ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ ΔΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΙΝ ΤΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΜΕΝΩΝ ΧΩΡΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. Α. Α. ΛΑΖΑΡΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Ἀντικείμενον τῆς παρούσης ἐργασίας εἶναι ἡ ἐξέτασις βασικῶν τινων θεμάτων μεθοδολογίας τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ ἡ διατύπωσις ἑνὸς συστήματος ἀναλύσεως δυναμένου νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπὶ προβλημάτων προγραμματισμοῦ τῶν ἐπενδύσεων διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν οἰκονομικῶς καθυστερημένων χωρῶν. Εἰδικώτερον, προτείνεται ἐνταῦθα μία συγκεκριμένη μέθοδος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων μιᾶς οἰκονομίας, πρὸς ἐπίτευξιν τεθέντων σκοπῶν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

2. Ἡ σημασία τῆς μεθόδου ἀναλύσεως εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἔρευναν γενικῶς καὶ εἰδικώτερον εἰς τὸν οἰκονομικὸν προγραμματισμὸν εἶναι, νομίζομεν, προφανὴς καὶ δὲν ἀπαιτεῖται νὰ ὑπογραμμισθῇ ἰδιαιτέρως ἐνταῦθα. Ἀρκεῖ μόνον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ μέθοδος ἀναλύσεως δὲν ἀποτελεῖ ἁπλῶς ἓν σύστημα ταξινομήσεως τῶν δεδομένων ἑνὸς προβλήματος καὶ μίαν διαδικασίαν διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῆς λύσεως αὐτοῦ, ἀλλ' ἐπίσης καὶ ἓν «εὑριστικὸν» ὄργανον ἐκ τῆς ποιότητος τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται εἰς σημαντικὸν βαθμὸν καὶ ἡ ὀρθότης τῆς ἐπιδιωκομένης λύσεως.

Εἶναι ἄξιον σημειώσεως τὸ γεγονὸς ὅτι κατὰ τὴν τελευταίαν δεκαετίαν αἱ μεθοδολογικῆς φύσεως ἐργασίαι, ὑπὸ τὴν μορφὴν κυρίως τῆς κατασκευῆς «οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων», ἀπορροφοῦν ὁλονὲν καὶ μεγαλύτερον μέρος τῆς δραστηριότητος τῶν οἰκονομολόγων. Ἡ ἐξέλιξις αὕτη, ἥτις χαρακτηρίζεται ἀπὸ μίαν ἔκδηλον τάσιν διευρύνσεως τῆς ἐμπειρικοστατιστικῆς βάσεως τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς φυσικὸν ἐπακόλουθον τοῦ μεταπολεμικοῦ προσανατολισμοῦ τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν πρακτικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων. Αἰτιολογικὸν ὑπόβαθρον τῆς ἐξελίξεως ταύτης ὑπῆρξεν ἀναμφιβόλως ἡ ἐγκατάλειψις τοῦ ἀμιγοῦς οἰκονομικοῦ φιλελευθερισμοῦ καὶ ἡ ἀναγνώρισις τῆς ἀναγκαιότητος τοῦ κρατικοῦ παρεμβατισμοῦ διὰ τὸν ἐπηρεασμὸν τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν πρὸς «ἐπιθυμητὰς» κατευθύνσεις.

Ἡ οἰκονομικὴ ἐπιστήμη εἰσέρχεται ἤδη εἰς ἓν στάδιον ὡριμότητος, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἐνδιαφέρον τῶν ἐρευνητῶν ἀρχίζει νὰ μετατοπίζεται ἀπὸ τὴν ἁπλῆν ποιοτικὴν θεώρησιν τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων πρὸς τὴν *ποσοτικὴν* μέτρησιν τῶν φαινομένων αὐτῶν καὶ τὴν λύσιν προβλημάτων «κανονιστικῆς» φύσεως, ὡς εἶναι π.χ. τὰ προβλήματα τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Ἡ ἔμφασις αὕτη εἰς τὴν ποσοτικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν διαμόρφωσιν τῆς *Οἰκονομετρίας*, ἑνὸς νέου κλάδου τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης, ὁ ὁποῖος ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν συστηματοποίησιν καὶ ἀνάπτυξιν τῶν μεθόδων ποσοτικῆς μετρήσεως τῶν οἰκονομικῶν μεγεθῶν.

3. Σημαντικὴν πρόοδον πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τῆς οἰκονομετρικῆς μεθοδολογίας ἀπετέλεσεν ἡ ἀνάπτυξις τῆς *Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως* ἢ ἄλλως καλουμένης *Ἀναλύσεως Οἰκονομικῆς Δραστηριότητος*. Θεωρητικῶς, ἡ Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις ἀποτελεῖ ἀπὸ μιᾶς ἀπόψεως ἐπιστροφὴν εἰς τὰ συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας τῆς Σχολῆς τῆς Λωζάννης, καθ' ὅσον βασίζεται ὡς καὶ τὰ συστήματα ταῦτα ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς οἰκονομικῆς ἀλληλεξαρτήσεως. Διαφέρει ἐν τούτοις οὐσιωδῶς τῶν κλασσικῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας ὅσον ἀφορᾷ τοὺς ἐπιδιωκομένους ἀναλυτικοὺς σκοπούς:

Ὡς γνωστόν, οἱ κλασσικοὶ οἰκονομολόγοι τῆς γενικῆς ἰσορροπίας ἐνδιεφέροντο κυρίως διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας καὶ οὐδέποτε ἐπεδίωξαν νὰ χρησιμοποιήσουν τὰ συστήματά των διὰ πρακτικὰς ἀναλύσεις. Τὸ πολύπλοκον τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων καὶ ἰδίως ἡ ἔλλειψις ἐπαρκῶν στατιστικῶν στοιχείων καὶ καταλλήλων ὑπολογιστικῶν μέσων καθίστα οὐτοπικὴν πᾶσαν προσπάθειαν πρακτικῆς χρησιμοποιήσεως τῶν συστημάτων γενικῆς ἰσορροπίας κατὰ τὴν ἐποχὴν τῶν Walras καὶ Pareto. Οὕτω τὰ συστήματα ταῦτα, παρὰ τὴν θεωρητικήν των μεγαλοπρέπειαν, ἐγκατελείφθησαν βαθμιαίως πρὸς χάριν τῶν μαρσαλλιακῶν συστημάτων μερικῆς ἰσορροπίας, εἰς τὰ ὁποῖα ἐξητάζοντο αἱ οἰκονομικαὶ μεταβολαὶ ἐντὸς μεμονωμένων ἀγορῶν καὶ δὲν ἐλαμβάνοντο ὑπ' ὄψιν αἱ ἐπιδράσεις τῶν μεταβολῶν αὐτῶν ἐντὸς ὁλοκλήρου τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος.

Ἀντιθέτως πρὸς τὰ κλασσικὰ συστήματα γενικῆς ἰσορροπίας, ἡ Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις ἔχει ὡς κύριον σκοπὸν αὐτῆς τὴν λύσιν πρακτικῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων καὶ χρησιμοποιεῖ πρὸς τοῦτο συγκεκριμένα στατιστικὰ στοιχεῖα. Ἡ ἐπιδίωξις τοῦ ὡς ἄνω σκοποῦ καθίσταται σήμερον δυνατὴ ἀφ' ἑνὸς μὲν λόγῳ τῆς πληρεστέρας θεωρητικῆς διερευνήσεως τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας, ἀφ' ἑτέρου δὲ λόγῳ τῆς σημαντικῆς βελτιώσεως τῶν στατιστικῶν συνθηκῶν καὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν ὑπολογιστικῶν μηχανῶν ὑψηλῆς ταχύτητος.

4. Ὡς ἀπεδείχθη ἤδη εἰς πλείστας περιπτώσεις, ἡ Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπιτυχῶς ἐπὶ διαφόρων οἰκονομικῶν προβλημάτων, ἰδίᾳ προβλημάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ἀφορώντων εἰς μεμονωμένας ἐπιχειρήσεις, εἰς παραγωγικοὺς κλάδους ἢ εἰς ὁλοκλήρους οἰκονομίας. Παρὰ τὰς ἐπιτευχθείσας ὅμως προόδους δὲν ἐγένετο μέχρι τοῦδε, καθ' ὅσον τουλάχιστον γνωρίζομεν, ἱκανοποιητικὴ ἐφαρμογὴ τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως εἰς τὴν σπουδαιοτάτην κατηγορίαν τῶν προβλημάτων, τὰ

ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν τῶν καθυστερημένων χωρῶν. Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην καταβάλλεται προσπάθεια καλύψεως κατὰ τὸ δυνατὸν τοῦ κενοῦ αὐτοῦ, διὰ τῆς ἐξετάσεως τοῦ προβλήματος τοῦ προγραμματισμοῦ τῶν ἐπενδύσεων εἰς τὰς καθυστερημένας οἰκονομίας ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀρχῶν τῆς νέας ταύτης μεθόδου ἀναλύσεως.

Εἰδικώτερον, ἡ Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ ἀνάλυσις χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τὴν θεωρητικὴν θεμελίωσιν ἑνὸς ὑποδείγματος τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου θὰ ἠδύνατο νὰ προσδιορισθῇ ἡ ποσότης τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων, ὡς ἐπίσης καὶ ὁ τρόπος κατανομῆς αὐτῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων τῆς ὑπὸ ἀνάπτυξιν οἰκονομίας πρὸς ἐπίτευξιν ὡρισμένων προγραμματικῶν σκοπῶν, ἀφ' ἑτέρου δὲ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὑπολογιστικῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα θέτει ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ἐν λόγῳ ὑποδείγματος.

Τὸ προτεινόμενον ὑπόδειγμα ἀναλύσεως ἐπιτρέπει, ὡς θὰ εἴδωμεν, τὴν λεπτομερῆ ἐξέτασιν τῶν σχέσεων τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν κλάδων καὶ παρέχει τὴν δυνατότητα παρακολουθήσεως τόσον τῶν ἀμέσων ὅσον καὶ τῶν ἐμμέσων οἰκονομικῶν μεταβολῶν ἐκ τῆς ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος ἐπενδύσεων. Μεθοδολογικῶς ὁ τύπος οὗτος ἀναλύσεως ὑπερέχει καταφανῶς τῆς πολλάκις χρησιμοποιουμένης εἰς προβλήματα οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ ἀναλύσεως κεϋνσιανοῦ τύπου, ἥτις δὲν ὑπεισέρχεται εἰς λεπτομερείας καὶ χρησιμοποιεῖ γενικὰς οἰκονομικὰς κατηγορίας (Aggregates) ὡς εἶναι π.χ. ἡ «συνολικὴ κατανάλωσις», ἡ «συνολικὴ ἐπένδυσις», τὸ «συνολικὸν εἰσόδημα» κτλ.

Ἡ ἐπιτυχὴς ὅμως ἐφαρμογὴ τῆς ἐνταῦθα χρησιμοποιουμένης μεθόδου ἀπαιτεῖ ἕν, κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον, ἐξειδικευμένον σύστημα στατιστικῶν πληροφοριῶν, ἀναφορικῶς μὲ τὰς τεχνολογικὰς καὶ οἰκονομικὰς δυνατότητας τῆς ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομίας καὶ ὄχι ἁπλῶς γενικὰς πληροφορίας περὶ τῶν κυριωτέρων οἰκονομικῶν μεγεθῶν. Ἡ ἀνάπτυξις ἑνὸς τοιούτου συστήματος εἶναι σημαντικὸν πρόβλημα διὰ τὰς περισσοτέρας ὑπαναπτύκτους χώρας, ἡ λύσις τοῦ ὁποίου ἀποτελεῖ προϋπόθεσιν διὰ τὴν ἄσκησιν μιᾶς ὀρθολογιστικῆς πολιτικῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Αἱ δυσχέρειαι πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην δὲν εἶναι ὀλίγαι, ἀλλ' ἡ ἐξέλιξις τοῦ συστήματος τῶν ἐθνικῶν λογαριασμῶν καὶ ἡ πεῖρα τῶν τελευταίων ἐτῶν ἐκ τῆς συγκεντρώσεως εἰς εὐρεῖαν κλίμακα στατιστικῶν στοιχείων διὰ τὰς συναλλακτικὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν κλάδων εἰς διαφόρους χώρας ἐπιτρέπουν αἰσιοδοξίαν.

5. Τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως εὑρίσκεται σήμερον εἰς τὸ ἐπίκεντρον τοῦ ἐνδιαφέροντος τῶν οἰκονομολόγων καὶ τῶν κυβερνήσεων τῶν ὑπαναπτύκτων χωρῶν. Ἀνεξαρτήτως τῆς διαφορᾶς τῶν διατυπουμένων ἀπόψεων ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀκολουθητέαν πολιτικὴν πρὸς ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἰς τὰς ἐπὶ μέρους περιπτώσεις, οὐδεὶς φαίνεται νὰ ἀμφισβητῇ σοβαρῶς τὴν ἀναγκαιότητα τῆς καταρτίσεως ἑνὸς οἰκονομικοῦ προγράμματος ἐντὸς τῶν πλαισίων τοῦ ὁποίου δέον νὰ ἀσκῆται ἡ πολιτικὴ αὕτη. Διὰ τῆς καταρτίσεως ὅμως ἑνὸς λειτουργικῶς χρησίμου προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἀπαιτεῖται ἡ ἐφαρμογὴ μιᾶς συνεποῦς καὶ ἀποτελεσματικῆς μεθόδου

προγραμματισμοῦ. Ἡ μέθοδος προγραμματισμοῦ εἶναι παράγων βασικῆς σπουδαιότητος ἀκόμη καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις καταρτίσεως προγράμματος δράσεως διὰ μεμονωμένας παραγωγικὰς μονάδας, πολλῷ μᾶλλον εἰς τὰς περιπτώσεις καταρτίσεως προγράμματος δράσεως δι' ὁλοκλήρους οἰκονομίας.

Παρ' ἡμῖν, μολονότι ἔχει ἤδη καταστῆ κοινὴ συνείδησις ἡ ἀναγκαιότης τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν τοῦ οἰκονομικοῦ προβλήματος τῆς χώρας, δὲν φαίνεται νὰ ἔχει ἐκτιμηθῆ ἐπαρκῶς ἡ σπουδαιότης τοῦ ὡς ἄνω παράγοντος. Αἱ κατὰ καιροὺς ἐκδηλωθεῖσαι προσπάθειαι προγραμματισμοῦ χαρακτηρίζονται ἀπὸ ἔλλειψιν μεθοδολογικοῦ προσανατολισμοῦ, ἥτις ἐκδηλοῦται τελικῶς εἰς τὴν ὀργανωτικὴν ἀσυνέπειαν μεταξὺ προγραμματιζομένων σκοπῶν καὶ μέσων πρὸς ἐπίτευξιν τῶν σκοπῶν αὐτῶν.

Ἐλπίζομεν ὅτι ἡ ἐνταῦθα ἐπιχειρουμένη συστηματοποίησις τοῦ προβλήματος τῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων τομέων τῆς ὑπὸ ἀνάπτυξιν οἰκονομίας καὶ ἡ διδομένη ἔμφασις εἰς τὴν μεθοδολογίαν τοῦ προγραμματισμοῦ, θὰ πείσουν περὶ τῆς σπουδαιότητος τοῦ παράγοντος αὐτοῦ εἰς τὴν κατάρτισιν τοῦ οἰκονομικοῦ προγράμματος καὶ θὰ προκαλέσουν ἐνδιαφέρον διὰ τὴν ἀνάληψιν περισσότερον ἐξειδικευμένων ἐρευνητικῶν ἐργασιῶν πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ — ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

1. Διαθέσιμοι πόροι καὶ πρόγραμμα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως

1. 1. Στοιχεῖα τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως

Τὸ πρόγραμμα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν ὀργάνωσιν τῶν διαθεσίμων πόρων μιᾶς οἰκονομίας πρὸς ἐπίτευξιν τῆς μεγίστης δυνατῆς αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος ἢ τῆς ἀπασχολήσεως, ἐντὸς ὡρισμένης χρονικῆς περιόδου.

Βασικὰ στοιχεῖα τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως εἶναι : α) *οἱ σκοποὶ* καὶ β) *τὰ μέσα* πρὸς ἐπίτευξιν τῶν σκοπῶν αὐτῶν.

Οἱ σκοποὶ τοῦ προγράμματος καθορίζονται συνήθως βάσει κριτηρίων μικτῶν, δηλαδὴ κριτηρίων οἰκονομικῶν, ὡς εἶναι π.χ. ἡ ἐπίτευξις ἑνὸς ἐπιπέδου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, καὶ ἐξωοικονομικῶν, ὡς εἶναι ὡρισμέναι πολιτικῆς φύσεως ἐπιδιώξεις. Τὰ μέσα πρὸς ἐπίτευξιν τῶν σκοπῶν δύνανται νὰ ταξινομηθοῦν εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν *οἰκονομικῶν* μέσων, ὡς εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν ἐπενδύσεων καὶ ὁ τρόπος κατανομῆς αὐτῶν μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, καὶ εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ***ἐξωοικονομικῶν*** μέσων, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν κυρίως τὰ διοικητικῆς καὶ ὀργανωτικῆς φύσεως μέτρα πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ προγράμματος.

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην λαμβάνομεν τοὺς σκοποὺς τοῦ προγράμματος ὡς δεδομένους καὶ δὲν ἀσχολούμεθα μὲ τὰ ἐξωοικονομικὰ μέσα πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν σκοπῶν αὐτῶν. Ἡ ἀνάλυσίς μας στρέφεται κυρίως εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν οἰκονομικῆς φύσεως μέσων ἐξυπηρετήσεως τῶν σκοπῶν τοῦ προγράμματος. Εἰδικώτερον ἀσχολούμεθα μὲ τὸ πρόβλημα τῆς ***ἀρίστης κατανομῆς*** τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ οἰκονομικῶν πόρων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κεντρικὸν οἰκονομικὸν πρόβλημα τοῦ προγραμματισμοῦ μιᾶς οἰκονομίας.

Ὁ ἐντοπισμὸς τῆς ἐρεύνης ἐπὶ τοῦ θέματος τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ οἰκονομικῶν πόρων δὲν σημαίνει βεβαίως ὅτι θεωροῦμεν ὀλιγώτερον σημαντικὰ τὰ θέματα τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν σκοπῶν τοῦ προγράμματος καὶ τῶν διοικητικῶν καὶ ὀργανωτικῶν μέσων διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ σκοπῶν. Ἡ ἐξέτασις ὅμως τῶν θεμάτων αὐτῶν ἀνάγεται συνήθως εἰς τὴν ἐξέτασιν παραγόντων οἱ ὁποῖοι ἐκφεύγουν τῶν πλαισίων μιᾶς καθαρῶς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως. Πάντως, ἡ ἐξέτασις τοῦ προβλήματος τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ πόρων γίνεται ἐν στενῷ συσχετισμῷ πρὸς τοὺς δεδομένους σκοπούς, εἰς περίπτωσιν δὲ ἀσυμφωνίας αὐτῶν πρὸς τὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομίας ὑποδεικνύεται τρόπος ἀναθεωρήσεώς των.

1. 2. Προσδιορισμὸς κριτηρίου κατανομῆς τῶν διαθεσίμων πόρων

1.2.1. Δοθέντων τῶν σκοπῶν τοῦ προγράμματος, τὸ πρὸς λύσιν πρόβλημα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως εἶναι νὰ χρησιμοποιηθοῦν οἱ διαθέσιμοι οἰκονομικοὶ πόροι κατὰ τρόπον ἐξασφαλίζοντα τὴν πραγματοποίησιν τῶν σκοπῶν αὐτῶν ὑπὸ τοὺς πλέον οἰκονομικοὺς ὅρους.

Τοῦτο σημαίνει ἐ π ι λ ο γ ὴ ν τῆς ἀρίστης λύσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος, δηλαδὴ μεταξὺ τῶν διαφόρων μορφῶν κατανομῆς τῶν οἰκονομικῶν πόρων. Ἐπιβάλλεται ὅθεν ὁ προσδιορισμὸς κριτηρίου τινός, ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἐπιλογὴ αὕτη.

Ὁ προσδιορισμὸς τοῦ κριτηρίου τῆς ἀρίστης λύσεως, ὡς καὶ τοῦ τρόπου χρησιμοποιήσεως αὐτοῦ, ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ τὴν συνεπείᾳ ταύτης διδομένην ἑκάστοτε ἔννοιαν εἰς τὸν ὅρον «ἀρίστη λύσις». Ἂν π.χ. μία οἰκονομία χαρακτηρίζεται ἀπὸ στενότητα ἐργατικῶν δυνάμεων καὶ ἐπιδιώκεται διὰ τῆς κινητοποιήσεως αὐτῶν ἡ ἐπίτευξις ὡρισμένων σκοπῶν, ὡς οἰκονομικῶς ἀρίστη λύσις δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ἡ λύσις ἡ ὁποία ἐξασφαλίζει τὴν μεγίστην δυνατὴν ἐξοικονόμησιν τῶν ἐργατικῶν δυνάμεων ἤ, ἄλλως, τὴν καλλιτέραν ἀξιοποίησιν τῶν δυνάμεων αὐτῶν. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην — τὴν ὁποίαν δεχόμεθα εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην — ***«ἀρίστη λύσις» εἶναι συνεπῶς ἡ ἱκανοποιοῦσα τὸ οἰκονομικὸν ἀ-***

ξίωμα, ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ οἰκονομικῶν πόρων.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ χρησιμοποίησις διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης λύσεως κριτηρίου ἀναφερομένου εἰς τὸν μέγιστον βαθμὸν οἰκονομικότητος ὅσον ἀφορᾷ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ πόρων δὲν ὑποδηλοῖ ἔλλειψιν ἐνδιαφέροντος διὰ τὴν ὀργάνωσιν καὶ ἀξιοποίησιν τῶν ἐν σχετικῇ ἐπαρκείᾳ εὑρισκομένων οἰκονομικῶν πόρων. Ὑποδηλοῖ ἁπλῶς ὅτι οἱ πόροι οὗτοι δὲν ἐμποδίζουν τὴν ἀνάπτυξιν τῆς οἰκονομίας καὶ συνεπῶς δὲν δημιουργοῦν *οἰκονομικὰ* προβλήματα ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐξεταζομένην περίπτωσιν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως.

