ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΟΙ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΕΝΟΣ ΔΙΕΘΝΟΥΣ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ
ΟΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΚΑΙ Η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Τοῦ κ. ΝΙΚΟΥ Δ. ΣΩΤΗΡΑΚΗ

Εἰσαγωγὴ

Ἀπὸ τὶς 23 τοῦ Νοέμβρη μέχρι τὶς 5 τοῦ Δεκέμβρη 1959, μὲ πρωτοβουλία τοῦ Ὀργανισμοῦ Εὐρωπαϊκῆς Οἰκονομικῆς Συνεργασίας (Ο.Ε.Ο.Σ.) συνεκλήθη στὸ Παρίσι διεθνὲς συνέδριο ἀπὸ ἐκπροσώπους τῶν χωρῶν τοῦ Ο.Ε.Ο.Σ. μὲ θέμα: **«Μελέτη τῶν νέων ἀντιλήψεων γιὰ τὴ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν».**

Στὸ συνέδριο αὐτὸ εἶχα τὴν τιμὴ νὰ ἀντιπροσωπεύσω—μόνος δυστυχῶς—τὴ χώρα μας. Ἡ μέριμνα γιὰ τὴ συμμετοχὴ ἀνῆκε στὸ Ὑπουργεῖο Συντονισμοῦ σὲ συνεργασία μὲ τὸ Ὑπουργεῖο Παιδείας, καὶ εἶναι κρίμα ποὺ τὴν τελευταία στιγμὴ παρουσιάστηκε κώλυμα στὴ συμμετοχὴ ἄλλων δύο ἀντιπροσώπων, ἀφοῦ μάλιστα ὁ Ο.Ε.Ο.Σ. εἶχε προβλέψει ἔξοδα ἀεροπορικοῦ ταξιδίου, στεγάσεως καὶ τροφῆς γιὰ τρία πρόσωπα ἀπὸ κάθε χώρα.

Τελικὰ ἀντιπροσωπεύθηκαν αἱ ἀκόλουθες χῶρες: Αὐστρία, Βέλγιο, Καναδᾶς, Δανία, Γαλλία, Γερμανία, Ἑλλάς, Ἰρλανδία, Ἰταλία, Λουξεμβοῦργο, Ὁλλανδία, Νορβηγία, Σουηδία, Ἑλβετία, Τουρκία, Μεγ. Βρεταννία, Ἡν. Πολιτεῖες, Γιουγκοσλαβία.

Πρόεδρος τοῦ Σεμιναρίου, ὅπως ἐπεκράτησε νὰ ὀνομάζωνται οἱ εἰδικὲς συσκέψεις ἐπιστημόνων, ἦτο ὁ Ἀμερικανὸς Marshall Stone (Πρόεδρος τῆς Ἐπιτροπῆς γιὰ τὴ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν—Διεθνὴς Ἕνωση τῶν Μαθηματικῶν) καὶ εἰδικὰ θέματα τὰ ἀκόλουθα, κατὰ τομεῖς:

I. Θέματα σχετικὰ μὲ τὶς νέες ἀντιλήψεις γιὰ τὰ μαθηματικά: δηλαδὴ ἐνημέρωση γιὰ τὴ σύγχρονη ἐξέλιξή τους καὶ ἀνάλογη ἀναπροσαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν ποὺ διδάσκονται σήμερα στὴ μέση καὶ στοιχειώδη ἐκπαίδευση. Πρόεδρος τῶν ἐργασιῶν στὸν τομέα αὐτὸ ἦτο ὁ διάσημος Γάλλος μαθηματικὸς Jean Dieudonné, θεμελιωτὴς τοῦ ἔργου τῆς ὁμάδας τῶν Γάλλων μαθηματικῶν ποὺ κάτω ἀπὸ τὸ ψευδώνυμο Nicolas Bourbaki ἔχουν προωθήσει τὶς μαθηματικὲς ἔρευνες στὴν πιὸ ὁλοκληρωμένη, σήμερα, τελείωση.

Ὁ τομέας II, μὲ Πρόεδρο τὸν Ἀμερικανὸ Hovard Fehr (Πανεπ. Columbia) ἐρεύνησε σὲ ὅλη τὴν ἔκταση τὴν κατάσταση ποὺ ὑπάρχει σήμερα στὴ μέση καὶ τὴ στοιχειώδη ἐκπαίδευση σχετικὰ μὲ τὴ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν—προγράμματα καὶ διδακτικὴ—σὲ συσχετισμὸ πρὸς τὴν παροῦσα ἀνάπτυξη τῆς Ἐπιστήμης καὶ τῆς Τεχνικῆς.

Ὁ τομέας III, μὲ Πρόεδρο τὸν κ. Pierre Theron (Γαλλικὸ Ὑπουργεῖο

Παιδείας) ἀσχολήθηκε μὲ θέματα πρακτικῆς ἐφαρμογῆς πρὸς ἀξιοποίηση τῶν πορισμάτων τοῦ σεμιναρίου μὲ τὴν ἐργοθέτησή τους, ἂν ἐπιτρέπεται νὰ ἀποδοθῆ ἔτσι ὁ γαλλικὸς ὅρος «mise en œuvre».

Πρὶν περάσω σὲ μιὰ σύντομη θεώρηση τῶν ἐργασιῶν τοῦ σεμιναρίου πρέπει νὰ πῶ ὅτι κατὰ γενικὴ διαπίστωση καὶ ὁμολογία τῆς παμψηφίας τῶν συνέδρων ἔχει πιὰ ὡριμάσει σὲ διεθνῆ κλίμακα ἡ συνείδηση ὅτι τὰ μαθηματικὰ ποὺ διδάσκονται σήμερα στὶς χῶρες τοῦ Ο.Ε.Ο.Σ. τόσο στὴ μέση, ὅσο καὶ στὴ στοιχειώδη ἐκπαίδευση, ἔχουν ὑπερβολικὰ παλιώσει καὶ δὲν ἐξυπηρετοῦν πιὰ οὔτε τὴ μαθηματικὴ ἐπιστήμη καθεαυτή, οὔτε τὴ βιομηχανία, οὔτε καὶ τὶς κοινωνικὲς ἐπιστῆμες. Τὴ διεθνῆ αὐτὴ συνείδηση ἐκφράζοντας ὁ Ο.Ε.Ο.Σ. συγκάλεσε τὸ σεμινάριο καὶ ἐπρόκειτο σύντομα νὰ συγκαλέσει ἀνάλογο καὶ γιὰ τὴ διδασκαλία τῆς Φυσικῆς. Περνοῦμε ἀμέσως στὴν ἔκθεση τῶν ἐργασιῶν τῶν τριῶν τομέων :

I. Οἱ νέες ἀντιλήψεις καὶ ἡ μέση ἐκπαίδευση

Στὴν εἰσήγησή του ὁ κ. Dieudonné, ἀφοῦ ἔκαμε μιὰ σύντομη ἀνασκόπηση τῆς ἐξέλιξης τῶν μαθηματικῶν μέσα στὶς τελευταῖες δεκαετίες, στάθηκε στὴ διαπίστωση ὅτι, ἀντίθετα μὲ τὴν ἁλματικὴ αὐτὴ ἐξέλιξη, ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν στὴ μέση ἐκπαίδευση ἔμεινε στάσιμη καὶ ἀνίκανη νὰ ἐκτελέσει σήμερα τὸν προορισμό της. Μὰ καλύτερα, ἂς ἀκούσουμε τὸν ἴδιο :

> «Ἀπὸ τὸ 19ο ἀκόμη αἰώνα τὸ πέρασμα ἀπὸ τὴν κλασικὴ γεωμετρία καὶ τὴν ἄλγεβρα στὸν ἀπειροστικὸ λογισμὸ ἀντικριζόταν σὰν ἕνα ἅλμα σὲ καινούργιο κόσμο. Μὲ τὰ νεώτερα μαθηματικὰ τὸ ρῆγμα ἄνοιξε σημαντικὰ γιὰ νὰ γίνει βαθιὰ πηγὴ ἐκπλήξεων γιὰ τοὺς πρωτοετεῖς φοιτητὲς ποὺ φθάνουν ὡς τὸ σημεῖο νὰ παραπονοῦνται στοὺς καθηγητὲς ὅτι αὐτὰ ποὺ τοὺς διδάσκουν δὲν εἶναι «ἀληθινὰ μαθηματικὰ» (δηλαδὴ δὲν ἀνταποκρίνονται στὰ μαθηματικὰ ποὺ εἶχαν συνηθίσει στὴ μέση ἐκπαίδευση). Ἐδῶ καὶ 50 χρόνια, οἱ μαθηματικοί, χρειάσθηκε νὰ υἱοθετήσουν ὄχι μόνο νέες ἔννοιες, ἀλλὰ καὶ ἕνα καινούργιο λεκτικὸ (langage) ποὺ δημιουργήθηκε ἐμπειρικὰ ἀπὸ τὶς ἀνάγκες τῶν ἐρευνῶν καὶ ποὺ ἡ καταλληλότητά του νὰ ἐκφράζει μὲ ἀκρίβεια καὶ συντομία τὰ μαθηματικὰ γεγονότα, δοκιμάσθηκε παντοῦ κι' ἔγινε καθολικὰ ἀποδεκτό. Μέχρι τώρα ἐν τούτοις, τουλάχιστο στὴ Γαλλία, ἡ μέση ἐκπαίδευση ἀντιστάθηκε μὲ πεῖσμα στὴν εἰσαγωγὴ τῆς νέας αὐτῆς ὁρολογίας. Γαντζώνονται ἀπελπιστικὰ ἀπὸ ἕνα λεκτικὸ παλιωμένο καὶ ἀπροσάρμοστο, τόσο, πού, ὅταν ἕνας σπουδαστὴς μπαίνει στὸ Πανεπιστήμιο, ἀγνοεῖ πολὺ συχνὰ μαθηματικοὺς ὅρους ὅπως : «σύνολο», «ἐφαρμογὴ» (application), «ὁμάδα», «ἀνυσματικὸς χῶρος» κ.λ.π. Καθόλου παράδοξο, ἂν ἀποθαρρύνεται ἀπὸ τὴν πρώτη ἐπαφή του μὲ τὰ ἀνώτερα μαθηματικά...».

Εἶναι πραγματικότητα — δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία — τὸ χάσμα ποὺ ἀνοίγεται σήμερα ἀνάμεσα στὰ μαθηματικὰ ποὺ διδάσκουμε στὰ γυμνάσιά μας—ἂς τὰ ποῦμε κλασικὰ μαθηματικὰ—καὶ τὰ νεώτερα, τὰ σύγχρονα μαθηματικὰ ποὺ διεθνῶς ἐπικράτησε νὰ λέγωνται «μοντέρνα» καὶ τὸ χάσμα αὐτὸ πρέπει νὰ κλείσει, νὰ γεφυρωθεῖ. Φυσικὰ ἡ ἐπιστήμη δὲν πάει ποτὲ πρὸς τὰ πίσω καὶ μάλιστα ἡ μαθηματική. Ἐκεῖνο ποὺ πρέπει λοιπὸν νὰ γίνει—καὶ θὰ γίνει (εἴτε τὸ θέλουμε εἴτε ὄχι, εἴτε γρήγορα, εἴτε ἀργὰ—ὅσο γρηγορώτερα, τόσο τὸ καλύτερο) εἶναι ἡ ἀναπροσαρμογή, ὁ ἐκσυγχρονισμὸς τῶν μαθηματικῶν στὴ μέση ἐκπαίδευση. Δὲν εἶναι νοητό, μὰ οὔτε καὶ δυνατὸ νὰ πισωστρέψει ἡ ἐπιστήμη καὶ νὰ ξαναγυρίσει στὰ μαθηματικὰ τοῦ 18ου αἰώνα ποὺ διδάσκουμε στὰ γυμνάσιά μας.

