7.412				
	8	7.542				
	9	7.592				

ΠΙΝΑΞ II

Συντελεσταὶ ἐποχικῆς μεταβολῆς κυκλοφορίας τραπεζογραμματίων

(Μέθοδος τῶν κινητῶν μέσων. Περίοδος 'Ιαν. 1952—Σεπτ. 1958)

Μῆνες	Δεδομένα μηνιαῖα εἰς ἑκατοστὰ τοῦ ἀντιστοίχου κινητοῦ μέσου.								Μέσοι	Διορθωμένοι ἐποχικοὶ συντελεσταὶ	'Αποκλ. ἀπὸ τὸν μέσον ἐτήσιον
	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	Σύνολον			
'Ιανουάριος	—	102	(105)	100	100	98	99	499	99,8	100,0	0
Φεβρουάριος	—	99	97	98	101	96	96	583	97,1	97,3	—2,7
Μάρτιος	—	100	96	99	100	97	98	590	98,4	98,6	—1,4
'Απρίλιος	—	99	103	104	104	104		514	102,8	103,1	—3,1
Μάϊος	—	(91)	97	97	103	97		394	98,5	98,8	—1,2
'Ιούνιος	—	(88)	96	96	101	95		388	97,0	97,2	—2,8
'Ιούλιος	97	93	98	96	98	97		579	96,5	96,7	—3,3
Αὔγουστος	102	98	100	97	98	100		595	99,2	99,5	—0,5
Σεπτέμβριος	103	103	103	98	101	103		611	101,8	102,1	—2,1
'Οκτώβριος	100	(106)	100	100	99	103		502	100,4	100,7	—0,7
Νοέμβριος	98	(105)	95	97	97	100		487	97,4	97,6	—2,4
Δεκέμβριος	108	113	106	106	109	107		649	108,1	108,4	—8,4
									1.197,0	1.200	0

Σημ. Αἱ ἐντὸς παρενθέσεων τιμαὶ κριθεῖσαι ὡς ἐξόχως ἀνώμαλοι, διαγράφονται.

ΠΙΝΑΞ III

Ἀνάλυσις χρονολογικῆς σειρᾶς τραπεζογραμματίων

(Περίοδος Ἰανουάριος 1952—Σεπτέμβριος 1958)

(Στῆλαι 1, 3 καὶ 4 εἰς ἑκατ. δρχ.)

Ἔτος	Μὴν	Ἀρχικὰ δεδομένα D=T.S.C.R. (1)	Ἐποχικοὶ Συντελεσταὶ (2)	Δεδομένα ἀπηλλαγμ. ἐποχικότ. $D=100\frac{T.S.C.R.}{S}$ (3)	Τιμαὶ TREND T (4)	Κυκλικότης καὶ ἄρρυθμος κίνησις $C.R.=\frac{T.C.R.}{T}$ (5)	Ἀθροίσματα τριῶν διαδοχικῶν δεδομένων (6)	Κυκλικὴ συνιστῶσα C (7)
1952=1	1	1.972	100,0	1.972	1.505	1,310		
	2	1.961	97,3	2.015	1.576	1,278	3.758	1,253
	3	1.901	98,6	1.928	1.647	1,170	3.589	1,196
	4	2.022	103,1	1.961	1.718	1,141	3.434	1,145
	5	1.985	98,8	2.009	1.789	1,123	3.340	1,113
	6	1.945	97,2	2.001	1.860	1,076	3.293	1,098
	7	2.042	96,7	2.112	1.931	1,094	3.265	1,088
	8	2.182	99,5	2.193	2.002	1,095	3.250	1,083
	9	2.246	102,1	2.200	2.073	1,061	3.192	1,064
	10	2.216	100,7	2.201	2.144	1,026	3.115	1,038
	11	2.223	97,6	2.277	2.215	1,028	3.053	1,018
	12	2.476	108,4	2.284	2.286	0,999	3.031	1,010
1953=2	1	2.336	100,0	2.366	2.357	1,004	2.994	0,998
	2	2.341	97,3	2.406	2.428	0,991	2.974	0,991
	3	2.414	98,6	2.448	2.499	0,979	2.904	0,968
	4	2.476	103,1	2.402	2.570	0,934	2.815	0,938
	5	2.353	98,8	2.382	2.641	0,902	2.719	0,906
	6	2.328	97,2	2.395	2.712	0,883	2.727	0,909
	7	2.536	96,7	2.623	2.783	0,942	2.800	0,933
	8	2.769	99,5	2.783	2.854	0,975	2.912	0,971
	9	2.971	102,1	2.910	2.925	0,995	3.011	1,004
	10	3.141	100,7	3.119	2.996	1,041	3.096	1,032
	11	3.173	97,6	3.251	3.067	1,060	3.130	1,043
	12	3.503	108,4	3.231	3.138	1,029	3.125	1,042
1954=3	1	3.325	100,0	3.325	3.209	1,036	3.059	1,019
	2	3.174	97,3	3.262	3.280	0,994	2.984	0,995
	3	3.151	98,6	3.196	3.351	0,954	2.924	0,975
	4	3.443	103,1	3.339	3.422	0,976	2.876	0,959
	5	3.266	98,8	3.305	3.493	0,946	2.866	0,955
	6	3.272	97,2	3.366	3.564	0,944	2.850	0,950
	7	3.376	96,7	3.491	3.635	0,960	2.844	0,948
	8	3.468	99,5	3.485	3.706	0,940	2.837	0,946
	9	3.612	102,1	3.538	3.777	0,937	2.801	0,934
	10	3.582	100,7	3.557	3.848	0,924	2.763	0,921
	11	3.449	97,6	3.534	3.919	0,902	2.725	0,908
	12	3.888	108,4	3.587	3.990	0,899	2.714	0,905
1955=4	1	3.710	100,0	3.710	4.061	0,913	2.733	0,911
	2	3.701	97,3	3.804	4.132	0,921	2.744	0,915
	3	3.773	98,6	3.827	4.203	0,910	2.749	0,916

Ἔτος	Μὴν	Ἀρχικὰ δεδομένα D=T.S.C.R. (1)	Ἐποχικοὶ Συντελεσταὶ (2)	Δεδομένα ἀπηλλαγμ. ἐποχικότ. $D=100\frac{T.S.C.R.}{S}$ (3)	Τιμαὶ TREND T (4)	Κυκλικότης καὶ ἄρρυθμος κίνησις $C.R.=\frac{T.C.R.}{T}$ (5)	Ἀθροίσματα τριῶν διαδοχικῶν δεδομένων (6)	Κυκλικὴ συνιστῶσα C (7)
	4	4.045	103,1	3.923	4.274	0,918	2,728	0,909
	5	3.866	98,8	3.913	4.345	0,900	2,723	0,908
	6	3.886	97,2	3.998	4.416	0,905	2,719	0,906
	7	3.967	96,7	4.102	4.487	0,914	2,730	0,910
	8	4.130	99,5	4.151	4.558	0,911	2,729	0,909
	9	4.273	102,1	4.185	4.629	0,904	2,750	0,917
	10	4.474	100,7	4.443	4.700	0,945	2,805	0,935
	11	4.453	97,6	4.562	4.771	0,956	2,844	0,948
	12	4.951	108,4	4.567	4.842	0,943	2,880	0,960
1956=5	1	4.821	100,0	4.821	4.913	0,981	2,943	0,981
	2	4.941	97,3	5.078	4.984	1,019	3,003	1,001
	3	4.999	98,6	5.070	5.055	1,003	3,030	1,010
	4	5.329	103,1	5.169	5.126	1,008	3,048	1,016
	5	5.324	98,8	5.389	5.197	1,037	3,089	1,029
	6	5.346	97,2	5.500	5.268	1,044	3,101	1,034
	7	5.266	96,7	5.446	5.339	1,020	3,054	1,018
	8	5.332	99,5	5.359	5.410	0,990	2,999	0,999
	9	5.534	102,1	5.420	5.481	0,989	2,957	0,986
	10	5.467	100,7	5.429	5.552	0,978	2,960	0,987
	11	5.450	97,6	5.584	5.623	0,993	2,967	0,989
	12	6.150	108,4	5.673	5.694	0,996	2,956	0,985
1957=6	1	5.578	100,0	5.578	5.765	0,967	2,936	0,979
	2	5.524	97,3	5.677	5.836	0,973	2,913	0,971
	3	5.670	98,6	5.750	5.907	0,973	2,947	0,982
	4	6.167	103,1	5.982	5.978	1,001	2,961	0,987
	5	5.899	98,8	5.971	6.049	0,987	2,967	0,989
	6	5.824	97,2	5.992	6.120	0,979	2,970	0,990
	7	6.012	96,7	6.217	6.191	1,004	2,998	0,999
	8	6.328	99,5	6.360	6.262	1,015	3,041	1,014
	9	6.611	102,1	6.475	6.333	1,022	3,079	1,026
	10	6.723	100,7	6.676	6.404	1,042	3,108	1,036
	11	6.601	97,6	6.763	6.475	1,044	3,091	1,030
	12	7.130	108,4	6.577	6.546	1,005	3,061	1,020
1958=7	1	6.700	100,0	6.700	6.617	1,012	3,035	1,012
	2	6.629	97,3	6.813	6.688	1,018	3,060	1,020
	3	6.866	98,6	6.963	6.759	1,030	3,059	1,019
	4	7.122	103,1	6.908	6.830	1,011	3,078	1,026
	5	7.074	98,8	7.160	6.901	1,037	3,073	1,024
	6	6.946	97,2	7.146	6.972	1,025	3,150	1,050
	7	7.412	96,7	7.665	7.043	1,088	3,178	1,059
	8	7.542	99,5	7.580	7.114	1,065	3,188	1,061
	9	7.592	102,1	7.436	7.185	1,035		

ΠΙΝΑΞ IV.