1. 2. 2. Ἐνταῦθα ἀσχολούμεθα εἰδικώτερον μὲ τὸν προγραμματισμὸν τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἑνὸς συγκεκριμένου τύπου οἰκονομίας, εἰς τὸν ὁποῖον δύναται νὰ ὑπαχθῇ καὶ ἡ ἑλληνικὴ οἰκονομία. Ἡ οἰκονομία αὕτη χαρακτηρίζεται κυρίως ἀπὸ ἔντονον ἀνεπάρκειαν κεφαλαίου καὶ ἀφθονίαν ἐργατικῶν δυνάμεων. Κατὰ συνέπειαν, τὸ κριτήριον τῆς ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως πρέπει νὰ εἶναι, βάσει τῶν λεχθέντων, ἡ ***ἀρίστη δυνατὴ ἀξιοποίησις τοῦ κεφαλαίου.***

Τὸ κριτήριον τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ κατὰ δύο τρόπους, ἀναλόγως τῆς διατυπώσεως τῶν σκοπῶν τοῦ προγράμματος. Ἂν π.χ. οἱ σκοποὶ οὗτοι συνίστανται εἰς τὴν ἐπίτευξιν ***ὡρισμένου ἐπιπέδου ἐθνικοῦ εἰσοδήματος,*** ἀρίστη δυνατὴ ἀξιοποίησις τοῦ κεφαλαίου σημαίνει χρησιμοποίησιν μιᾶς ***ἐλαχίστης δυνατῆς ποσότητος αὐτοῦ*** διὰ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ὡς ἄνω σκοποῦ. Ἐπειδή, ὡς συμβαίνει συνήθως εἰς τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, τὸ ἐπιδιωκόμενον ἐπίπεδον ἐθνικοῦ εἰσοδήματος εἶναι ἀνώτερον ἀπὸ τὸ δυνάμενον νὰ πραγματοποιηθῇ βάσει τῆς ὑπαρχούσης ποσότητος κεφαλαίου τῆς οἰκονομίας, τὸ κριτήριον τῆς ἀρίστης λύσεως σημαίνει κυρίως ***ἐλαχιστοποίησιν τῶν ἐπενδύσεων*** (δηλαδὴ τῆς ποσότητος τοῦ ***νέου*** κεφαλαίου), αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς ὑπερβαλούσης τὰς ἀρχικὰς δυνατότητας τῆς οἰκονομίας αὐξήσεως τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος.

Ἂν, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ἡ εἰς τὴν διάθεσιν τῆς οἰκονομίας ***ποσότης κεφαλαίου εἶναι ὡρισμένη,*** ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ προβλήματος τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ὑποδηλοῖ μεγιστοποίησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος, τὸ δὲ κριτήριον τῆς λύσεως ταύτης θὰ εἶναι τότε ἡ ***μεγιστοποίησις τῆς εἰσοδηματικῆς ἀποδόσεως τοῦ κεφαλαίου.***

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην χρησιμοποιοῦμεν τὸ κριτήριον τῆς ἀρίστης δυνατῆς ἀξιοποιήσεως τοῦ κεφαλαίου κυρίως ὑπὸ τὴν πρώτην τῶν ὡς ἄνω διατυπώσεων καὶ μόνον δευτερευόντως κάμνομεν χρῆσιν τῆς ἑτέρας διατυπώσεως. Μεθοδολογικῶς ἡ πρώτη διατύπωσις εἶναι προτιμοτέρα, καθ' ὅσον εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων τὰ προβλήματα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἐμφανίζονται ὡς προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως. Ὁρίζεται δηλαδὴ ἐκ τῶν προτέρων ἡ ἐπιθυμητὴ αὔξησις τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος καὶ ἐπιδιώκεται νὰ πραγματοποιηθῇ αὕτη διὰ τῆς ἐλαχίστης δυνατῆς δαπάνης κεφαλαίου ἢ τῶν λοιπῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν παραγωγῆς (1).

1. 2. 3. Εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους οἰκονομίας πλὴν τοῦ κεφαλαίου εὑρίσκεται συνήθως ἐν στενότητι καὶ ἡ εἰδικευμένη ἐργασία, ἐνίοτε δὲ (ὡς εἰς τὴν ἑλληνικὴν περίπτωσιν) καὶ ὁ συντελεστὴς «ἔδαφος». Ἀλλ' ἡ αὔξησις τῆς ποσότητος τῆς εἰδικευμένης ἐργασίας, ὡς πολλάκις καὶ ἡ αὔξησις τῶν δυνατοτήτων τῆς οἰκονομίας ἀπὸ ἀπόψεως ἐδάφους, εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως κεφαλαίου πρὸς ἵδρυσιν ἐκπαιδευτηρίων, τεχνικῶν σχολῶν κλπ. ἢ πρὸς ἐκτέλεσιν ἐγγείων βελτιώσεων καὶ γενικῶς πρὸς δημιουργίαν νέων ἐδαφῶν. Οὕτω, ἡ στενότης τῶν συντελεστῶν αὐτῶν ἀνάγεται τελικῶς εἰς τὴν στενότητα κεφαλαίου καὶ κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα βασίμως νὰ χρησιμοποιήσωμεν, πρὸς ἔλεγχον τῆς οἰκονομικότητος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, κριτήριον βασιζόμενον ἐπὶ τῆς στενότητος τοῦ κεφαλαίου.

1. 2. 4. Τὸ κριτήριον τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἐπενδύσεων (ἢ τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς εἰσοδηματικῆς ἀποδόσεως τῶν ἐπενδύσεων) χρησιμοποιεῖται κατὰ κανόνα εἰς θεωρητικὰς ἢ πρακτικὰς ἀναλύσεις ἀναφερομένας εἰς τὸν προγραμματισμὸν τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως τῶν καθυστερημένων περιοχῶν.

Ἡ χρησιμοποίησις ὅμως τοῦ κριτηρίου αὐτοῦ βασίζεται συνήθως ἐπὶ τῆς καλουμένης «μεθόδου μερικῆς ἀναλύσεως» (partial analysis), ἥτις δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν τὴν ἀλληλεξάρτησιν μεταξὺ τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν κλάδων. Οὕτω, ἐὰν π.χ. ἐκ δύο μεθόδων παραγωγῆς τοῦ αὐτοῦ προϊόντος ἡ πρώτη μέθοδος ἀπαιτῇ ἄμεσον δαπάνην κεφαλαίου, ὑπὸ μορφὴν παγίων ἐγκαταστάσεων κλπ., μεγαλυτέραν τῆς δευτέρας, προκρίνεται, βάσει τοῦ κριτηρίου ἐλαχιστοποιήσεως κεφαλαίου, ἡ δευτέρα μέθοδος ὡς οἰκονομικωτέρα πρὸς παραγωγὴν τοῦ προϊόντος. Αἱ μέθοδοι ὅμως αὗται ἀπαιτοῦν διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ δεδομένου προϊόντος ἀνάλωσιν προϊόντων διαφόρων κλάδων παραγωγῆς καὶ προκαλοῦν οὕτω *ἐμμέσως* δαπάνην κεφαλαίου πέραν τῆς ἀμέσου δαπάνης αὐτοῦ. Ἂν συνεπῶς ληφθῇ ὑπ' ὄψιν τόσον τὸ ἀμέσως ὅσον καὶ τὸ ἐμμέσως χρησιμοποιούμενον κεφάλαιον ὑφ' ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω μεθόδων παραγωγῆς, εἶναι πιθανὸν νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ πρώτη μέθοδος ἀναλίσκει ὀλιγώτερον κεφάλαιον ἢ ἡ δευτέρα καὶ κατὰ συνέπειαν ὅτι εἶναι οἰκονομικωτέρα αὐτῆς, βάσει τοῦ κριτηρίου ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ κεφαλαίου.

Ἡ μόνη δυνατὴ μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῆς συνολικῆς (ἀμέσου καὶ ἐμμέσου) ἀναλώσεως κεφαλαίου εἰς ἑκάστην περίπτωσιν παραγωγῆς εἶναι ἡ μέθοδος τῆς «γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας» (General Equilibrium Method). Ἡ μέθοδος αὕτη ὑπὸ τὴν ἀρχικήν της μορφὴν ἐβασίσθη ὡς γνωστὸν εἰς τὰς

1) Ἡ συνθήκη τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῆς δαπάνης κεφαλαίου δὲν σημαίνει βεβαίως παραγνώρισιν τῆς ἀνάγκης πραγματοποιήσεως ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρας κεφαλαιακῆς συσσωρεύσεως εἰς μίαν ὑπανάπτυκτον οἰκονομίαν, πρὸς ἐξασφάλισιν ἑνὸς ἱκανοποιητικοῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως. Σημαίνει ἁπλῶς ὅτι ἡ κεφαλαιακὴ αὕτη συσσώρευσις πρέπει νὰ γίνεται κατὰ τὸν ὀρθολογικώτερον δυνατὸν τρόπον.

ἐργασίας τῶν οἰκονομολόγων τῆς σχολῆς τῆς Λωζάννης Walras ([1]) καὶ Pareto ([2]), ἀνεπτύχθη δὲ περαιτέρω ὑπὸ τοῦ Cassel ([3]). Ἡ χρησιμοποιουμένη σήμερον μέθοδος γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας ἀποτελεῖ μίαν ἐξειλιγμένην μορφὴν τοῦ ἀρχικοῦ ἀναλυτικοῦ σχήματος πρὸς τὴν κατεύθυνσιν κυρίως τῆς οἰκονομετρικῆς αὐτοῦ ἐφαρμογῆς καὶ εἶναι γνωστὴ ὡς ***Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις*** (Linear Economics) ἢ ὡς ***Ἀνάλυσις Οἰκονομικῆς Δραστηριότητος*** (Activity Analysis) ([4]).

2. Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις καὶ τὸ πρόβλημα τῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων

2. 1. Ἡ ἔννοια τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος

Ἡ βασικὴ ἔννοια τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως εἶναι ἡ ἔννοια τῆς ***παραγωγικῆς δραστηριότητος***. «Παραγωγικὴ δραστηριότης» (productive activity) καλεῖται εἰς τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν ὁ συγκεκριμένος συνδυασμὸς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν πρὸς ἐκτέλεσιν τῆς μονάδος τοῦ οἰκονομικοῦ ἔργου. Οὕτω, π.χ., ὁ συνδυασμὸς 2 μονάδων ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α καὶ 3 μονάδων ἐκ τοῦ συντελεστοῦ β πρὸς παραγωγὴν 1 μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω συνιστᾷ μίαν παραγωγικὴν δραστηριότητα. Ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἰς οἱονδήποτε (θετικὸν) ἐπίπεδον — ἐὰν βεβαίως ἐπιτρέπουν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς. Τὸ ἐπίπεδον τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος μετρεῖται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονάδων ([5]) τοῦ παραγομένου οἰκονομικοῦ ἔργου ([6]).

2. 2. Οἰκονομικὴ ἀλληλεξάρτησις — Ὑπόθεσις σταθερῶν ἀναλογιῶν

2. 2. 1. Ἕτερα οὐσιώδη χαρακτηριστικὰ τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως εἶναι ὅτι αὕτη βασίζεται: α) ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς οἰκονομικῆς ἀλ-

---

1) Éléments d' Economie Politique Pure, Paris 1926.

2) Manuel d' Economie Politique, Paris 1907.

3) Theory of Social Economy, London 1932.

4) Βλ. T. Koopmans (Edit.) «Activity Analysis of Production and Allocation», Wiley, N. Y. 1951, Osk. Morgenstern (Edit.) «Economic Activity Analysis», Wiley, N. Y. 1954 καὶ T. Koopmans «3 Essays on the State of Economic Science» Mc Graw Hill, N. Y. 1957 (Chapter I).

5) Ὁ καθορισμὸς τῶν μονάδων ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρησιμοποιουμένου μετρικοῦ συστήματος.

6) Περὶ παραγωγικῶν δραστηριοτήτων βλ. καὶ Παράρτημα Α, τμ. 1. Πλείονα εἰς Koopmans ἔνθ. ἀνωτ. καὶ Α. Α. Λάζαρη: Στοιχεῖα μαθηματικῆς ἀναλύσεως διὰ τὴν σπουδὴν τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, εἰς Ἀρχεῖον Οἰκονομικῶν καὶ Κοιν. Ἐπιστημῶν Ἀπρ. — Ἰουν. 1957.

ληλεξαρτήσεως καὶ β) ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως τῆς γραμμικότητος τῶν συναρτήσεων παραγωγῆς.

Ἡ οἰκονομικὴ ἀλληλεξάρτησις δύναται νὰ νοηθῇ ὑπὸ δύο μορφάς: *Πρῶτον*, ὡς σχέσις (ἀμέσου ἢ ἐμμέσου) ἐξαρτήσεως τῶν διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (ἢ κλάδων παραγωγῆς), λόγῳ τῆς χρησιμοποιήσεως ὑφ' ἑκάστης δραστηριότητος τοῦ προϊόντος τῶν ἄλλων δραστηριοτήτων διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος αὐτῆς.

Ἡ ὡς ἄνω ἀλληλεξάρτησις εἶναι ἡ κλασσικὴ μορφὴ ἀλληλεξαρτήσεως, τύπου Walras — Cassel, ἡ χαρακτηρίζουσα κυρίως τὰ μακροοικονομικὰ συστήματα, δηλαδὴ τὰ συστήματα τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν. Λόγῳ τῆς σχέσεώς των δυνάμεθα νὰ χαρακτηρίσωμεν τὰς ἀνωτέρω παραγωγικὰς δραστηριότητας *συνεργαζομένας*, τὴν δὲ ἀλληλεξάρτησιν αὐτῶν *συνεργατικὴν* ἀλληλεξάρτησιν.

Δεύτερον, ὡς σχέσις ἐξαρτήσεως μεταξὺ διαφόρων δραστηριοτήτων χρησιμοποιουσῶν, κατὰ τὴν παραγωγικήν των λειτουργίαν, συντελεστὰς παραγωγῆς τῶν ὁποίων αἱ ποσότητες εὑρίσκονται *ἐν ἀνεπαρκείᾳ*. Συνεπείᾳ τούτου, ἡ χρησιμοποίησις μεγαλυτέρων ποσοτήτων συντελεστῶν ὑπὸ μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος συνεπάγεται ἀναγκαίως μείωσιν τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων διὰ τὰς λοιπὰς δραστηριότητας. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ μεταβολὴ τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος δύναται νὰ ἐπηρεάσῃ κατ' ἀντίθετον φορὰν τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τῶν ἄλλων δραστηριοτήτων. Ὁ τύπος οὗτος ἀλληλεξαρτήσεως συναντᾶται κυρίως εἰς τὰ καλούμενα μικροοικονομικὰ συστήματα, ἤτοι συστήματα ἀναφερόμενα εἰς τὰς ἐπὶ μέρους οἰκονομικὰς μονάδας, ὡς εἶναι π.χ. αἱ ἐπιχειρήσεις (1). Θὰ χαρακτηρίσωμεν τὰς δραστηριότητας ταύτας *ἀνταγωνιστικὰς* τὴν δὲ ἀλληλεξάρτησίν των *ἀνταγωνιστικὴν* ἀλληλεξάρτησιν.

Πλὴν τῶν ἀνωτέρω δύο μορφῶν ἀλληλεξαρτήσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ἀλληλεξάρτησιν μικτοῦ τύπου, ἤτοι ἀλληλεξάρτησιν συνεργατικὴν καὶ ἀνταγωνιστικὴν ταυτοχρόνως, ὡς π.χ. συμβαίνει εἰς τὰς περιπτώσεις τῶν μακροοικονομικῶν συστημάτων, τῶν ὁποίων ἑκάστη παραγωγικὴ δραστηριότης χρησιμοποιεῖ (ἀμέσως ἢ ἐμμέσως) τὰ προϊόντα τῶν ἄλλων δραστηριοτήτων τοῦ συστήματος, ἐνῷ ταυτοχρόνως· αἱ διαθέσιμοι ποσότητες συντελεστῶν, π.χ. ἐργασίας ἢ κεφαλαίου, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιοῦν πᾶσαι αἱ δραστηριότητες, εὑρίσκονται ἐν ἀνεπαρκείᾳ.

2. 2. 2. Ἡ γραμμικότης τῶν παραγωγικῶν συναρτήσεων εἰς τὴν Γραμμικὴν Οἰκονομικὴν Ἀνάλυσιν προκύπτει ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς καλουμένης ὑποθέσεως τῶν *σταθερῶν ἀναλογιῶν* (assumption of proportionality). Ἡ ἔννοια τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς εἶναι ὅτι αἱ χρησιμοποιούμεναι ὑφ' ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος ποσότητες συντελεστῶν παραγωγῆς

---

1) Ἡ ἀλληλεξάρτησις τῆς πρώτης μορφῆς ἀπαντᾶται καὶ εἰς μικροοικονομικὰ συστήματα, ἀλλ' ἡ δευτέρα μορφὴ ἀλληλεξαρτήσεως εἶναι συνηθεστέρα.

εὑρίσκονται εἰς σταθερὰν σχέσιν πρὸς τὰς ποσότητας τῶν ὑπ' αὐτῶν παραγομένων προϊόντων, *ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ χρόνου παραγωγῆς* (1). Ἐάν, π.χ., μία παραγωγικὴ δραστηριότης ἀπαιτῇ, διὰ τὴν παραγωγὴν 1 μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ ω, α μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Α, β μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Β καὶ γ μονάδας ἐκ τοῦ συντελεστοῦ Γ, διὰ τὴν παραγωγὴν ν μονάδων τοῦ ω (ὅπου $\nu \geqslant 0$) θὰ ἀπαιτήσῃ να, νβ καὶ νγ μονάδας ἐκ τῶν συντελεστῶν Α, Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, καὶ δὴ ἀνεξαρτήτως τῆς χρονικῆς περιόδου τῆς παραγωγῆς. Περὶ τῆς βασιμότητος τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν διεξήχθησαν ἐπανειλημμένως συζητήσεις (2), καὶ ἐξεφράσθησαν ἀμφιβολίαι ἂν αὕτη δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν διατύπωσιν οἰκονομετρικῶν συστημάτων. Ἀλλ' ὡς δεικνύεται εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην (3)αἱ ἀμφιβολίαι περὶ τῆς ἀναλυτικῆς ἀξίας τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν δύνανται νὰ δικαιολογηθοῦν εἰς σημαντικὸν βαθμὸν *μόνον* εἰς ἃς περιπτώσεις αὕτη χρησιμοποιεῖται εἰς ὑποδείγματα οἰκονομικῆς προγνώσεως. Ἀντιθέτως, εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑποδειγμάτων οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ὡς εἶναι ἡ παροῦσα περίπτωσις, ἡ ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν ἀποτελεῖ ὄργανον ἀναλύσεως ἀναμφισβητήτου χρησιμότητος.

2. 3. Κλάδοι τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς ἀναλύσεως

2. 3. 1. Ἡ Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ Ἀνάλυσις διαιρεῖται εἰς τρεῖς κυρίως κλάδους: τὴν ***Ἀνάλυσιν Εἰσροῶν — Ἐκροῶν*** τὸν ***Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν*** καὶ τὴν ***Θεωρίαν Παιγνίων.***

Ἡ συγγένεια μεταξὺ τῶν δύο πρώτων κλάδων τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως εἶναι στενὴ (4), τόσον λόγῳ τῶν οἰκονομικῶν βάσεων αὐτῶν, ὅσον καὶ λόγῳ τῆς μαθηματικῆς διαρθρώσεως τῶν σχετικῶν ὑποδειγμάτων ἀναλύσεως. Ἡ Θεωρία Παιγνίων ἀντιθέτως εὑρίσκεται εἰς χαλαρὰν μᾶλλον σχέσιν ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως μὲ τοὺς δύο ἄλλους κλάδους, κατατάσσεται ὅμως ὡς τρίτος κλάδος τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως λόγῳ τῆς μαθηματικῆς διαρθρώσεως τῶν ὑποδειγμάτων της, τὰ ὁποῖα εἶναι πρακτικῶς ὅμοια πρὸς τὰ ὑποδείγματα τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Ἀναφορικῶς πρὸς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν μόνον οἱ δύο πρῶτοι κλάδοι τῆς Γραμμικῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως, δι' ὃ καὶ προβαίνομεν κατωτέρω εἰς τὴν σκιαγράφησιν τῶν βασικῶν χαρακτηριστικῶν τῶν κλάδων αὐτῶν.

2. 3. 2. ***Ἀνάλυσις Εἰσροῶν — Ἐκροῶν.*** Ἡ Ἀνάλυσις Εἰσροῶν — Ἐκ-

---

1) Βλ. Α. Α. Λάζαρη: «Τὸ σύστημα Λεόντιεφ» Ἐπιθεωρ. Οἰκ. καὶ Πολ. Ἐπιστημῶν, τεῦχος 1–2, 1957.

2) Βλ. π.χ. National Bureau of Economic Research: «Input – Output Analysis An Apraisal», 1955.

3) Βλ. Κεφάλ. 9.