Φυσικὰ δὲν πρόκειται νὰ δώσουμε σὲ λεπτομέρειες τὸ νέο πρόγραμμα ποὺ πρότεινε ὁ κ. Dieudonné στὴν εἰσήγησή του. Πρόκειται γιὰ ἕνα πρόγραμμα maximum πού, βέβαια, δὲν ἔγινε δεκτὸ στὸ σύνολό του, χρησιμοποιήθηκε ὅμως γιὰ βάση στὶς συζητήσεις ποὺ ἀκολούθησαν. Δὲ μποροῦσε λ.χ. νὰ ἀρνηθεῖ τὴν ἀνώφελη γιὰ τὴ μαθηματικὴ ἀγωγὴ καὶ ἐπιζήμια σὲ ἀνάλωση πολύτιμου χρόνου κατάχρηση ποὺ γίνεται σὲ ἀσκήσεις ὁλότελα τεχνητές, χωρὶς καμιὰ—ἀπολύτως καμιὰ—σχέση μὲ τὸν καλῶς νοούμενο προορισμὸ τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν. Στὴν ἄλγεβρα λ.χ. κουράζουμε καὶ ἀπογοητεύουμε τοὺς μαθητὲς μὲ ἀτέλειωτη σειρὰ ἀσκήσεων στοὺς μετασχηματισμοὺς πολυωνύμων σὲ γινόμενα καὶ προπάντων μὲ τὴν ἀρρώστια τῆς «τριωνυμίτιδος», «trinomité», ὅπως τὴν ὀνόμασε, ποὺ μᾶς ἐξαντλεῖ, ἀθεράπευτα, καθηγητὲς καὶ μαθητές, ἐπὶ μῆνες ὁλοκλήρους, χωρὶς καμιὰ πρακτικὴ ὠφέλεια, οὔτε γιὰ τὴ μαθηματικὴ ἀγωγή, οὔτε γιὰ μελλοντικὲς ἐφαρμογὲς στὴ ζωή. Κατὰ τὸν κ. Dieudonné πρέπει στὶς λύσεις ἐξισώσεων «νὰ ἐπιμείνουμε ἰδιαίτερα στὶς λύσεις μὲ προσέγγιση καὶ ποτὲ στὴ χρησιμοποίηση τύπων ποὺ δίνουν ἕτοιμες τὶς ρίζες. Πρέπει νὰ ποῦμε στοὺς μαθητὲς ὅτι τύποι χρησιμοποιοῦνται μόνο σπάνια, σὲ πολὺ εἰδικὲς περιπτώσεις· θὰ ἔφθανε νὰ σημειώσουμε ἁπλῶς τὸν τύπο ποὺ δίνει τὶς ρίζες στὴ δευτεροβάθμια ἐξίσωση καὶ δὲν πρέπει νὰ σπουδάσουμε εἰδικὰ τὸν τύπο αὐτὸ πρὸς ζημία τῆς γενικῆς θεωρίας». Ἡ ἄλγεβρα πρέπει, ὅσο τὸ δυνατὸ νωρίτερα, νὰ σμίξει μὲ τὴ γεωμετρία (ἀναλυτικὴ γεωμετρία). Ὅσο γιὰ τὴ γεωμετρία καθεαυτή, πρέπει, καὶ κείνη, νὰ ὑποβληθεῖ σὲ ἀνάλογη θεραπεία. Πρέπει κι' αὐτὴ νὰ ἀπαλλαγεῖ ἀπὸ τὰ νοσηρὰ καὶ νοσογόνα ἐξανθήματα τῶν τεχνητῶν ἀσκήσεων ποὺ κουράζουν, ἀπογοητεύουν καὶ ἐξαντλοῦν πρόωρα τὶς πνευματικὲς καὶ ψυχικὲς δυνάμεις καὶ διαθέσεις τοῦ μαθητῆ. Σὲ τί χρειάζεται π.χ., ρώτησε ὁ κ. Dieudonné, ὁ κύκλος τῶν ἐννέα σημείων τοῦ Euler καὶ ἡ ἀτέλειωτη συνοδεία παρόμοιων ἐκτροπῶν ἀπὸ μιὰ σύμμετρη καὶ ἐπιστημονικὰ νοημένη συγκρότηση τοῦ μαθήματος τῆς γεωμετρίας; Τὸ πρόβλημα τῆς διδασκαλίας τῆς γεωμετρίας εἶναι ἰδιαίτερα σοβαρὸ γιὰ τὶς δυσκολίες ποὺ παρουσιάζει, ἰδίως στὶς μικρότερες τάξεις καὶ θεωροῦμε χρήσιμο νὰ παρακολουθήσουμε ἀπὸ κοντήτερα τὶς σκέψεις τοῦ διάσημου μαθηματικοῦ· καὶ πρῶτο:

> «Εἶναι, λέει, ἀδύνατο νὰ ἀναπτυχθεῖ καρποφόρα, σὲ μορφὴ ἀξιωματική, μιὰ μαθηματικὴ θεωρία, ἂν προηγουμένως ὁ μαθητὴς δὲν ἐξοικειωθεῖ μὲ τὴν ἐφαρμογὴ ἀντίστοιχων μεθόδων μὲ πειραματικὰ ἢ μισοπειραματικὰ μέσα, προσφεύγοντας δηλαδὴ σταθερὰ στὴν **«ἐνόραση»** (1).

1) Ἡ ἐνόραση (intuition) εἶναι ἡ βασικὴ ψυχικὴ λειτουργία ποὺ μ' αὐτὴ γίνεται κατορθωτὴ στὰ μαθηματικὰ ἡ ἀνακάλυψη τοῦ νέου. Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι τὸ νέο γεννιέται μ' αὐτὸ ποὺ λέμε «ἀπόδειξη» ὀφείλουμε νὰ παραδεχθοῦμε ὅτι, τότε, οἱ μαθηματικὲς γνώσεις

Καὶ δεύτερο:

«Όταν εἰσάγουμε τὴ λογικὴ παραγωγὴ (deduction logique) σὲ ἕνα μαθηματικὸ ζήτημα, πρέπει πάντοτε νὰ τὴν παρουσιάζουμε μὲ αὐστηρὴ ἐντιμότητα, χωρὶς νὰ ἀποκρύπτουμε δηλαδὴ τὰ κενὰ ἢ τὰ ἐλαττώματα τῶν συλλογισμῶν. Κάθε ἄλλος τρόπος ἐνέργειας εἶναι χειρότερος ἀπὸ τὴν ὁλικὴ ἀπουσία ἀποδείξεως. Σκέπτομαι ἰδιαίτερα τὸν τρόπο ποὺ διδάσκουμε σήμερα τὴ γεωμετρία στὴν ἀρχή, μὲ σειρὲς ἀπὸ «ὁρισμοὺς» ποὺ δὲν ὁρίζουν τίποτα καὶ ἀπὸ ψευτο-«ἀποδείξεις» ποὺ δὲν ἀντέχουν στὴ λογικὴ ἀνάλυση. Μοιάζει σὰν νὰ θεωροῦμε ἀτιμωτικὸ τὸ ὅτι δὲ μποροῦμε νὰ παρουσιάσουμε στὸ μαθητὴ μιὰ θεωρία ἐντελῶς παραγωγικὴ ξεκινώντας ἀπὸ θεμελιώδη ἀξιώματα καί, καθὼς αὐτὸ φαίνεται πολὺ δύσκολο στὴ στάθμη τῶν μικρῶν τάξεων, κρίνουμε προτιμότερο νὰ ἐπιδιδόμαστε μᾶλλον σὲ μιὰ διανοητικὴ ἀπάτη, ἀντὶ νὰ ὁμολογοῦμε εἰλικρινὰ τὴν κατάσταση...»

Ἡ χρησιμοποίηση τῆς ἐνόρασης πρέπει νὰ ἀποτελεῖ τὴ βάση τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν ὣς τὴν ἡλικία τῶν 14—15 ἐτῶν. «Αὐτὸ βέβαια δὲν σημαίνει, ὅτι δὲν πρέπει νὰ σταματοῦμε στοὺς παραγωγικοὺς συλλογισμοὺς κάθε φορὰ ποὺ μᾶς δίδεται ἡ εὐκαιρία νὰ τοὺς παρουσιάζουμε. Στὴν ἄλγεβρα πρέπει νὰ ἐξοικειώσουμε τελείως τοὺς μαθητὲς μὲ τὴν τεχνικὴ τοῦ ἐγγράμματου λογισμοῦ, τὴ γνώση τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ καὶ τὴ λύση προβλημάτων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἢ δύο ἀγνώστους. Αὐτὸ γενικὰ γίνεται σήμερα καὶ δὲν ἔχω καμιὰ τροποποίηση νὰ προτείνω σ' αὐτὸ τὸ σημεῖο, φτάνει νὰ ξοδεύεται περισσότερος χρόνος στὴν ἄλγεβρα ἀπὸ τὴ γεωμετρία. Ὅσο γιὰ τὴ γεωμετρία (μιλᾶ πάντα γιὰ τὸν κατώτερο κύκλο) ξέρω ὅτι πρόσφατα ἔχουν γίνει πολλὲς ἔρευνες καὶ πειράματα ἀπὸ παιδαγωγοὺς (ἰδιαίτερα στὸ Βέλγιο) πάνω σὲ μεθόδους ποὺ ἐπιτρέπουν νὰ διδάσκεται σὰν ἕνα κεφάλαιο τῆς φυσικῆς). Φρονῶ ὅτι ἡ ἐξέλιξη αὐτὴ πρέπει νὰ ἐνισχυθεῖ, φθάνει νὰ συγκεντρώνεται ἡ προσοχή, ὄχι σὲ τεχνητὰ παιχνιδάκια (joujou), ὅπως τὰ τρίγωνα, ἀλλὰ σὲ βασικὲς γνώσεις, ὅπως ἡ συμμετρία, οἱ παράλληλες μεταφορὲς (translations), ἡ σύνθεση μετασχηματισμῶν κ.λ.π. Τέλος, σὲ ὅλα αὐτὰ τὰ μαθηματικὰ πρέπει νὰ εἰσαχθεῖ ὅσο τὸ δυνατὸ νωρίτερα τὸ λεκτικὸ καὶ οἱ συμβολισμοὶ ποὺ σήμερα χρησιμοποιοῦνται παντοῦ. Δὲν ὑπάρχει κανένα μυστήριο οὔτε τίποτα τρομακτικό, νὰ ἐκφράσουμε π.χ. μὲ τὸ σύμβολο $\in$ τὸ «ἀνήκει εἰς», ἢ τὸ «ἔχει συνέπεια» μὲ τὸ σύμβολο $\Longrightarrow$, εἴτε νὰ μιλήσουμε γιὰ «ὑποσύνολο», ἀντὶ «γεωμετρικὸς τόπος». Τὸ νὰ ὀνομάσουμε κάτι μὲ τὸ πραγματικό του ὄνομα, «ὁμάδα», ἢ «σχέση ἰσοτιμίας», κάθε φορὰ π.χ. ποὺ ἕνα μα-

θὰ ξαναγύριζαν σταθερὰ σὲ ἕνα ἄγονο κύκλο ἀπὸ ἀξιώματα καὶ ὁρισμούς, χωρὶς νὰ προκύπτει τίποτε νέο. Τὸ *νέο* γεννιέται μόνο μὲ τὴν *ἐνόραση*. Αὐτὴ «βλέπει ἢ προαισθάνεται σὲ ἕνα ὁρισμένο γεγονός, ὄχι τὸ γεγονὸς καθεαυτό, ἀλλὰ σὲ ἀναφορὰ πρὸς τὸ ὑποκείμενο, σχέσεις δηλαδὴ ἢ ἀνταποκρίσεις ἀνάμεσα στὸ προσλαμβανόμενο ἐνορατικὰ ἀντικείμενο καὶ τὸ ὑποκείμενο ποὺ τὸ προσλαμβάνει... Ἀντίθετα μὲ τὸ σκεπτόμενο λογικό, ποὺ χρησιμοποιεῖ δεκανίκια, ὅπως εἶναι τὰ σύμβολα, οἱ ἔννοιες, οἱ σταθερές, ἡ ἐνόραση πάει κατευθεῖαν στὸ σκοπό, λειτουργεῖ μὲ αὐτόματη ἐπαγωγή» (induction). Βλ. G. Morf. Éléments de psychologie, éd. du Mont—Blanc, Génève, (ἔκδοση τοῦ Διεθνοῦς Ἰνστιτούτου ψυχολογίας).

θηματικὸ ἀντικείμενο προσφέρεται κατὰ φυσικὸ τρόπο στὴν πορεία μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἢ γεωμετρικῆς ἐργασίας δὲν ἐξυπονοεῖ καθόλου, ὅτι εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νὰ ἀναπτύξουμε ἀπὸ τὰ πρὶν τὴν ἀφηρημένη θεωρία τῶν ὁμάδων καὶ τῶν σχέσεων ἰσοτιμίας».

Μεγαλύτερες εἶναι οἱ ἀξιώσεις τοῦ κ. Dieudonné γιὰ τὶς ἀνώτερες τάξεις τῆς μέσης ἐκπαίδευσης. Χωρὶς νὰ μποῦμε σὲ λεπτομέρειες γιὰ τὸ πρόγραμμα ποὺ προτείνει κατὰ τάξη ἀναφέρουμε ἐνδεικτικὰ τὰ ἀκόλουθα :

1. Μῆτρες καὶ ὁρίζουσες 2ης καὶ 3ης τάξης.
2. Στοιχειώδης ἀπειροστικὸς λογισμὸς (συναρτήσεις μιᾶς μόνο μεταβλητῆς).
3. Κατασκευὴ τῆς ἀντιπροσωπευτικῆς καμπύλης μιᾶς συνάρτησης, κατασκευὴ καμπύλης ποὺ ἔχει δοθεῖ σὲ παραμετρικὴ μορφὴ (μὲ χρήση τῶν παραγώγων).
5. Στοιχειώδεις ἰδιότητες τῶν μιγάδων.
5. Πολικὲς συντεταγμένες.