Προσδιορισμὸς τάσεως τῆς κυκλοφορίας τῶν τραπεζογραμματίων

(Μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων) (Y καὶ Yt εἰς ἑκατ.)

Ἔτη	Κυκλοφ. Τρπ/τίων Μέσα ἐτήσια Y	t	t^2	Yt	
1952	2.097,6	—3	9	— 6.292,8	
1953	2.697,6	—2	4	— 5.395,2	
1954	3.417,1	—1	1	— 3.417,1	—15.105,1
1955	4.102,4	0	0		
1956	5.330,0	1	1	÷ 5.330,0	
1957	6.172,2	2	4	÷12.344.4	
1958	7.098,1 *	3	9	÷21.294,3	÷38.968,7
	$\Sigma y = 30.915$	$\Sigma t = 0$ $\bar{t} = 0$	$\Sigma t^2 = 28$	$\Sigma yt = 23.863,6$	

* Βάσει στοιχείων ἐννεαμήνου.

α) $Y = a + bt$ (1) $b = \frac{\Sigma yt}{\Sigma t^2}$ $b = \frac{23.863,6}{28}$ $b = 852,2$

$a = \bar{y} - b\bar{t}$ ἀλλὰ $\bar{t} = 0$ καὶ $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n}$ ὁπότε

$a = \frac{\Sigma y}{n}$ $a = \frac{30.915}{7}$ $a = 4.416,4$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

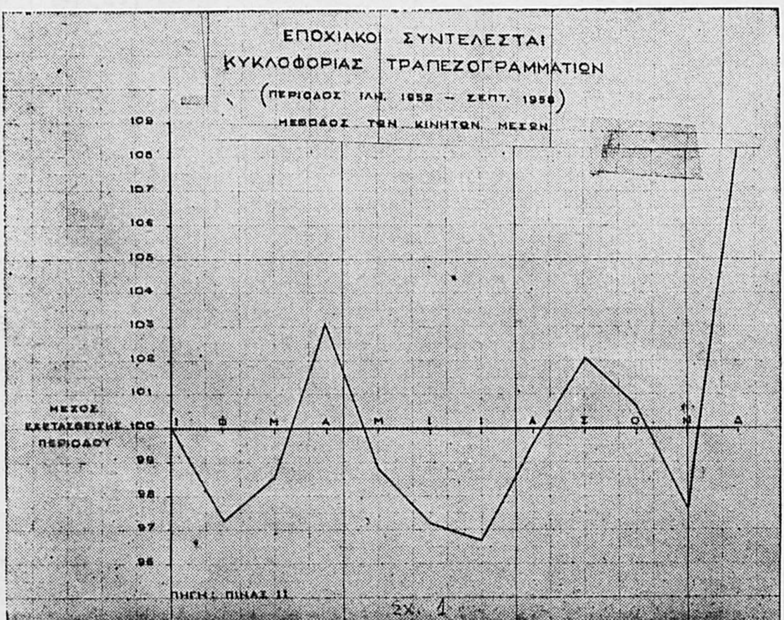
$Y = 4.416,5 + 852t$ t εἰς ἔτη t = 0 τὴν 30 Ἰουνίου 1955

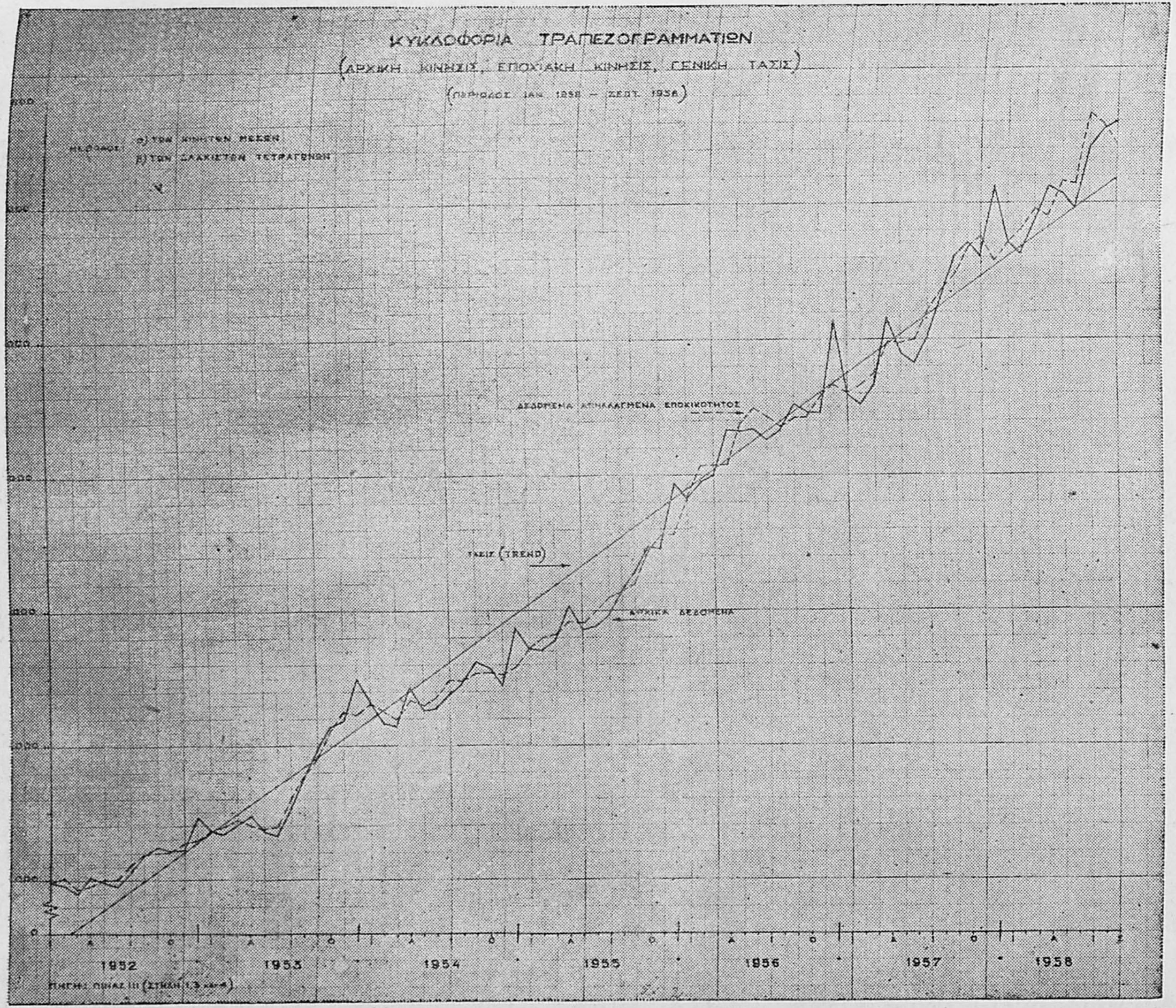
β) $\Psi = \alpha + \beta t$ (2) ὅπου $\beta = \frac{b}{12}$ $\beta = \frac{852}{12}$ $\beta = 71$