4) Βλ. Dorfman, Samuelson and Solow, «Linear Programming and Economic Analysis» Mcgraw Hill. N. Y. 1958 (Introduction).

ροῶν (Input-Output Analysis) ἢ ἄλλως ἀνάλυσις Leontief [1] ἐφαρμόζεται κατὰ κύριον λόγον ἐπὶ μακροοικονομικῶν συστημάτων ἅτινα χαρακτηρίζονται ἀπὸ συνεργατικὴν ἀλληλεξάρτησιν.

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἐκκινᾷ ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ οἰκονομικὸν σύστημα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀριθμὸν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (κλάδων), ἑκάστη τῶν ὁποίων χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς συγκεκριμένου προϊόντος. Ὑποτίθεται ἐπίσης ὅτι σκοπός τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος εἶναι ἡ ἱκανοποίησις ὡρισμένης «τελικῆς ζητήσεως» (Final Demand) [2], προϊόντων, ὡς εἶναι π.χ. ἡ ζήτησις καταναλωτικῶν ἀγαθῶν πάσης φύσεως.

Τὸ συνήθως τιθέμενον πρόβλημα εἰς τὸ σύστημα εἰσροῶν — ἐκροῶν εἶναι: νὰ προσδιορισθοῦν ἡ συνολικὴ παραγωγὴ τῶν διαφόρων δραστηριοτήτων καὶ αἱ «διακλαδικαὶ ροαὶ» αὐτῶν — δηλαδὴ αἱ ποσότητες προϊόντων τὰς ὁποίας ἑκάστη δραστηριότης (κλάδος) ἀπορροφᾷ ἀπὸ τὰς ἄλλας διὰ τὴν παραγωγικήν της λειτουργίαν — αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀναγκαῖαι διὰ τὴν ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως ἐντὸς μιᾶς χρονικῆς περιόδου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι τὸ ὕψος καὶ ἡ διάρθρωσις τῆς τελικῆς ζητήσεως (δηλαδὴ τὸ εἶδος καὶ αἱ ποσότητες τῶν ζητουμένων π. χ. καταναλωτικῶν προϊόντων) ὁρίζονται *ἐκτὸς* τοῦ συστήματος εἰσροῶν — ἐκροῶν. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὡς πρόβλημα οἰκονομικῆς πολιτικῆς ἢ ἀκριβέστερον, ὡς πρόβλημα οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ, ἡ δὲ τελικὴ ζήτησις ὡς ὁ ἐπιδιωκτέος προγραμματικὸς σκοπός [3].

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος, διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν ἐπιπέδων τῶν διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἀποτελεῖ μίαν *λύσιν γενικῆς οἰκονομικῆς ἰσορροπίας*, ὑπὸ τὴν κλασσικὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ τῆς λύσεως ταύτης ἐξασφαλίζεται πλήρης *συνέπεια* (consistency) μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν διαφόρων δραστηριοτήτων, εἰς τρόπον ὥστε ἡ συνολικὴ παραγωγὴ ἑκάστης δραστηριότητος νὰ εἶναι ἀκριβῶς ὅση ἀπαιτεῖται διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τοῦ ἀντιστοίχου προϊόντος τῆς τελικῆς ζητήσεως καὶ τὴν ὁμαλὴν παραγωγικὴν λειτουργίαν τῶν ἄλλων δραστηριοτήτων.

2. 3. 3. Γραμμικὸς Προγραμματισμός. Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς (Linear Programming) ἐφαρμόζεται εἰς οἰκονομικὰ συστήματα ἅτινα χαρακτηρίζονται κυρίως ἀπὸ ἀνταγωνιστικὴν ἀλληλεξάρτησιν, ὡς εἶναι συνήθως

---

1) Βλ. W. Leontief The Structure of American Economy, 1919 – 1939» (N. Y. 1941).

2) Βλ. Α. Λάζαρη. «Τὸ σύστημα Λεόντιεφ», τμ. Γ καὶ Ε. Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἔχομεν ὑπ' ὄψιν μας κυρίως τὸ καλούμενον *ἀνοικτὸν — στατικὸν* ὑπόδειγμα τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν — Ἐκροῶν.

3) Βλ. J. Cornfield, W. Evans and M. Hoffenberg «Full Employment Patterns 1950» Monthly Labour Review, 1947.

τὰ μικροοικονομικὰ συστήματα. Μολονότι *κατ' ἀρχὴν* εἶναι δυνατὴ ἡ χρησιμοποίησις τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ εἰς συστήματα συνεργατικῆς ἢ μικτῆς ἀλληλεξαρτήσεως ἡ εἰς τὴν πρᾶξιν χρησιμοποιουμένη σήμερον ὑπολογιστικὴ τεχνικὴ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ, γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα «ἀλγόριθμος Simplex» ([1]), εἶναι περισσότερον ἐνδεδειγμένη διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν προβλημάτων τὰ ὁποῖα ἀφοροῦν εἰς μικροοικονομικὰ συστήματα ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως, ὡς εἶναι τὰ προβλήματα τοῦ προγραμματισμοῦ τῶν διαφόρων ἐπιχειρήσεων.

Εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν ὑποτίθεται ὅτι ἕκαστον προϊὸν εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθῇ διὰ περισσοτέρων τῆς μιᾶς παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἤ, γενικώτερον, ὅτι ἓν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ διαφόρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (ἢ διὰ διαφόρων συνδυασμῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων). Τὸ κύριον ἀναλυτικὸν πρόβλημα ἐν προκειμένῳ εἶναι νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς *συνέπειαν* μὲ τοὺς διαθεσίμους πόρους, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐξασφαλίζουν *ἀριστοποίησιν* τοῦ οἰκονομικοῦ ἀποτελέσματος. Οὕτω, ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμός, κατ' ἀντιδιαστολὴν πρὸς τὴν 'Ανάλυσιν Εἰσροῶν—'Εκροῶν, ἐπιδιώκει ὄχι μόνον νὰ ἐξασφαλίσῃ τὴν συνέπειαν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἀλλὰ καὶ νὰ προσδιορίσῃ τὴν *ἀρίστην δυνατὴν* λύσιν εἰς αὐτό, διὰ καταλλήλου ἐπιλογῆς μεταξὺ διαφόρων *δυνατῶν λύσεων* ([2]).

2. 3. 4. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν προβλημάτων τῆς 'Αναλύσεως Εἰσροῶν—'Εκροῶν καὶ τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ ἐκδηλοῦται εἰς τὴν μαθηματικὴν διατύπωσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν. Οὕτω, τὰ μὲν πρῶτα ἐμφανίζονται ὑπὸ τὴν μορφὴν «προσδιωρισμένων» (determined) συστημάτων ἐξισώσεων, ἤτοι συστημάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν τόσας ἐξισώσεις ὅσους καὶ ἀγνώστους καὶ ἐπιδέχονται μίαν μόνον λύσιν, τὰ δὲ δεύτερα λαμβάνουν τὴν μορφὴν «ἀπροσδιορίστων» (underdetermined) συστημάτων τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀριθμὸν ἐξισώσεων μικρότερον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων, καὶ ἐπιδέχονται ἀπείρους λύσεις. Προφανῶς ζήτημα ἀριστοποιήσεως τῆς λύσεως εἶναι δυνατὸν νὰ τεθῇ μόνον εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν καθ' ὅσον ἡ ἀριστοποίησις προϋποθέτει περισσοτέρας τῆς μιᾶς λύσεις.

Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ μαθηματικῶς ὡς μία μέθοδος ἀριστοποιήσεως ([3]), ἥτις καθορίζει τὴν διαδικασίαν ἐπιλογῆς τῆς

---

1) Βλ. Α. Α. Λάζαρη, Γραμμικὸς Προγραμματισμός, εἰς 'Επιθ. Οἰκ. καὶ Πολιτ. 'Επιστ. 'Ιαν.—'Ιουν. 1956.

2) «Δυνατὴ λύσις» (Feasible Solution) εἶναι ἡ πληροῦσα τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

3) Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀριστοποιήσεως διαφέρει βασικῶς τῶν συνήθων μεθόδων ἀριστοποιήσεως τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ. (Βλ. Α. Α. Λάζαρη: Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς παρ. 112). Ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς (καὶ ἡ Γραμμικὴ Οἰκονομικὴ 'Ανάλυσις γενικώτερον) βασίζεται ἐπὶ τῆς Γραμμικῆς 'Αλγέβρας καὶ — εἰς ἓν ἀνώτερον ἐπίπεδον — ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν κυρτῶν συνόλων (Βλ. Koopmans: Activity Analysis: Part 3).

ἀρίστης λύσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων δυνατῶν λύσεων ἑνὸς προβλήματος, βάσει δοθέντων κριτηρίων. Ἀπὸ οἰκονομικῆς ἀπόψεως ὁ Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς ἀποτελεῖ μέρος τῆς Κανονιστικῆς Οἰκονομετρίας (Normative Econometrics), διότι δεικνύει ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ καλλιτέρα κατανομὴ τῶν διαθεσίμων πόρων διὰ τὴν πραγματοποίησιν ἑνὸς οἰκονομικοῦ σκοποῦ.

2. 4. Τὸ πρόβλημα τῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων

Βασικὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ ἐνταῦθα ἐξεταζομένου τύπου οἰκονομίας εἶναι, ὡς ἐλέχθη, ἡ ἔντονος ἀνεπάρκεια κεφαλαίου καὶ ἡ ἀφθονία ἐργατικῶν δυνάμεων. Ἡ οἰκονομία αὕτη εὑρίσκεται συνεπῶς εἰς μίαν κατάστασιν ***διαρθρωτικῆς ἀνισορροπίας***, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ὁ ὑπάρχων κεφαλαιουχικὸς ἐξοπλισμὸς αὐτῆς δὲν ἐπαρκεῖ διὰ τὴν παραγωγικὴν χρησιμοποίησιν ὁλοκλήρου τοῦ ἐργατικοῦ πληθυσμοῦ. Ἀποτέλεσμα τῆς καταστάσεως ταύτης εἶναι ἡ ὕπαρξις ἐκτεταμένης «διαρθρωτικῆς ἀνεργίας» καὶ τὸ λίαν χαμηλὸν κατὰ κεφαλὴν εἰσόδημα.

Ἡ μονιμότης τῆς ὡς ἄνω διαρθρωτικῆς ἀνισορροπίας εἰς τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας ἀποτελεῖ, νομίζομεν, τὸ βασικώτερον ἐπιχείρημα ἐναντίον τῶν κλασσικῶν ἀπόψεων περὶ τῆς ὑπάρξεως ἱκανῶν αὐτοδιορθωτικῶν δυνάμεων εἰς τὴν οἰκονομίαν καὶ τῶν νεοκλασσικῶν ἀπόψεων περὶ τῆς δυνατότητος ἀπεριορίστου ὑποκαταστάσεως τῶν ἐν ἀνεπαρκείᾳ συντελεστῶν ὑπὸ τῶν ἐν ἐπαρκείᾳ τοιούτων, μέσῳ τοῦ μηχανισμοῦ τῶν τιμῶν. Ἡ ἀνισορροπία αὕτη ἀποτελεῖ ἐξ ἄλλου καὶ τὴν δικαιολογητικὴν βάσιν διὰ τὴν κατάρτισιν τῶν προγραμμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, εἰς τὰ πλαίσια τῶν ὁποίων ἐπιδιώκεται ὁ συντονισμὸς τῆς ἰδιωτικῆς καὶ κρατικῆς δραστηριότητος διὰ τὴν ἀλλαγὴν τῆς ὑφισταμένης καταστάσεως καὶ τὴν ἐξασφάλισιν ἑνὸς ἱκανοποιητικοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς καὶ εἰσοδήματος. Ἀλλαγὴ τῆς ὑφισταμένης καταστάσεως σημαίνει, εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων, ριζικὴν ***ἀναδιάρθρωσιν*** τῆς οἰκονομίας ἐπὶ νέων βάσεων. Ἡ ἀναδιάρθρωσις αὕτη συνίσταται ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν εἰς τὴν ἐξάλειψιν τῆς βασικῆς ἀνισορροπίας μεταξὺ κεφαλαίου καὶ ἐργασίας, διὰ τῆς αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου κατὰ κεφαλὴν ἐργαζομένου, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ εἰς τὴν εἰσαγωγὴν νέων τεχνικῶν μεθόδων παραγωγῆς καὶ τὴν κατανομὴν τῶν διαθεσίμων κεφαλαίων μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν κλάδων κατὰ τρόπον ἐξασφαλίζοντα τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ ἐθνικοῦ εἰσοδήματος. Οὕτω, ***τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως γενικῶς, καὶ τῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων εἰδικώτερον, εἶναι ἓν πρόβλημα ἀριστοποιήσεως*** καὶ δύναται νὰ καταταγῇ εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν προβλημάτων τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ.

Ἐπειδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑπαναπτύκτων χωρῶν τὸ κεφάλαιον εὑρίσκεται ἐξ ὑποθέσεως ἐν ἀνεπαρκείᾳ, ἡ κατανομὴ τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων δημιουργεῖ σχέσεις ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως μεταξὺ τῶν κλάδων αὐτῶν, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ὁ βαθμὸς ἀναπτύξεως ἑνὸς κλάδου, διὰ τῆς ἐκτελέσεως νέων ἐπενδύσεων εἰς αὐτόν, ἐπηρεάζει ἀντιστρόφως τὸν βαθμὸν ἀναπτύξεως τῶν ἄλλων κλάδων. Ἐξ ἄλλου οἱ κλάδοι οὗτοι διέπονται ταυτοχρόνως ἀπὸ συνεργατικὴν ἀλληλεξάρτησιν, καθ' ὅσον χρησιμοποιοῦν διὰ τὴν παραγωγικήν των λειτουργίαν τὰ προϊόντα ἀλλήλων, ἀμέσως ἢ ἐμμέσως. Ἀπὸ τῆς τελευταίας ταύτης ἀπόψεως, ἡ ἐξέτασις ὡρισμένων βασικῶν πλευρῶν τοῦ προβλήματος ἐμπίπτει εἰς τὰ πλαίσια τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν – Ἐκροῶν.

Ἡ ἐνταῦθα ἐφαρμοζομένη μέθοδος ἐξετάσεως τοῦ προβλήματος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία σύνθεσις τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν – Ἐκροῶν καὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Εἰδικώτερον, ὁλόκληρος ἡ διαδικασία ἐπιλογῆς τῶν καλλιτέρων δυνατῶν μεθόδων παραγωγῆς βασίζεται ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς «τιμῆς ἰσορροπίας» ἢ «πλασματικῆς τιμῆς» (shadow price) τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Ἡ χρησιμοποιουμένη ὑπολογιστικὴ τεχνικὴ διαφέρει, ἐν τούτοις, βασικῶς τῆς συνήθως χρησιμοποιουμένης εἰς τὸν Γραμμικὸν Προγραμματισμὸν τεχνικῆς Simplex πρὸς λύσιν μικροοικονομικῶν προβλημάτων ἀνταγωνιστικῆς ἀλληλεξαρτήσεως. Ἡ τελευταία αὕτη τεχνικὴ δὲν εἶναι νομίζομεν πάντοτε ἀποτελεσματικὴ προκειμένου περὶ μακροοικονομικῶν προβλημάτων μικτῆς ἀλληλεξαρτήσεως, ὡς εἶναι τὸ ἐνταῦθα ἐξεταζόμενον, κυρίως λόγῳ τοῦ μεγέθους τῶν προβλημάτων αὐτῶν.

Τὸ κύριον μέρος τῆς παρούσης ἐργασίας εἶναι τὸ δεύτερον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναπτύσσεται διεξοδικῶς ἡ μέθοδος ἐπιλογῆς τῆς ἀρίστης διαρθρώσεως τῆς ὑπὸ ἀνάπτυξιν οἰκονομίας καὶ ὁ τρόπος προσδιορισμοῦ τῶν ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων πρὸς ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζητήσεως. Τὸ βασικὸν πρόβλημα ἐνταῦθα εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ τῶν ἐπιπέδων χρησιμοποιήσεως αὐτῶν πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως μὲ τὸ ἐλάχιστον δυνατὸν κόστος ἐπενδύσεων. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος (Κεφ. 8) ἐκτίθεται εἰς γενικὰς γραμμὰς καὶ ἡ διαδικασία τοῦ ἐλέγχου τῆς ἐπιτυγχανομένης λύσεως, βάσει ὡρισμένων κριτηρίων. Ἡ παροῦσα ἐργασία ἀσχολεῖται κυρίως μὲ τὴν πρακτικὴν πλευρὰν τῆς μεθοδολογίας τοῦ προγραμματισμοῦ τῶν ἐπενδύσεων καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀνάλυσις δὲν περιορίζεται εἰς τὴν θεωρητικὴν σκιαγράφησιν τοῦ ὑποδείγματος, ἀλλ' ἐπεκτείνεται καὶ ἐπὶ τῶν βασικῶν ὑπολογιστικῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα θὰ ἀνέκυπτον ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ ὑποδείγματος τούτου εἰς τὴν πρᾶξιν (Κεφ. 6 καὶ 7). Εἰς τὸ Κεφ. 9 ἐξετάζεται ἡ βασιμότης τῆς ὑποθέσεως τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν, ἡ ὁποία εἶναι θεμελιώδης διὰ τὴν παροῦσαν ἀνάλυσιν.

Ἐπειδὴ τὰ βασικὰ προβλήματα τῆς ἀνὰ χεῖρας διατριβῆς ἀναφέρονται εἰς τὴν ἐξέτασιν ***οἰκονομικῶν διαρθρώσεων*** (δηλαδὴ συνόλων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων), διὰ τὴν περιγραφὴν καὶ τὴν μαθηματικὴν ἐπεξεργασίαν τῶν διαρθρώσεων αὐτῶν χρησιμοποιοῦνται στοιχεῖα τοῦ Λογισμοῦ Μητρῶν, ὡς καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἀλγεβρικὴ ἔννοια τοῦ διανύσματος. Πρὸς ὑποβοήθησιν τοῦ ἀναγνώστου παρατίθενται εἰς τὸ Παράρτημα Α βασικαί τινες ἔννοιαι ἀναφορικῶς μὲ τὰς οἰκονομικὰς διαρθρώσεις τύπου Λεόντιεφ, ὡς ἐπίσης καὶ σχετικὴ μαθηματικὴ βιβλιογραφία. Τέλος, εἰς τὰ παραρτήματα Β καὶ Γ γίνεται συμπληρωματικὴ ἐπεξεργασία ὡρισμένων σημείων τῆς ἀναλύσεως τῶν Κεφαλαίων 6 καὶ 7.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

3. Ἀρχικὴ διάρθρωσις τῆς Οἰκονομίας — Οἰκονομικὰ καὶ τεχνολογικὰ δεδομένα

Πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς συστηματικῆς ἀναπτύξεως τοῦ προτεινομένου εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ὑποδείγματος προγραμματισμοῦ τῶν ἐπενδύσεων, χρησιμοποιοῦμεν ἀναλυτικὸν ἀριθμητικὸν παράδειγμα ἐφαρμογῆς τοῦ ὑποδείγματος αὐτοῦ εἰς μίαν ὑποθετικὴν οἰκονομίαν, τῆς ὁποίας τὰ βασικὰ οἰκονομικὰ καὶ τεχνολογικὰ χαρακτηριστικὰ ἐκτίθενται εἰς τὰς ἑπομένας παραγράφους τοῦ παρόντος τμήματος.

3. 1. Τεχνολογικὴ διάρθρωσις ἐγχωρίων παραγωγικῶν κλάδων

Ἡ ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομία ἔχει εἰς τὴν διάθεσίν της τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας [1] I, II, III καὶ IV, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς παραγωγικοὺς κλάδους 1, 2, 3 καὶ 4. Αἱ παραγωγικαὶ δραστηριότητες σχηματίζουν ἐπηυξημένην τεχνολογικὴν μήτραν τύπου Leontief (εἰσροῶν—ἐκροῶν) [1]:

Πίναξ 1
Τεχνολογία ἐγχωρίων κλάδων

Παραγωγικαὶ δραστηριότητες	I	II	III	IV
Κλάδοι	1	2	3	4
1	1	0	–0.5	–0.1
2	–0.2	1	–0.2	–0.2
3	–0.2	–0.2	1	–0.6
4	–0.1	–0.4	0	1
Κεφάλαιον	–1.2	–1.5	–1.9	–2.1

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I δεικνύει ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 νομισματικῆς μονάδος [2] τοῦ κλάδου 1, ἀπαιτεῖται ὡς πρώτη ὕλη κλπ., προϊὸν ἀξίας 0.2 ν.μ. τοῦ κλάδου 2, προϊὸν ἀξίας 0.2 ν.μ. τοῦ κλάδου 3 καὶ προϊὸν ἀξίας 0.1 ν.μ. τοῦ κλάδου 4. Αἱ ἀνωτέρω ποσότητες

1) Βλ. Παράρτημα Α τμ. 2.
2) Αἱ νομισματικαὶ μονάδες εἶναι ἐνταῦθα συμβατικὰ μεγέθη σταθερᾶς ἀξίας.

ἀποτελοῦν συνεπῶς «συντελεστὰς εἰσροῆς» (input coefficients ([1])) τοῦ κλάδου 1 ἐν σχέσει πρὸς τοὺς ἄλλους κλάδους ([2]).

Πλὴν τῶν ἀνωτέρω «εἰσροῶν» ἐκ τῶν κλάδων 2, 3 καὶ 4, ὁ κλάδος 1 χρησιμοποιεῖ ἐπίσης—πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ.—κεφάλαιον ὑπὸ μορφὴν μηχανημάτων καὶ γενικῶς παγίων ἐγκαταστάσεων ἀξίας 1. 2 ν.μ. Τὸ στοιχεῖον 1.2 τὸ ὁποῖον θὰ ὀνομάσωμεν «συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως» (capital-output coefficient), παριστᾷ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς ἀξίας τοῦ χρησιμοποιουμένου ὑπὸ τοῦ κλάδου 1 κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ καὶ τῆς ἀξίας τοῦ ὑπὸ τοῦ κλάδου τούτου παραγομένου προϊόντος.

Ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως δὲν ἀποτελεῖ κόστος τῆς τρεχούσης παραγωγῆς, ὡς οἱ ἀναφερθέντες ἀνωτέρω συντελεσταὶ εἰσροῆς ([3]). Σημαίνει ἁπλῶς ὅτι πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. ἐκ τοῦ κλάδου 1 ἀπαιτοῦνται μηχανήματα καὶ λοιπαὶ πάγιαι ἐγκαταστάσεις ἀξίας 1.2 ν.μ. Τὰ μηχανήματα καὶ αἱ ἐγκαταστάσεις αὗται δημιουργοῦν κόστος τρεχούσης παραγωγῆς μόνον κατὰ τὸ ποσοστὸν τῶν ἀποσβέσεών των. Ἀλλ' ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἀποσβέσεις ἀντιστοιχοῦν εἰς εἰσροὰς τοῦ κλάδου 1 ἐκ τῶν λοιπῶν κλάδων, ὅτι δηλαδὴ λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν εἰς ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν συντελεστῶν εἰσροῆς τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I. Πρὸς διάκρισιν τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως ἀπὸ τοὺς λοιποὺς συντελεστὰς ἑκάστης παραγωγικῆς δραστηριότητος, θὰ ὀνομάζωμεν ἐνίοτε τὸν πρῶτον «ἀκραῖον στοιχεῖον», τοὺς δὲ δευτέρους «διακλαδικὰ στοιχεῖα» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος.

Τὸ ἀκραῖον καὶ τὰ διακλαδικὰ στοιχεῖα προσημαίνονται ἀρνητικῶς πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὸ παραγόμενον προϊὸν (ἀξίας 1 ν.μ.), τὸ ὁποῖον λαμβάνει θετικὸν σημεῖον.

Βάσει τῶν λεχθέντων περὶ τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I, δυνάμεθα τώρα νὰ ἑρμηνεύσωμεν ἀναλόγως καὶ τὰς λοιπὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας II, III καὶ IV. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης II δεικνύει ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. τοῦ κλάδου 2, ὁ κλάδος οὗτος πρέπει νὰ χρησιμοποιήσῃ προϊόντα ἀξίας 0.2 ν.μ. καὶ 0.4 ν.μ. τῶν κλάδων 3 καὶ 4 ἀντιστοίχως καὶ κεφάλαιον, ὑπὸ μορφὴν μηχανημάτων καὶ λοιπῶν παγίων ἐγκαταστάσεων, ἀξίας 1.5 ν.μ. Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης III δεικνύει ὅτι ὁ κλάδος 3 λαμβάνει προϊόντα ἀξίας 0.5 καὶ 0.2 ν.μ. ἐκ τῶν κλάδων 1 καὶ 2 ἀντιστοίχως καὶ χρησιμοποιεῖ κεφάλαιον ἀξίας 1.9 ν.μ., πρὸς παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. Τέλος, ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης IV ὑποδηλοῖ ὅτι διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1 ν.μ. τοῦ κλάδου 4 ἀπαιτοῦνται

1) Βλ. Παράρτημα Α τμ. 1.

2) Πρὸς ἁπλούστευσιν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα τὸ ὑφ' ἑκάστου κλάδου ἀπορροφώμενον ἴδιον προϊόν, δηλαδὴ ἀποκλείονται ἐκ τῆς ἀνωτέρω τεχνολογικῆς μήτρας αἱ «ἐνδοκλαδικαὶ» σχέσεις καὶ ἐμφανίζονται μόνον αἱ «διακλαδικαὶ» τοιαῦται.

3) Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι οἱ σημειούμενοι συντελεσταὶ εἰσροῆς τοῦ κλάδου 1 δὲν ἀποτελοῦν τὰ μοναδικὰ στοιχεῖα κόστους παραγωγῆς τοῦ κλάδου τούτου, καθ' ὅσον εἰς τὴν ἀνωτέρω τεχνολογικὴν μήτραν δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ εἰσροαὶ ἐργασίας καὶ ἄλλα στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἐπίσης κόστος παραγωγῆς.

προϊόντα ἀξίας 0.1, 0.2 καὶ 0.6 ν.μ. τῶν κλάδων 1, 2 καὶ 3 ἀντιστοίχως καὶ κεφάλαιον ἀξίας 2.1 ν.μ.

Ἡ περιγραφεῖσα τεχνολογία τῶν ἐγχωρίων κλάδων παριστᾷ ἐν ὀλίγοις τὰς διακλαδικὰς ροὰς τῶν προϊόντων μεταξὺ τῶν κλάδων 1, 2, 3 καὶ 4 ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ποσὸν κεφαλαίου τὸ ὁποῖον ἕκαστος τῶν κλάδων τούτων χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν παραγωγὴν προϊόντος ἀξίας 1. ν.μ.

Μαθηματικῶς, τὰς ὡς ἄνω παραγωγικὰς δραστηριότητας, ὡς ἐπίσης καὶ πᾶσαν στήλην ἀριθμῶν μὲ ὡρισμένην διάταξιν, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ὡς ***σημεῖα*** ἐντὸς γεωμετρικοῦ χώρου μὲ συντεταγμένας τοὺς ἐν λόγῳ ἀριθμούς. Τὰς ὡς ἄνω στήλας διατεταγμένων ἀριθμῶν θὰ καλοῦμεν ἐπίσης ***διανύσματα*** (1).

3. 2. Παραγωγικὴ δυναμικότης τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἀρχικὸν ἔτος χ_0

Ἡ παραγωγικὴ δυναμικότης τῆς οἰκονομίας κατὰ κλάδους, μετρουμένη διὰ τῆς ἀξίας (εἰς σταθερὰς νομισματικὰς μονάδας) τῆς συνολικῆς ***δυνατῆς*** παραγωγῆς ἑκάστου κλάδου, ἔχει κατὰ τὸ ἀρχικὸν ἔτος ὡς ἑξῆς:

Πίναξ 2

Παραγωγικὴ δυναμικότης

(Ἔτος χ_0)

Κλάδος	1	850
»	2	100
»	3	650
»	4	500

3. 3. Τελικὴ ζήτησις ἔτους χ_0

Ἡ τελικὴ ζήτησις (2) τοῦ ἔτους χ_0, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς ἐπὶ μέρους ζητήσεις διὰ τὰ προϊόντα α, β, γ καὶ δ (3) τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ παραχθοῦν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν κλάδων 1, 2, 3 καὶ 4 ἢ νὰ εἰσαχθοῦν ἀπὸ τὸ ἐξωτερικόν. Ἡ ζήτησις αὕτη ἔχει (εἰς σταθερὰς ν. μ.), ὡς κάτωθι:

1) Βλ. καὶ Παράρτ. Α, τομ. 1.

2) Περὶ τελικῆς ζητήσεως βλ. Α. Α. Λάζαρη: Τὸ σύστημα Λεόντιεφ. τμ. Γ΄.

3) Ἡ ὀνοματολογία τῶν προϊόντων εἶναι ἀναγκαία πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως εἰς ἃς περιπτώσεις ταῦτα εἰσάγονται, ὁπότε δὲν δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἀποτελοῦν προϊόντα τοῦ ἀντιστοίχου κλάδου.

Πίναξ

Τελικὴ ζήτησις ἔτους χ_0

Προϊόντα	Ἀξία
α	250
β	230
γ	170
δ	370

3. 4. Λειτουργικὴ τεχνολογικὴ διάρθρωσις

Ἡ ἀνωτέρω τελικὴ ζήτησις, ὡς ἐπίσης καὶ αἱ διακλαδικαὶ ροαὶ ἱκανοποιοῦνται: 1) ἐκ τῆς παραγωγῆς τῶν κλάδων 1, 3 καὶ 4 οἱ ὁποῖοι προμηθεύουν εἰς τὴν οἰκονομίαν τὰς ἀπαιτουμένας ποσότητας τῶν προϊόντων α, γ καὶ δ καὶ 2) ἐξ εἰσαγωγῆς ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ τῶν ἀναγκαιουσῶν ποσοτήτων τοῦ προϊόντος β, ἔναντι ἐξαγωγῆς ποσότητος τοῦ ἐγχωρίως παραγομένου ὑπὸ τοῦ κλάδου 1 προϊόντος α.

Ἡ ἐξαγωγικὴ δυναμικότης τοῦ κλάδου 1 κατὰ τὸ ἔτος χ_0 ἀνέρχεται εἰς ποσότητα προϊόντος α ἀξίας 205 ν. μ. ([1]). Ἐξ ἄλλου τὸ κατὰ μονάδα προϊόντος ([2]) εἰσπραττόμενον ἐξαγωγικὸν συνάλλαγμα εἶναι 0.85 μονάδες ξένου νομίσματος (μ.ξ.ν.), τὸ δὲ πληρωνόμενον δι' ἑκάστην εἰσαγομένην μονάδα τοῦ προϊόντος β συνάλλαγμα εἶναι 0.80 μ.ξ.ν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι ἡ ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομία δὲν χρησιμοποιεῖ κατὰ τὸ ἔτος χ_0 τὴν διαθέσιμον δυναμικότητα τοῦ κλάδου II, καὶ ὅτι διὰ τὴν προμήθειαν τῶν ἀναγκαιουσῶν ποσοτήτων τοῦ προϊόντος β διὰ πρώτας ὕλας καὶ τελικὴν ζήτησιν, εἰσάγει τὸ προϊὸν τοῦτο ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ. Πρὸς κάλυψιν τῶν συναλλαγματικῶν ἐξόδων ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς ἡ ἐν λόγῳ οἰκονομία ἐξάγει προϊὸν α, ἀξίας 205 ν.μ., ἡ δὲ τυχὸν διαφορὰ μεταξὺ συναλλαγματικῶν δαπανῶν καὶ συναλλαγματικῶν ἐσόδων, θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἀντανακλᾶται εἰς τὸ ὕψος τοῦ συναλλαγματικοῦ ἀποθέματος τῆς χώρας ἢ εἰς τὴν μεταβολὴν τοῦ ἐπιπέδου ἐξωτερικοῦ δανεισμοῦ αὐτῆς.

Αἱ ἀνωτέρω πληροφορίαι δίδουν μίαν εἰκόνα τῆς «λειτουργικῆς τεχνολογίας» τῆς ὑπ' ὄψιν οἰκονομίας, δηλαδὴ τῆς διαρθρώσεως τὴν ὁποίαν πράγματι χρησιμοποιεῖ ἡ οἰκονομία πρὸς παραγωγὴν καὶ πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τεθείσης τελικῆς ζητήσεως κατὰ τὸ ἔτος χ_0. Ὁ ὅρος «λειτουργικὴ τεχνολογία» χρησιμοποιεῖται ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὸν ἤδη χρησιμοποιηθέντα ὅρον «τεχνολογία ἐγχωρίων κλάδων».

---

1) Λόγῳ π. χ. ἀδυναμίας διαθέσεως κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο περισσοτέρου προϊόντος εἰς ξένας ἀγορὰς ἢ λόγῳ ἀνεπαρκείας τῆς ἐγχωρίου παραγωγῆς.

2) Ἐφ' ὅσον πρὸς ἀποτίμησιν τῆς ἀξίας τῶν προϊόντων χρησιμοποιοῦμεν σταθερὰς νομισματικὰς μονάδας, αὗται δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς λογιστικὰ ἰσότιμα παριστῶντα ἐπίσης καὶ φυσικὰς μονάδας τῶν προϊόντων.

Πρὸς συμπλήρωσιν τῆς ἀνωτέρω εἰκόνος θὰ προσθέσωμεν τὰ ἀκόλουθα: α) Ἡ ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομία οὐδεμίαν ἄλλην οἰκονομικὴν σχέσιν ἔχει μὲ ξένας οἰκονομίας, πλὴν τῶν ἀναφερθεισῶν σχέσεων μέσῳ τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου. Ἀποκλείονται δηλαδὴ ἡ εἰσροὴ καὶ ἐκροὴ κεφαλαίων, αἱ εἰσπράξεις καὶ πληρωμαὶ ἐξ ἀδήλων πηγῶν κλπ. β) Λόγῳ ἐλλείψεως ἐπαρκῶν ποσοτήτων κεφαλαίου πρὸς ἀπασχόλησιν τοῦ ὑπάρχοντος ἐργατικοῦ δυναμικοῦ, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὸ τελευταῖον τοῦτο εὑρίσκεται εἰς κατάστασιν διαρθρωτικῆς ἀνεργίας (κεκαλυμμένης ἢ ἀνοικτῆς) κατὰ σημαντικὸν ποσοστόν, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ κατὰ κεφαλὴν εἰσόδημα εἶναι λίαν χαμηλόν, ἐν συγκρίσει μὲ τὸ κατὰ κεφαλὴν εἰσόδημα ἄλλων οἰκονομιῶν αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζονται ὡς οἰκονομικῶς «ἀνεπτυγμέναι».

Ἡ ὑπόθεσις (α) εἶναι ἁπλοποιητική. Ἡ ὑπόθεσις (β) ἀποσκοπεῖ εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν τῆς ἐξεταζομένης οἰκονομίας ὡς «ὑπαναπτύκτου».

3. 5. Ὑπολογισμὸς ἐπιπέδων παραγωγῆς κατὰ τὸ ἔτος χ_0

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω δοθέντων στοιχείων δυνάμεθα τώρα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν κλάδων 1,3 καὶ 4 κατὰ τὸ ἔτος χ_0, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν εἰσαγωγῶν κατὰ τὸ αὐτὸ ἔτος. Πρὸς τοῦτο καταρτίζομεν τὸ κάτωθι σύστημα ἐξισώσεων:

$$\begin{aligned} X_1 - 0.5\,X_3 - 0.1\,X_4 - \overline{E}_\alpha &= 250 \\ -0.2X_1 + M_\beta - 0.2X_3 - 0.2X_4 &= 230 \\ -0.2X_1 + X_3 - 0.6X_4 &= 170 \\ -0.1X_1 + X_4 &= 370 \end{aligned} \qquad (3.1.)\ (^1)$$

ὅπου

X_1, X_3, X_4: τὰ ζητούμενα ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν κλάδων 1,3 καὶ 4

$\overline{E}_\alpha$: αἱ ἐξαγωγαὶ προϊόντος α ($= 205$)

M_β: τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον εἰσαγωγῶν τοῦ προϊόντος β.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος λαμβάνονται ἀπὸ τὴν τεχνολογικὴν μήτραν τοῦ πίνακος 1, αἱ δὲ σταθεραὶ τοῦ δεξιοῦ σκέλους τοῦ συστήματος ἀποτελοῦν τὰ ἐπὶ μέρους κονδύλια τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ ἔτους χ_0 (πίναξ 3). Εἰδικώτερον, ἑκάστη ἐξίσωσις περιγράφει τὸν τρόπον διαθέσεως τοῦ παραχθέντος προϊόντος τῶν κλάδων 1,3 καὶ 4 καὶ τῶν εἰσαγωγῶν. Οὕτω ὁ κλάδος 1 ἐκ τοῦ προϊόντος αὐτοῦ, X_1, δίδει εἰς τὴν τελικὴν ζήτησιν 250, δι' ἐξαγωγὰς $\overline{E}_\alpha = 205$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἰς τοὺς κλάδους 3 καὶ 4, διὰ παραγωγικὰς ἀνάγκας (πρώτας ὕλας κλπ.) τῶν κλάδων αὐτῶν. Ἡ διανομὴ πρὸς τοὺς κλάδους 3 καὶ 4 γίνεται βάσει τῶν διακλαδικῶν των στοιχείων ἐν σχέσει πρὸς

1) Διὰ τὴν ἀρίθμησιν τῶν μαθηματικῶν παραστάσεων χρησιμοποιοῦνται δύο ἀριθμοί. Ὁ πρῶτος ἐξ αὐτῶν δεικνύει τὸ κεφάλαιον εἰς ὃ ἀνήκει ἡ παράστασις ὁ δὲ δεύτερος τὴν σειρὰν αὐτῆς ἐντὸς τοῦ κεφαλαίου.

τὸν κλάδον 1, ἅτινα δίδονται εἰς τὸν πίνακα 1: Ἐφ' ὅσον διὰ τὴν παραγωγὴν 1 μονάδος τοῦ γ ἀπαιτοῦνται (βλ. παραγωγικὴν δραστηριότητα III) 0.5 μονάδες α διὰ δὲ τὴν παραγωγὴν 1 μονάδες τοῦ δ ἀπαιτοῦνται (βλ. παραγωγικὴν δραστηριότητα IV) 0.1 μονάδος α, διὰ τὴν παραγωγὴν X_3 μονάδα τῶν γ καὶ X_4 μονάδων τοῦ δ ἀπαιτοῦνται ἀντιστοίχως $0.5X_3$ καὶ $0.1X_4$ μονάδες τοῦ α.

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις περιγράφει ἀναλόγως τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν εἰσαγωγῶν τοῦ β μεταξὺ τελικῆς ζητήσεως καὶ τῶν κλάδων 1, 3 καὶ 4. Προφανῶς αἱ εἰσαγωγαὶ συνδέονται μονομερῶς μὲ τὴν οἰκονομίαν, καθ' ὅσον δίδουν εἰς αὐτὴν τὰ εἰσαγόμενα προϊόντα καὶ δὲν λαμβάνουν (ἀμέσως) ἐξ αὐτῆς ἄλλα προϊόντα [1]. Δύναται συνεπῶς νὰ θεωρηθῇ ὅτι δημιουργοῦν ἰδιαιτέραν παραγωγικὴν δραστηριότητα, τὴν II_μ [2], ἔχουσαν ὡς προϊὸν 1 μονάδα ἐκ τοῦ β καὶ μηδενικὰ τὰ στοιχεῖα αὐτῆς τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς εἰσροὰς τῶν λοιπῶν κλάδων, παριστωμένην δὲ διανυσματικῶς [3] ὡς:

$$II_\mu = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ἡ τρίτη καὶ τετάρτη ἐξίσωσις δεικνύουν ἀντιστοίχως τὸν τρόπον κατανομῆς τῶν προϊόντων X_3 καὶ X_4 μεταξὺ τελικῆς ζητήσεως καὶ λοιπῶν κλάδων.

Μολονότι εἰς τὴν ἀρχικὴν τεχνολογίαν τῆς οἰκονομίας (βλ. πιν. 1) σημειοῦται χορήγησις προϊόντος τῶν κλάδων 3 καὶ 4 εἰς τὸν κλάδον 2, αὕτη δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἐνταῦθα, λόγῳ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως τοῦ κλάδου τούτου καὶ ἀντικαταστάσεώς του ὑπὸ τῶν εἰσαγωγῶν.

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἐφ' ὅσον εἰς τὸ χρησιμοποιούμενον ἀριθμητικὸν παράδειγμα δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ ἐνδοκλαδικαὶ σχέσεις, δηλαδὴ αἱ ὑπὸ τῶν κλάδων χρησιμοποιούμεναι ποσότητες ἰδίου προϊόντος διὰ τὴν παραγωγικήν των διαδικασίαν, τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς X_1, X_3 καὶ X_4 εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὰ συνολικὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν ἀντιστοίχων κλάδων κατὰ τὰς ἀνωτέρω ποσότητας.

Τὸ σύστημα (3.1), τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν «σύστημα ἐξισώσεων κατανομῆς» διότι δεικνύει τὸν τρόπον κατανομῆς τῆς συνολικῆς παραγωγῆς καὶ τῶν εἰσαγωγῶν μεταξὺ τῆς τελικῆς ζητήσεως τῶν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομίας καὶ τῶν ἐξαγωγῶν δύναται — κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς

1) Ἐμμέσως προκαλοῦν βεβαίως ἐκροὴν ἀγαθῶν πρὸς τὸ ἐξωτερικὸν (ἐξαγωγὰς) πρὸς πληρωμὴν τῶν εἰσαγομένων ἀγαθῶν.

2) Τὰ σύμβολα Μ καὶ μ θὰ χρησιμοποιοῦμεν ἐνίοτε διὰ τὰς εἰσαγωγὰς τὰ δὲ Ε καὶ ε διὰ τὰς ἐξαγωγάς.

3) Βλ. Παράτημα Α τμ. 1.

τοῦ $\overline{E}_\alpha$ (=205) καὶ μεταφορᾶς αὐτῆς, ὡς σταθερᾶς, εἰς τὸ δεξιὸν σκέλος — νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν μητρῶν [1] ὡς ἀκολούθως :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & -0.1 \\ -0.2 & 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ M_\beta \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 455 \\ 230 \\ 170 \\ 370 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην προβάλλεται ἡ λειτουργικὴ τεχνολογία τῆς οἰκονομίας, ἥτις παριστᾶται διὰ τῆς μήτρας τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος.

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης τῶν εἰσαγωγῶν ἀποτελεῖ τὸ δεύτερον διάνυσμα (στήλη) τῆς ἐν λόγῳ μήτρας.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (3.2) λαμβάνομεν [2]:

$$X_1 = 800$$
$$M_\beta = 600$$
$$X_3 = 600$$
$$X_4 = 450$$

Βάσει τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος κατανομῆς (3.1) ἡ ἐγχώριος παραγωγὴ καὶ αἱ εἰσαγωγαὶ κατανέμονται ὡς ἑξῆς :

Πίναξ 4

Κατανομὴ ἐγχωρίου παραγωγῆς καὶ εἰσαγωγῶν

Κλάδοι	Συνολικὸν Προϊὸν	Κατανομή					
		Εἰς κλάδους παραγωγῆς				Εἰς τελικὴν ζήτησιν	Εἰς ἐξαγωγάς
		1	2	3	4		
1	800	—	—	300	45	250	205
3	600	160	—	—	270	170	—
4	450	80	—	—	—	370	—
M_β	600	160	—	120	90	230	—

Τὸ συνολικῶς εἰσπραττόμενον συνάλλαγμα ἐκ τῶν ἐξαγωγῶν τοῦ κλά-

1) Βλ. Παραρτ. Α, τμ. 1.