Εἰδικότερα, γιὰ τὶς δύο ἀνώτερες τάξεις προβλέπει : γιὰ τὴν προτελευταία, μεγαλύτερη ἐμβάθυνση τῶν «ὁμάδων» τῆς ἐπιπεδομετρίας, κυρίως σὲ ὅτι ἀφορᾶ τὴν χρήση τῶν γωνιῶν καὶ τῶν κυκλικῶν συναρτήσεων. «Τὰ μέτρα γωνιῶν πρέπει νὰ ὁρισθοῦν μὲ ἀκρίβεια σὰν ὁμοιομορφισμὸς τῆς ὁμάδας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πάνω στὴν ὁμάδα τῶν περιστροφῶν. Σὲ κάθε δηλαδὴ πραγματικὸ ἀριθμὸ x θὰ συνδυάζεται μιὰ γωνία θ(x), τέτοια ποὺ $\theta(x+y)=\theta(x)+(y)$. Ἐδῶ βέβαια πρέπει νὰ εἰσαχθοῦν οἱ μιγάδες καὶ ἡ γεωμετρικὴ παράστασή τους. Ἐπίσης σημαντικὸ εἶναι νὰ διερευνηθοῦν οἱ τετραγωνικὲς μορφὲς (formes quadratiques) στὸ ἐπίπεδο, πρᾶγμα ποὺ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ταξινόμηση τῶν κωνικῶν καμπύλων. Ἀπὸ τεχνικὴ πλευρὰ μποροῦμε νὰ ἀρχίσουμε ἀπὸ τὶς γνώσεις τῶν παραγουσῶν (ἀρχικὲς συναρτήσεις) καὶ τὴ γνώση τοῦ ἐμβαδοῦ γιὰ ἁπλοὺς τύπους περιοχῶν μὲ στοιχειώδη παραδείγματα. Ἐπίσης οἱ μαθητὲς μποροῦν νὰ ἀρχίσουν τὶς κατασκευὲς καμπύλων σὲ παραμετρικὴ μορφή.

«Στὴν τελευταία τάξη θὰ παρουσιάσουμε τὰ ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας τῶν τριῶν διαστάσεων, καθὼς καὶ τὶς συνέπειές τους, μαζὶ μὲ τὴ χρήση τῶν μητρῶν καὶ τῶν ὁριζουσῶν τρίτης τάξης. Ἀπὸ τεχνικὴ πλευρὰ θὰ μπορούσαμε νὰ ἐκθέσουμε τὴ χρήση τῶν παραγουσῶν (ἀρχικὲς συναρτήσεις) γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τοὺς ἁπλοὺς τύπους ὄγκου καὶ νὰ εἰσαγάγουμε τὴ γνώση τῶν πολικῶν συντεταγμένων καὶ τὴ μέθοδο κατασκευῆς καμπύλης ἀπὸ τὴν πολικὴ ἐξίσωσή της. Μποροῦμε, τέλος, νὰ ὁρίσουμε καὶ νὰ σπουδάσουμε τοὺς λογαρίθμους καὶ τὶς ἐκθετικὲς συναρτήσεις (χωρὶς ἀπόδειξη τῆς ὕπαρξης) ἐπιμένοντας στὸ γεγονὸς ὅτι ἐδῶ πρόκειται γιὰ ὁμογραφισμὸ ὁμάδων».

Νομίζουμε ὅτι ἀπὸ τὰ κείμενα ποὺ παραθέσαμε ξεκαθαρίζει ἀρκετὰ τὸ πνεῦμα τῶν μεταρρυθμίσεων ποὺ προτείνει ὁ κ. Dieudonné. Πρόκειται, ὅπως εἴπαμε, γιὰ ἕνα πρόγραμμα «maximum» ποὺ ἡ ἐφαρμογή του ἀπαιτεῖ ριζικὴ μεταρρύθμιση. Μιὰ τέτοια ὅμως μεταρρύθμιση δὲν πραγματοποιεῖται τόσο εὔκολα καὶ ἀπότομα. Ὁ ἴδιος ἄλλωστε ἀναγνωρίζει συμπερασματικά, ὅτι θὰ πρέπει νὰ προηγηθεῖ κάποιος πειραματισμὸς τῶν νέων προγραμμάτων σὲ πρότυπα σχολεῖα, πρὶν υἱοθετηθοῦν σὲ ἐθνικὴ κλίμακα. «Ὡστόσο, καταλήγει, ἔχω τὴν πεποίθηση ὅτι οἱ δυσκολίες, ὅσο κι' ἂν εἶναι μεγάλες, δὲν εἶναι ἀξεπέραστες καὶ δὲν θὰ πρέπει νὰ ἐμποδίσουν μιὰ πραγματικὴ βελτίωση στὴ διδασκαλία τῆς Ἐπιστήμης καὶ στὸ ἐπιστημονικὸ πνεῦμα ποὺ τὸ θεωρῶ σὰν μιὰ ἀπὸ τὶς πρωταρχικὲς λειτουργίες τῆς σημερινῆς κοινωνίας».

Πρὶν μποῦμε στὸ δεύτερο τομέα τῶν ἐργασιῶν τοῦ σεμιναρίου, πρέπει νὰ προσθέσουμε πῶς ἡ εἰσήγηση τοῦ κ. Dieudonné πλαισιώθηκε ἀπὸ δύο εἰδικότερες διαλέξεις: μία τοῦ Γάλλου καθηγητῆ κ. G. Guilbaut μὲ θέμα «Νέες ἐφαρμογὲς τῶν μαθηματικῶν στὴ βιομηχανία καὶ στὶς κοινωνικὲς ἐπιστῆμες» καὶ δεύτερη τοῦ Ἀμερικανοῦ A. Tucker (Πανεπιστήμιο Princeton) μὲ θέμα, «Συνέπειες στὸ ἐπίπεδο τῆς ἐκπαιδεύσεως τῶν νέων ἐφαρμογῶν τῶν μαθηματικῶν στὴ βιομηχανία καὶ στὶς κοινωνικὲς ἐπιστῆμες». Καὶ μόνο ἀπὸ τοὺς τίτλους τῶν δύο αὐτῶν διαλέξεων καταφαίνεται ἡ καθολικότητα τῆς σημασίας ποὺ ἔχει ὁ ἐκσυγχρονισμὸς τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν. Σημειώνουμε ἀκόμη ὅτι τὴν κάθε εἰσήγηση καὶ τὴν κάθε διάλεξη ἀκολουθοῦσε ἐξαντλητικὴ συζήτηση στὴν ὁλομέλεια καὶ κατόπιν ἐπεξεργασία καὶ διατύπωση προτάσεων σὲ εἰδικὲς μερικότερες συσκέψεις τῶν συνέδρων, ἀφοῦ πρῶτα χωριζόταν σὲ ὁμάδες ἰσάριθμες πρὸς τὰ εἰδικώτερα θέματα πρὸς ἐπεξεργασία. Οἱ προτάσεις τῶν ὁμάδων ὑποβαλλόταν ἀπὸ ἕνα εἰσηγητὴ στὴν ὁλομέλεια πρὸς τελικὴ ἔγκριση καὶ τὰ σχετικὰ κείμενα καταθέτονταν στὸ προεδρεῖο.

II. Πρὸς νέα ἀναλυτικὰ προγράμματα καὶ νέα διδακτικὴ

Ὁ πρόεδρος τῶν ἐργασιῶν τοῦ τομέα αὐτοῦ κ. Fehr ἔκαμε μιὰ συστηματικὴ διατύπωση τῶν προβλημάτων ποὺ προβάλλονται ἀπὸ τὴν ἀνάγκη τοῦ ἐκσυγχρονισμοῦ τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν, τόσο στὴ στοιχειώδη, ὅσο καὶ στὴ μέση ἐκπαίδευση. Θὰ ἐπιμείνουμε ἐδῶ περισσότερο στὰ σχετικὰ μὲ τὴ μέση ἐκπαίδευση, παρ' ὅλο ποὺ ἡ ἐπαφή της μὲ τὴ δημοτικὴ εἶναι ἄμεση καί, ὡς ἕνα σημεῖο, ὑπάρχει ἀνταπόκριση καὶ ἀλληλοεξάρτηση ἀνάμεσά τους, τόσο, ποὺ νὰ μὴν εἶναι νοητὴ ἡ μεταρρύθμιση τῆς μιᾶς ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ἄλλη.

Ἰδοὺ οἱ βασικὲς ἀπόψεις τοῦ κ. Fehr :

1. «Τὸ νέο μαθηματικὸ καθεστὼς στὴν ἀνώτερη ἐκπαίδευση καὶ οἱ σύγχρονες μαθηματικὲς ἔρευνες κάμνουν ἀπαραίτητη μιὰ ἀναθεώρηση τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς, στὴ μέση ἐκπαίδευση. Στὶς νέες ἀντιλήψεις τῶν μαθηματικῶν γίνεται λόγος γιὰ ἀφηρημένη ἄλγεβρα, γιὰ τοπολογία, γιὰ ἀνυσματικὰ διαστήματα, γιὰ δομὲς (structures) καὶ οὕτω καθεξῆς, γνώσεις ποὺ συνεπάγονται τὴ θεώρηση τῶν μαθηματικῶν κάτω ἀπὸ νέο φῶς.

2. Οἱ νέες ἐφαρμογὲς τῶν μαθηματικῶν παρουσιάζουν νέα προβλήματα. Ὁ λογισμὸς τῶν πιθανοτήτων καὶ ἡ στατιστικὴ παραγωγὴ (deduction statistique), οἱ πεπερασμένες μαθηματικὲς δομές, ἡ θεωρία τῶν παιγνιδιῶν, ἡ ἀριθμικὴ ἀνάλυση (analyse numérique), ἡ αὐτομάτιση, συνεπάγονται ἕνα μετασχηματισμὸ τῶν χρήσεων τῶν μαθηματικῶν.

3. Ἡ ἀνάπτυξη τῆς συμβολικῆς λογικῆς καὶ ἡ στενὴ σχέση ποὺ παρουσιά-

ζει μὲ τὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι χρησιμοποιεῖ ποσοτικὰ σύμβολα, διάφορους τύπους μεταβλητῶν, προτάσεις, σχέσεις, συναρτήσεις, δομές, κάμνουν ἀναγκαία μιὰ ἀναθεώρηση τῶν ἀντιλήψεων ποὺ βρίσκονται στὴ βάση τῶν κλασικῶν τρόπων σπουδῆς τῶν μαθηματικῶν.

4. Ἡ τεράστια ἀνάπτυξη τῶν γνώσεων στοὺς διάφορους κλάδους τῶν μαθηματικῶν ἀπαιτεῖ τὴ διεύρυνση τῶν βάσεων τῆς προπαρασκευαστικῆς ἐκπαίδευσης. Οἱ μαθηματικὲς σπουδὲς ἀπαιτοῦν σήμερα μεθόδους πιὸ ἀποτελεσματικές, πληρότερες καὶ γενικότερες.

5. Ἡ ἐξέλιξη στὴν πολιτιστική, βιομηχανικὴ καὶ οἰκονομικὴ συγκρότηση πολλῶν χωρῶν ἀπαιτεῖ μιὰ θεμελιώδη ἐκπαιδευτικὴ μεταρρύθμιση. Πρέπει ὅλο καὶ μεγαλύτερος ἀριθμὸς πρόσωπα νὰ ἀποκτοῦν καλύτερη ἐπιστημονικὴ μόρφωση. Ἀκόμη καὶ οἱ βέβηλοι ὀφείλουν νὰ φθάσουν στὴν κατανόηση τῆς ἐπιστήμης· καὶ δὲν εἶναι σήμερα δυνατὸ νὰ νοηθεῖ χωρὶς μαθηματικὲς γνώσεις».

Γιὰ τὴ διαμόρφωση τῶν νέων προγραμμάτων πρέπει ἰδιαίτερα νὰ δοθεῖ ἀπάντηση στὰ ἀκόλουθα ἐρωτήματα:

1. Ποιά μαθηματικὰ ὀφείλουμε νὰ διδάξουμε; αὐτὸ δὲν ἀναφέρεται μόνο στὴν ὕλη, ἀλλὰ καὶ στὶς ἔννοιες, στὴν ὁρολογία καὶ στὸ συμβολισμὸ ποὺ θὰ υἱοθετηθεῖ, καθὼς καὶ στὴν ὀργάνωση καὶ προγραμμάτιση αὐτῆς τῆς ὕλης.