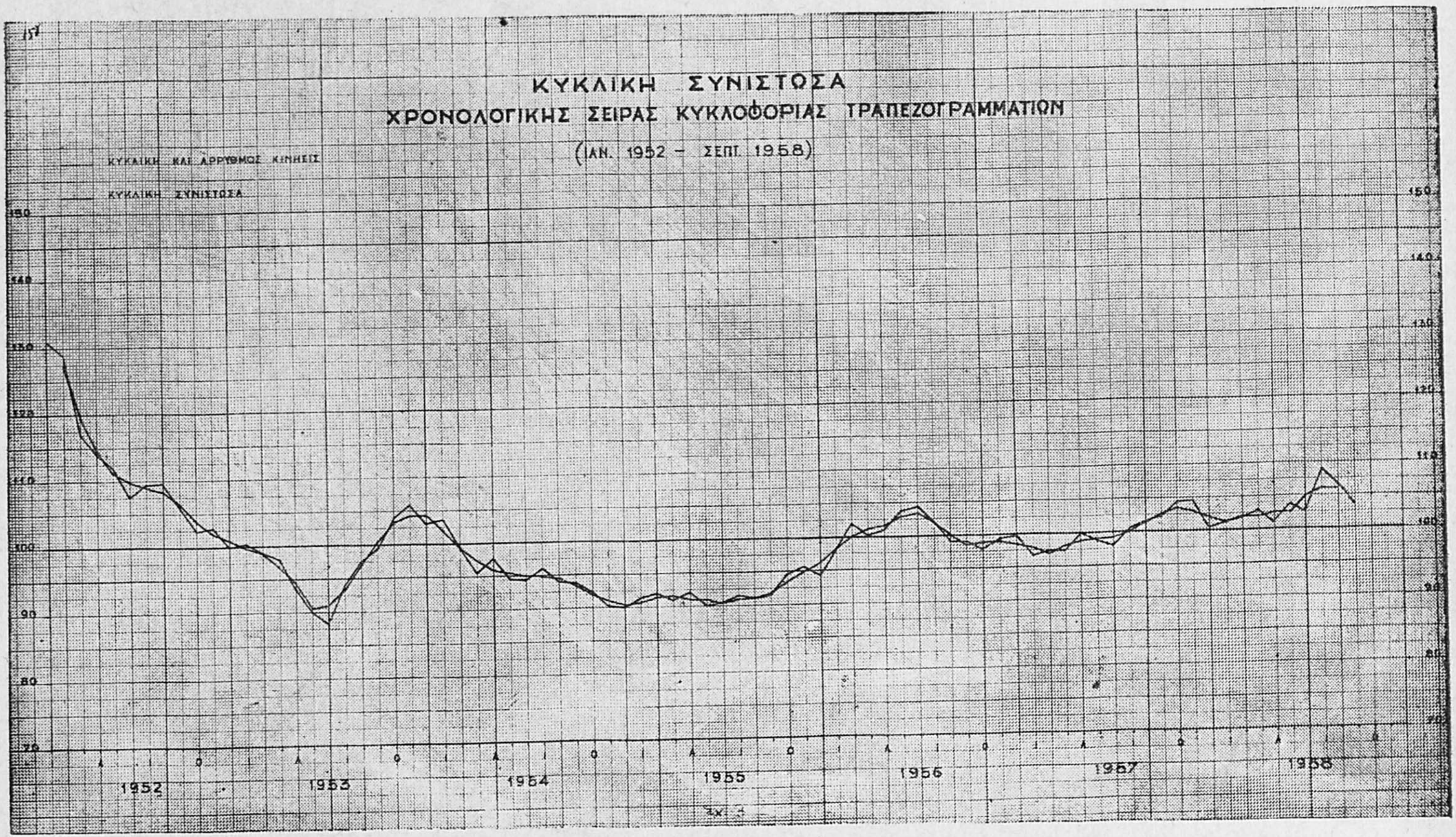
καὶ $\alpha = a = 4.416,4$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται.

$\Psi = 4.416,4 + 71t$ t εἰς μῆνας t = 0 τὴν 30 Ἰουνίου 1955




ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ ΤΡΑΠΕΖΟΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ
(ΑΡΧΙΚΗ ΚΙΝΗΣΙΣ, ΕΠΟΧΙΑΚΗ ΚΙΝΗΣΙΣ, ΓΕΝΙΚΗ ΤΑΣΙΣ)
ΜΕΘΟΔΟΙ: α) ΤΩΝ ΚΙΝΗΤΩΝ ΜΕΣΩΝ
β) ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ
ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΑΠΗΛΛΑΓΜΕΝΑ ΕΠΟΧΙΚΟΤΗΤΟΣ
ΤΑΣΙΣ (TREND)
ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ
0
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958


ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ
ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΤΡΑΠΕΖΟΓΡΑΜΜΑΤΙΩΝ
(ΙΑΝ. 1952 – ΣΕΠΤ. 1958)
ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΡΥΘΜΟΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ
ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑ
150
140
130
120
110
100
90
80
70
1952
1953
1954
1955
1956
1957
1958

Σχ. 3.

Η ΑΜΕΣΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ

11. Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην τὰ μὴ ἐξομαλυνθέντα δεδομένα τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς ἀπεικονίζονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ διαγράμματος καὶ κατὰ τρόπον ὥστε ἕκαστον ἔτος νὰ ὑπέρκειται τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ. Ὅταν ὅμως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν εἶναι σημαντικὸς μία τοιαύτη γραφικὴ παράστασις τῶν δεδομένων δημιουργεῖ σύγχυσιν καὶ καθιστᾷ λίαν ἀσαφῆ τὴν τάσιν. Ἀντιθέτως ἡ ἐποχικὴ κίνησις εἶναι σαφεστάτη. Ὁπωσδήποτε τὸ γραφικὸν διάγραμμα μᾶς παρέχει μίαν ἁδρὰν ἰδέαν τῶν κύκλων διὰ τῆς συγκρίσεως τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς κλίσεως οἱασδήποτε καμπύλης πρὸς τὰ τοιαῦτα τῆς προηγουμένης καὶ ἑπομένης κατὰ δεδομένην χρονικὴν περίοδον.

Πρὸς βελτίωσιν τῆς ἀμέσου μεθόδου ἀκολουθεῖται ἡ ἑξῆς διαδικασία:

Ἡ τιμὴ τῶν δεδομένων ἑκάστου μηνὸς ἐκφράζεται ὡς ποσοστὸν τῶν δεδομένων τοῦ ἀντιστοίχου μηνὸς εἰς τὸ προηγούμενον ἔτος (Ἰανουαρίου πρὸς Ἰανουάριον, Φεβρουαρίου πρὸς Φεβρουάριον κ.ο.κ.). Ἡ διαδικασία αὕτη ἐξαλείφει τὴν ἐποχικὴν μεταβολὴν καὶ τὴν γενικὴν τάσιν, ἂν καὶ τὸ γενικὸν ἐπίπεδον τῶν ποσοστῶν θὰ εἶναι ἄνω τοῦ 100, ἐφ' ὅσον ἡ τάσις εἶναι αὔξουσα, καὶ κάτω τοῦ 100 ἂν ἡ τάσις εἶναι φθίνουσα. Οἱ κύκλοι καθίστανται οὕτω σαφῶς ἀνάγλυφοι ἀλλ' ἀντιπροσωπεύουν τὰς κυκλικὰς μεταβολὰς καὶ οὐχὶ τὸ κυκλικὸν ἐπίπεδον. Δὲν εἶναι δηλαδὴ κυμάνσεις τοῦ αὐτοῦ εἴδους πρὸς ἐκείνας μὲ τὰς ὁποίας εἴμεθα ἐξοικειωμένοι. Ἡ ἑρμηνεία των ἀπαιτεῖ μεγάλην προσπάθειαν καὶ διὰ τοῦτο ἀποβαίνει ἡ ὅλη μέθοδος ἀμφιβόλου χρησιμότητος.

Μία παραλλαγὴ τῆς μεθόδου ταύτης, ἡ ὁποία παρέχει βελτιωμένα ἀποτελέσματα, εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

Ἐκφράζομεν τὰ δεδομένα ἑνὸς μηνὸς ὡς ποσοστὸν τοῦ μέσου ὅρου τῶν δεδομένων τοῦ ἀντιστοίχου μηνὸς δι' ἀριθμόν τινα προηγουμένων ἐτῶν. Ὁ μέσος τριῶν ἐτῶν κρίνεται συνήθως ἐπαρκής. Ἡ κυρία πιθανῶς ἀντίρρησις κατὰ τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ὅτι οἱ κύκλοι δὲν εἶναι ὁμοιόμορφοι εἰς διάρκειαν ἢ εὐρύτητα καὶ ὅτι ἐπὶ πλέον προκύπτει σοβαρὰ διαστροφὴ τῶν δεδομένων.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΥΚΛΟΥ (MITCHELL)

12. Ὁ Wesley C. Mitchell μελετῶν τὰς κυκλικὰς κυμάνσεις τῆς ἐπιχειρηματικῆς ἐν γένει δραστηριότητος κατέληξεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι οἱ διάφοροι κύκλοι μιᾶς ὡρισμένης χρονολογικῆς σειρᾶς εἶναι ἐπαρκῶς ὅμοιοι διὰ νὰ δικαιολογήσουν τὴν λῆψιν μέσου ὅρου αὐτῶν καὶ νὰ προκύψουν μετρήσεις πρὸς διαπίστωσιν τῆς συμπεριφορᾶς τῶν σειρῶν κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς ἐντάσεως καὶ ὑφέσεως τῆς οἰκονομικῆς δραστηριότητος ἔτι δὲ νὰ συγκριθοῦν τὰ ἐξαγόμενα διὰ περισσοτέρας σειράς.