2) Ἂν θέσωμεν Α διὰ τὴν μήτραν τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος, Χ διὰ τὸ διάνυσμα τῶν ἀγνώστων καὶ Β διὰ τὰς σταθερὰς ποσότητας τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους τοῦ συστήματος θὰ ἔχωμεν :

$$A\,X = B \qquad (3.2)'$$

μὲ λύσιν :

$$X = A^{-1}\,B \qquad (3.2)''$$

ὅπου A^{-1} ἶναι μήτρα «ἀντίστροφος» τῆς Α. Περὶ ἀντιστρόφων μητρῶν καὶ τῆς ἐφαρμογῆς αὐτῶν εἰς τὴν λύσιν γραμμικῶν συστημάτων ἐξισώσεων βλ. σχετικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης ἐργασίας.

δου 1 θὰ εἶναι (βάσει τῆς ἐξαγωγικῆς τιμῆς 0.85 ν. μ. κατὰ ἐξαγομένην μονάδα α):

$$205 \times 0.85 = 174.25 \text{ μ. ξ. ν.}$$

Ἐξ ἄλλου, τὸ σύνολον τῶν πληρωμῶν εἰς συνάλλαγμα διὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν ἀναγκαιουσῶν ποσοτήτων τοῦ προϊόντος β θὰ εἶναι (βάσει τῆς εἰσαγωγικῆς τιμῆς 0.80 μ. ξ. ν. κατὰ εἰσαγομένην μονάδα β):

$$600 \times 0.80 = 480 \text{ μ. ξ. ν.}$$

Προκύπτει συνεπῶς *ἔλλειμμα* ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου διὰ τὴν ὑπ' ὄψιν οἰκονομίαν:

$$480 - 174.25 = 305.75 \text{ μ. ξ. ν.}$$

Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ ἔλλειμμα τοῦτο καλύπτεται διὰ προσφυγῆς εἰς ἐξωτερικὸν δανεισμὸν ἢ διὰ μειώσεως τοῦ συναλλαγματικοῦ ἀποθέματος τῆς οἰκονομίας.

3. 6. Πλεονάζον παραγωγικὸν δυναμικὸν κατὰ τὸ ἔτος $χ_0$

Ὡς προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν κλάδων 1, 2, 3 καὶ 4 μὲ τὴν συνολικὴν παραγωγικὴν δυναμικότητα τῶν κλάδων αὐτῶν κατὰ τὸ ἔτος $χ_0$, ὑφίσταται πλεόνασμα παραγωγικῆς δυναμικότητος (excess capacity) ἐντὸς τῆς οἰκονομίας κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο, ἔχον κατὰ κλάδους ὡς ἑξῆς:

Πίναξ 5

Κλάδοι	Συνολικὴ δυναμικότης	Χρησιμοποιηθεῖσα δυναμικότης	Πλεονάζουσα δυναμικότης
1	850	800	50
2	100	0	100
3	650	600	50
4	500	450	50

4. Τὸ Πρόβλημα

4. 1. Σκοποὶ τοῦ προγράμματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ ἀρχαὶ τῆς δεδομένης χώρας, πρὸς ἀντιμετώπισιν τῆς καταστάσεως ὑπαναπτύξεως τῆς οἰκονομίας καὶ βελτίωσιν τῶν συνθηκῶν διαβιώσεως τοῦ πληθυσμοῦ, ἀποφασίζουν τὴν ἐπιδίωξιν ὡρισμένων προγραμματικῶν σκοπῶν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, ἀναφερομένων εἰδικώτερον εἰς τὸ ὕψος καὶ τὴν διάρθρωσιν τῆς τελικῆς ζητήσεως τῆς οἰκονομίας ταύτης. Ὡς ἔτος πραγματοποιήσεως τῶν σκοπῶν αὐτῶν καθορίζεται τὸ ἔτος χ_ν. Θὰ ὀνομάσωμεν τὸ ἔτος τοῦτο «τελικὸν ἔτος τοῦ προγράμματος» ἢ ἔτος «ἰσορροπίας», τὴν δὲ περίοδον $\chi_\nu - \chi_0$ «περίοδον ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος».

Συγκεκριμένως, ἡ ἐπιδιωκομένη αὔξησις τῆς τελικῆς ζητήσεως ἔχει ὡς ἑξῆς:

Π ί ν α ξ 6

Ἐπιδιωκομένη αὔξησις τελικῆς ζητήσεως (περίοδος $\chi_\nu - \chi_0$)

Προϊόντα	Εἰς ποσοστὰ ἐπὶ τῶν ἀρχικῶν ποσοτήτων τελικῆς ζητήσεως	Εἰς ἀπολύτους μεταβολάς
α	150%	375
β	100%	230
γ	150%	255
δ	50%	185

Σκοπὸς τῆς σχεδιαζομένης μὴ ἀναλόγου αὐξήσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως εἶναι ἡ ἐπὶ τὰ βελτίῳ (συμφώνως πρὸς ὡρισμένα κριτήρια, ὡς π.χ. προτιμήσεις τῶν καταναλωτῶν), ἀναδιάρθρωσις τῆς τελικῆς ζητήσεως.

Ἂν θέσωμεν $Z\chi_0$, $Z(\chi_\nu - \chi_0)$ καὶ $Z\chi_\nu$ ἀντιστοίχως διὰ τὰ διανύσματα (στήλας) τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ ἔτους χ_0, τῆς ἐπιδιωκομένης αὐξήσεως τῆς τελικῆς ζητήσεως μεταξὺ τῶν ἐτῶν χ_0 καὶ χ_ν καὶ τῆς συνολικῆς ζητήσεως κατὰ τὸ ἔτος χ_ν τοῦ προγράμματος, θὰ ἔχωμεν:

$$Z\chi_\nu = Z\chi_0 + Z(\chi_\nu - \chi_0) \tag{4.1}$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$\begin{bmatrix} 625 \\ 460 \\ 425 \\ 555 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 375 \\ 230 \\ 255 \\ 185 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 250 \\ 230 \\ 170 \\ 370 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

4. 2. Διατύπωσις τοῦ προβλήματος

4. 2. 1. Ἤδη, κατόπιν τοῦ καθορισμοῦ τῆς τελικῆς ζητήσεως τοῦ ἔτους χ_ν, καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ βασικὸν κριτήριον οἰκονομικότητος τῶν ἐπενδύσεων (1) δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ὡς ἀκολούθως:

Νὰ προσδιορισθῇ, διὰ τὴν δεδομένην οἰκονομίαν, ἡ τεχνολογικὴ διάρθρωσις ἥτις ἐξασφαλίζει τὴν ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως διὰ τοῦ ἐλαχίστου δυνατοῦ κόστους κεφαλαίου. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι προφανῶς ἓν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως τῶν ἐπενδύσεων.

1) Βλ. τμ. 1.2.

4. 2. 2. Ἐπειδὴ τὸ βασικὸν κριτήριον τοῦ προγραμματισμοῦ ἀπαιτεῖ τὴν πλήρη χρησιμοποίησιν τοῦ ὑπάρχοντος παραγωγικοῦ δυναμικοῦ τῆς οἰκονομίας, λόγῳ τῆς οὕτω ἐπιτυγχανομένης ἐξοικονομήσεως κεφαλαίου, ἡ ἀνωτέρω διατύπωσις τοῦ προβλήματος δύναται νὰ μεταβληθῇ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀναφέρεται εἰς τὴν ἱκανοποίησιν τοῦ τμήματος τῆς τελικῆς ζητήσεως τὸ ὁποῖον δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἱκανοποιηθῇ ἐκ τῆς ὑπαρχούσης παραγωγικῆς δυναμικότητος. Τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς τελικῆς ζητήσεως $Z_{\chi\nu}$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἱκανοποιηθῇ ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῶν ἐγχωρίων κλάδων ἢ ἐξ εἰσαγωγῶν, θὰ ὀνομάσωμεν «πλεονάζουσαν τελικὴν ζήτησιν» καὶ θὰ παριστῶμεν ταύτην διανυσματικῶς διά:

$$Z_\pi = \begin{bmatrix} Z_{\pi_1} \\ Z_{\pi_2} \\ Z_{\pi_3} \\ Z_{\pi_4} \end{bmatrix}$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως ἀφαιροῦμεν ἐκ τῆς τελικῆς ζητήσεως $Z\chi_\nu$ τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἱκανοποιηθῇ ἐκ τῆς ὑφισταμένης παραγωγικῆς δυναμικότητος, μετ' ἀφαίρεσιν τῶν ἀπαραιτήτων διὰ τὰς διακλαδικὰς ροὰς ποσοτήτων παραγωγῆς. Ἂν θέσωμεν $\overline{X}$, διὰ τὸ διάνυσμα τῆς ὑφισταμένης κατὰ τὸ ἔτος χ_0 παραγωγικῆς δυναμικότητος τῆς οἰκονομίας (πίναξ 2) καὶ (I - A) διὰ τὸν κύριον σῶμα [1] τῆς τεχνολογικῆς μήτρας τῶν ἐγχωρίων κλάδων, θὰ ἔχωμεν:

$$Z_\pi = Z_{\chi\nu} - (I - A)\,\overline{X} \qquad (4.3)\ [2]$$

ἢ

$$\begin{bmatrix} Z_{\pi_1} \\ Z_{\pi_2} \\ Z_{\pi_3} \\ Z_{\pi_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 625 \\ 460 \\ 425 \\ 555 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 & -0.1 \\ -0.2 & 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & -0.4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 850 \\ 100 \\ 650 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 760 \\ 265 \\ 180 \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

---

1) Βλ. Παράρτημα Α τμ. 2.

2) Εἰδικεύοντες τὴν (4.3) θὰ ἔχωμεν:

$$Z\pi_\iota = Z\chi_{\nu\iota} - (\overline{X}_\iota - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \overline{\alpha_{\iota\kappa}}\, \overline{X}_\kappa) \qquad (4.3)'$$

$$\iota = 1, 2 \ldots\ldots \nu$$

ὅπου

$Z\pi_\iota$ = ἡ πλεονάζουσα τελικὴ ζήτησις διὰ τὸ προϊὸν τοῦ κλάδου ι

$Z\chi_{\nu\iota}$ = ἡ τελικὴ ζήτησις τοῦ ἔτους χ_ν διὰ τὸ προϊὸν τοῦ κλάδου ι

$\overline{X}_\iota$, $\overline{X}_\kappa$ = ἡ ὑφισταμένη κατὰ τὸ ἔτος χ_o παραγωγικὴ δυναμικότης τῶν κλάδων ι καὶ κ ἀντιστοίχως

καὶ $\overline{\alpha_{\iota\kappa}}$ = ἡ ποσότης τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου ι, ἡ χρησιμοποιουμένη διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου κ.

Εἰς τὸν τύπον (4.3)' ἡ παράστασις $(\overline{X}_\iota - \sum_{\kappa=1}^{\nu} \overline{\alpha_{\iota\kappa}}\overline{X}_\kappa)$ δεικνύει τὸ ποσὸν τοῦ προϊόντος τοῦ

Τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα προγραμματισμοῦ τῆς δοθείσης οἰκονομίας δύναται τώρα νὰ τροποποιηθῇ, διατυπούμενον ὡς ἀκολούθως:

Νὰ ἱκανοποιηθῇ ἡ πλεονάζουσα τελικὴ ζήτησις, Z_π, διὰ τῆς ἐπεκτάσεως—μέσῳ τῶν ἐπενδύσεων—τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῆς οἰκονομίας κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε τὸ ἀπαιτούμενον κόστος κεφαλαίου νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερον.

5. Λύσις τοῦ προβλήματος ἄνευ μεταβολῆς τῆς ἀρχικῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας

5. 1. Γενικὰ — Ὑποθέσεις

Ἐλαχιστοποίησις τοῦ κόστους κεφαλαίου διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως σημαίνει ἐπιλογὴν τῆς καλλιτέρας δυνατῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων. Ἡ κατανομὴ αὕτη συνεπάγεται συνήθως ἀλλαγὴν τῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας δηλαδὴ—διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν τεχνικὴν ἔκφρασιν—ἀντικατάστασιν τῆς δοθείσης λειτουργικῆς τεχνολογικῆς μήτρας μὲ ἄλλην τοιαύτην.

Πρὶν ὅμως ἔλθωμεν εἰς τὴν συστηματικὴν ἐξέτασιν τῆς ἀρίστης δυνατῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων καὶ τὸν ποσοτικὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐπενδύσεων αὐτῶν, θεωροῦμεν σκόπιμον, διὰ λόγους συγκρίσεως, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον τῶν ἐπενδύσεων αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως Z_π, ***ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ὑφισταμένης λειτουργικῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας.*** Θὰ ὑποθέσωμεν δηλαδὴ ὅτι ἡ δεδομένη οἰκονομία, πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως, ἐπεκτείνει καταλλήλως τὴν ὑπάρχουσαν παραγωγικὴν δυναμικότητα τῶν κλάδων 1, 3 καὶ 4, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τεχνολογικῶν ἀπαιτήσεων αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἀρχικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I, III καὶ IV, καὶ εἰσάγει τὰς ἀπαραιτήτους ποσότητας τοῦ προϊόντος β, ἔναντι ἐξαγωγῆς ἀντιστοίχου ποσότητος τοῦ προϊόντος α.

κλάδου ι, τὸ ὁποῖον θὰ ἠδύνατο νὰ διατεθῇ πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς τελικῆς ζητήσεως ἀπὸ τὴν ὑφισταμένην παραγωγικὴν δυναμικότητα τοῦ κλάδου τούτου, μετ' ἀφαίρεσιν ἑνὸς μέρους τῆς παραγωγῆς διὰ τὰς παραγωγικὰς ἀνάγκας τῶν λοιπῶν κλάδων, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι οὗτοι χρησιμοποιοῦν ὁλόκληρον τὴν παραγωγικήν των δυναμικότητα. Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις ἡ παράστασις αὕτη δυνατὸν νὰ εἶναι μηδέν, ἢ ἀρνητικὴ ἀναλόγως ἂν ὁλόκληρον τὸ παραγόμενον προϊὸν τοῦ κλάδου (χρησιμοποιοῦντος ὁλόκληρον τὴν παραγωγικήν του δυναμικότητα) ἀπορροφᾶται ὑπὸ τῶν λοιπῶν κλάδων ἢ ἂν τὸ προϊὸν τοῦτο ὑπολείπεται τῶν ἀντιστοίχων ἀναγκῶν τῶν κλάδων αὐτῶν. Εἰς τὸ χρησιμοποιούμενον ἀριθμητικὸν παράδειγμα εἶναι $\iota, \kappa = 1, 2, 3, 4$ καὶ $\nu = 4$ ἡ δὲ πλεονάζουσα τελικὴ ζήτησις ἑνὸς προϊόντος π.χ. τοῦ β θὰ εἶναι (βάσει τοῦ τύπου (4.3)' :

$$Z\pi_2 = 460 - (100 - 0.2X850 - 0.2X650 - 0.2X500) = 760$$

Θὰ ὑποθέσωμεν ἐπίσης ἐπιπροσθέτως ὅτι: α) Τὸ ἐμπορικὸν ἰσοζύγιον τῆς χώρας κατὰ τὸ ἔτος χ_ν εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ. Θὰ εἶναι δηλαδή: Εἰσαγωγαὶ (εἰς μ. ξ. ν.) = ἐξαγωγαὶ (εἰς μ. ξ. ν.) ἢ (βάσει τῶν δοθεισῶν τιμῶν εἰσαγωγῆς τοῦ β καὶ ἐξαγωγῆς τοῦ α):

$$0.80\,M_\beta = 0.85\,E_\alpha \qquad (5.1)$$

καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν τίθεται ζήτημα καλύψεως τῆς παθητικότητος τοῦ ἐμπορικοῦ ἰσοζυγίου. β) Ὑφίστανται βασικῶς αἱ δυνατότητες ἐπεκτάσεως τῆς οἰκονομίας ἀπὸ ἀπόψεως ἐδαφικῶν πόρων καὶ ἐργασίας. γ) Δὲν παρεμποδίζεται ἡ ἀνωτέρω ἐπέκτασις ἐκ λόγων ὀργανωτικῆς ἢ διοικητικῆς ἀνεπαρκείας.

5. 2. Ὑπολογισμὸς ἐπιπέδων παραγωγῆς καὶ εἰσαγωγῶν

Βάσει τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα τώρα νὰ καταστρώσωμεν τὸ σύστημα ἐξισώσεων κατανομῆς τῆς οἰκονομίας, τὸ ὁποῖον ὁμοιάζει μορφολογικῶς πρὸς τὸ σύστημα ἐξισώσεων κατανομῆς (3.1.):

$$\begin{aligned} X_1 - 0.5X_3 - 0.1X_4 - E_\alpha &= 150 \\ -0.2X_1 + M_\beta - 0.2X_3 - 0.2X_4 &= 760 \\ -0.2X_1 + X_3 - 0.6X_4 &= 265 \\ -0.1X_1 + X_4 &= 180 \end{aligned} \qquad (5.2)$$

ὅπου

X_1, X_3, X_4 : ἡ ἀπαιτουμένη παραγωγὴ τῶν κλάδων 1,3 καὶ 4 πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς Z_π

M_β : αἱ ἀπαιτούμεναι εἰσαγωγαὶ προϊόντος β πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς Z_π

E_α : αἱ ἀπαιτούμεναι ἐξαγωγαὶ τοῦ προϊόντος α πρὸς χρηματοδότησιν τῶν εἰσαγωγῶν M_β.

Τὸ σύστημα (5.2) διαφέρει τοῦ συστήματος (3.1) εἰς δύο σημεῖα: α) ὅσον ἀφορᾷ τὴν πρὸς ἱκανοποίησιν τελικὴν ζήτησιν, β) ὅσον ἀφορᾷ τὰς ἐξαγωγάς, αἱ ὁποῖαι ἐνταῦθα δὲν θεωροῦνται ὡς δεδομέναι (σταθερὸν μέγεθος), ἀλλὰ ὡς προσδιοριζόμεναι ἐκ τοῦ ὄγκου τῶν εἰσαγωγῶν (μεταβλητὸν μέγεθος). Οὕτω, ὅμως, τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος ἀνέρχεται εἰς 5, ἔναντι 4 ἐξισώσεων. Δυνάμεθα ἐν τούτοις νὰ χρησιμοποιήσωμεν ὡς πρόσθετον ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος τὴν ἐξίσωσιν (5.1), ἡ ὁποία καθορίζει τὴν σχέσιν δύο ἐκ τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος (5.2), δηλαδὴ τῆς M_β καὶ τῆς E_α.
Ἐκ τοῦ συστήματος (5.2) λαμβάνομεν:

$$E_\alpha = 0.94M_\beta$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ E_α εἰς τὸ σύστημα (5.2) καὶ διατυποῦντες ἐν συνεχείᾳ τὸ σύστημα τοῦτο ὑπὸ μορφὴν μητρῶν θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.94 & -0.5 & -0.1 \\ -0.2 & 1 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ M_\beta \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 760 \\ 265 \\ 180 \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

Ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος (5.3) παριστᾷ τὴν λειτουργικὴν τεχνολογίαν τῆς οἰκονομίας ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω ὑποθέσεις. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος αὐτοῦ λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1.943 \\ M_\beta &= 1.400 \\ X_3 &= 878 \\ X_4 &= 374 \end{aligned} \qquad (5.4)$$

Ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ $M_\beta = 1.400$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (5.1) εὑρίσκομεν:

$$E_\alpha = 1.316$$

Ἡ ἐγχώριος παραγωγὴ καὶ αἱ εἰσαγωγαὶ κατανέμονται μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων, τῆς τελικῆς ζητήσεως καὶ τῶν ἐξαγωγῶν, ὡς ἀκολούθως:

Πίναξ 7

Κατανομὴ ἐγχωρίου παραγωγῆς καὶ εἰσαγωγῶν

Κλάδοι	Συνολικὸν Προϊὸν	Κατανομή					
		Εἰς κλάδους παραγωγῆς				Εἰς πλεονάζουσαν τελικὴν ζήτησιν	Εἰς ἐξαγωγάς
		1	2	3	4		
1	1.943	–	–	439	38	150	1.316
3	878	388	–	–	225	265	–
4	374	194	–	–	–	180	–
M_β	1.400	389	–	176	75	760	–

5. 3. Ὑπολογισμὸς ἀπαιτουμένων ἐπενδύσεων

Ἐκ τῶν τιμῶν τῶν X_1, X_3, X_4 καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν μας τοὺς συντελεστὰς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῶν κλάδων 1, 3 καὶ 4, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς συνολικῶς ἀπαιτουμένας πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως ἐπενδύσεις εἰς ἕκαστον τῶν κλάδων αὐτῶν. Οὕτω, π.χ., ἐφ' ὅσον πρὸς παραγωγὴν 1 μονάδος τοῦ προϊόντος α διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I ἀπαιτεῖται κεφάλαιον ἀξίας 1.2 ν.μ., πρὸς παραγωγὴν 1943 μονάδων ἐκ τοῦ προϊόντος α, ἀπαιτεῖται κεφάλαιον $1.943 \times 1.2 = 2.331{,}6$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ διὰ τοὺς κλάδους 3 καὶ 4 καταστρώνομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

Πίναξ 8

'Απαιτούμεναι ἐπενδύσεις πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως (βάσει ἀρχικῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας)

Κλάδοι	Συντελεσταὶ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως	Συνολικὴ παραγωγὴ	'Επενδύσεις
1	1.2	1.943	2.331,6
2	1.5	—	—
3	1.9	878	1.668,2
4	2.1	374	785,4
			4.785,2

Εἰς τοὺς ἀνωτέρω ὑπολογισμοὺς δὲν ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν ἰδιαιτέρως αἱ ἐξαγωγαί, διότι ἡ ἐξαχθεῖσα ποσότης, 1.316 μονάδες α, ἀποτελεῖ μέρος τῆς συνολικῆς παραγωγῆς τοῦ κλάδου 1. Ὁμοίως δὲν ἐλήφθησαν ὑπ' ὄψιν αἱ εἰσαγωγαί, διότι δὲν δημιουργοῦν (ἀμέσως) κόστος κεφαλαίου διὰ τὴν ὑπὸ ἐξέτασιν οἰκονομίαν.