2. Σὲ ποιοὺς πρέπει νὰ διδαχθοῦν τὰ μαθηματικά; σὲ ὅλους τοὺς μαθητὲς ἢ μόνο σὲ κείνους ποὺ ἔχουν κλίση σ' αὐτά; ἢ καὶ σὲ κείνους ποὺ προορίζονται γιὰ ἐπιστημονικὲς σπουδές;

3. Σὲ ποιά μορφὴ θὰ διδάξουμε τὰ μαθηματικά; σὰν ἕνα σύνολο πρακτικῆς διδασκαλίας; Σὰν ἕνα σύνολο ἀπὸ ἰδέες; Σὰν ἕνα σύνολο ἀπὸ δομὲς (structures) ἐπεξεργασμένες ἐνορατικὰ ἢ μὲ λογικὴ αὐστηρότητα; Ἢ μήπως σὰν μιὰ συγκεκριμένη μελέτη ποὺ καταλήγει σὲ ἀφηρημένη ἐπιστήμη; Πρέπει τάχα νὰ ἀποβλέψουμε στὸ νὰ «κάμνουμε μαθηματικὰ» καὶ σύγχρονα «νὰ κατανοοῦμε τὶς ἔννοιες» ἢ πρέπει νὰ τονίζουμε περισσότερο τὴ μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ αὐτὲς μορφές; Πρέπει μήπως ἀκόμη, νὰ θεωροῦμε ξεχωριστὰ τὴν ἄλγεβρα, τὴν ἐπιπεδομετρία καὶ τὴ στερεομετρία τὴν τριγωνομετρία, τὴν ἀνάλυση κ.λ.π. ἢ νὰ βλέπουμε στοὺς κλάδους αὐτοὺς τοὺς σταθμοὺς μιᾶς ἀδιάκοπης ἐξέλιξης τῶν μαθηματικῶν;

Αὐτὲς εἶναι οἱ γενικὲς γραμμὲς τῶν προβλημάτων ποὺ προτάθηκαν ἀπὸ τὸν κ. Fehr καὶ συζητήθηκαν ἐπὶ μία ὁλόκληρη ἑβδομάδα ἀπὸ τὴν ὁλομέλεια καὶ τὶς ὁμάδες ἐπεξεργασίας προτάσεων. Θὰ ἦταν βέβαια ἐνδιαφέρον νὰ ἐκτεθοῦν ἐδῶ οἱ εἰδικότερες παρατηρήσεις τοῦ κ. Fehr γιὰ κάθε κλάδο τῶν μαθηματικῶν σχετικὰ μὲ τὸ ἀναλυτικὸ πρόγραμμα καὶ τὴ διδακτικὴ ποὺ ἐπιβάλλει ἕνας καλὰ νοημένος ἐκσυγχρονισμός. Θεωροῦμε ὅμως προτιμότερο νὰ περάσουμε ἀμέσως στὰ κύρια σημεῖα τῶν λύσεων ποὺ προτάθηκαν ὕστερα ἀπὸ τὶς συζητήσεις, ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸς ἕνας ἐπαρκὴς κατατοπισμὸς κάθε ἐνδιαφερομένου σχετικὰ μὲ τὴν οὐσία καὶ τὴ μορφὴ τῶν μεταρρυθμίσεων ποὺ προτείνονται. Προσθέτουμε ἀκόμη ὅτι ἀποφασίστηκε τελικὰ ἡ συγκρότηση, μὲ φροντίδα τοῦ Ο.Ε.Ο.Σ., στὸ Παρίσι, μιᾶς Ἐπιτροπῆς ἀπὸ μαθηματικούς, ψυχολόγους καὶ παιδαγωγοὺς ποὺ θὰ ἀναλάβει τὴ σύνταξη λεπτομερειακοῦ ἀναλυτικοῦ προγράμματος, σύμφωνα μὲ τὶς ἀποφάσεις τοῦ σεμιναρίου, τόσο γιὰ τὴ στοιχειώδη, ὅσο καὶ γιὰ τὴ μέση ἐκπαίδευση, καθὼς καὶ γιὰ τὶς εἰδικὲς προπαιδευτικὲς τάξεις τῶν ἀνωτάτων σχολῶν. Τὸ πρόγραμμα αὐτὸ θὰ σταλεῖ στὶς χῶρες—μέλη τοῦ Ο.Ε.ΟΣ. μὲ τὴ σύσταση νὰ προσαρμοσθεῖ στὸ τοπικὸ ἐκπαιδευτικὸ καθεστώς, νὰ συνταχθοῦν προσωρινὰ προγράμματα καὶ βιβλία γιὰ πειραματικὴ ἐφαρμογὴ σὲ πρότυπα σχολεῖα καὶ νὰ ἀκολουθήσει τελικὰ ἡ ὁριστικὴ διαμόρφωση καὶ ἐφαρμογή του σὲ ἐθνικὴ κλίμακα, μὲ τὴν ἐλεύθερη συγγραφὴ διδακτικῶν βιβλίων, ὥστε, μὲ τὸν καιρό, νὰ γίνει μιὰ φυσικὴ ἐπιλογὴ τῶν καλύτερων.

Οἱ εἰδικὲς διαλέξεις ποὺ πλαισίωσαν τὴν εἰσήγηση τοῦ κ. Fehr εἶναι οἱ ἀκόλουθες :

1. Τοῦ καθηγητῆ G. Choquet (Πανεπ. Παρισίων) μὲ θέμα: «Ὁ ἀριθμὸς καὶ ἡ θεωρία τοῦ ἀριθμοῦ». Ὁ κ. Choquet ἀναφέρθηκε κυρίως στὴν ψυχολογικὴ πλευρὰ σχετικὰ μὲ τὴ γένεση τῆς ἔννοιας τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων κατὰ τὴν παιδικὴ ἡλικία καὶ τὰ προσφορότερα μέσα διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν στὴ στοιχειώδη ἐκπαίδευση. Ἐπικαλέσθηκε γιὰ τὴ στήριξη τῶν ἀπόψεών του προπάντων τὸ ἔργο τοῦ ψυχολόγου καὶ παιδαγωγοῦ Jean Piaget ποὺ πάνω σ' αὐτὸ στηρίζεται σήμερα ἡ νέα παιδαγωγικὴ τῶν μαθηματικῶν στὴν Εὐρώπη (τελευταῖα καὶ στὶς Η.Π.Α.). Ἔκαμε ἐπὶ πλέον ἐπίδειξη τοῦ συστήματος τῶν «ἔγχρωμων ἀριθμῶν» τῶν Cuisenaire—Gategno ποὺ ἐπιτρέπει ἀμεσότερα, ταχύτερα καὶ ἀσφαλέστερα τὸ σχηματισμὸ τῶν πρώτων ἀριθμητικῶν ἐννοιῶν καὶ τὴ διδασκαλία ὅλων τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων μέχρι καὶ τῶν λογαρίθμων. Τὸ χρησιμοποιούμενο ὑλικὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἔγχρωμα ξύλινα ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἐπιμήκη μὲ ἴση σὲ ὅλα τετράγωνη τομὴ καὶ σὲ μήκη ἀνάλογα μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ παριστάνουν. Τὰ χρώματα ἐκφράζουν τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, ..., 10. Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ συστήματος τῶν ἔγχρωμων ἀριθμῶν ἔχει σήμερα μεγάλη διάδοση σὲ ὅλες τὶς χῶρες τῆς Εὐρώπης καὶ στὶς Η.Π.Α. Ὑπάρχουν βέβαια καὶ ἄλλα συστήματα, ὅπως τῆς Montessori, Stern, Diene, Lazar, Frenet κ.λ.π. γιὰ τὴ διδασκαλία τῆς ἀριθμητικῆς. Ἡ προτίμηση στὸ ἕνα ἢ στὸ ἄλλο εἶναι ζήτημα ὑποκειμενικὸ τοῦ δασκάλου. Θεωρῶ ὅμως χρέος μου νὰ τονίσω—καὶ αὐτὸ ἐνδιαφέρει προπάντων τὴ στοιχειώδη ἐκπαίδευση—ὅτι τὸ σύστημα, γιὰ τὸ ὁποῖο ἔγινε περισσότερο λόγος στὸ σεμινάριο, εἶναι τὸ σύστημα τῶν «ἔγχρωμων ἀριθμῶν» ἐπινοημένο ἀπὸ τὸ Βέλγο Cuisenaire καὶ τελειοποιημένο ἀπὸ τὸν Ἄγγλο μαθηματικὸ—παιδαγωγὸ Gategno.

Σχετικὰ μὲ τὴ μέση ἐκπαίδευση ὁ κ. Choquet παρουσίασε στὸ σεμινάριο καὶ ἀνάπτυξε πέντε νέα θεμελιώδη ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας ποὺ ἐπινόησε ὁ ἴδιος καὶ εἶναι δυνατὴ μ' αὐτὰ ἡ ἀνάπτυξη ὅλης τῆς γεωμετρίας κατὰ τρόπο ἐπιστημονικὰ ἄρτιο, αὐστηρὸ καί, φυσικά, συνεπῆ μὲ τὴ σύγχρονη ἀντίληψη τῶν μαθηματικῶν. Προσθέτουμε ἐδῶ ὅτι ὁ κ. Choquet, ἀρκετὰ νέος, ὅπως καὶ ὁ κ. Dieudonné, εἶναι ἀπὸ τοὺς κυριώτερους ἐμπνευστὲς τοῦ ἔργου τῆς ὁμάδας «Nicolas Bourbaki».

2. Οἱ γενικὲς γραμμὲς τῶν λύσεων ποὺ προτάθηκαν γιὰ τὴν ἄλγεβρα εἶναι οἱ ἀκόλουθες καὶ ὀφείλονται στὸ Βέλγο μαθηματικὸ—παιδαγωγὸ κ. W. Servais καὶ στὴ Γαλλίδα μαθηματικὸ Δίδα L. Félix (1).

---

1) Στὸ περιοδικὸ «Παιδεία καὶ Ζωή», τεύχη 52, 53 καὶ 54 τοῦ 1956 δόσαμε σὲ

Βάση τῆς μαθηματικῆς ἀγωγῆς, εἶναι ἡ γνώση τῆς ψυχολογίας. Ὀφείλουμε, εἶπε, νὰ παραδεχθοῦμε ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀληθινὴ ἀπόκτηση γνώσεων χωρὶς τὴν ἐνεργὸ συμμετοχὴ τῆς προσωπικότητας τοῦ μαθητῆ. Τὰ κακὰ ἀποτελέσματα τῆς δογματικῆς διδασκαλίας, ἀκόμη καὶ τῆς πιὸ ὀρθόδοξης, γίνονται ἰδιαίτερα αἰσθητὰ προπάντων στὴν ἄλγεβρα, ὅπου ὁ παθητικὸς ἐθισμὸς (dressage) μὲ τὴ βοήθεια ἀρχῶν καὶ κανόνων μαθαίνει στὸ μαθητὴ νὰ ἐνεργεῖ περισσότερο σύμφωνα μὲ ἕνα κώδικα ἀπὸ ἐπιτρεπόμενες καὶ ἀπαγορευόμενες πράξεις, ἀντὶ μὲ πραγματικὴ κατανόηση. Τὸ κακὸ κινδυνεύει νὰ γίνει ἀκόμη μεγαλύτερο, γιατί, στὴν ἄλγεβρα, εἶναι δυνατὸ μὲ τὸν πιθηκικὸ ἐθισμὸ νὰ δημιουργηθοῦν προσδιορισμένα ἀνακλαστικὰ ἀθεράπευτα στὸν ἀλγεβρικὸ λογισμό. Οἱ λογικὲς μαθηματικὲς δομὲς (structures operatoires, κατὰ Piaget) ποὺ ἡ σπουδή τους εἶναι τὸ κύριο ἔργο τῆς ἄλγεβρας μόνο μὲ τὴν προσωπικὴ ἐνεργὸ συμμετοχὴ τοῦ μαθητῆ εἶναι δυνατὸ νὰ ἐγκατασταθοῦν μόνιμα στὸ πνεῦμα. Ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμὸς θὰ δώσει στήριγμα καὶ ἔκφραση σὲ κάθε λογικὴ δομὴ ποὺ μόνο μὲ τὴν αὐτενέργεια τοῦ μαθητῆ μπορεῖ νὰ κατακτηθεῖ καὶ δὲ μπορεῖ κατὰ κανένα τρόπο νὰ τείνει ἀφεαυτοῦ στὴ δημιουργία μιᾶς τέτοιας δομῆς. Οἱ ποικίλες ἐφαρμογές, ζωντανές, ὅσο καὶ ἐπίκαιρες, θὰ ἐπιτρέψουν νὰ φανερωθεῖ ἡ πολύπλευρη ἀξία τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἐργαλείου καὶ νὰ ἐλεγχθεῖ ἡ ἐμπέδωση τῶν νοητικῶν προτύπων (modèles) ποὺ ἔχουν σχηματισθεῖ.

Γιὰ νὰ φθάσει ὅμως ἡ ἄλγεβρα στὸ σκοπό της εἶναι ἀνάγκη νὰ υἱοθετηθεῖ κατὰ τὴ διδασκαλία ὁ νέος μαθηματικὸς συμβολισμὸς καὶ ἡ νέα ὁρολογία, νὰ ἐγκαταλειφθοῦν οἱ ἀπαρχαιωμένες ἀλγεβρικὲς ἔννοιες καὶ γνώσεις καὶ νὰ εἰσαχθοῦν οἱ νεώτερες καὶ κυρίως οἱ ἰδιότητες τῆς ἄλγεβρας τῶν «συνόλων» καὶ τῶν «συναρτήσεων» μὲ πλατιὰ ἐπέκταση στὴν ἀριθμητικὴ καὶ στὴ γεωμετρία.