Πρὸς μελέτην τοῦ κύκλου ὁ Mitchell ἐργάζεται κατ' ἀρχὴν ἐπὶ δεδομένων ἀπηλλαγμένων τῆς ἐποχικότητος οὐχὶ ὅμως καὶ τῆς αἰωνοβίου τάσεως. Ἡ τάσις ἐξαλείφεται ἀκολούθως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστου κύκλου.

Τὸ πρῶτον βῆμα διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου εἶναι ἡ ἐκλογὴ τῶν λεγομένων χρονολογιῶν παραπομπῆς, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ χρονολογίαι ἐξάρσεως καὶ ταπεινώσεως τῶν κυκλικῶν κυμάνσεων τῆς καθόλου οἰκονομικῆς δραστηριότητος καὶ αἱ ὁποῖαι καθίστανται ἐμφανεῖς ἐκ τῆς γραφικῆς ἀπεικονίσεως τῶν δεδομένων τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς, μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῆς ἐποχικότητος.

Μετὰ ταῦτα τὰ ἐξομαλυνθέντα ἐποχικῶς δεδομένα διαιροῦνται εἰς τμήματα κύκλων παραπομπῆς. Τὰ τμήματα ταῦτα ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰ διαστήματα μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ταπεινώσεων. Δι' ἕκαστον τμῆμα αἱ μηνιαῖαι τιμαὶ ἐκφράζονται ὡς ποσοστὰ τοῦ μέσου ὅρου ὅλων τῶν τιμῶν τοῦ τμήματος.

13. Διὰ τοὺς διαδοχικοὺς κύκλους ὁ Mitchell διακρίνει τὰς ἀκολούθους φάσεις :

Μὴν ἀρχικῆς ἐξάρσεως : Ὁ πρῶτος τοῦ κύκλου, ὅστις ἀκολουθεῖ ἀμέσως τὸν τελευταῖον μῆνα τοῦ προηγουμένου κύκλου.

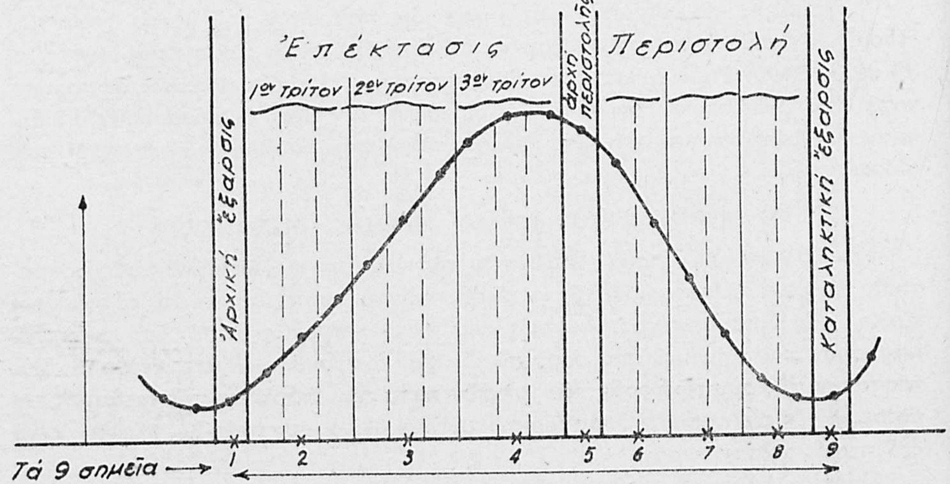
Φάσις ἐπεκτάσεως : Ἀπὸ τοῦ μηνὸς ὅστις ἕπεται τοῦ προηγουμένου (ἀρχικῆς ἐξάρσεως) μέχρι τῆς κορυφῆς (ἀνωτάτου σημείου) τοῦ κύκλου. Ἡ φάσις αὕτη τῆς ἐπεκτάσεως διαιρεῖται κατὰ κανόνα εἰς τρία διαστήματα ἴσης κατὰ τὸ δυνατὸν διαρκείας.

Μὴν ἀρχικῆς περιστολῆς : Ὁ μὴν ὅστις ἕπεται τῆς ὡς ἄνω καθορισθείσης κορυφῆς.

Φάσις περιστολῆς : Ἀπὸ τοῦ ἑπομένου μηνὸς τοῦ τῆς ἀρχικῆς περιστολῆς μέχρι τοῦ κατωτάτου σημείου τοῦ τμήματος τούτου τοῦ κύκλου. Ἡ φάσις αὕτη διαιρεῖται ὁμοίως εἰς τρία διαστήματα ἴσης κατὰ τὸ δυνατὸν διαρκείας.

Μὴν τελικῆς ἢ καταληκτικῆς ἐξάρσεως : Ὁ μὴν οὗτος συμπίπτει μὲ τὸν μῆνα ἀρχικῆς ἀνόδου ἢ ἐξάρσεως τοῦ ἑπομένου κύκλου.

Ἕκαστος κύκλος χαρακτηρίζεται οὕτω ὑπὸ ἐννέα σημείων ὡς εἰς τὸ ἀκόλουθον γραφικὸν διάγραμμα ἐμφαίνεται.



Σχ. 4.

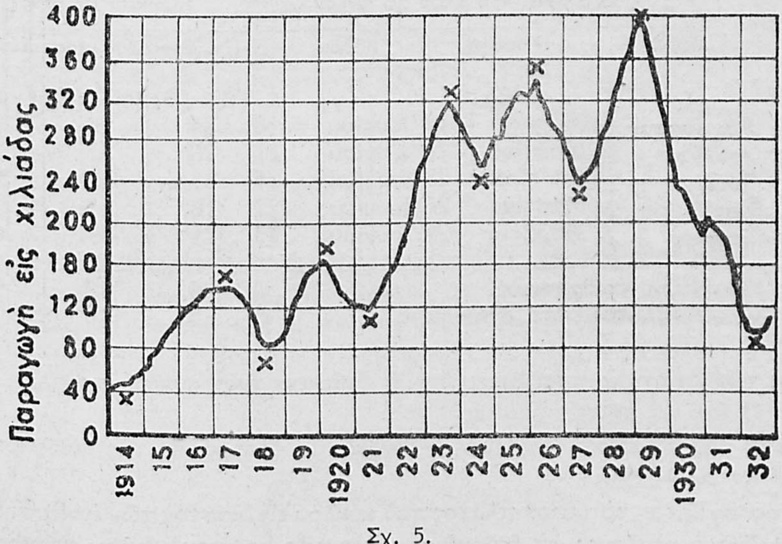
Ἐφαρμόζομεν τὴν ἀνωτέρω περιγραφεῖσαν συνοπτικῶς μέθοδον τοῦ Mitchell εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα, ὅπου τὰ δεδομένα ἀφοροῦν τὴν παραγωγὴν αὐτοκινήτων εἰς Ἡνωμένας Πολιτείας ἀπὸ τοῦ 1914 ἕως 1932. Τὰ δεδομένα ἐκφράζονται εἰς χιλιάδας καὶ ἔχουν διορθωθῆ ἐκ τῆς ἐποχικῆς ἐπιδράσεως, τῶν συντελεστῶν ἐποχικότητος ὑπολογισθέντων διὰ τῆς μεθόδου τῶν κινητῶν μέσων δώδεκα μηνῶν[1].

ΠΙΝΑΞ V.

Ἐμφαίνων τὴν κατὰ μῆνα παραγωγὴν αὐτοκινήνων εἰς Ἡν. Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς ἀπὸ τοῦ 1914-1932 (κατὰ χιλιάδας).

Ἔτη	ΜΗΝΕΣ											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1914	41	43	45	47	47	45	44	43	46	48	51	54
1915	48	59	63	74	70	75	81	87	91	96	102	106
1916	110	112	115	118	122	125	128	130	131	132	138	134
1917	136	138	139	142	143	140	137	134	130	127	123	122
1918	117	112	102	92	81	79	79	79	80	81	83	87
1919	91	98	107	118	131	138	145	150	156	156	158	162
1920	166	168	169	166	162	159	150	141	135	132	129	127
1921	126	125	124	124	122	120	123	128	131	137	142	149
1922	153	160	163	170	179	190	202	214	229	240	250	257
1923	263	269	279	289	296	302	307	314	316	316	310	300
1924	295	260	287	281	274	266	260	252	250	254	262	274
1925	283	281	281	292	303	311	317	322	328	328	329	327
1926	324	338	345	335	327	315	309	299	295	292	291	287
1927	280	271	261	252	242	239	240	248	250	251	252	258
1928	267	277	288	301	311	318	330	339	351	366	377	386
1929	293	396	397	396	387	377	368	357	341	327	315	305
1930	284	262	247	229	229	231	223	215	208	200	193	187
1931	208	206	200	196	191	189	186	185	173	160	151	141
1932	109	102	99	97	96	95	96	96	96	99	100	110

Τὰ δεδομένα τοῦ προηγουμένου πίνακος ἐμφανίζονται εἰς τὸ ἀκόλουθον γραφικὸν διάγραμμα ἔνθα αἱ κορυφαὶ καὶ τὰ βάθη τῆς καμπύλης ἐνδείκνυνται δι' ἑνὸς σταυροῦ.