Σκοπὸς τοῦ ἀνωτέρω ὑπολογισμοῦ τῶν ἐπενδύσεων αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως, βάσει τῆς ὑπαρχούσης διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας, εἶναι νὰ δειχθῇ ἡ βελτίωσις ἀπὸ ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου ἡ ὁποία θὰ ἐπέλθῃ διὰ τῆς ἀναδιαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας καὶ τῆς διαφόρου κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων, ὡς θὰ ἐκθέσωμεν λεπτομερῶς εἰς τὰ ἑπόμενα.

Ὁ ὑπολογισμὸς ἐγένετο διὰ μιᾶς συνήθους ἐφαρμογῆς τοῦ «ἀνοικτοῦ ὑποδείγματος» Λεόντιεφ (1), εἰς τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς δεδομένη ἡ λειτουργικὴ τεχνολογία τῆς οἰκονομίας καὶ μεταβάλλεται μόνον ἡ τελικὴ ζήτησις. Χαρακτηριστικὸν τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτοῦ εἶναι ὅτι ἐπιδιώκεται ἁπλῶς ἐξασφάλισις τῆς διακλαδικῆς συνεπείας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος καὶ δὲν ἐπιζητεῖται ἀριστοποίησις τῆς λύσεως.

6. Μεταβατικὴ λύσις: 'Αριστοποίησις τῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων ἐντὸς κλειστῆς οἰκονομίας

6. 1. Γενικὰ

Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ἀρίστης δυνατῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων μεταξὺ τῶν διαφόρων κλάδων θὰ ἀκολουθήσωμεν τρία στάδια ὑπολογισμοῦ. Εἰς τὸ *πρῶτον* στάδιον θὰ ἐπιδιωχθῇ ἡ ἐπιλογὴ τῆς οἰκονομικωτέρας (ἀπὸ

1) Βλ. Dorfman, Samuelson and Solow: Linear Programming and Economic Analysis N.Y. 1958 Chapter 9 καὶ Α. Α. Λάζαρη: Τὸ σύστημα Λεόντιεφ τμ. Ε.

ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου) δι' ἕκαστον κλάδον παραγωγικῆς δραστηριότητος, διὰ συγκρίσεως ὅλων τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τοῦ ἐν λόγῳ κλάδου, ἐξαιρουμένης τῆς δυνατότητος ὑποκαταστάσεως μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος δι' εἰσαγωγῶν. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ θὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ ἐξεύρεσις τῆς ἀρίστης τεχνολογικῆς διαρθρώσεως μιᾶς *κλειστῆς οἰκονομίας*, ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῆς διαρθρώσεως ταύτης θὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως. Οὕτω θὰ πραγματοποιηθῇ τὸ πρῶτον στάδιον ἀριστοποιήσεως. Εἰς τὸ *δεύτερον* στάδιον ἡ κλειστὴ οἰκονομία μετατρέπεται εἰς ἀνοικτήν, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ ἐξωτερικοῦ ἐμπορίου εἰς τὸ σύστημα καὶ συγκρίσεως τῶν ἐπιλεγεισῶν εἰς τὸ πρῶτον στάδιον παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῶν ἐγχωρίων κλάδων μὲ τὰς εἰσαγωγάς. Εἰς ἃς περιπτώσεις αἱ τελευταῖαι ἀποδεικνύονται συμφερώτεραι, ἀντικαθίσταται ἡ ἐγχώριος παραγωγὴ δι' εἰσαγωγῶν. Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς οὕτω ἐπιτυγχανομένης τεχνολογικῆς διαρθρώσεως τῆς οἰκονομίας ὑπολογίζονται αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως. Τοιουτοτρόπως περατοῦται τὸ δεύτερον στάδιον ὑπολογισμοῦ. Τὴν ἐπιτυγχανομένην κατὰ τὸ στάδιον αὐτὸ λύσιν χαρακτηρίζομεν ὡς «δοκιμαστικήν», διότι πρέπει νὰ ὑποβληθῇ αὕτη εἰς ἔλεγχον, βάσει ὡρισμένων κριτηρίων, ἵνα δειχθῇ κατὰ πόσον ἀποτελεῖ τὴν ζητουμένην ἀπάντησιν εἰς τὸ πρόβλημα ἢ ἐὰν χρειάζεται τροποποιήσεις διὰ νὰ μετατραπῇ εἰς «τελικὴν λύσιν». Ὁ ἔλεγχος τῆς δοκιμαστικῆς λύσεως πρὸς καθορισμὸν τῆς τελικῆς τοιαύτης ἀποτελεῖ τὸ *τρίτον* καὶ τελευταῖον στάδιον ὑπολογισμοῦ τῆς ἀρίστης κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων.

6. 2. Σύγκρισις ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων

6. 2. 1. Ἀριστοποίησις τῆς κατανομῆς τῶν ἐπενδύσεων σημαίνει κυρίως δύο τινά: α) Καθορισμὸν τῆς οἰκονομικωτέρας, ἀπὸ ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου, παραγωγικῆς δραστηριότητος δι' ἕκαστον κλάδον, β) ὑπολογισμὸν τοῦ ὕψους τῶν ἀπαιτουμένων – κατὰ κλάδον καὶ ἐν τῷ συνόλῳ – ἐπενδύσεων. Εἰς τὸ παρὸν τμῆμα θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸν προσδιορισμὸν τῆς οἰκονομικωτέρας παραγωγικῆς δραστηριότητος μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἀνηκουσῶν εἰς τὸν αὐτὸν κλάδον καὶ δυναμένων νὰ χρησιμοποιηθοῦν (διαζευκτικῶς) εἰς τὴν παραγωγὴν ἑνὸς συγκεκριμένου προϊόντος. Τὰς παραγωγικὰς ταύτας δραστηριότητας θὰ ὀνομάσωμεν *ὁμοκλαδικάς*, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ παραγωγικὰς δραστηριότητας ἀνηκούσας εἰς διαφόρους κλάδους, τὰς ὁποίας χαρακτηρίζομεν ὡς *συνεργαζομένας* παραγωγικὰς δραστηριότητας, πρὸς ὑποδήλωσιν τῆς ἀμέσου ἢ ἐμμέσου ἀλληλεξαρτήσεώς των, πρὸς παραγωγὴν τῶν διαφόρων προϊόντων (βλ. παρ. 2.2.1.).

6. 2. 2. Ὁ συνήθης τρόπος ἐπιλογῆς τῆς οἰκονομικωτέρας μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἶναι διὰ συγκρίσεως τῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῶν δραστηριοτήτων αὐτῶν. Οὕτω, π.χ., ἐὰν ἔχωμεν τὰς ὁμοκλαδικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας I καὶ I*:

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2 \\ -0.2 \\ -0.1 \\ \hline -1.2 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ } I^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.3 \\ -0.1 \\ \hline -1.1 \end{bmatrix}$$

ἀποφαινόμεθα, βάσει τοῦ ἀνωτέρω κριτηρίου, ὅτι ἡ I εἶναι ὀλιγώτερον συμφέρουσα τῆς I*, διότι ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς πρώτης εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν συντελεστὴν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς δευτέρας.

Ὁ τρόπος οὗτος ἐπιλογῆς παρέχει μὲν τὸ πλεονέκτημα τοῦ αὐτομάτου καθορισμοῦ τῆς «οἰκονομικωτέρας» παραγωγικῆς δραστηριότητος, εἶναι ὅμως ἐσφαλμένος, διότι ἀγνοεῖ τὰς ***διακλαδικὰς σχέσεις*** ἐντὸς τῆς οἰκονομίας καὶ τὰς συνεπείᾳ τῶν σχέσεων αὐτῶν ***ἐμμέσους*** ἐπιδράσεις ἐπὶ τοῦ κόστους κεφαλαίου ἑκάστου κλάδου. Τὸ σφάλμα τοῦ καθορισμοῦ τῆς οἰκονομικότητος τῶν ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I καὶ I*, βάσει τῆς συγκρίσεως τῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως αὐτῶν, δεικνύεται ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς παραγράφου 6.4 2. κατωτέρω [1], ἐξ οὗ ἀποκαλύπτεται ὅτι ἡ πρώτη παραγωγικὴ δραστηριότης εἶναι οἰκονομικωτέρα τῆς δευτέρας. Πρὸς κατανόησιν τοῦ σφάλματος τοῦ ὡς ἄνω τρόπου ὑπολογισμοῦ δέον νὰ διακρίνωμεν τὰς ἐννοίας τοῦ ***ἀμέσου, ἐμμέσου*** καὶ ***συνολικοῦ*** κόστους κεφαλαίου ἑνὸς κλάδου (ἢ παραγωγικῆς δραστηριότητος).

6. 2. 3. ***Ἄμεσον κόστος*** κεφαλαίου ἐν σχέσει πρὸς δεδομένον ἐπίπεδον παραγωγῆς αὐτοῦ, εἶναι ἡ ἀξία τοῦ ἀπαιτουμένου παγίου κεφαλαίου ὑπὸ τοῦ κλάδου πρὸς πραγματοποίησιν τοῦ δεδομένου ἐπιπέδου παραγωγῆς. Τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὸ κόστος τῆς τρεχούσης παραγωγῆς τοῦ κλάδου τούτου [2]. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς τοῦ κλάδου εἶναι ἡ μονὰς τοῦ προϊόντος τότε τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου εἶναι ἁπλῶς ὁ συντελεστὴς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τοῦ κλάδου τούτου.

Ἡ ἔννοια τοῦ ***ἐμμέσου κόστους*** κεφαλαίου ἀπορρέει ἐκ τῆς βασικῆς ἐννοίας τῆς συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως τῶν διαφόρων κλάδων. Ἐφ' ὅσον ἕκαστος κλάδος χρησιμοποιεῖ διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος του προϊόντα ἄλλων κλάδων (ὡς πρώτας ὕλας κλπ.) τὰ ὁποῖα διὰ νὰ παραχθοῦν προϋποθέτουν κόστος κεφαλαίου, ὁ δοθεὶς κλάδος εἶναι ***ἐμμέσως (λειτουργικῶς) ὑπεύθυνος*** διὰ τὸ κόστος τοῦτο. Ἐν ἄλλοις λόγοις ὁ δοθεὶς κλάδος δημιουργεῖ, διὰ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας του, κόστος κεφαλαίου εἰς τὴν οἰκονομίαν, ἄνευ τοῦ ὁποίου δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ οὕτως παραγωγικῶς.

---

1) Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην ἡ I* συμβολίζεται διὰ I*** (Βλ. καὶ παρ. 6.4.1).
2) Βλ. καὶ ἀνωτ. τμ. 3.1.

Τὸ κόστος τοῦτο εἶναι τὸ *ἔμμεσον κόστος κεφαλαίου* διὰ τὸν δοθέντα κλάδον (1). Ἂν ἀθροίσωμεν τὸ ἄμεσον κόστος καὶ τὸ ἔμμεσον κόστος κεφαλαίου, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι ἀναφέρονται ἀμφότερα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς, λαμβάνομεν *τὸ συνολικὸν κόστος* κεφαλαίου τοῦ κλάδου διὰ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον παραγωγῆς.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω διακρίσεων μεταξὺ ἀμέσου, ἐμμέσου καὶ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου, καθίσταται σαφὲς ὅτι ἡ σύγκρισις δύο ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων βάσει τῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως αὐτῶν (δηλαδὴ βάσει τοῦ ἀμέσου κόστους κεφαλαίου ἑκάστης δραστηριότητος), πρὸς προσδιορισμὸν τῆς συμφερωτέρας ἐξ αὐτῶν διὰ τὴν οἰκονομικὴν ἀνάπτυξιν, δὲν εἶναι ὀρθή. Εἶναι δυνατὸν μία παραγωγικὴ δραστηριότης ἔχουσα μικρότερον ἄμεσον κόστος κεφαλαίου ἀπὸ μίαν ἄλλην (ὁμοκλαδικὴν) παραγωγικὴν δραστηριότητα, νὰ καταναλίσκῃ, συγκριτικῶς πρὸς τὴν δευτέραν, σημαντικῶς μεγαλυτέρας ποσότητας πρώτων ὑλῶν καὶ ὑπηρεσιῶν, μὲ ἀποτέλεσμα τὸ συνολικὸν κόστος τῆς πρώτης νὰ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ συνολικὸν κόστος τῆς δευτέρας (2).

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν εἶναι δυνατὸς μόνον διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν—Ἐκροῶν (3). Ἡ ἀνάλυσις αὕτη παρέχει τὴν δυνατότητα συστηματικῆς παρακολουθήσεως καὶ καταγραφῆς ὄχι μόνον τῶν ἀμέσων ἀλλὰ καὶ τῶν ἐμμέσων ἐπιδράσεων ἐπὶ τοῦ κόστους κεφαλαίου ἑνὸς κλάδου, αἱ ὁποῖαι προκαλοῦνται ἐκ τῆς παραγωγικῆς λειτουργίας τοῦ κλάδου αὐτοῦ. Κατωτέρω περιγράφομεν τὸν τρόπον ἐφαρμογῆς τῆς Ἀναλύσεως Εἰσροῶν—Ἐκροῶν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων.

6. 2. 4. Κατὰ τὴν σύγκρισιν δύο (ἢ περισσοτέρων) ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων πρὸς ἐξακρίβωσιν τῆς οἰκονομικωτέρας μεταξὺ αὐτῶν παρουσιάζονται δύο βασικαὶ περιπτώσεις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ ὑπὸ σύγκρισιν παραγωγικαὶ δραστηριότητες εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθοῦν μὲ διανύσματα ἄνισα καὶ ἀμέσως συγκρίσιμα, ὑπὸ τὴν στενὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν (4), εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν μὲ διανύσματα ἄνισα μὲν ἀλλ' οὐχὶ ἀμέσως συγκρίσιμα μαθηματικῶς. Λεπτομερὴς ἀνάλυσις δι' ἑκάστην περίπτωσιν ἀκολουθεῖ ἀμέσως κατωτέρω.

Περίπτωσις Α΄. Ἔστωσαν π.χ. πρὸς σύγκρισιν αἱ ὁμοκλαδικαὶ παραγωγικαὶ δραστηριότητες I^* καὶ I^{**}.

---

1) Λεπτομερείας περὶ τοῦ τρόπου ὑπολογισμοῦ τοῦ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου βλ. παράγρ. 6.2.4 κατωτέρω.

2) Τοῦτο ἀκριβῶς συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I καὶ I^* ἀνωτέρω.

3) Βλ. παρ 1.2.4, καὶ 2.3.2, ἀνωτέρω.

4) D. Gale «Convex Cones and Linear Inequalities» εἰς Activity Analysis, ἐκδ. ὑπὸ Koopmans Wiley 1951, σελ. 288.

$$I^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3 \\ -0.1 \\ 0 \\ \hline -1 \end{bmatrix} \quad I^{**} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3 \\ -0.2 \\ 0 \\ \hline -1.1 \end{bmatrix}$$

Αἱ παραγωγικαὶ αὗται δραστηριότητες παριστῶνται ὡς βλέπομεν ἀπὸ διανύσματα ἄνισα καὶ ἀμέσως συγκρίσιμα μαθηματικῶς, καθ' ὅσον πάντα τὰ στοιχεῖα τοῦ πρώτου διανύσματος εἶναι ἀνὰ ἓν ἴσα ἢ (ἀλγεβρικῶς) μεγαλύτερα τῶν στοιχείων τοῦ δευτέρου διανύσματος : Ἔχομεν δηλαδή :

$$I^* \geqslant I^{**}$$

Τὸ σημεῖον $\geqslant$ σημαίνει ὅτι τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα εἶναι ὁπωσδήποτε ἄνισα ἔχουν ὅμως τινὰ ἐκ τῶν στοιχείων αὐτῶν ἴσα. Ἐπειδὴ τὸ θετικὸν στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν μονάδα τοῦ παραγομένου προϊόντος, εἶναι κοινὸν εἰς ἀμφότερα τὰ διανύσματα, ἡ ἀνισότης μεταξὺ αὐτῶν δύναται νὰ ἐκδηλωθῇ συνεπείᾳ ἀνισότητος ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἐκ τῶς ἀρνητικῶν στοιχείων. Μεγαλύτερον [1] εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ἔχει ἓν ἢ περισσότερα ἀρνητικὰ στοιχεῖα μικρότερα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἑτέρου διανύσματος. Μικρότερα ὅμως κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀρνητικὰ στοιχεῖα σημαίνει μικροτέραν κατανάλωσιν πρώτων ὑλῶν κλπ., ἄρα μικρότερον συνολικὸν κόστος κεφαλαίου διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας αἱ ὁποῖαι παράγουν τὰς πρώτας ὕλας. Συνεπῶς μεγαλύτερον (ἀλγεβρικῶς) διάνυσμα ὑποδηλοῖ τελικῶς συμφερωτέραν, ἀπὸ ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου, παραγωγικὴν δραστηριότητα.

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ χρησιμοποιοῦμεν ἐνίοτε τὰ σύμβολα $\longleftrightarrow$ καὶ] ἀντὶ τῶν ἐκφράσεων «ἐν συγκρίσει πρὸς» καὶ «οἰκονομικώτερον ἤ». Οὕτω π. χ διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας I^* καὶ I^{**} θὰ ἔχωμεν, συνοπτικῶς:

$$I^* \longleftrightarrow I^{**},\ I^* \geqslant I^{**} \text{ καὶ } I^* \ ]\ I^{**}$$

Περίπτωσις Β΄. Μολονότι ἡ σύγκρισις δύο ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἀντιπροσωπευομένων δι' ἀνίσων καὶ μαθηματικῶς ἀμέσως συγκρισίμων διανυσμάτων εἶναι ἁπλῆ, δὲν παρουσιάζει ἐν τούτοις μεγάλην πρακτικὴν ἀξίαν, διότι αἱ εὐκαιρίαι τοιαύτης συγκρίσεως δὲν εἶναι συνήθεις εἰς τὴν οἰκονομικὴν πρᾶξιν. Περισσότερον συνήθης εἶναι ἡ περίπτωσις τῶν διαφόρων ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι παριστῶνται ὑπὸ διανυσμάτων μὴ ἐπιδεχομένων ἄμεσον σύγκρισιν κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\geqslant$.

Δὲν ἔχομεν δηλαδὴ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς τὰ στοιχεῖα τοῦ ἑνὸς διανύσματος ἀνὰ ἓν ἴσα ἢ μεγαλυτέρα (ἀλγεβρικῶς) τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ ἑτέρου ἢ ἑτέρων διανυσμάτων. Οὕτω, π. χ., δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφαν-

---

1) Ἀλγεβρικῶς.

θῶμεν δι' ἀπευθείας συγκρίσεως ποία ἐκ τῶν ἀκολούθων δύο παραγωγικῶν δραστηριοτήτων εἶναι συμφερωτέρα:

$$I = \begin{vmatrix} 1 \\ -0.2 \\ -0.2 \\ -0.1 \\ \hline -1.2 \end{vmatrix} \qquad I^* = \begin{vmatrix} 1 \\ -0.3 \\ -0.1 \\ -0 \\ \hline -1.0 \end{vmatrix}$$

Ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I ἔχει τὸ δεύτερον στοιχεῖον αὐτῆς μεγαλύτερον (ἀλγεβρικῶς) τοῦ δευτέρου στοιχείου της I^*, τὰ δὲ λοιπὰ (ἀρνητικὰ) στοιχεῖα μικρότερα (ἀλγεβρικῶς) τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς ἄλλης. Συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπώσωμεν, δι' ἀπευθείας συγκρίσεως, ἀνισότητα μεταξὺ τῶν δύο διανυσμάτων.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὰς ὡς ἄνω παραγωγικὰς δραστηριότητας πρέπει προηγουμένως νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου αὐτῶν. Τὸ κόστος τοῦτο ἰσοῦται, ὡς ἐλέχθη, μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀμέσου καὶ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου. Τὸ ἄμεσον κόστος κεφαλαίου δὲν ἀπαιτεῖ ὑπολογισμόν, διότι δίδεται ἐκ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Τὸ ἔμμεσον κόστος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν διακλαδικῶν στοιχείων ἐπὶ τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τῶν ἀντιστοίχων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Οὕτω, ἂν τ_2, τ_3 καὶ τ_4 παριστοῦν τὸ συνολικὸν κόστος τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων II, III καὶ IV (αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς κλάδους 2, 3 καὶ 4 τοῦ πίνακος 1), τὸ ἔμμεσον κόστος κεφαλαίου τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I θὰ εἶναι:

$$0.2\,\tau_2 + 0.2\,\tau_3 + 0.1\,\tau_4$$

Τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τ_1, δια τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα I θὰ εἶναι τώρα:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \text{ἄμεσον κόστος τῆς } I + \text{ἔμμεσον κόστος τῆς } I \\ &= 1.2 + 0.2\,\tau_2 + 0.2\,\tau_3 + 0.1\,\tau_4 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται ὅτι πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμμέσου κόστους κεφαλαίου μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ μετὰ τῆς δραστηριότητος ταύτης συνεργαζόμεναι (ἀμέσως ἢ ἐμμέσως) παραγωγικαὶ δραστηριότητες τῶν ἄλλων κλάδων τῆς οἰκονομίας. Τοῦτο σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ καθορισθῇ ἡ τεχνολογικὴ μήτρα εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν δοθεῖσαν παραγωγικὴν δραστηριότητα διάνυσμα.