Ἡ Δὶς Félix, συγγραφέας ἔργων, ὅπως «Ἡ σύγχρονη ὄψη (aspect moderne) τῶν Μαθηματικῶν» καὶ «Μοντέρνα ἔκθεση τῶν στοιχειωδῶν μαθηματικῶν» ὑποστήριξε ὅτι ὅλοι οἱ νοητικὰ κανονικοὶ μαθητὲς τοῦ πρώτου κύκλου τῆς μέσης παιδείας (11, 12, 13 καὶ 14 ἐτῶν στὴ Γαλλία) εἶναι ἱκανοὶ νὰ παρακολουθήσουν τὰ μαθηματικά, νὰ σχηματίσουν βασικὲς ἀλγεβρικὲς ἔννοιες καὶ νὰ κατανοήσουν θεμελιώδεις ἀλγεβρικὲς πράξεις καὶ σχέσεις. Στὴν ἡλικία π.χ. τῶν 11 καὶ 12 ἐτῶν, δηλαδὴ στὶς δύο ἀνώτερες τάξεις τοῦ δικοῦ μας δημοτικοῦ μποροῦν κάλλιστα νὰ συλλάβουν καὶ νὰ ἀφομοιώσουν τὴν ἔννοια τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ (μὲ τὴ συμμετρία) καὶ τὴν πρόσθεση τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, καθὼς καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸ ἀρνητικοῦ μὲ πολλαπλασιαστὴ θετικὸ (νὰ βροῦν π.χ. τὰ $^2/_3$ τοῦ —15 κ.λ.π.). Στὸν ἀνώτερο κύκλο τῆς μέσης ἐκπαίδευσης εἶναι κάλλιστα δυνατὸ νὰ κατανοήσουν οἱ μαθητὲς ὅλο τὸ βάθος τῆς ἄλγεβρας σὰν μηχανισμοῦ ποὺ εἶναι ἱκανὸς νὰ ἐρευνᾶ τὶς σχέσεις μεταξὺ στοιχείων τῶν συνόλων καὶ μάλιστα τὶς σχέσεις ἰσοτιμίας καὶ τὶς σχέσεις τάξεως, καθὼς καὶ τὶς πράξεις ἐκεῖνες ποὺ δημιουργώντας νέα μαθηματικὰ ὄντα ἐπιτρέπουν τὴν ἐπέκταση τῶν ἀρχικῶν συνόλων. Ἔτσι ἡ ἄλγεβρα ἐρευνᾶ τὸ μηχανισμὸ τῶν μαθηματικῶν ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴ φύση τοῦ ἀντι-

---

μετάφρασή μας διάλεξη τοῦ κ. Servais στὸ «Διεθνὲς Κέντρο Παιδαγωγικῶν Σπουδῶν τῶν Σεβρῶν» μὲ θέμα: «Ἀνακαίνιση στὴ Διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν».

κειμένου ποὺ μελετᾶ (ἀριθμητικοῦ, γεωμετρικοῦ, ἀνυσματικοῦ, τοπολογικοῦ).

Ἂν ἡ γεωμετρία στὸν κατώτερο κύκλο εἶναι—καὶ πρέπει νὰ εἶναι—ἐνορατικὴ καὶ ἄσχετη πρὸς τὴν ἄλγεβρα, στὸν ἀνώτερο ὅμως κύκλο ἕνα μεγάλο μέρος της «ὀφείλει νὰ εἶναι ἄλγεβρα, καὶ αὐτὸ πρέπει νὰ ὑπογραμμισθεῖ». Ἐξ ἄλλου ἡ γεωμετρία παρέχει στὴν ἄλγεβρα πρότυπα (modèles) ἀπαραίτητα γιὰ τὴν ἀνάπτυξή της. Μὲ ἕνα λόγο—πάντοτε κατὰ τὴ Δίδα Félix—«στὸν ἀνώτερο κύκλο ἡ γεωμετρία γίνεται ἀνάλυση». Καὶ ἡ Δὶς Félix, ὅπως καὶ ὁ κ. Servais, τόνισε τὴν ἀνάγκη (αὐτὸ ἄλλωστε ἀναγνωρίσθηκε ὁμόφωνα) νὰ μὴ χάνεται καμιὰ εὐκαιρία, τόσο στὸν κατώτερο, ὅσο καὶ στὸν ἀνώτερο κύκλο, γιὰ τὴν ἐξοικείωση τῶν μαθητῶν στὸ νέο μαθηματικὸ συμβολισμό, τὴν ὁρολογία καὶ τὸ λεκτικό. «Τὸ νέο πνεῦμα εἰσάγει νέα προβλήματα, φωτίζει περισσότερο τὰ παλαιά. Μὲ τὴν ἴδια του τὴ δύναμη θὰ διαμορφώσει τὰ νέα προγράμματα. Ἐκεῖνο ποὺ κατ' ἀρχὴν ἐνδιαφέρει δὲν εἶναι τὸ περιεχόμενο, ὅσο ὁ τρόπος ποὺ θὰ κατανοηθεῖ».

Εἰδικά, τώρα, γιὰ τὸ πρόγραμμα ἢ καλύτερα γιὰ τὸ τί καὶ πῶς πρέπει νὰ διδαχθεῖ ἀπὸ τὴν ἄλγεβρα πρέπει νὰ ποῦμε ὅτι ὁ κ. Servais στάθηκε περισσότερο στὰ προβλήματα μεθοδολογίας. Θὰ δώσουμε τὰ κυριώτερα σημεῖα τῶν ἀπόψεών του:

1. «Στὴ σημερινὴ κατάσταση τῶν μαθηματικῶν, θὰ χρειαζόταν νὰ προταθεῖ ὄχι ἁπλῶς ἕνα πρόγραμμα ἄλγεβρας πλάϊ σ' ἕνα πρόγραμμα ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρίας, ἀλλὰ ἕνα πρόγραμμα πιὸ ἑνιαῖο, ὅπου τὰ μαθηματικὰ δὲν θὰ εἶναι πιὰ τεμαχισμένα σὲ ξεχωριστοὺς κλάδους μὲ ἀδιαπέραστα φράγματα. Γιατί π.χ. νὰ ὑποχρεώσουμε ἕνα μαθητὴ νὰ λύσει ἕνα πρόβλημα μὲ τὴν ἀριθμητική, ὅταν ἡ ἀλγεβρική του λύση εἶναι ἄμεση; Γιατί νὰ χωρίζουμε τὴν τριγωνομετρία ἀπὸ τὴ γεωμετρία καὶ νὰ μὴν ἐπωφεληθοῦμε ἀπὸ μιὰ συγχώνευσή της μὲ τὴν ἀναλυτικὴ γεωμετρία καὶ τὴν ἄλγεβρα;

2. «Ὅταν θέλουμε νὰ συγχρονίσουμε τὴ διδασκαλία τῆς ἄλγεβρας, ὅπως καὶ τῶν μαθηματικῶν δὲν ἀρκεῖ νὰ συσσωρεύουμε προσθετικὰ τὰ νέα στοιχεῖα, ποὺ μᾶς ἔρχονται τὴν τελευταία στιγμή, πάνω στὰ παλαιὰ κείμενα. Πρέπει, ἀντίθετα, νὰ ξαναχτίζεται ἀπὸ τὴ βάση μιὰ συνολικὴ οἰκοδομή, συγκροτημένη σύμφωνα μὲ τὶς μοντέρνες ἰδέες.

3. «Ἕνα συγχρονισμένο πρόγραμμα ποὺ θὰ ἀγνοοῦσε τὴν ψυχολογία τῆς διδακτικῆς, θὰ μποροῦσε νὰ εἶναι πιὸ δογματικὸ ἀπὸ τὰ παλαιὰ προγράμματα. Ἕνα πρόγραμμα συγχρονισμένο ὀφείλει νὰ εἶναι τέτοιο, τόσο ἀπὸ πλευρὰ μαθηματική, ὅσο καὶ ψυχολογική.

4. «Μιὰ ἐκπαίδευση ὀφείλει νὰ παρουσιάζει ὄχι μόνο ἕνα πρόγραμμα διδακτέας ὕλης, ἀλλὰ καὶ νὰ ἐκπαιδεύει διδακτικά. Ὁ ἀντικειμενικός μας σκοπὸς δὲν περιορίζεται στὴ μετάδοση ἐκείνου ποὺ ξέρουμε σὲ μαθητὲς ὑπάκοους ἀκροατὲς καὶ μηχανικοὺς ἐκφωνητές. Ὀφείλει νὰ συμβάλλει στὴν ἀνάπτυξη τῶν ἱκανοτήτων τοῦ μαθητῆ στὸ νὰ προσανατολίζεται καὶ νὰ ἀντιμετωπίζει αὐτὸ ποὺ τοῦ εἶναι ἄγνωστο. Χρειάζεται λοιπὸν περισσότερο νὰ ξανοίξουμε στὸ μαθητὴ τὴ μαθηματικὴ σκέψη, παρὰ νὰ τὸν γυμνάσουμε στὶς μαθηματικὲς ρουτίνες.

5. «Ἐνδιαφέρει ἐπίσης νὰ δώσουμε, ἀρχίζοντας ἀπὸ τὴ μέση ἐκπαίδευση, μιὰ ἰδέα τῆς ἄλγεβρας ποὺ νὰ μὴν περιορίζεται στὶς πράξεις πάνω σὲ ἀριθμοὺς ἢ

ἀριθμητικὲς μεταβλητές. Εἶναι σὰν νὰ δίνουμε μιὰ κολοβωμένη καὶ ψεύτικη παρουσίαση τῆς ἄλγεβρας προβάλλοντάς την σὰν ἐπέκταση τῆς ἀριθμητικῆς. Ἡ ἀριθμητικὴ ἔχει νὰ κάμει μὲ ἀριθμητικοὺς λογισμοὺς καὶ μὲ ἰδιότητες τῶν συνόλων τῶν ἀριθμῶν, ἐνῶ ἡ ἄλγεβρα εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν δομῶν λογικῶν πράξεων, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴ φύση τοῦ ἀντικειμένου ποὺ ἐξετάζουν.

6. «Νὰ συντελέσουμε στὸ νὰ κατανοηθεῖ ὁ δυναμισμὸς τῶν λογικῶν αὐτῶν πράξεων ἀπὸ πλευρὰ ψυχολογική, νὰ τὸν ἐκφράσουμε καὶ νὰ τὸν σπουδάσουμε στὴ μαθηματική του διατύπωση, αὐτὸς εἶναι ὁ σκοπὸς μιᾶς διδασκαλίας τῆς ἄλγεβρας προσαρμοσμένης στὸ ἀντικείμενο αὐτοῦ τοῦ μαθήματος».

Βάση τοῦ προγράμματος τῆς ἄλγεβρας στὸν πρῶτο κύκλο τοποθετοῦνται τὰ σύνολα, γιατὶ αὐτὰ ἀποτελοῦν τὸ θεμέλιο τῶν δομῶν τῶν μαθηματικῶν. Εἶναι, ἀπὸ τὴν ἄλλη, δεμένα μὲ τὴ καθημερινὴ ζωὴ καί, ἀπὸ ψυχολογικὴ πλευρά, οἱ σχετικὲς μ' αὐτὰ γνώσεις εἶναι οἱ πιὸ προσιτές. Τὰ στοιχεῖα τῆς ἄλγεβρας τῶν συνόλων δίνουν παραδείγματα ἰδιοτήτων καὶ λογικῶν ἐπεξεργασιῶν ποὺ δὲν ἀναφέρονται σὲ ἀριθμοὺς καὶ ἔτσι, ἀμέσως ἀπὸ τὴν ἀρχή, ἡ περιοχὴ τῆς ἄλγεβρας δὲν φαίνεται περιορισμένη στὴν ἄλγεβρα τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Μποροῦμε κάλλιστα στὸν πρῶτο κύκλο νὰ περιλάβουμε:

α) Τὰ σύνολα: στοιχεῖα, ἰσότητα, ἀναφορά, (appartenance) ταυτότητα, ἐγκλεισμὸ (inclusion), ἀλληλοτομὴ (intersection), συνένωμα (réunion), διαφορά, συμπληρωματικότητα τῶν μερῶν ἑνὸς συνόλου.

β) Τὶς ἰδιότητες ποὺ ὁρίζονται σὲ ἕνα σύνολο, τὰ ἀντίστοιχα ὑποσύνολα. Τὴν καθολικότητα καὶ τὴν ὕπαρξη, τὴν ἰσοδυναμία, τὴ συνεπαγωγὴ (implication), τὴ σύζευξη (conjonction), τὸ διαχωρισμὸ (disjonction) καὶ τὴν ἄρνηση (négation) τῶν προτάσεων σχετικὰ μὲ τὰ σύνολα.