Σχ. 5.

1. E. Morice καὶ F. Chartier: Στατιστικὴ Ἀνάλυσις, σελ. 479.

Βάσει τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τοῦ προηγουμένου πίνακος καὶ τῆς ἀνωτέρω γραφικῆς παραστάσεως γίνεται ἡ ἀνάλυσις ἑκάστου κύκλου. Διὰ τὸν πρῶτον, ἐπὶ παραδείγματι, κύκλον ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἀνάλυσιν :

Σημεῖα	Φάσεις	Πρῶτος μὴν	Κεντρικὸς μὴν	Τελευταῖος μὴν	Διάρκεια
1	Ἀρχικὴ ἔξαρσις (Ἐπέκτασις)		Σεπτεμβρίου 14		1
2	1ον τρίτον	Ὀκτωβρίου 14	Φεβρ.—Μαρτίου 15	Ἰουλίου 15	10
3	2ον τρίτον	Αὐγούστου 15	Ἰανουαρίου 15	Ἰουνίου 16	11
4	3ον τρίτον	Ἰουλίου 16	Δεκεμβρίου 16	Μαΐου 17	11
5	Ἀρχὴ περιστολῆς (Περιστολή)		Ἰουνίου 17		1
6	1ον τρίτον	Ἰουλίου 17	Αὔγ.—Σ)βρίου 17	Ὀκτωβρ. 17	4
7	2ον τρίτον	Νοεμβρίου 17	Δεκ. 17—Ἰαν. 18	Φεβρουαρ. 18	4
8	3ον τρίτον	Μαρτίου 18	Μαΐου 18	Ἰουλίου 18	5
9	Καταληκτικὴ ἔξαρσις		Αὐγούστου 18		1
	Ὁλικὸν				48

Ἐὰν ἡ ἀνάλυσις αὕτη γίνῃ δι' ὅλους τοὺς κύκλους, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν μίαν μέσην διάρκειαν τῶν διαφόρων φάσεων. Τὴν μέσην ταύτην διάρκειαν προσδιορίζομεν δι' ἑνὸς ἁπλοῦ χαρακτηριστικοῦ διασπορᾶς, τῆς ἀπολύτου μέσης ἀποκλίσεως.

Τὰ ἐξαγόμενα τῆς ἐργασίας ταύτης διὰ τοὺς πέντε κύκλους τῆς δοθείσης χρονολογικῆς σειρᾶς ἐμφαίνονται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα :

Κύκλος	Χρονολογία παραπομπῆς			Διάρκεια εἰς μῆνας		
	Βάθος	Κορυφή	Βάθος	1ον μέρος	2ον μέρος	Σύνολον
	(α)	(β)	(γ)	(β)—(α)	(γ)—(β)	(γ)—(α)
1	Αὐγούστου 14	Μαΐου 17	Ἰουλίου 18	34	14	48
2	Ἰουλίου 18	Μαρτίου 20	Ἰουνίου 21	20	15	35
3	Ἰουνίου 21	Σεπ)βρίου 23	Σεπ)βρίου 24	27	12	39
4	Σεπ)βρίου 24	Μαρτίου 26	Ἰουνίου 27	18	15	33
5	Ἰουνίου 24	Μαρτίου 29	Ἰουνίου 23	21	39	60
	Μέσος ἀριθμητικὸς			24	19	43
	Ἀπόλυτος μέση ἀπόκλισις			5	8	9

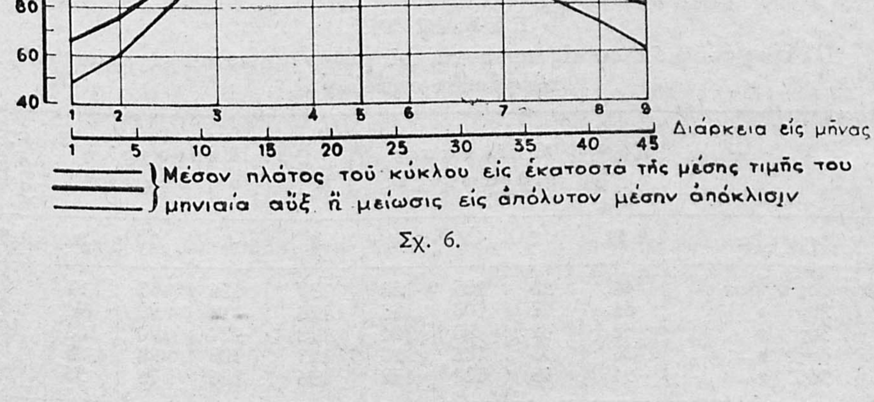
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι ἡ διάρκεια ἑνὸς κύκλου ποικίλλει εὐρύτατα: 33 ἕως 60 μῆνες.

Μετὰ τὴν ἀνωτέρω ἐργασίαν ἡ διαδικασία ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου συνεχίζεται ὡς ἀκολούθως :

Ὑπολογίζεται τὸ μέσον πλάτος τοῦ κύκλου εἰς ἕκαστον τῶν ἐννέα σημείων. Πρὸς τοῦτο ἐκφράζομεν τὰ δεδομένα τοῦ μηνὸς ἑκάστου κύκλου εἰς ποσοστὰ τοῦ μέσου μηνιαίου διὰ τὸν θεωρούμενον κύκλον. Τοῦτο ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ καταστήσῃ συγκρίσιμα τὰ δεδομένα τῶν διαφόρων κύκλων δι' ἀπαλείψεως τῆς τάσεως ἀπὸ τοῦ ἑνὸς κύκλου εἰς τὸν ἄλλον.

Τὰ ποσοστὰ ταῦτα ἐμφαίνονται εἰς τὸν ἀκόλουθον ἀριθμητικὸν πίνακα IV. Δι' ἕκαστον κύκλον, τὸ πλάτος εἰς ἕκαστον τῶν ἐννέα χαρακτηριστικῶν σημείων ὑπολογίζεται εἰς ποσοστὰ τοῦ μέσου τοῦ θεωρουμένου κύκλου. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁμοίως τὸ μέσον πλάτος δι' ἕκαστον τῶν ἐννέα σημείων, τοῦθ' ὅπερ χαρακτηρίζει τὴν μέσην μορφὴν τοῦ κύκλου διὰ τὴν ἐξεταζομένην σειράν. Ἡ σημασία τοῦ μέσου προσδιορίζεται μὲ τὴν ἔνδειξιν τῆς ἀπολύτου μέσης ἀποκλίσεως. Τὰ ἀριθμητικὰ ἀποτελέσματα τῆς τελευταίας φάσεως τῆς ἐργασίας ἐμφαίνονται εἰς τὸν ἀριθμητικὸν πίνακα VII καὶ τελικῶς τὰ ἀριθμητικὰ ἐξαγόμενα τῶν δύο τελευταίων ἀριθμητικῶν πινάκων ἐμφανίζονται ἐπὶ τοῦ ἀκολούθου γραφικοῦ διαγράμματος (Σχ. 6). Εἰς τοῦτο καταφαίνεται ἡ γενικὴ πορεία τῆς κυκλικῆς κινήσεως, ἰδιαιτέρως ἡ δισυμμετρία, τῆς ἐπεκτατικῆς φάσεως παρουσιαζούσης μεγαλυτέραν διάρκειαν τῆς τοιαύτης τῆς περιστολῆς.

Ἡ μέθοδος Mitchell ἐφαρμόζεται κυρίως εἰς φαινόμενα παρουσιάζοντα σταθερότητα διαρκείας καὶ ἐντάσεως, εἰς φαινόμενα μᾶλλον ὁμαλά. Ἰδιαιτέρως ὁ Mitchell ἐφαρμόζει τὴν μέθοδόν του διὰ συγκρίσεως μεταξὺ μιᾶς προτύπου τοιαύτης καὶ ἄλλης τυχὸν ἐξεταζομένης σειρᾶς.



Σχ. 6.

ΠΙΝΑΞ VI.