6. 2. 5. Ὁμοίως σκεπτόμενοι, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ συνολικὸν κόστος ἑκάστης τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων:

$$\text{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.2 \\ -0.4 \\ \hline -1.5 \end{bmatrix} \quad \text{III} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.2 \\ 1 \\ 0 \\ \hline -1.9 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ IV} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.2 \\ -0.6 \\ 1 \\ \hline -2.1 \end{bmatrix}$$

(αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν τεχνολογικὴν μήτραν εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει καὶ ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I) ὡς ἀκολούθως :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1.5 + 0.2\tau_3 + 0.4\tau_4 \\ \tau_3 &= 1.9 + 0.5\tau_1 + 0.2\tau_2 \\ \tau_4 &= 2.1 + 0.1\tau_1 + 0.2\tau_2 + 0.6\tau_3 \end{aligned} \tag{6.2}$$

6. 2. 6. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριῶν ἐξισώσεων καὶ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως διὰ τὸ συνολικὸν κόστος τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} \tau_1 - 0.2\tau_2 - 0.2\tau_3 - 0.1\tau_4 &= 1.2 \\ \tau_2 - 0.2\tau_3 - 0.4\tau_4 &= 1.5 \\ -0.5\tau_1 - 0.2\tau_2 + \tau_3 &= 1.9 \\ -0.1\tau_1 - 0.2\tau_2 - 0.6\tau_3 + \tau_4 &= 2.1 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γραφῇ (¹):

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.2 & -0.1 \\ 0 & 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.5 & -0.2 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & -0.6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος αὐτοῦ λαμβάνομεν τὰς ἀκολούθους τιμὰς (²) διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας I, II, III καὶ IV ἀντιστοίχως :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 3.73 \\ \tau_2 &= 4.98 \\ \tau_3 &= 4.76 \\ \tau_4 &= 6.32 \end{aligned} \tag{6.5}$$

---

1) Περὶ τῆς σχέσεως τῶν συστημάτων τύπου ὁμοίου πρὸς τὸ ἀνωτέρω μὲ τὰς ἀντιστοίχους τεχνολογικὰς μήτρας βλέπε παράρτημα Α παράγρ. 2. 2.

2) Ἀντὶ τοῦ ὅρου «συνολικὸν κόστος κεφαλαίου» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος θὰ χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὸν ὅρον «τιμὴ» τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος. Ἡ ἐν λόγῳ τιμὴ ἀντιστοιχεῖ πράγματι εἰς τὴν «τιμὴν ἰσορροπίας» ἢ «πλασματικὴν τιμὴν» (shadow price) τοῦ Γραμμικοῦ Προγραμματισμοῦ. Βλ. σχετικῶς : Dorfman. Samuelson and Solow ἔνθ. ἀνωτ. chapt 3. Βλ. ἐπίσης Παράρτημα Α τμ. 2, παρούσης ἐργασίας.

Ἂν τώρα θέλωμεν νὰ συγκρίνωμεν τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα I μὲ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα I* (1), πρὸς ἐπιλογὴν τῆς οἰκονομικωτέρας μεταξὺ αὐτῶν, πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς I*, ὡς ἐπράξαμεν ἤδη καὶ διὰ τὴν I, καὶ νὰ συγκρίνωμεν τὰς δύο τιμάς. Πρὸς τοῦτο, εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν I, II, III, IV ἀντικαθιστῶμεν τὴν I διὰ τῆς I*, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν νέαν τεχνολογίαν I*, II, III, IV, ἥτις διαφέρει τῆς προηγουμένης μόνον κατὰ τὴν πρώτην (τὴν ὑπὸ κρίσιν) παραγωγικὴν δραστηριότητα. Ἐκ τῆς νέας τεχνολογίας σχηματίζομεν (2) τὸ ἀκόλουθον σύστημα ἐξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.5 & -0.2 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & -0.6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \tau'_3 \\ \tau'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} \qquad (6.6)$$

ὅπου τ_1', τ'_2, τ'_3, τ'_4, εἶναι αἱ νέαι τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I*, II, III, καὶ IV ἀντιστοίχως.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \tau'_1 &= 2.83 \\ \tau'_2 &= 4.70 \\ \tau'_3 &= 4.24 \\ \tau'_4 &= 5.86 \end{aligned} \qquad (6.7)$$

Συγκρίνοντες τὰς τιμὰς τ_1 καὶ τ'_1 βλέπομεν ὅτι $\tau_1 > \tau'_1$. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι $\tau_2 > \tau'_2$, $\tau_3 > \tau'_3$ καὶ $\tau_4 > \tau'_4$, δηλαδὴ ὅτι πᾶσαι αἱ τιμαὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς (τὰ τονούμενα τ) εἶναι μικρότεραι ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς πρώτης σειρᾶς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἀντικατάστασις τῆς I διὰ τῆς I* εἰς τὴν τεχνολογικὴν μήτραν προεκάλεσε μείωσιν, ὄχι μόνον τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ τοῦ κλάδου 1, ἀλλ' ἐπίσης καὶ τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου διὰ τὴν παραγωγὴν τῆς μονάδος τῶν προϊόντων τῶν κλάδων 2,3 καὶ 4. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις μεταξὺ τῶν δύο σειρῶν τιμῶν ἀποτελεῖ *ἐπαρκὲς κριτήριον* περὶ τῆς σκοπιμότητος ἀντικαταστάσεως τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I διὰ τῆς ὁμοκλαδικῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος I*.

6. 3. Ὑπολογιστικαὶ ἁπλοποιήσεις

6. 3. 1. Ὡς ἀρχικῶς ἐλέχθη, ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου τὸ ὁποῖον θὰ ἀπαιτηθῇ πρὸς ἱκανοποίησιν τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως. Συνεπῶς ἡ διαπίστωσις ὅτι ἡ τιμὴ μιᾶς

1) Βλ. παράδειγμα περιπτώσεως Β'.
2) Βλ. παράρτημα Α, παράγρ. 2. 3.

παραγωγικῆς δραστηριότητος π. χ. Π_ι εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν τιμὴν ἄλλης (ὁμοκλαδικῆς) παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_ι^+ ὅταν ἡ πρώτη ἀντικαθιστᾷ τὴν δευτέραν εἰς ἓν οἰκονομικὸν σύστημα, δὲν εἶναι, ἐκ πρώτης τουλάχιστον ὄψεως, ἐπαρκὴς διὰ νὰ ὁδηγηθῶμεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι συμφέρει ἡ χρησιμοποίησις τῆς Π_ι ἀντὶ τῆς Π_ι^+. Εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζωμεν ἐπίσης ὅτι πᾶσαι αἱ λοιπαὶ παραγωγικαὶ δραστηριότητες τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος λαμβάνουν – μετὰ τὴν ἀνωτέρω ἀντικατάστασιν – τιμὰς οὐχὶ μεγαλυτέρας ἀπὸ τὰς τιμὰς αὐτῶν πρὸ τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἂν ἡ ἐν λόγῳ ἀντικατάστασις προεκάλει μείωσιν εἴς τινας ἐκ τῶν τιμῶν τῶν συνεργαζομένων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων καὶ αὔξησιν ἄλλων, δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τῆς οἰκονομικότητος τῶν ὑπὸ κρίσιν δραστηριοτήτων ἄνευ ὑπολογισμοῦ τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου τῆς οἰκονομίας, τὸ ὁποῖον θὰ προέκυπτεν ἐκ τῆς ἱκανοποιήσεως τῆς πλεοναζούσης τελικῆς ζητήσεως εἰς ἑκάστην περίπτωσιν (1). Εἰς τὸ ληφθὲν ἀριθμητικὸν παράδειγμα ἀντικαταστάσεως τῆς I διὰ τῆς I* δὲν προέκυψε ζήτημα ὑπολογισμοῦ συνολικοῦ κόστους ἐπενδύσεων τῆς οἰκονομίας, διότι μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν πᾶσαι αἱ τιμαὶ τ'_1, τ'_2, τ'_3, καὶ τ'_4 ἦσαν, ὡς εἴδομεν, μικρότεραι ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τ_1, τ_2, τ_3 καὶ τ_4. Ἤδη τίθεται τὸ ἐρώτημα: Ἡ εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα προκύψασα σχέσις μονοπλεύρου ἀνισότητος μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, πρὸ καὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν, εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς γενικῶς ἰσχύουσα καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἀντικαταστάσεως μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος δι' ἑτέρας (ὁμοκλαδικῆς) παραγωγικῆς δραστηριότητος; Καταφατικὴ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ θὰ εἶχε μεγίστην ὑπολογιστικὴν ἀξίαν: Δὲν θὰ ἦτο τότε ἀναγκαῖος ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου τῆς οἰκονομίας διὰ τὰς περιπτώσεις πρὸ καὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῆς δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος, οὐδ' ἐπίσης θὰ ἦτο ἀναγκαῖος ὁ ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῶν συνεργαζομένων διανυσμάτων. Θὰ ἤρκει ἁπλῶς νὰ γνωρίζωμεν ὅτι ἡ τιμή, π.χ., τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_ι εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος Π_ι^+ διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν μετὰ βεβαιότητος ὅτι συμφέρει, ἀπὸ ἀπόψεως κόστους κεφαλαίου, ἡ ἀντικατάστασις τῆς Π_ι^+ διὰ τῆς Π_ι εἰς τὸ δοθὲν οἰκονομικὸν σύστημα. Μαθηματικῶς τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν θὰ ἦτο ἀπαραίτητον νὰ λύσωμεν τὰ ἀντίστοιχα δύο συστήματα ἐξισώσεων (2) δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, ἀλλὰ θὰ ἤρκει ἡ λύσις αὐτῶν διὰ ***μίαν μόνον τιμήν***, τὴν τιμὴν τῶν ὑπὸ κρίσιν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων.

Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ τρόπου ἐπιδράσεως τῆς τιμῆς μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος ἐπὶ τῶν τιμῶν τῶν ἄλλων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς θὰ εἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω, ὅτι ἡ εἰς τὸ ἀριθμη-

---

1) Δηλαδὴ πρὸ καὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν.

2) Τὰ συστήματα ταῦτα δίδουν τὰς τιμὰς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῆς οἰκονομίας πρὸ καὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῆς Π_ι^+ διὰ τῆς Π_ι (Βλ. συστήματα (6.4) καὶ (6.6)).

τικόν μας παράδειγμα παρατηρηθεῖσα σχέσις μονοπλεύρου ἀνισότητος εἶναι πράγματι γενικὴ καὶ κατὰ συνέπειαν ἀρκεῖ ἡ σύγκρισις τῶν τιμῶν τῶν ὑπὸ κρίσιν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων πρὸς καθορισμὸν τῆς οἰκονομικωτέρας μεταξὺ αὐτῶν.

6. 3. 2. Θεώρημα 1α. Ἔστωσαν αἱ ἐπηυξημέναι τεχνολογικαὶ μῆτραι A καὶ B τύπου Leontief τάξεως $(\nu+1)\nu$, ἔχουσαι τὰς παραγωγικὰς αὐτῶν δραστηριότητας (διανύσματα) ἴσας πλὴν μιᾶς, π.χ. τῆς πρώτης, καὶ αἱ τιμαὶ $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \ldots, \tau_\nu > 0$ διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας τῆς A καὶ $\tau'_1\ \tau'_2, \tau'_3, \tau'_4, \ldots, \tau'_\nu$ διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας τῆς B. Ἂν $\tau_1 > \tau'_1 > 0$ τότε καὶ $\tau_2 > \tau'_2 > 0$, $\tau_3 > \tau'_3 > 0$, $\tau_4 > \tau'_4 > 0, \ldots, \tau_\nu > \tau'_\nu > 0$. Ἀπόδειξις: Ἂς θέσωμεν πρὸς ἁπλούστευσιν,

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & 1 & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & 1 \\ \hline -\alpha_{41} & -\alpha_{42} & -\alpha_{43} \end{array}\right] \end{array} . \qquad (6.8)$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Pi^*_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ -\alpha'_{21} & 1 & -\alpha_{23} \\ -\alpha'_{31} & -\alpha_{32} & 1 \\ \hline -\alpha'_{41} & -\alpha_{42} & -\alpha_{43} \end{array}\right] \end{array} \qquad (6.9)$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐπηυξημέναι μῆτραι τύπου Leontief, τάξεως 4Χ3, διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ πρῶτον διάνυσμα. Τὰ στοιχεῖα αὐτῶν $\alpha_{\iota\kappa}$ παριστοῦν διακλαδικὰς ροάς, πλὴν τῶν στοιχείων τῆς τετάρτης σειρᾶς ($\alpha_{4\kappa}$) ἑκάστης μήτρας, τὰ ὁποῖα παριστοῦν τοὺς συντελεστὰς κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων.

Πρὸς καθορισμὸν τῶν τιμῶν τ_1, τ_2, τ_3 καὶ $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων A καὶ B, ἀντιστοίχως, σχηματίζομεν [1] τὰ συστήματα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{21} & -\alpha_{31} \\ -\alpha_{12} & 1 & -\alpha_{32} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_{42} \\ \alpha_{43} \end{bmatrix} \qquad (6.10)$$

1) Βλ. Παράρτ. Α, παραγρ. 2.3.

καὶ

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha'_{21} & -\alpha'_{31} \\ -\alpha_{12} & 1 & -\alpha_{32} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \tau'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_{41} \\ \alpha_{42} \\ \alpha_{43} \end{bmatrix} \qquad (6.11)$$

Ἀναδιατάσσοντες τὰ συστήματα ταῦτα ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τ_1, τ_2, τ_3 καὶ τ'_1, τ'_2, τ'_3 (κατόπιν ἐκτελέσεως τῶν πολλαπλασιασμῶν), λαμβάνομεν τὰ ἀντίστοιχα :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \alpha_{21}\,\tau_2 + \alpha_{31}\,\tau_3 + \alpha_{41} \\ \tau_2 &= \alpha_{12}\,\tau_1 + \alpha_{32}\,\tau_3 + \alpha_{42} \\ \tau_3 &= \alpha_{13}\,\tau_1 + \alpha_{23}\,\tau_2 + \alpha_{43} \end{aligned} \qquad (6.12)$$

καὶ

$$\begin{aligned} \tau'_1 &= \alpha'_{21}\,\tau'_2 + \alpha'_{31}\,\tau'_3 + \alpha'_{41} \\ \tau'_2 &= \alpha_{12}\,\tau'_1 + \alpha_{32}\,\tau'_3 + \alpha_{42} \\ \tau'_3 &= \alpha_{13}\,\tau'_1 + \alpha_{23}\,\tau'_2 + \alpha_{43} \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἰς (6.12) δύναται, κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ τ_3 καὶ ἐκτελέσεως τῶν σχετικῶν πράξεων, νὰ γραφῇ ὡς:

$$\tau_2 = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{32}\,\alpha_{13}}{1-\alpha_{32}\,\alpha_{23}}\,\tau_1 + \frac{\alpha_{32}\,\alpha_{43} + \alpha_{42}}{1-\alpha_{32}\,\alpha_{23}} \qquad (6.14)$$

Ὁμοίως ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (6.13) δύναται νὰ γραφῇ ὡς:

$$\tau'_2 = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{32}\,\alpha_{13}}{1-\alpha_{32}\,\alpha_{23}}\,\tau'_1 + \frac{\alpha_{32}\,\alpha_{43} + \alpha_{42}}{1-\alpha_{32}\,\alpha_{23}} \qquad (6.15)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις ἔχομεν τοὺς αὐτοὺς συντελεστὰς τῶν τ_1 καὶ τ'_1 καὶ τὰς αὐτὰς σταθερὰς (τὸ τελευταῖον κλάσμα). Ἂν θέσωμεν λ_1 διὰ τοὺς ὡς ἄνω συντελεστὰς καὶ λ_2 διὰ τὰς σταθεράς, θὰ ἔχωμεν τὰς ἁπλουστέρας ἐξισώσεις :

$$\tau_2 = \lambda_1\,\tau_1 + \lambda_2 \qquad (6.16)$$

$$\tau'_2 = \lambda_1\,\tau'_1 + \lambda_2 \qquad (6.17)$$

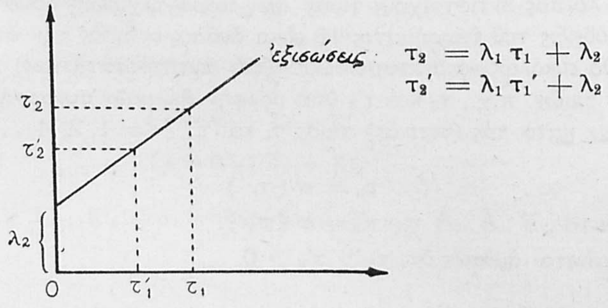
ἐξ ὧν βλέπομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ τ_2 ἀπὸ τὸ τ'_2 ὀφείλεται *μόνον* εἰς τὴν διαφορὰν τῶν τιμῶν τ_1 καὶ τ'_1. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $\tau_1 > \tau'_1 > 0$ συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ $\tau_2 > \tau'_2 > 0$ ἂν λ_1, $\lambda_2 > 0$.

Τὰ στοιχεῖα α_{32} καὶ α_{23} εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ μικρότεροι τῆς μονάδος [1]. Συνεπῶς θὰ εἶναι $\alpha_{32}\,\alpha_{23} < 1$ καὶ $1 - \alpha_{32}\,\alpha_{23} > 0$. Ἐξ ἄλλου ($\alpha_{12} +$

1) Βλ. Παράρτ. Α. παρ. 1. 2.

$\alpha_{32}\,\alpha_{13}$) εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς [1], συνεπῶς $\lambda_1 > 0$ καὶ ἡ ἀνισότης $\tau_2 > \tau'_2$ εἶναι μαθηματικῶς ἰσχυρά. Διὰ νὰ εἶναι ὅμως ἡ ἀνισότης αὕτη καὶ οἰκονομικῶς ἰσχυρὰ πρέπει νὰ εἶναι $\tau_2 > \tau'_2 > 0$. Ἐπειδὴ $1 - \alpha_{32}\,\alpha_{23} > 0$ καὶ $\alpha_{32}\,\alpha_{43} + \alpha_{42} > 0$ θὰ εἶναι $\lambda_2 > 0$. Ἔχομεν ἐπίσης ἐκ τῶν ἀνωτέρω $\lambda_1 > 0$ καί, ἐξ ὑποθέσεως, $\tau_1 > \tau'_1 > 0$. Συνεπῶς αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις διὰ τ_2 καὶ τ'_2 εἶναι θετικαὶ καὶ $\tau_2 > \tau'_2 > 0$. Ἀναλόγως δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι $\tau_3 > \tau'_3 > 0$.

Γραφικῶς αἱ ἐξισώσεις (6.16) καὶ (6.17) δύνανται νὰ παρασταθοῦν ἐντὸς τοῦ συστήματος συντεταγμένων διὰ τῆς αὐτῆς γραμμῆς, μὲ κλίσιν λ_1, καὶ λ_2 ὡς τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχήν.



Σχ. 1

Καθίσταται προφανὲς ὅτι διὰ τὰς τιμὰς $\tau_1 \neq \tau'_1$ λαμβάνομεν $\tau_2 \neq \tau'_2$ καὶ ὅτι ἡ ἀνισότης μεταξὺ τ_2 καὶ τ'_2 εἶναι κατ' ἀνάγκην ὁμόστροφος πρὸς τὴν ἀνισότητα μεταξὺ τῶν τ_1 καὶ τ'_1.

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τὰ ἀνωτέρω οἰκονομικὰ συστήματα [2] τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἰσχύει ἀναλόγως καὶ διὰ πᾶν ζεῦγος οἰκονομικῶν συστημάτων ν ἐξισώσεων ἐφ' ὅσον δυνάμεθα πάντοτε νὰ λαμβάνωμεν διὰ τῆς συνήθους ἀντικαταστάσεως *θετικὰς* συναρτήσεις τῆς μορφῆς (6.16) καὶ (6.17) ἀνωτέρω.

Ὡς θὰ κατενόησεν ὁ ἀναγνώστης, αἱ οἰκονομικαὶ βάσεις τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἀρχὴ τῆς συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως ἡ ὁποία ὁδηγεῖ εἰς τὴν κατάστρωσιν τῶν χρησιμοποιουμένων συστημάτων ἐξισώσεων, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ συνολικὸν κόστος κεφαλαίου δι' ἕκαστον κλάδον δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, αἱ δὲ διακλαδικαὶ ροαὶ εἶναι ἐπίσης μὴ ἀρνητικαὶ καὶ ἑκάστη μικροτέρα τῆς μονάδος [3].