Μὲ τὴν ἀπαρίθμηση αὐτὴ δὲν ἕπεται ὅτι προτείνεται νὰ ὑποβληθοῦν οἱ μαθητὲς στὴ διδασκαλία τῆς θεωρίας τῶν συνόλων. Πρόκειται νὰ τοὺς βοηθήσουμε νὰ ἀποκτήσουν αὐτενεργώντας, μὲ πρακτικὲς ἀσκήσεις σὲ πολλὰ παραδείγματα, τὶς νοητικὲς δομὲς ποὺ θὰ χρησιμοποιηθοῦν σὰν βάση τῶν γνώσεων αὐτῶν. Ἔτσι οἱ βασικὲς ἰδιότητες τῆς ἄλγεβρας τῶν συνόλων θὰ ἀνακαλυφθοῦν ἀπὸ τοὺς ἴδιους τοὺς μαθητές, ἀντὶ νὰ προταθοῦν σ' αὐτοὺς ἀπὸ μᾶς.

Μεγάλη σημασία δίνεται στὴ χρήση τοῦ νέου μαθηματικοῦ συμβολισμοῦ στὴν ἄλγεβρα, γιατὶ εἶναι ἀμεσότερα νοητὸς σὰν πλησιέστερος πρὸς τὴ λογικὴ καὶ προτιμᾶται ἀπὸ τὸ μαθητή. Ὁ συμβολισμὸς αὐτὸς ἐξοικονομεῖ πολύτιμη ψυχικὴ ἐνέργεια ποὺ ξοδεύεται στὴν τρεχούμενη λεκτικὴ ἔκφαση καὶ ἔτσι συντομεύει καὶ φωτίζει τοὺς δρόμους πρὸς τὴν κατανόηση. Τοὺς νέους συμβολισμοὺς συνοδεύει καὶ νέα φρασεολογία σὲ νέο λεκτικό.

Θὰ πρέπει ἀκόμη νὰ προσθέσουμε ὅτι οἱ συζητήσεις ποὺ ἀκολούθησαν τὶς διαλέξεις τοῦ κ. Servais καὶ τῆς Δίδος Félix κατάληξαν στὸ ὁμόφωνο συμπέρασμα ὅτι ἡ ἄλγεβρα πρέπει νὰ εἰσάγεται ἀπὸ πολὺ νωρὶς (στὴν ἡλικία τῶν 10 ἐτῶν τὰ παιδιὰ εἶναι σὲ θέση νὰ ἀφομοιώσουν βασικὲς ἀλγεβρικὲς δομὲς καὶ ἔννοιες). Πρέπει ἐπίσης, ὅσο εἶναι δυνατὸ νωρίτερα, ἡ ἄλγεβρα νὰ συναντήσει τὴ γεωμετρία. Ὁ δεσμός της μὲ τὴν ἀριθμητικὴ εἶναι φυσικός, μὰ ὄχι ἀποκλειστικός. Κάθε ἀριθμητικὴ λύση προβλήματος εἶναι στὸ βάθος καμουφλαρισμένη ἄλγεβρα.

ποὺ περιμένει τὸ συμβολισμό της. Δὲν πρέπει ὅμως ποτὲ νὰ ἐπιβάλλουμε τὶς δικές μας μαθηματικὲς δομές, ἀλλὰ πρέπει νὰ προσέχουμε πολὺ στὴν καλλιέργεια τοῦ ὀρθοῦ μαθηματικοῦ λογισμοῦ. Αὐτὸ πρέπει νὰ προσεχθεῖ ἰδιαίτερα στὸ δημοτικὸ σχολεῖο. Καὶ—ἐπαναλαμβάνουμε—τὰ σύνολα νὰ εἰσαχθοῦν ὅσο εἶναι βολετὸ νωρίτερα· οἱ ἰδιότητές τους ἀνοίγουν τὶς πόρτες τῆς λογικῆς καὶ φωτίζουν τὴν παιδικὴ σκέψη.

3. Ὁ Ὁλλανδὸς καθηγητὴς κ. Bunt ἀσχολήθηκε διεξοδικὰ μὲ τὸ θέμα τῆς εἰσαγωγῆς στὴ μέση ἐκπαίδευση τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων καὶ τῆς στατιστικῆς παραγωγῆς (déduction statistique) [1]. Ὁ κλάδος αὐτὸς τῆς μαθηματικῆς κρίνεται σήμερα χρήσιμο νὰ εἰσαχθεῖ στὴ μέση ἐκπαίδευση, γιατὶ ἐνδιαφέρει ὄχι μόνο ἐκείνους ποὺ πρόκειται νὰ εἰδικευθοῦν στὰ μαθηματικὰ ἢ νὰ ἐπιδοθοῦν σὲ μιὰ θετικὴ ἐπιστήμη ἢ στὴν ἀνώτερη τεχνική, ἀλλὰ καὶ ἐκείνους ποὺ πρόκειται νὰ ἀσχοληθοῦν μὲ τὶς κοινωνικὲς ἐπιστῆμες ἢ νὰ χρησιμεύσουν σὰν μεσαῖα στελέχη σὲ κοινωνικοὺς ὀργανισμοὺς καὶ μονάδες βιομηχανικῆς καὶ οἰκονομικῆς ἀνάπτυξης τῆς χώρας. Πειράματα ποὺ ἔγιναν στὴν Ὁλλανδία ἀπόδειξαν ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ ὀργάνωση στὴ μέση ἐκπαίδευση ἑνὸς προγράμματος στατιστικῆς. Ὁ κ. Bunt ἔδωσε λεπτομέρειες γιὰ τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐφαρμογῆς του στὴ χώρα του. Ἕνα τέτοιο πρόγραμμα μπορεῖ νὰ περιλάβει στοιχεῖα στατιστικῆς, ὅπως: διανομὴ συχνοτήτων, ἱστογράμματα, μέση, διάμεσος, ἐκτροπή — τύπος (écarte - type) κ.λ.π. καθὼς καὶ ἀπὸ τὸ λογισμὸ τῶν πιθανοτήτων τρία βασικὰ θεωρήματα καὶ τὴν ἐφαρμογή τους στὴ λύση σημαντικῶν καὶ χρήσιμων προβλημάτων:

«α) ***Κανόνας τῶν συμπληρωματικῶν πιθανοτήτων***: Ἡ πιθανότητα νὰ μὴ συμβεῖ ἕνα γεγονὸς εἶναι ἴση μὲ τὴ μονάδα ἐλαττωμένη κατὰ τὴν πιθανότητα νὰ συμβεῖ τὸ γεγονὸς αὐτό.

«β) ***Κανόνας τῶν ὁλικῶν*** (totales) ***πιθανοτήτων***: Ὅταν δύο γεγονότα ἀποκλείονται ἀμοιβαῖα, ἡ πιθανότητα νὰ συμβεῖ τὸ ἕνα ἀπ' αὐτὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τους.

«γ) ***Κανόνας τῶν συνθέτων πιθανοτήτων***: Ἡ πιθανότητα νὰ συμβοῦν σύγχρονα δύο γεγονότα ἀνεξάρτητα μεταξύ τους εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενο τῶν πιθανοτήτων τους.

Στὴν ἐπίσημη προκαταρκτικὴ ἔκθεση τῶν ἐργασιῶν τοῦ σεμιναρίου ἀναφέρονται τὰ ἀκόλουθα σχετικὰ μὲ τὴν ἀνάγκη τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων καὶ τῆς στατιστικῆς στὴ μέση ἐκπαίδευση:

«Εἶναι μιὰ νέα διδακτικὴ περιοχή, ποὺ συνιστᾶται γιὰ τὶς μέσες σχολές, ἰδιαίτερα δὲ ὁ στατιστικὸς συλλογισμὸς (raisonnement statistique)—ὁ κ. Bunt τὸν ὀνόμασε στατιστικὴ παραγωγή. Ἐνῶ ὁ λογισμὸς τῶν πιθανοτήτων θεμελιωμένος στὴν ἀπὸ τὰ πρὶν θεώρηση τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν (καὶ μεταθέσεων), ἀποτέλεσε πάντα μέρος τῆς ἄλγεβρας ποὺ διδάσκεται στὴ μέση ἐκπαί-

1) Deduction = παραγωγή, σὲ ἀντίθεση μὲ τὴν induction = ἐπαγωγὴ (τυπικὴ λογική). Εἰδικότερα γιὰ τὴν εἰσαγωγὴ τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων καὶ τῶν στατιστικῶν μαθηματικῶν στὴ μέση ἐκπαίδευση, βλ. στὸ περιοδικὸ «Σπουδαί», τόμος Στ', 1955—56, τεῦχος 7ο, ἄρθρο τοῦ G. Darmois, μεταφρασμένο ἀπὸ τὸ Ν. Σωτηράκη.

δευση, ἡ χρήση ἐκ τῶν ὑστέρων, γνώσεων ἀπὸ τὴν πείρα καὶ ἡ χρήση τῶν ὁρίων ἐμπιστοσύνης (limites de confience) εἶναι νέα. Μποροῦμε ἐπίσης νὰ ἐκθέσουμε τὴ συνδυαστικὴ ἀνάλυση ἀπὸ τὴν πλευρὰ τῶν συνόλων, τῶν συναρτήσεων συνόλου, καὶ τῆς ἔκθεσης δειγμάτων δίνοντας ἔτσι μιὰ καινούργια εὐκαιρία νὰ ἐκτεθεῖ ὁ μοντέρνος συμβολισμὸς καὶ ἡ μοντέρνα σκέψη ποὺ βρίσκονται στὴ βάση ὅλων τῶν μαθηματικῶν κλάδων.

Εἶναι ἀνάγκη, ὅλη αὐτὴ ἡ ὕλη νὰ προστεθεῖ στὸ πρόγραμμα μέσης ἐκπαίδευσης. Δὲν ἐσημειώθηκαν διαφωνίες σημαντικὲς στὴ μεθοδολογία. Ἡ ὕλη ποὺ θὰ διδαχθεῖ πρέπει νὰ περιέχει: τὶς μεταθέσεις, τοὺς συνδυασμούς, τοὺς νόμους τῶν πιθανοτήτων, τοὺς νόμους τοῦ διωνύμου καὶ τὸ στατιστικὸ συλλογισμό. Μπορεῖ νὰ προστεθοῦν οἱ συντελεστὲς συσχετισμοῦ (correlation), ἡ κανονικὴ διανομὴ καὶ οἱ ἄλλες στοχαστικὲς ἐπεξεργασίες. Συνιστᾶται ζωηρὰ σὲ ὅλες τὶς χῶρες νὰ προβοῦν σὲ πειραματισμὸ πάνω σ' αὐτὸ τὸ θέμα κατὰ τρόπο ποὺ τὰ ζητήματα αὐτὰ νὰ ἐνσωματωθοῦν κατὰ μόνιμο τρόπο στὸ πρόγραμμα τῶν μέσων σχολείων».

4. Ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς κ. Maxwell ἀσχολήθηκε μὲ τὸ μάθημα «ἀνάλυση», ὅπως νοεῖται στὰ προγράμματα τῆς τελευταίας τάξης, στὴ μέση ἐκπαίδευση τοῦ Ἡν. Βασιλείου. Τὸ μάθημα αὐτὸ περιέχει στοιχεῖα ἀναλυτικῆς γεωμετρίας καὶ διαφορικοῦ λογισμοῦ σὲ ἔκταση καὶ σὲ βάθος μεγαλύτερο ἀπὸ ὅσο σὲ μᾶς στὰ πρακτικὰ τμήματα τῶν γυμνασίων μας καὶ ἄλλοτε στὰ πρακτικὰ Λύκεια. Γιὰ τοὺς περισσότερο προικισμένους μαθητὲς προβλέπεται πρόγραμμα ἀνώτερης στάθμης.

Ἄξιο νὰ σημειωθεῖ εἶναι ὅτι μὲ πρωτοβουλία τῆς «Μαθηματικῆς Ἑταιρείας τοῦ Ἡν. Βασιλείου» τὰ μαθηματικὰ διδάσκονται σὲ πολλὰ σχολεῖα τῆς μέσης ἐκπαίδευσης σὰν ἑνιαία ὕλη, ὅπου οἱ διάφοροι κλάδοι ἔχουν συγχωνευθεῖ σ' ἕνα συντονισμένο σύνολο καὶ τὰ διάφορα ἐπὶ μέρους προβλήματα τοῦ κάθε κλάδου λύονται μὲ τὸν προσφορότερο τρόπο. Ἕνα π.χ. ἀριθμητικὸ ἢ ἀλγεβρικὸ πρόβλημα ἀνάγεται σὲ γεωμετρικὴ λύση, ἐνῶ, ἀντίθετα, ἕνα γεωμετρικὸ λύεται ἀλγεβρικά.