Δεδομένα μηνιαία εἰς ποσοστὰ τοῦ μηνιαίου μέσου τοῦ κύκλου
(Ἀπηλλαγμένα ἐποχικότητος)

Κύκλος	Ἔτος	ΜΗΝΕΣ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πρῶτος κύκλος Μέσος μηνιαῖος: 105	1914	—	—	—	—	—	—	—	41	**44**	(46	49	51
	1915	46	56*	60*	70	67	71	77)	(83	87	91	97	101
	1916	105*	107	110	112	116	119)	(122	124	125	126	131	128*
	1917	130	131	132	145	136)	**133**	(130	128*	124*	121)	(117	116*
	1918	111*	107)	(97	88*	77*	75)	**75**	76	—	—	—	—
Δεύτερος κύκλος Μέσος μηνιαῖος: 130	1918	—	—	—	—	—	—	61	**61**	(62	62	64*	67*
	1919	70	75)	(82	91	101*	106*	112	115)	(120	120	122	125*
	1920	128	129	130)	**128**	(125	122*	115*	108)	(102	102	99	98
	1921	97)	(96	95	95*	94	92)	**95**	98	—	—	—	—
Τρίτος κύκλος Μέσος μηνιαῖος: 237	1921	—	—	—	—	—	51	**52**	(54	55	58	60*	63*
	1922	65	68	69)	(72	76	80	85	90*	97	101	105	108)
	1923	(11	114	118	122*	125*	127	130	133	133)	**133**	(131	127*
	1924	124)	(122	121*	119*	116)	(112	110*	106*	105)	**107**	111	—
Τέταρτος κύκλος Μέσος μηνιαῖος: 297	1924	—	—	—	—	—	—	—	—	84	**86**	(86	92
	1925	95*	95	95)	(98	102	105*	107*	108	110)	(110	111	110*
	1926	109*	114	116)	**113**	(110	106*	104*	101)	(99	98	98*	97
	1927	94)	(91	88	85*	81	80)	**81**	84	—	—	—	—
Πέμπτος κύκλος Μέσος μηνιαῖος: 254	1927	—	—	—	—	—	94	**94**	(98	98	99*	99*	102
	1928	105)	(109	113	119	122*	125	130	133)	(138	144	148	152*
	1929	155	156)	156	**156**	(152	148	145	141	134	129*	124*	119
	1930	112	103	97	90)	(90	91	88	85	82	79	76*	74
	1931	82	81	79	77	75)	(74	73	73	68	63	59	56*
	1932	43	40	39	38	38	37)	**38**	38	—	—	—	—

Σημείωσις. Δι' ἕκαστον κύκλον ὑπεγραμμίσθησαν οἱ μῆνες τῆς ἀρχικῆς ἐξάρσεως τῆς κάμψεως καὶ καταληκτικῆς ἐξάρσεως. Ἐντὸς παρενθέσεως ἐτέθησαν τὰ τρία τρίτα τῆς ἐπεκτατικῆς φάσεως καὶ τῆς περιστολῆς. Τέλος, μὲ ἀστερίσκον ἐσημειώθησαν οἱ κεντρικοὶ μῆνες τῶν τριῶν τούτων τρίτων.

ΠΙΝΑΞ VII.

Πλάτος τοῦ κύκλου εἰς ποσοστὰ τοῦ μέσου μηνιαίου εἰς ἕκαστον τῶν ἐννέα σημείων.

ΦΑΣΙΣ	Ἔναρξις ἐξάρσεως ἢ ἀνόδου	Ἐπέκτασις ἢ ἀνάπτυξις			Ἔναρξις ὑφέσεως ἢ περιστολῆς	Περιστολὴ ἢ ὕφεσις			Καταληκτικὴ ἔξαρσις
Σημεῖα	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1ος κύκλος	44	58	105	128	133	126	113	82	75
2ος »	61	67	103	125	128	118	99	94	95
3ος »	52	62	90	124	132	127	120	108	108
4ος »	86	95	106	110	113	105	98	85	82
5ος »	94	99	122	152	156	126	76	56	38
Μέσος μηνιαῖος	67	76	105	128	132	120	101	85	80
Ἀπόλυτος μέση ἀπόκλισις	18	16	7	10	9	7	12	13	18

14. Χρονολογικαὶ σειραὶ μὲ περιοδικὰς διακυμάνσεις.

Ἐκ τῆς πείρας καὶ τῆς παρατηρήσεως ἔχει διαπιστωθῆ ὅτι ὑφίστανται χρονολογικαὶ σειραὶ τῶν ὁποίων αἱ κυμάνσεις περὶ τὴν γραμμὴν τῆς τάσεως εἶναι σχεδὸν περιοδικαί, ὑπὸ τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου, δηλ. ἂν $x(t)$ παριστᾷ τὴν κύμανσιν ταύτην εἰς χρόνον t, ἔχομεν κατὰ προσέγγισιν:

$$x(t) = x(t+T) = x(t+2T) = \ldots = x(t+KT),$$

τοῦ K ὄντος ἀκεραίου διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ t.

Ἡ διάρκεια T, ἡ χωρίζουσα δύο ὁμόλογα σημεῖα διαδοχικῶν κυμάνσεων, καλεῖται περίοδος τῆς κυμάνσεως. Παράδειγμα τοιαύτης περιοδικῆς κινήσεως εἶναι αἱ ἐποχικαὶ κυμάνσεις, τῶν ὁποίων τὸ πλάτος εἶναι τὸ ἴδιον κατ' ἔτος διὰ τὸν αὐτὸν μῆνα. Ἡ περιοδικότης εἶναι τότε $T = 12$, ἂν ὁ χρόνος μετρᾶται εἰς μῆνας.

Ὁ ἀκόλουθος πίναξ παρέχει ἓν τοιοῦτον παράδειγμα, ἔνθα τὰ δεδομένα παριστοῦν τὸν μέσον ἀριθμὸν αὐγῶν δι' ἑκάστην ὄρνιθα, κατὰ μῆνα τῶν ἐτῶν 1938, 1939, 1940, εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας τῆς Ἀμερικῆς.

Ἔτη	ΜΗΝΕΣ											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1938	7,9	9,9	15,4	17,5	17,3	14,9	13,6	11,8	9,4	7,5	5,9	6,4
1939	8,0	9,7	14,9	17,0	17,0	14,6	13,2	11,7	9,3	7,4	6,0	6,8
1940	7,2	9,0	14,4	16,5	17,0	14,8	13,4	11,9	9,7	7,9	6,2	6,8
Μηνιαῖα σύνολα	23,1	28,6	44,7	51,0	51,3	44,3	40,2	35,3	28,4	28,8	18,1	20,0
Μέσος μηνιαῖος	7,7	9,5	14,9	17,0	17,1	14,8	13,4	11,8	9,5	9,6	6,0	6,7

Ὁμοίως αἱ ἡλιακαὶ κηλῖδες εἶναι ἓν παράδειγμα εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιοδικότης ἔχει πρὸ μακροῦ διαπιστωθῆ ἀπὸ τοὺς εἰδικούς. Ἡ περίοδος $T = 11{,}25$ ἔτη.

15. Περιοδικαὶ μαθηματικαὶ συναρτήσεις.

Αὗται εἶναι, κατὰ κύριον λόγον, αἱ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις τῆς μορφῆς

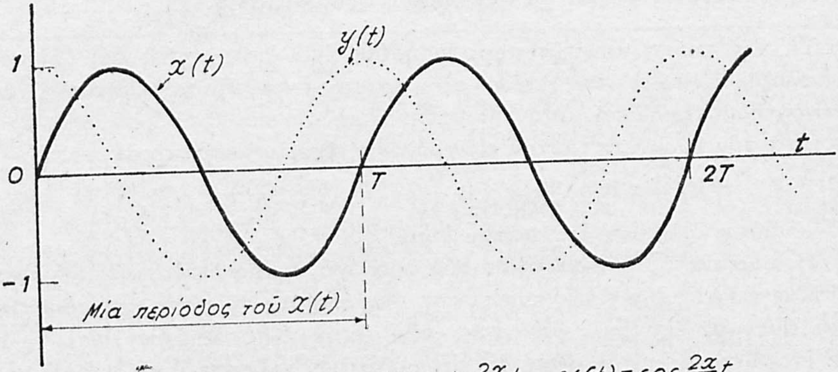
$$x(t) = \sin\frac{2\pi}{T}t, \quad y(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$$

περιόδου T, διότι μία αὔξησις τοῦ t, ἴση πρὸς T ἢ ἓν πολλαπλάσιον τούτου, δίδει ὁμόλογα σημεῖα εἰς τὰς καμπύλας, αἱ ὁποῖαι ἀπεικονίζουν γραφικῶς τὰς συναρτήσεις ταύτας.

Γενικώτερον αἱ δύο προηγούμεναι συναρτήσεις δύνανται νὰ λάβουν τὴν μορφὴν

$$x_\kappa(t) = \sin\frac{2\kappa\pi}{T}t, \quad y_\kappa(t) = \cos\frac{2\kappa\pi}{T}t$$

ἔνθα ἡ περίοδος εἶναι $\frac{T}{\kappa}$ (Σχ. 7).