Μὲ δική μας παράκληση, ὁ ὁμιλητὴς ἀσχολήθηκε σύντομα μὲ τὶς ὀργανικὲς μεταρρυθμίσεις ποὺ ἐφάρμοσε μεταπολεμικὰ ἡ Ἀγγλία στὴ μέση ἐκπαίδευση καὶ εἰδικότερα μὲ τὰ «πολύπλευρα» καὶ τὰ συγκεντρωτικὰ (comprehensions) σχολεῖα. Τὰ πολύπλευρα ἀποτελοῦν συγχώνευση τριῶν τύπων σχολείων μέσης ἐκπαίδευσης τῶν κλασικῶν γυμνασίων (grammars schools) τῶν μοντέρνων καὶ τῶν τεχνικῶν καὶ ἀποβλέπουν στὴν ἐξυπηρέτηση τοῦ ἐλεύθερου προσανατολισμοῦ τῶν μαθητῶν κατὰ τὴ φοίτησή τους στὸν κατώτερο κύκλο, ἔτσι ποὺ νὰ ἐπιδοθοῦν ἀσφαλέστερα καὶ γονιμότερα σὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς τρεῖς διαφοροποιημένους τύπους σπουδῶν ποὺ ἐξασφαλίζει ὁ ἀνώτερος κύκλος (κλασικὲς σπουδές, μοντέρνες — γλῶσσες ἐμπόριο — καὶ τεχνικές). Τὰ «συγκεντρωτικὰ» σχολεῖα ἀποτελοῦν τὴν πιὸ ἐκσυγχρονισμένη —ἀπὸ ὅσο γνωρίζω— μορφὴ σχολείου μέσης ἐκπαίδευσης. Συγκεντρώνουν μεγάλο ἀριθμὸ μαθητὲς (1500 - 2000) σὲ κατάλληλο οἰκοδομικὸ συγκρότημα καὶ ἀποβλέπουν νὰ εὐνοήσουν τὴν ἐλεύθερη ἀνάπτυξη καὶ γόνιμη ἀξιοποίηση τῶν κλίσεων καὶ τῶν ἱκανοτήτων καὶ δεξιοτήτων ὅλων ἀνεξαιρέτως τῶν μαθητῶν. Οἱ τάξεις εἶναι διαιρεμένες σὲ τμήματα Α, Β, Γ, Δ κ.τ.λ. ἀντίστοιχα μὲ τὴ διανοητικὴ ἡλικία τῶν μαθητῶν. Ἐδῶ ἡ διαφοροποίηση τῆς παιδείας πέρνει τὴ μεγαλύτερη δυνατὴ ἔκταση καὶ βάθος καὶ τὴ μεγαλύτερη μέριμνα καλλιέργειας. Δὲν ὑπάρχουν ἀπροσάρμοστα παιδιὰ γιὰ ἕνα τέτοιο σχολεῖο. Τὸ κάθε παιδὶ θὰ βρεῖ τὸ κατάλληλο ἐκπαιδευτικὸ κλῖμα ποὺ ταιριάζει στὴν ἰδιοσυγκρασία του. Ἀπὸ δῶ θὰ βγεῖ ὁ ὑποψήφιος μαθηματικός, φυσικός, φιλόλογος, λογιστής, οἰκονομολόγος, τεχνικός, καλλιτέχνης. Καμιὰ φυσικὴ καταβολὴ δὲ μένει χωρὶς ἀνίχνευση, ἀκαλλιέργητη. Τὸ κάθε παιδὶ γιὰ κάτι εἶναι ἱκανό, ἄλλο περισσότερο, ἄλλο λιγότερο.

Σὰν περιεχόμενο τοῦ μαθήματος τῆς ἀνάλυσης γιὰ τὴ μέση ἐκπαίδευση ἀναγνωρίστηκε τελικὰ ἡ ἐπέκταση τῆς ἄλγεβρας καὶ τῆς γεωμετρίας σὲ κεφάλαια ποὺ μελετοῦν τὶς ἀπόλυτες τιμές, τὰ ὅρια, τὴ διαφόριση, τὴν ὁλοκλήρωση καὶ τὴν ἀναλυτικὴ γεωμετρία.

Κατὰ τὴ διδασκαλία στὴ μέση ἐκπαίδευση δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ εἴμαστε πάντα αὐστηροί, μὰ πρέπει πάντα νὰ εἴμαστε ἀκριβεῖς (χωρὶς σφάλμα). Ἂν ὑπάρχουν χάσματα σὲ μιὰ ἀπόδειξη πρέπει νὰ τὰ δείχνουμε στοὺς μαθητὲς ποὺ εἶναι πιὰ ὥριμοι γιὰ νὰ ἐννοοῦν τὴ διαφορὰ ποὺ ὑπάρχει ἀνάμεσα σ' ἕνα παράδειγμα ἐνορατικὸ καὶ τὴν αὐστηρὴ ἀπόδειξη μὲ παραγωγικοὺς συλλογισμοὺς στηριζόμενους σὲ ἀξιώματα καὶ σὲ ἄλλες προτάσεις καλὰ θεμελιωμένες. Εἶναι βέβαιο ἐπίσης ὅτι οἱ κανόνες στὴ διαφόριση καὶ στὴν ὁλοκλήρωση πρέπει νὰ βασίζονται σὲ ἀληθινὴ κατανόηση τῆς διαδικασίας ποὺ χρησιμοποιήθηκε γιὰ τὴν ἐξαγωγή τους. Τὸ σεμινάριο παρουσίασε τὴ χρήση πολλῶν μεθόδων γιὰ τὴ διδασκαλία τῶν ὁρίων σὲ διάφορες συγκεκριμένες περιπτώσεις ὅπως π.χ. τοῦ ὁρίου $\frac{\text{ημ}x}{x}$, ὅταν τὸ x τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Τὸ μάθημα τῆς ἀναλύσεως θὰ μποροῦσε νὰ ἀρχίσει ἀπὸ μιὰ προωθημένη σπουδὴ τῶν ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων, ἀκεραίων καὶ ρητῶν, τῶν ἐκθετικῶν καὶ λογαριθμικῶν συναρτήσεων, τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων καὶ τῶν ἀντιστρόφων τους, ἴσως δὲ καὶ τῶν ὑπερβολικῶν. Σύγχρονα πρέπει νὰ ἐκτεθεῖ ἡ διαφόριση καὶ ἡ ὁλοκλήρωση καὶ τὸ θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς. Ἡ ἀναλυτικὴ γεωμετρία πρέπει νὰ περιλάβει κυρίως, τὴν παραβολή, τὴν ὑπερβολὴ καὶ τὴν ἔλλειψη χωρὶς τὴ χρήση ἢ καὶ μὲ τὴ χρήση τοῦ διαφορικοῦ καὶ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Σὲ τέτοια μορφὴ καὶ ἔκταση, ἡ ἀνάλυση, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑποβληθεῖ στὴ γνώση τῶν μοντέρνων μαθηματικῶν.

5. Ὁ Γερμανὸς καθηγητὴς κ. M. Botsch, ἀσχολήθηκε εἰδικὰ μὲ τὸ θέμα τῆς γεωμετρίας στὴ μέση ἐκπαίδευση. Κατὰ τὴν ἀντίληψή του μιὰ σύγχρονη γεωμετρία ξεπερνᾶ κατὰ πολὺ τὸ εὐκλείδειο σύστημα ποὺ μποροῦμε νὰ τὸ παραβάλουμε μὲ ἕνα οἰκοδόμημα τελειωμένο ποὺ εἶναι ἀδύνατο νὰ τοῦ μεταβάλουμε τὰ συστατικὰ στοιχεῖα. Ἡ ἀδράνειά του τὸ κάμνει νὰ ἀντιστέκεται καὶ νὰ μὴν ἐπιδέχεται καμιὰ ἀνακαίνιση. Ἐπιβάλλεται λοιπόν, κατὰ τὸν ὁμιλητή, ἡ ἐγκατάλειψή του καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τῶν νέων μεθόδων ἔρευνας τῶν γεωμετρικῶν ὄντων. Μεγάλη καὶ γόνιμη παιδευτικὴ δύναμη ἀπόδωσε στὴ σπουδὴ τῆς συμμετρίας τόσο στὸ ἐπίπεδο ὅσο καὶ στὸ χῶρο: Μὲ τὴν προσωπικὴ του ἔρευνα ὁ μαθητής, κατάλληλα φωτιζόμενος ἀπὸ τὸν καθηγητή, μπορεῖ νὰ φθάσει σὲ σημαντικὲς μαθηματικὲς ἀνακαλύψεις (ἐπανεύρεση).«Ἐκεῖνο ποὺ ἐπιζητοῦμε καὶ ἐκεῖνο ποὺ μᾶς χρειά-

ζεται δὲν εἶναι παραγεμισμένα κεφάλια, ἀλλὰ νέοι ἐπιδέξιοι, μὲ πνεῦμα ἐρευνητικό, μελλοντικοὶ ἐρευνητὲς καὶ τεχνικοί».

Ἀπὸ παιδαγωγικὴ πλευρὰ ἡ γεωμετρία, ὅπως καὶ τὰ μαθηματικά, δὲν πρέπει νὰ μελετᾶται—προπάντων στὸν πρῶτο κύκλο—κατὰ τρόπο ἐπιστημονικό. Δὲν πρέπει δηλαδὴ νὰ ἀρχίζουμε ἀπὸ ἀξιώματα. Ἀλλὰ πάντοτε μὲ ἀναδρομὴ νὰ γυρίζουμε στὶς βασικὲς ἀρχὲς ποὺ βέβαια ἔχουν θεμελιωθεῖ ἐμπειρικὰ μὲ τὴν ἐνόραση.

Τελειώνοντας ὁ ὁμιλητὴς ἀναφέρθηκε στὶς προσπάθειες ποὺ καταβάλλονται τὸν τελευταῖο καιρὸ στὴ Γερμανία γιὰ τὴν «ἀπελευθέρωση τῆς γεωμετρίας ἀπὸ τὴ βαριὰ στατικὴ ἀντίληψη, ὥστε νὰ μπορέσει νὰ γίνει περισσότερο δυναμικὴ καὶ λειτουργικὴ μὲ τὴν εἰσαγωγὴ γνώσεων μετασχηματισμῶν».

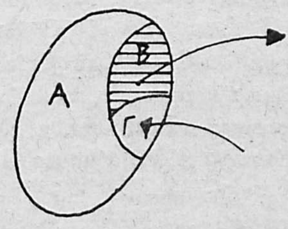
Οἱ συζητήσεις ποὺ ἀκολούθησαν ἀρκετὰ ἐκτενεῖς καὶ μὲ διαφορὲς ἀπόψεων κατάληξαν τελικὰ στὸ γενικὸ συμπέρασμα, ὅτι στὴν ἀρχή, δηλαδὴ στὸν κατώτερο κύκλο, ἡ γεωμετρία πρέπει νὰ διδάσκεται κατὰ τρόπο φυσικὸ - ἐνορατικό, τόσο ἡ ἐπιπεδομετρία, ὅσο καὶ ἡ στερεομετρία. Ἀπὸ τὸ 13ο ὡς τὸ 15ο ἔτος τῆς ἡλικίας ἀρχίζει νὰ ἐμφανίζεται καὶ νὰ παίζει κάποιο ρόλο ὁ παραγωγικὸς συλλογισμός. Ἀπὸ τὸ 15ο ὡς τὸ 18ο χρόνο θὰ ἐκτεθεῖ μιὰ ὁρισμένη ἀξιωματικὴ δομὴ καὶ θὰ εἰσαχθεῖ ἡ γνώση τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἀνυσμάτων. Ἡ ἔκθεση τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδη σύμφωνα μὲ τὴ μέθοδο τοῦ Hilbert ἀποκλείσθηκε ὁλότελα. Ἔγιναν ἐν τούτοις διάφορες προτάσεις. Προτάθηκε π.χ. ἕνα τροποποιημένο σύνολο ἀπὸ ἀξιώματα ποὺ ὁδηγεῖ στὴν ἀναλυτικὴ γεωμετρία καὶ ποὺ ἔγινε δεκτὸ σὰν μιὰ δυνατὴ ἀπαρχὴ πρὸς βελτίωση. Τὸ σύστημα τῶν 5 ἀξιωμάτων τοῦ Choquet παρουσιάζει δυσκολίες, ὅπως ὁμολόγησε ὁ ἴδιος, γιὰ ἕνα πέρασμα στὴν καθετότητα καὶ στὸ εὐκλείδειο ἐπίπεδο. Ἀναφέρθηκε ἐπίσης τὸ ἔργο τοῦ Artin «Geometric Algebra»—σὰν πηγὴ ποὺ ἐπιτρέπει νὰ διατυπωθοῦν συστήματα ἀξιωμάτων ἐμπειρικῶν γιὰ τὴ διδασκαλία τῆς γεωμετρίας στὴ μέση ἐκπαίδευση.

Ἀπὸ ὅλη τὴ συζήτηση βγαίνει τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ χρήση μιᾶς μεθόδου βασισμένης στοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ στὰ ἀνύσματα, παρέχει ἕνα σίγουρο μέσο νὰ συνδεθεῖ ἡ ἄλγεβρα καὶ ἡ γεωμετρία καὶ νὰ δοθεῖ ἔτσι περισσότερη ἑνότητα καὶ δύναμη στὸ μαθηματικὸ πρόγραμμα.

Ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν διαλέξεων ποὺ ἐπλαισίωσαν τὴν εἰσήγηση τοῦ κ. Fehr στὸ δεύτερο τομέα τῶν ἐργασιῶν τοῦ σεμιναρίου καὶ ἀπὸ τὴν ἔκταση ποὺ πῆραν οἱ συζητήσεις ποὺ ἀκολούθησαν τὴν κάθε μιὰ καταφαίνεται ἡ ἐξαιρετικὴ σημασία ποὺ δόθηκε στὸ περιεχόμενο ποὺ θὰ πρέπει νὰ πάρουν τὰ νέα προγράμματα καὶ στὸ θέμα τῶν διδακτικῶν μεθόδων, ἢ — γιὰ νὰ ξεφύγουμε ἀπὸ τὴ λέξη «μέθοδος» ποὺ μυρίζει ρουτίνα—τῆς παιδαγωγικῆς τῶν μαθηματικῶν, ὅπως ἔχει σήμερα διαμορφωθεῖ ὕστερα ἀπὸ τὶς ἐργασίες τῶν Piaget, Wallon, Decroly ποὺ θεμελίωσαν τὴ «γενετική» ψυχολογία.

Γιὰ νὰ κατανοηθεῖ ἐντελέστερα τὸ πνεῦμα τῶν ἐργασιῶν τοῦ σεμιναρίου στὸν τομέα τῆς διδακτικῆς, ἀρκεῖ νὰ ἀναφερθεῖ ὅτι οἱ συζητήσεις, τόσο στὴν ὁλομέλεια ὅσο καὶ στὶς ὁμάδες ἐπεξεργασίας προτάσεων, ἔφθαναν καὶ σὲ διδακτικὲς ἀκόμη λεπτομέρειες, ὅπως π.χ. γιὰ τὴ θεμελίωση τῆς ἀλγεβρικῆς δομῆς

$\alpha - \beta + \gamma = \alpha - (\beta - \gamma)$, γιὰ τὸν προσφορότερο τρόπο διδασκαλίας τοῦ γινομένου τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν γιὰ τὴν ἀντιστρεπτότητα ἀλγεβρικῶν δομῶν, γιὰ τὴ συμμετρία, τοὺς συμβολισμοὺς κ.λ.π. Ἀναφέρουμε γιὰ παράδειγμα μιὰ παραστατικὴ ἔκφραση τῆς δομῆς $\alpha - \beta + \gamma = \alpha - (\beta - \gamma)$ στηριγμένη στὴν ἄλγεβρα τῶν συνόλων, σύμφωνα μὲ τὸ παράπλευρο σχῆμα. Ἀπὸ τὸ σύνολο Α ἀφαιροῦμε τὸ σύνολο Β καὶ συνακόλουθα προσθέτουμε τὸ Γ, ὅπως δείχνουν τὰ βέλη. Ἔτσι ξεφεύγουμε ἀπὸ τὴ μέγγενη τῶν ἀριθμῶν καὶ ἀπὸ τὴ μορφὴ Α − Β + Γ περνᾶμε μὲ τὸν πιὸ σίγουρο τρόπο στὴν ἰσοδύναμή της Α − (Β − Γ). Ἂν ἐνθυμοῦμαι καλὰ ὁ παραστατικὸς αὐτὸς συμβολισμὸς ὀφείλεται στὸν κ. Botsh (Γερμανία). Ἐδῶ φαίνεται καθαρότατα ὅτι ἡ ἄλγεβρα καὶ οἱ δομές της δὲν ἀναφέρονται σὲ ἀριθμητικὲς ποσότητες ἢ γεωμετρικὰ μεγέθη, ἀλλὰ γενικὰ σὲ σύνολα ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴ φύση τοῦ ἀντικειμένου τους. Ἀναφέρουμε ἀκόμη τὴν ἀντιστρεπτότητα τῶν «ἀλγεβρικῶν δομῶν» καὶ ἰδίως τῶν συνόλων ποὺ λέγονται «ὁμάδες (1) καὶ ποὺ κατὰ τὸν Piaget ἀποτελοῦν γνώσεις λογικῆς ἐπεξεργασίας (operationnelles) σὲ ἀντίθεση μὲ τοὺς «ἐθισμοὺς» (habitudes), ὅπως π.χ. ἡ ἐκμάθηση τῆς γραφῆς ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά, ἡ ἀπομνημόνευση τοῦ ἀλφαβήτου κ λ.π. Ἡ ἀντιστροφὴ ἑνὸς «ἐθισμοῦ» ἀπαιτεῖ τὴν ἀπόκτηση νέου ἐθισμοῦ μὲ ἐκγύμναση (dressage), ἐνῶ ἡ ἀντιστροφὴ μιᾶς γνώσης ἀποκτημένης μὲ λογικὴ ἐπεξεργασία ἐνυπάρχει μέσα στὴν ἴδια τὴ γνώση. Παίρνοντας ἀφορμὴ ἀπὸ τὴ διάλεξη τῆς Δίδος Félix ποὺ γιὰ μιὰ στιγμὴ εἶχε καταλήξει στὴν ταυτότητα $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, ὑπενθυμίσαμε τὴν ἀνάγκη τῆς ἄμεσης διδασκαλίας τῆς ἀντιστρεπτότητάς της δηλαδὴ $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$ καθὼς καὶ ὅλων τῶν κλασικῶν ταυτοτήτων. Ὑποδείξαμε ὅτι αὐτὸ ἔχει μεγάλη διδακτικὴ σημασία στὶς γνώσεις ποὺ ἀποκτοῦνται μὲ λογικὴ ἐπεξεργασία (operationneles), γιατὶ ἡ ἄμεση ἀντιστροφή, ὄχι μόνο στερεώνει τὴ γνώση, ἀλλὰ καὶ μᾶς ἀπαλλάσσει ἀπὸ τὸ διπλὸ κόπο τῆς διδασκαλίας, σὲ ξεχωριστὸ κεφάλαιο, τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν πολυωνύμων σὲ γινόμενα Θὰ μπορούσαμε νὰ πολλαπλασιάσουμε τὰ παραδείγματα, ὅπως π.χ. στὸ τριώνυμο τοῦ β' βαθμοῦ κ.λ.π. Ἡ ὑπόδειξή μας ἐπιδοκιμάστηκε καὶ ὁ κ. Fehr συμπλήρωσε τὶς παρατηρήσεις μας παρεμβάλλοντας ἀνάμεσα στὰ δύο μέλη τῆς ταυτότητας τὸ σύμβολο τῆς λογικῆς ἰσοτιμίας: $\alpha(\beta + \gamma) \Longleftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma$. Ὑποδείξαμε ἐπίσης τὸν ἀρκετὰ εὔληπτο, γιὰ ἀρχάριους μαθητές, τρόπο διδασκαλίας τοῦ γινομένου ὁμόσημων καὶ ἑτερόσημων σχετικῶν ἀριθμῶν μὲ τὴ χρησιμοποίηση ἁπλῶν προβλη-

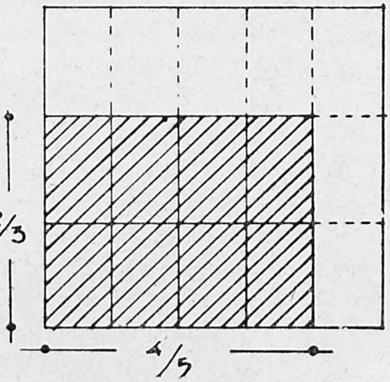


---

1) Σύμφωνα μὲ τὶς ἐργασίες τῶν ἐρευνητῶν τῆς ὁμάδας «Nicolas Bourbaki» σχετικὰ μὲ τὴν ἀρχιτεκτονικὴ τῶν μαθηματικῶν ὑπάρχουν τρεῖς βασικὲς δομές: οἱ ἀλγεβρικὲς μὲ πρότυπο τὴν «ὁμάδα» (= σύνολο ποὺ ὑπάγεται στὸ νόμο τῆς προσεταιριστικότητας, περιέχει ἕνα οὐδέτερο στοιχεῖο (τὸ μηδὲν) καὶ κάθε στοιχεῖο ἔχει τὸ συμμετρικό του), οἱ δομὲς «τάξεως», ὅπως π.χ. τὸ «δίκτυο» καὶ οἱ «τοπολογικές». Ἐκεῖνο ποὺ τὶς ξεχωρίζει εἶναι τὸ ἀδύνατο τῆς ἀναγωγῆς τῆς μιᾶς στὴν ἄλλη. Παίζουν ἔτσι οἱ τρεῖς αὐτὲς δομὲς ρόλο μητρικό. Βλ. Piaget - Beth - Dieudonné etc. «L' enseignement des Mathématiques». Delachaux et Niestlé éd. Paris - Neuchatel, 1955, ἄρθρο τοῦ Piaget).

9. 10. 76

μάτων ὁμαλῆς κίνησης, πάνω σὲ εὐθεῖα, ἀφοῦ πρῶτα ὁρίσαμε τὴ θετικὴ καὶ ἀρνητικὴ φορὰ τοῦ ἄξονα καὶ καθορίσαμε τὴ θετικὴ καὶ ἀρνητικὴ ἔννοια τῆς ροῆς τοῦ χρόνου. Δίνοντας τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ (θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ κατὰ τὴ φορὰ τῆς κίνησης) ζητοῦμε ἀπὸ τοὺς μαθητὲς νὰ βροῦν τὴ θέση τοῦ κινητοῦ πρὶν ἢ μετὰ ἀπὸ τόσες χρονικὲς μονάδες ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ ἀρχίζουμε νὰ μελετοῦμε τὴν κίνηση (1). Μὲ τὴν εὐκαιρία ὁ κ. Fehr ἐπρότεινε νέο συμβολισμὸ σχετικὰ μὲ τὸ σῆμα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν μὲ τὴν τοποθέτηση τῶν σημάτων + καὶ − ἐπάνω καὶ ἀριστερὰ ἀπὸ τὸν ἀριθμό. Ἀντὶ π.χ. νὰ γράψουμε -5 ἢ $+5$, γράφουμε ${}^{-}5$ ἢ ${}^{+}5$. Ἔτσι ἀπαλλασσόμαστε ἀπὸ τὶς τόσο ἐνοχλητικὲς στὴ διδασκαλία παρενθέσεις στὸ συμβολισμὸ τῶν πράξεων. Γράφουμε π. χ. ${}^{+}3 - {}^{-}5 = {}^{+}8$, ἀντὶ $(+3) - (-5) = +8$. Ὁ συμβολισμὸς αὐτὸς ἔχει καθιερωθεῖ στὰ νέα διδακτικὰ βιβλία ποὺ τυπώνονται τώρα στὶς Η Π.Α.



Θὰ προσθέσουμε ἀκόμα μερικὲς ἀξιοσημείωτες διδακτικὲς ὑποδείξεις τῆς Δίδος Castelnuovo (Ἰταλία) σχετικὰ μὲ τὴ χρησιμοποίηση γεωμετρικῶν μεθόδων στὴ διδασκαλία τῆς ἀριθμητικῆς. Κάθε ἀριθμὸς ἐκφράζεται μὲ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα. Τὸ γινόμενο δύο ἀριθμῶν ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις τοὺς δυὸ ἀριθμούς. Ἔτσι, προκειμένου νὰ δώσουμε στὰ παιδιὰ νὰ καταλάβουν γιατὶ $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ κατασκευάζουμε ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ 1, ὁρίζουμε πάνω στὶς διαστάσεις του τὰ $\frac{4}{5}$ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ κι᾿ ἀφήνουμε στὸ μαθητὴ νὰ βρεῖ μόνος του τὸ γινόμενο ποὺ ἐκφράζεται ἀπὸ τὸ γραμμοσκιασμένο μέρος τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου. Εἶναι γι᾿ αὐτὸν ὁλοφάνερο ὅτι τὸ μέρος αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ $4 \times 2 = 8$ ὀρθογώνια ἀπὸ τὰ $5 \times 3 = 15$ ποὺ περιέχει ὁλόκληρο τὸ τετράγωνο καὶ πολὺ εὔκολο νὰ καταλήξει στὸ γνωστὸ τύπο $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \times \gamma}{\beta \times \delta}$.

Δὲν χρειάζεται, νομίζουμε, νὰ ἐκταθοῦμε σὲ περισσότερα παραδείγματα γιὰ νὰ δείξουμε τὴν ἔκταση τῶν ἐργασιῶν τοῦ σεμιναρίου σὲ διδακτικὲς λεπτομέρειες.

Περνοῦμε τώρα στὸν ἐξ ἴσου σημαντικὸ τρίτο τομέα τῶν ἐρευνῶν, γιὰ τὰ μέσα τῆς μεταφορᾶς στὴν πράξη τῶν πορισμάτων καὶ τῶν προτάσεων τοῦ σεμιναρίου.

(Συνεχίζεται)

---

1) Βλέπε καὶ C Lebossé et C. Hémery. Algèbre, Arithmetique et Geométrie, Classe de 4e, Paris 1956.