Σχ. 7. — $x(t) = \sin\frac{2\pi}{T}t \quad y(t) = \cos\frac{2\pi}{T}t$

Ἔστω μία συνάρτησις f(t) ἀσυνεχὴς (σειρὰ παρατηρήσεων) ἢ συνεχὴς (συνάρτησις ἐξομαλύνσεως ἀρχικῶν δεδομένων), περιόδου T. Ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, πάντοτε ἀληθευούσας διὰ στατιστικὰς παρατηρήσεις, ἡ συνάρτησις αὕτη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος τῆς μορφῆς:

$$f(t) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{2\pi}{T}t + A_2 \cos\frac{4\pi}{T}t + \ldots + A_\kappa \cos\frac{2\kappa\pi}{T}t + \ldots$$

$$+ B_1 \sin\frac{2\pi}{T}t + B_2 \sin\frac{4\pi}{T}t + \ldots + B_\kappa \sin\frac{2\kappa\pi}{T}t + \ldots$$

ἔνθα A καὶ B εἶναι σταθεραὶ ἐξαρτώμεναι ἐκ τῆς συναρτήσεως f(t).

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ὡς ἄνω ἰσότητος εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρνήσεως f(t) εἰς σειρὰν τοῦ Fourier.

Διὰ τὴν συνάρτησιν f(t) ὁριζομένην μεταξὺ 0 καὶ T μέ:

$$f(t) = t \quad \text{διὰ} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{2T}{3}$$

$$f(t) = 2T - 2t \ \text{διὰ} \ \frac{2T}{3} \leqslant t \leqslant T,$$

καὶ κατὰ τρόπον ἀνάλογον διὰ τὰς περιόδους (T ἕως 2T), (2T ἕως 3T), ἔχομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις διὰ τοὺς συντελεστάς:

$$A_0 = \frac{2}{3}T, \quad A_\kappa = \frac{3T}{2\kappa^2\pi^2}\left(\cos\frac{4\kappa\pi}{3} - 1\right), \quad B_\kappa = \frac{3T}{2\kappa^2\pi^2}\sin\frac{4\kappa\pi}{3}.$$

Διὰ T = 3 ἔχομεν τὰς ἀκολούθους τιμὰς τοῦ f(t) καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς τοῦ Fourier:

	t=0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
f(t)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	1,0	0	0,5
1ος ὅρος	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Τρεῖς πρῶτοι ὅροι	0,316	0,316	1,000	1,684	1,684	1,000	0,316	0,316
Πέντε πρῶτοι ὅροι	0,145	0,488	1,000	1,513	1,856	1,000	0,145	0,488
Ἑπτὰ πρῶτοι ὅροι	0,145	0,488	1,000	1,513	1,856	1,000	0,145	
Ἐννέα πρῶτοι ὅροι	0,102	0,532	1,000	1,470	1,900	1,000	0,102	
Ἕνδεκα πρῶτοι ὅροι	0,075	0,504	1,000	1,497	1,927	1,000	0,075	

Εἷς οἱοσδήποτε ὅρος τῆς μορφῆς :

$$A_\kappa \operatorname{Cos} \frac{2\kappa\pi}{T} t + B_\kappa \sin \frac{2\kappa\pi}{T} t$$

ὁ ὁποῖος δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\sqrt{A_\kappa^2 + B_\kappa^2} \cos\left(\frac{2\kappa\pi}{T} t - \varphi\right) \quad \text{ἔνθα ἐφ } \varphi = \frac{B_\kappa}{A_\kappa}$$

καλεῖται ἁ ρ μ ο ν ι κ ὴ Κ τάξεως τοῦ ἀναπτύγματος τῆς σειρᾶς.

Τὸ T καλεῖται περίοδος τῆς ἁρμονικῆς, τὸ $\frac{1}{T}$ συχνότης αὐτῆς, ἡ παράστασις $\sqrt{A_\kappa^2 + B_\kappa^2}$ πλάτος καὶ ἡ φ γωνία τῆς φάσεως. Τὰ Α καὶ Β καλοῦνται συνοπτικώτερον σ υ ν ι σ τ ῶ σ α ι τῆς ἁρμονικῆς.

Ἡ μέση τιμὴ δοθείσης ἁρμονικῆς κατὰ τὴν περίοδον T εἶναι μηδὲν (αἱ θετικαὶ κυμάνσεις συμψηφίζονται ὑπὸ τῶν ἀρνητικῶν), ἐνῷ ἡ διακύμανσις αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς

$$\frac{1}{2}\,(A_\kappa^2 + B_\kappa^2).$$

Ἡ μέση τιμὴ τῆς συναρτήσεως f (t), δι' ἑκάστην περίοδον Τ, εἶναι $\frac{1}{2} A_0$ καὶ ἡ διακύμανσις αὐτῆς εἶναι :

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \Sigma\,(A_\kappa^2 + B_\kappa^2) \qquad (K = 1, 2, \ldots.)$$

δηλ. ἡ διακύμανσις ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διακυμάνσεων τῶν διαφόρων ἁρμονικῶν.

Ἡ σημαντικότης τέλος τῆς ἁρμονικῆς τυχούσης τάξεως Κ, ἤτοι τὸ μέρος ὅπερ ὀφείλεται εἰς τὴν κύμανσιν τῆς f (t) κατὰ μῆκος ἑκάστης περιόδου, ἐκφράζεται διὰ τοῦ λόγου :

$$\frac{\text{Διακύμανσις ὀφειλομένη εἰς ἁρμονικὴν Κ τάξεως}}{\text{Ὁλικὴ διακύμανσις}}$$

ἢ διὰ τῆς παραστάσεως :

$$E_\kappa = (A_\kappa^2 + B_\kappa^2) / 2\sigma^2$$

ἡ ὁποία καλεῖται ἐ ν έ ρ γ ε ι α τῆς Κ ἁρμονικῆς.

Ἐφ' ὅσον τὸ E_κ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ἐπὶ τοσοῦτον ἡ ἁρμονικὴ Κ τάξεως ἐκφράζει σημαντικὸν τμῆμα τῆς μεταβολῆς τῆς f(t).

Διὰ τὴν ἀνωτέρω ἐξετασθεῖσαν συνάρτησιν f(t), ὅταν t μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως T, δηλ. ἀπὸ 0 ἕως 3, ἔχομεν τὰ ἀκόλουθα ἀποτελέσματα κατὰ Morice.

	$\frac{1}{2}(A_\kappa^2 + B_\kappa)^2$	$\frac{1}{2}(A_\kappa^2 + B_\kappa^2)\sigma^2$	$\Sigma \frac{1}{2}(A_\kappa^2 + B_\kappa^2) / \sigma^2$
K = 1	0,6239	0,9359	0,9359
2	0,0390	0,0585	0,9944
3	—	—	0,9944
4	0,0024	0,0036	0,9980
5	0,0510	0,0015	0,9995

Οἱ πέντε πρῶτοι ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος τῆς f(t) ἐκφράζουν τὰ 99,5 % τῆς διακυμάνσεως αὐτῆς, ἐνῶ οἱ ἕνδεκα πρῶτοι ὅροι ἐκφράζουν ὁλόκληρον τὴν διακύμανσιν τῆς f(t) πλὴν 5/10000 αὐτῆς.

Σκοπὸς τῆς ἁρμονικῆς ἀναλύσεως.

Ἡ ἁρμονικὴ ἀνάλυσις χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐξομάλυνσιν σειρᾶς παρατηρήσεων τῆς ὁποίας ἡ γραφικὴ παράστασις ἀφήνει νὰ ἐννοηθῇ ὅτι πρόκειται περὶ φαινομένου περιοδικοῦ. Ἡ ἐξομάλυνσις ἐπιδιώκεται διὰ μιᾶς σειρᾶς ἁ ρ μ ο ν ι κ ῶ ν, αἱ ὁποῖαι ἐπέχουν θέσιν μαθηματικῶν ὑποδειγμάτων, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται πρόσφορα διὰ τὸν σκοπὸν αὐτόν.

Τὸ πρόβλημα ἐν τῇ πραγματικότητι εἶναι πολὺ δυσχερέστερον ἀπὸ τὸ ἐξετασθὲν ἀνωτέρω αὐτὸ παράδειγμα μιᾶς συναρτήσεως περιόδου δοθείσης T, διότι τὰ πραγματικὰ φαινόμενα προέρχονται κατὰ κανόνα ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν περιοδικῶν κυμάνσεων περιόδων T_1, T_2, T_3 . . . ὥστε συναρτήσεις τῆς μορφῆς :

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} t - \varphi\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_2} t - \varphi_2\right) + \ldots$$

ὅπου τὰ T_1, T_2, ... δὲν ἀνήκουν ἀναγκαίως εἰς τὴν αὐτὴν σειρὰν τοῦ Fourier $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots\ldots \frac{T}{K}$ καὶ συνεπῶς εἶναι ἄγνωστα.

Ἡ ἁρμονικὴ ἀνάλυσις, κατὰ συνέπειαν, ἔχει ὡς σκοπόν, βάσει τῶν δεδομένων τῆς παρατηρήσεως, νὰ ἀναζητήσῃ τὰς περιόδους ταύτας, δηλ. νὰ ἀναλύσῃ μίαν συνολικὴν κίνησιν εἰς τὰς διαφόρους συνιστώσας αὐτῆς.

Μέθοδος ἁρμονικῆς ἀναλύσεως (ἀνάλυσις περιοδογράμμου).

Δοκιμάζονται αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ τοῦ T (T = 1, 2, ...) καὶ προσδιορίζεται δι' ἑκάστην ἐξ αὐτοῦ ἡ ἐ ν έ ρ γ ε ι α τῆς ἁρμονικῆς περιόδου T :

$$\alpha \cos\left(\frac{2\pi}{T} - \varphi\right) = \alpha \cos \frac{2\pi}{T} t + \beta \sin \frac{2\pi}{T} t, \text{ ἔνθα } \alpha\beta\varphi = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἡ ἐ ν έ ρ γ ε ι α εἶναι συνάρτησις τοῦ T, διότι ἔχομεν, ἂν παραστήσωμεν μὲ $x_1, x_2, \ldots x_t \ldots x_n$, τὰς n ἀποκλίσεις τῶν παρατηρήσεων ἐν σχέσει πρὸς τὴν κίνησιν μακρᾶς διαρκείας:

$$\alpha = \alpha\,(T) = \frac{2}{n} \sum_{1}^{n} x_t \cos \frac{2\pi}{T}\, t$$

καὶ

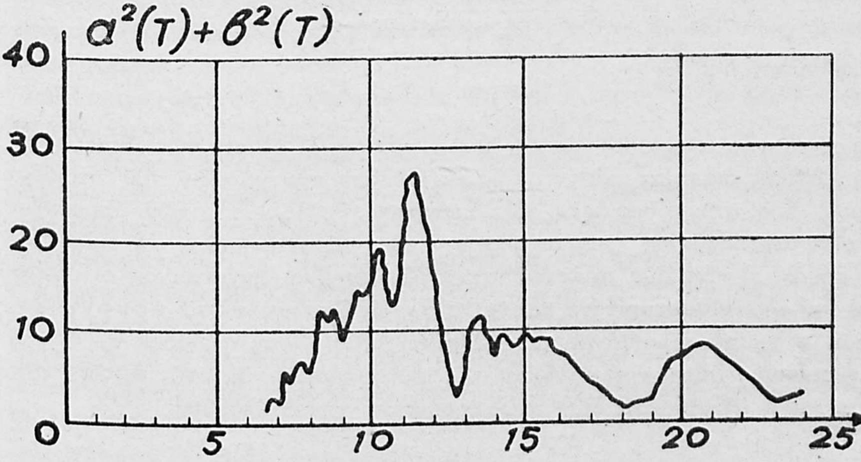
$$\beta = \beta\,(T) = \frac{2}{n} \sum_{1}^{n} x_t \sin \frac{2\pi}{T}\, t$$

ἐξ ὧν

$$E_t = \frac{\alpha^2\,(T) + \beta^2\,(T)}{2\sigma^2}$$

ὅπου σ^2 εἶναι ἡ διακύμανσις τῆς σειρᾶς $x_1,\ x_2 \ldots,\ x_n$.

Ἐπειδὴ τὸ σ εἶναι σταθερὰ ποσότης ἀρκεῖ νὰ θεωροῦμεν τὰς κυμάνσεις τοῦ $\alpha^2(T) + \beta^2(T)$ συναρτήσεις τοῦ T. Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς αὐτῆς γίνεται μὲ ἓν διάγραμμα ὅπερ καλεῖται π ε ρ ι ο δ ό γ ρ α μ μ ο ν. Παράδειγμα ἑνὸς τοιούτου περιοδογράμμου παρέχεται εἰς τὸ σχ. 8.



Σχ 8 _ Περιοδόγραμμον σχετικόν πρός τόν ἀριθμόν τῶν ἡλιακῶν κηλίδων (1750-1900).

Διατηροῦμεν ὡς περιόδους τῆς παρατηρηθείσης κινήσεως ἐκείνας αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν μ έ γ ι σ τ ο ν τὴν παράστασιν $\alpha^2(T) + \beta^2(T)$ (κορυφὰς τῆς καμπύλης τοῦ περιοδογράμμου), ἤτοι ἐκείνας διὰ τὰ ὁποίας αἱ ἀντίστοιχοι ἁ ρ μ ο ν ι κ α ὶ φανερώνουν τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς κυμάνσεως τῆς ὑπὸ παρατήρησιν σειρᾶς.

Ἡ ἐκλογὴ τῶν περιόδων, στηριζομένη ἐπὶ τῆς ἁπλῆς λογικῆς, δικαιολογεῖται θεωρητικῶς παρὰ τοῦ γεγονότος ὅτι $\alpha^2(T) + \beta^2(T)$ διέρχεται ἀπὸ ἓν μ έ γ ι σ τ ο ν ὅταν T εἶναι πλησίον μιᾶς τῶν πραγματικῶν περιόδων $T_1,\ T_2, \ldots$ τῆς θεωρουμένης κινήσεως.

Πρακτικὴ διάταξις τῶν ὑπολογισμῶν.

Πρὸς μελέτην τῆς ὑποθετικῆς περιόδου T (T ἀκέραιος ἀριθμὸς μηνῶν), διαλάσσομεν τὰ n διαδοχικὰ δεδομένα κατὰ τὸν ἀκόλουθον πίνακα (καλούμενον πίνακα τῶν Byus-Ballot):

1η περίοδος . . .	x_1	x_2	. . . . .	x_T
2α »	x_{T+1}	x_{T+2}	. . . . .	x_{2T}
. . . .	. . .	. . .	. . . . .	. . .
p^{α} »	$x_{(p-1)T+1}$	$x_{(p-1)T+2}$	. . . . .	
Ὁλικὰ	S_1	S_2		S_T

Ὁ ἀριθμὸς $pT = N$ τῶν παρατηρήσεων τοῦ πίνακος τούτου εἶναι τὸ μεγαλύτερον πολλαπλάσιον τοῦ T τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ n, εἶναι δὲ μικρότερος ἢ ἴσος πρὸς n, κατὰ τρόπον ὥστε αἱ τελευταῖαι παρατηρήσεις παραλείπονται.

Ἐκ τῶν ὁλικῶν τῶν στηλῶν, S_1, S_2, ... S_t συνάγονται αἱ σχέσεις:

$$\alpha(T) = \frac{2}{n} \sum_{1}^{T} S_t \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$\beta(T) = \frac{2}{n} \sum_{1}^{T} S_t \sin \frac{2\pi}{T} t$$

καὶ ἀκολούθως ἡ:

$$\alpha^2(T) + \beta^3(T).$$

Αἱ τιμαὶ τῆς τελευταίας ταύτης παραστάσεως, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν διὰ τὰς διαδοχικὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ T, ἐπιτρέπουν τὴν χάραξιν τοῦ περιοδογράμμου, δηλ. τὸν καθορισμὸν τῶν περιόδων T_1, T_2, ... τῶν ἁρμονικῶν αἱ ὁποῖαι διατηροῦνται πρὸς ἀπεικόνισιν τῶν παρατηρήσεων. Αἱ τιμαὶ τῶν α(T) καὶ β(T) τῶν δύο πρώτων παραστάσεων εἶναι ἀντιστοίχως οἱ συντελεσταὶ τοῦ ὅρου εἰς συνημίτονα καὶ ἡμίτονα, τῶν διατηρουμένων ἁ ρ μ ο ν ι κ ῶ ν.

Ἐάν, π.χ., τὸ περιοδόγραμμον ἐμφανίζῃ μίαν μόνον περίοδον T, σαφῶς ἐνδεικνυομένην, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς συναρτήσεως, διὰ τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται ἡ ἐξομάλυνσις τῶν παρατηρήσεων, τὴν ἀκόλουθον:

$$x(t) = \bar{x} + \alpha(T) \cos \frac{2\pi}{T} t + \beta(T) \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

ἔνθα $\bar{x}$ εἶναι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῶν n παρατηρήσεων.

Πολλάκις ἡ ἀναζήτησις τῶν περιόδων ἁπλοποιεῖται ἂν ἀντὶ τῶν $\alpha^2(T) + \beta^2(T)$ προσδιορίσωμεν τὴν ἔκτασιν τῆς ἀντιστοίχου σειρᾶς S_1, S_2 . . . . S_T (μέγιστον ἄθροισμα—ἐλάχιστον ἄθροισμα) καὶ παραστήσωμεν ταύτην γραφικῶς συναρτήσει τοῦ T ὅπως εἰς τὸ περιοδόγραμμον.

Ἡ ἐφαρμογὴ ἐν τῇ πράξει τῆς μεθόδου τῆς ἁρμονικῆς ἀναλύσεως παρουσιάζει μεγάλας δυσχερείας*.

---

* Βλ. σχετικὸν παράδειγμα πλήρως ἀνεπτυγμένον εἰς τὰ συγγράμματα τῶν κ.κ. Croxton καὶ Cowden ὡς καὶ εἰς 3ον τόμον Στατιστικῆς τοῦ καθηγητοῦ κ. Κ. Ἀθανασιάδη (σελ. 167).