---

1) Τὰ στοιχεῖα α_{12}, α_{32} καὶ α_{13} εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ (βλ. ὑποσ. 1), ἀλλ' ἰσχύει πάντοτε θετικὴ τιμὴ διὰ τὴν παράστασιν $\alpha_{12} + \alpha_{32}\,\alpha_{13}$, καθ' ὅσον ἡ μηδενικὴ τιμὴ αὐτῆς θὰ ἐσήμαινε ὅτι ἡ τιμὴ τ_2 εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τιμῆς τ_1, ὅπερ ἀντιτίθεται πρὸς τὴν ὑπόθεσιν τῆς συνεργατικῆς ἀλληλεξαρτήσεως, ἥτις ἀποτελεῖ τὴν βάσιν τῶν συστημάτων τύπου Λεόντιεφ (Βλ. πάντως καὶ περίπτωσιν τριγωνικῶν μητρῶν τύπου Λεόντιεφ εἰς Παράρτημα Γ).

2) Δηλαδὴ συστήματα πληροῦντα τὰς συνθήκας τῆς παραγρ. 1. 1. τοῦ Παραρτ. Α.

3) Βλ. Παράρτημα Α, παράγρ. 1. 2.

6. 3. 3. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος 1α ἐστηρίχθη ἐπὶ τῆς σχέσεως τῶν (θετικῶν) τιμῶν τῶν μὴ ἴσων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1 καὶ Π_1^*. Δυνάμεθα ὅμως νὰ γενικεύσωμεν τὸ θεώρημα αὐτὸ ὡς ἀκολούθως:

Θεώρημα 1β (ὁμοστρόφων ἀνισοτήτων). Ἔστωσαν αἱ ἐπηυξημέναι τεχνολογικαὶ μῆτραι Α καὶ Β τύπου Leontief, τάξεως $(\nu+1)\,\nu$, ἔχουσαι τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας (διανύσματα) αὐτῶν ἴσας πλὴν μιᾶς, καὶ τιμαὶ $\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots \tau_\nu$ καὶ $\tau'_1, \tau'_2, \ldots\ldots, \tau'_\nu$ διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας τῆς Α καὶ Β ἀντιστοίχως: Ἂν $\tau_\iota > \tau'_\iota > 0$ (διὰ $\iota = 1,2 \ldots\ldots \nu$), τότε καὶ $\tau_1 > \tau'_1 > 0$, $\tau_2 > \tau'_2 > 0, \ldots\ldots, \tau_\nu > \tau'_\nu > 0$.

Ἡ ἔννοια τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι ὅτι ἀρκεῖ, ὑπὸ τὰς δοθείσας προϋποθέσεις, ἡ ἀνισότης μεταξὺ τῶν τιμῶν δύο, οἱωνδήποτε, ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων διὰ νὰ ἔχωμεν ὁμοστρόφους [1] ἀνισότητας δι' ἁπάσας τὰς λοιπὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος 1β εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ 1α: Δυνάμεθα εὐκόλως νὰ διατυπώσωμεν (δι' ἀντικαταστάσεως) πᾶν ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν, π.χ., τ_3 καὶ τ'_3 ὑπὸ μορφὴν ***θετικῶν*** συναρτήσεων διαφερουσῶν ***μόνον*** κατὰ τὰς (θετικὰς) τιμὰς τ_ι καὶ τ'_ι ($\iota = 1, 2, 4, \ldots\ldots \nu$).

$$\begin{aligned} \tau_3 &= \sigma(\tau_\iota) \\ \tau'_3 &= \sigma(\tau'_\iota) \end{aligned} \tag{6.18}$$

ἐξ ὧν καταφαίνεται ἀμέσως ὅτι $\tau_3 > \tau'_3 > 0$.

6. 3. 4. ***Μέθοδος λύσεως τοῦ συστήματος ὡς πρὸς μίαν τιμήν.*** Τὸ θεώρημα 1α καὶ τὸ γενικώτερον θεώρημα 1β μᾶς ἀπαλλάσσουν, ὡς βλέπομεν, ἀπὸ τὴν ὑποχρέωσιν νὰ λύσωμεν τὰ συστήματά μας ὡς πρὸς ὅλας τὰς τιμὰς καὶ μᾶς βεβαιώνουν ὅτι ἀρκεῖ πρὸς σύγκρισιν δύο παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἡ εὕρεσις μιᾶς μόνον τιμῆς ἐξ ἑκάστου.

Κατωτέρω περιγράφομεν μίαν ἁπλῆν καὶ πρακτικὴν μέθοδον λύσεως ἑνὸς συστήματος ὡς πρὸς μίαν τιμήν. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ εὐκόλως εἰς περιπτώσεις μεγάλων (οἰκονομικῶν) συστημάτων.

Ἔστωσαν πρὸς σύγκρισιν αἱ ὁμοκλαδικαὶ παραγωγικαὶ δραστηριότητες Π_1 καὶ Π^*_1, ἀνήκουσαι εἰς τὰς ἐπηυξημένας τεχνολογικὰς μήτρας Λ_1 καὶ Λ_2 τύπου Leontief, τάξεως $(\nu+1)\,\nu$:

$$\Lambda_1 = \left[\frac{\mathrm{I} - \mathrm{A}_1}{\mathbf{0} - \mathrm{K}_1}\right] \text{ καὶ } \Lambda_2 = \left[\frac{\mathrm{I} - \mathrm{A}_2}{\mathbf{0} - \mathrm{K}_2}\right] \tag{6.19}$$

Αἱ Λ_1 καὶ Λ_2 διαφέρουν μόνον κατὰ τὰς ὡς ἄνω παραγωγικὰς δραστηριότητας.

---

1) Ὁμόστροφοι ἀνισότητες σημαίνει ἐνταῦθα ὅτι ἂν τὸ τ τονούμενον εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχόν του μὴ τονούμενον τ, τότε ὅλα τὰ τ τονούμενα θὰ εἶναι ἐπίσης μικρότερα τῶν ἀντιστοίχων των μὴ τονουμένων τ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀναλυτικῶς: Ἡ Λ_1 διαφέρει τῆς Λ_2 κατὰ τὸ πρῶτον αὐτῆς διάνυσμα, $\mathbf{0}$ παριστᾷ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα:

$$\mathbf{0} = (0_1, 0_2 \ldots\ldots 0_\nu)$$

καὶ K_1, K_2 παριστοῦν τὰ διανύσματα τῶν ἀκραίων στοιχείων (συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως)

$$K_1 = (\kappa_1, \kappa_2 \ldots\ldots \kappa_\nu)$$
$$K_2 = (\kappa'_1, \kappa_2 \ldots\ldots \kappa_\nu)$$

Ἐκ τῶν Λ_1 καὶ Λ_2 σχηματίζομεν τὰ συστήματα: (1)

$$(I - A'_1)\, T_1 = K'_1 \qquad (6.20)$$

καὶ

$$(I - A'_2)\, T_2 = K'_2 \qquad (6.21)$$

ὅπου A'_1, A'_2, K'_1, K'_2 εἶναι ἐνηλλαγμέναι (2) τῶν A_1, A_2, K_1, K_2 καὶ

$$T_1 = \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu \end{vmatrix}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau'_\nu \end{vmatrix}$$

εἶναι τὰ διανύσματα τῶν τιμῶν διὰ τὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας Π_1, $\Pi_2, \ldots, \Pi_\nu$ καὶ Π^*_1, $\Pi^*_2, \ldots\ldots, \Pi^*_\nu$ τῶν τεχνολογικῶν μητρῶν Λ_1 καὶ Λ_2, ἀντιστοίχως.

Ἐκ τῶν (6.20) καὶ (6.21) λαμβάνομεν:

$$T_1 = (I - A'_1)^{-1}\, K'_1 \qquad (6.22)$$

καὶ

$$T_2 = (I - A'_2)^{-1}\, K'_2 \qquad (6.23)$$

Ἀλλὰ (1):

$$(I - A'_1)^{-1} = (I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3_1 + \ldots\ldots)$$

καὶ

$$(I - A'_2)^{-1} = (I + A'_2 + A'^2_2 + A'^3_2 + \ldots\ldots),$$

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω τιμῶν ὑπολογίζομεν, κατὰ προσέγγισιν 3ης δυνάμεως (3), τὰς οἱονεὶ ἀντιστρόφους μήτρας (3).

---

1) Βλ. Παράρτημα Α παράγρ. 2.3.

2) Βλ. Α. Α. Λάζαρη: Στοιχεῖα κλπ., IV4 (Εἰς τὴν μελέτην αὐτὴν χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος «ἀνάστροφος» ἀντὶ τοῦ ὅρου «ἐνηλλαγμένη»).

3) Βλ. Παράρτημα Α, παράγρ. 1. 2.

$$(I - A'_1{}^*)^{-1} = (I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3_1)$$

καὶ
$$(I - A'_2{}^*)^{-1} = (I + A'_2 + A'^2_2 + A'^3_2)$$

ὅπου ὁ ἀστερίσκος ὑποδηλοῖ τὴν κατὰ προσέγγισιν ἀντιστροφήν.

Οὕτω, αἱ τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῶν Λ_1 καὶ Λ_2 δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν κατὰ προσέγγισιν ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις:

$$T_1^* = (I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3_1)\,K'_1 \tag{6.24}$$

καὶ
$$T_2^* = (I + A'_2 + A'^2_2 + A'^3_2)\,K'_2 \tag{6.25}$$

ἀντιστοίχως.

Ἔστω ὅτι:

$$(I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3_1) = \omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots\ldots \omega_{1\nu} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots\ldots \omega_{2\nu} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \omega_{\nu_1} & \omega_{\nu_2} & \ldots\ldots \omega_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

$$\text{καὶ } (I + A'_2 + A'^2_2 + A'^3_2) = \omega_2 = \begin{bmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & \ldots\ldots \omega'_{1\nu} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} & \ldots\ldots \omega'_{2\nu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \omega'_{\nu_1} & \omega'_{\nu_2} & \ldots\ldots \omega'_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῶν T_1^* καὶ T_2^* θὰ ἔχωμεν τότε:

$$T_1^* = \omega_1 K'_1 \text{ καὶ } T_2^* = \omega_2 K'_2$$

ἢ

$$T_1^* = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots\ldots \omega_{1\nu} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots\ldots \omega_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{\nu_1} & \omega_{\nu_2} & \ldots\ldots \omega_{\nu\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa_\nu \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

καὶ

$$T_2^* = \begin{bmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau'_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & \ldots\ldots & \omega'_{1\nu} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} & \ldots\ldots & \omega'_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \omega'_{\nu_1} & \omega'_{\nu_2} & \ldots\ldots & \omega'_{\nu\nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa_\nu \end{bmatrix} \qquad (6.27)$$

Συμφώνως ὅμως πρὸς τὸ θεώρημα 1α, πρὸς σύγκρισιν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1 καὶ Π_1^* δὲν ἀπαιτεῖται ὑπολογισμὸς ὅλων τῶν τιμῶν $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ καὶ $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_\nu$. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο ὁ προσδιορισμὸς καὶ ἡ σύγκρισις τῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1 καὶ Π_1^*, δηλαδὴ τῶν τ_1 καὶ τ'_1.

Ἀλλά:

$$\tau_1 = (\omega_{11}\ \omega_{12} \ldots\ldots \omega_{1\nu}) \cdot \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa_\nu \end{bmatrix} = (\omega_{11}\kappa_1 + \omega_{12}\kappa_2 + \ldots + \omega_{i\nu}\kappa_\nu) \qquad (6.28)$$

$$\text{καὶ } \tau'_1 = (\omega'_{11}\ \omega'_{12} \ldots\ldots \omega'_{1\nu}) \cdot \begin{bmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \kappa_\nu \end{bmatrix} = (\omega'_{11}\kappa'_1 + \omega'_{12}\kappa_2 + \ldots + \omega'_{1\nu}\kappa_\nu) \qquad (6.29)$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν τ_1 καὶ τ'_1 χρειαζόμεθα ***μόνον*** τὴν πρώτην γραμμὴν τῶν μητρῶν ω_1 καὶ ω_2. Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ ἀγνοήσωμεν τὰς λοιπὰς γραμμὰς τῶν ω_1 καὶ ω_2 καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν μόνον τὰς πρώτας γραμμὰς αὐτῶν. Ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ ἐκτίθεται ἀμέσως κατωτέρω.

Ἔστω, π.χ., ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν πρώτην γραμμὴν (συνοπτικῶς: αγ) τῆς ω_1. Τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ προσδιορισμὸν τῆς αγ τῆς σειρᾶς $(I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3_1)$.

Ἀλλά: αγ $(I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3) = (\alpha\gamma\, I + \alpha\gamma\, A'_1 + \alpha\gamma\, A'^2_1 + \alpha\gamma\, A'^3_1)$.

Ἡ μοναδιαία μήτρα I καὶ ἡ A'_1 εἶναι ἐξ ὑπαρχῆς δεδομέναι καὶ συνεπῶς δὲν ἀπαιτεῖται ἐργασία διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν $\alpha\gamma I$ καὶ $\alpha\gamma A'_1$.

Ἡ A'^2_1 δύναται νὰ γραφῇ:

$$A'^2_1 = A'_1\,A'_1$$

Ἐφ' ὅσον ἡ A'_1 εἶναι δεδομένη, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ σχηματίσωμεν τὴν πρώτην γραμμὴν τοῦ γινομένου $A'_1 A'_1$, δηλαδὴ τῆς μήτρας A'^2_1, διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν στοιχείων τῆς πρώτης γραμμῆς τῆς A'_1 μὲ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν στηλῶν τῆς A'_1.

Ἔστω π.χ. ὅτι:

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots\dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & 0 & \dots\dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu_1} & \alpha_{\nu_2} & \dots\dots & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε θὰ εἶναι:

$$\alpha\gamma A'^2_1 = (\alpha\gamma A'_1)\,A'_1 = (0\ \alpha_{12} \dots\dots \alpha_{1\nu}) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots\dots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & 0 & \dots\dots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu_1} & \alpha_{\nu_2} & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (\alpha_{12}\alpha_{21} + \dots + \alpha_{1\nu}\alpha_{\nu_1}), (\alpha_{13}\alpha_{32} + \dots + \alpha_{1\nu}\alpha_{\nu_2}) \dots (\alpha_{12}\alpha_{2\nu} + \dots\dots + \\ + \alpha_{1(\nu-1)}\,\alpha_{(\nu-1)\nu})$$

Ἂν θέσωμεν, διὰ συντομίαν, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ διὰ τὰ ἐν παρενθέσει ἀθροίσματα, ἔχομεν:

$$\alpha\gamma A'^2_1 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu) \qquad (6.30)$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς $\alpha\gamma A'^3_1$ ἐργαζόμεθα ἀναλόγως: Ἡ A'^3_1 δύναται νὰ γραφῇ [1]:

$$A'^3_1 = A'^2_1\,A'_1 = A'_1\,A'^2_1$$

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὸν ὑπολογισμὸν μόνον τῆς πρώτης γραμμῆς τῆς A'^3_1, χρησιμοποιοῦμεν τὴν μορφὴν $A'^2_1 A'_1$, ἡ ὁποία ἐπιτρέπει πρὸ–πολλαπλασιασμὸν [2] τῆς δεδομένης μήτρας A'_1 ἐπὶ τὴν ***εὑρεθεῖσαν*** ἤδη πρώτην γραμμὴν τῆς A'^2_1 [3]. Θὰ ἔχωμεν δηλαδή:

---

1) Βλ. Aitken (A. C.) Determinants and Matrices Oliver and Boyd, 1939.

2) Βλ. Α. Α. Λάζαρη: Στοιχεῖα κλπ. IV3.

3) Κατ' ἀναλογίαν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εὐκόλως τὴν $\alpha\gamma A'^4_1$ ἐκ τῆς μορφῆς $(\alpha\gamma A'^3_1)\,A'_1$, τὴν $\alpha\gamma A'^5_1$ ἐκ τῆς μορφῆς $(\alpha\gamma A'^4_1)\,A'_1$ κ.ο.κ.

Ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ I, II, III, IV λαμβάνομεν (1):

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

ἐκ δὲ τοῦ συνδυασμοῦ I*, II, III, IV:

$$A'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Βάσει τῶν A'_1 καὶ A'_2 δυνάμεθα τώρα νὰ ὑπολογίσωμεν κατὰ προσέγγισιν, κατὰ τὰ ἐν παραγρ. 6.3.4. ἐκτεθέντα, τὰς τιμὰς τ_1 καὶ τ'_1 τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων I καὶ I*.

Ὑπολογισμὸς τ_1 κατὰ προσέγγισιν

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς τ_1 κατὰ προσέγγισιν, ἔστω 4ης δυνάμεως, ὑπολογίζομεν τὴν πρώτην γραμμὴν:

$$\alpha\gamma\,(I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3_1 + A'^4_1)$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ πολλαπλασιάζομεν ταύτην ἐπὶ τὸ διάνυσμα:

$$K'_1 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix}$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἐνηλλαγμένον τοῦ διανύσματος τῶν συντελεστῶν κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως K_1, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$$\tau_1 = \alpha\gamma\,(I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3_1 + A'^4_1) \cdot \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \alpha$$

1) Βλ. Παράρτημα Α, παράγρ. 2.3.

Υπολογισμὸς αγ $(I + A'_1 + A'^2_1 + A'^3_1 + A'^4_1)$. Ἔχομεν ἀμέσως

$$\alpha\gamma I = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \qquad \ldots\ldots \beta$$

$$\text{καὶ } \alpha\gamma A'_1 = (0, \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0) \qquad \ldots\ldots \gamma$$

Ἡ $\alpha\gamma A'^2_1$ δύναται νὰ γραφῇ:

$$\alpha\gamma A'^2_1 = (\alpha\gamma A'_1)\, A'_1 = (0 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.1) \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.11 \quad 0.06 \quad 0.1 \quad 0.08) \qquad \ldots\ldots \delta$$

Ἡ $\alpha\gamma A'^3_1$ δύναται νὰ γραφῇ:

$$\alpha\gamma A'^3 = (\alpha\gamma A'^2_1)\, A'_1 = (0.11 \quad 0.06 \quad 0.1 \quad 0.08) \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.058 \quad 0.058 \quad 0.082 \quad 0.035) \qquad \ldots\ldots \varepsilon$$

Ἡ $\alpha\gamma A'^4_1$ δύναται νὰ γραφῇ:

$$\alpha\gamma A'^4_1 = (\alpha\gamma A'^3_1)\, A'_1 = (0.058 \; 0.058 \; 0.082 \; 0.035) \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.0445 \quad 0.035 \quad 0.0442 \quad 0.029) \qquad \ldots\ldots \sigma\tau'$$

Ἀθροίζοντες τώρα τὰς διανυσματικὰς γραμμὰς β, γ, δ, ε καὶ στ′ λαμβάνομεν:

$$(1.2125 \quad 0.353 \quad 0.4262 \quad 0.244)$$

καὶ ἐκ τῆς α:

$$\tau_1 = (1.2125 \quad 0.353 \quad 0.4262 \quad 0.244) \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} = 3.307$$

Ὑπολογισμὸς τ′₁ κατὰ προσέγγισιν

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ τ'_1 κατὰ προσέγγισιν 4ης δυνάμεως, ἐκ τῆς A'_2, θὰ ἔχωμεν:

$$\tau'_1 = (I + A'_2 + A'^2_2 + A'^3_2 + A'^4_2) \cdot K'_2 \qquad \ldots\ldots \alpha$$

ὅπου $K'_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \\ 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} \neq K'_1$, λόγῳ ἀντικαταστάσεως τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς I διὰ τοῦ συντελεστοῦ κεφαλαιακῆς ἐπιβαρύνσεως τῆς I*.

Ἐκ τῆς I καὶ A'_2 ἔχομεν ἀμέσως:

$$\alpha\gamma I = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \qquad \ldots\ldots \beta$$

$$\alpha\gamma A'_2 = (0 \quad 0.3 \quad 0.1 \quad 0) \qquad \ldots\ldots \gamma$$

Ἡ $\alpha\gamma A'^2_2$ εἶναι:

$$\alpha\gamma A'^2_2 = (\alpha\gamma A'_2)\, A'_2 = (0 \quad 0.3 \quad 0.1 \quad 0) \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.05 \quad 0.02 \quad 0.06 \quad 0.12) \qquad \ldots\ldots \delta$$

Ἡ $\alpha\gamma A'^3_2$ εἶναι:

$$\alpha\gamma A'^3_2 = (\alpha\gamma A'^2_2)\, A'_2 = (0.05 \quad 0.02 \quad 0.06 \quad 0.12) \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.042 \quad 0.051 \quad 0.081 \quad 0.008) \qquad \ldots\ldots$$

Ἡ $\alpha\gamma A'^4_2$ εἶναι:

$$\alpha\gamma A'^4_2 = (\alpha\gamma A'^3_2)\, A'_2 = (0.042 \quad 0.051 \quad 0.081 \quad 0.008) \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0.0413 \quad 0.0331 \quad 0.0192 \quad 0.0204) \qquad \ldots\ldots \sigma\tau'$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν γραμμῶν β, γ, δ, ε καὶ στ' θὰ εἶναι:

$$(1.1333 \quad 0.4041 \quad 0.2662 \quad 0.4484)$$

Συνεπῶς, ἐκ τῆς α λαμβάνομεν:

$$\tau_1' = (1.3333 \quad 0.4041 \quad 0.2602 \quad 0.4484) \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.2 \\ 1.9 \\ 2.1 \end{bmatrix} = 2.545$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν τ_1 καὶ τ'_1 βλέπομεν, ὡς καὶ προηγουμένως (¹), ὅτι ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης I* ἔχει ὀλιγώτερον συνολικὸν κόστος ἀπὸ τὴν παραγωγικὴν δραστηριότητα I καὶ συνεπῶς προκρίνομεν τὸν συνδυασμὸν (διάρθρωσιν) I*, II, III, IV ἀντὶ τοῦ συνδυασμοῦ I, II, III, IV.

6. 3. 6. Πρακτικὴ διάταξις τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν (αγΑ') Α', (αγΑ'²) Α' κλπ. Μολονότι ἡ ἀνωτέρω ὑποδειχθεῖσα μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῆς πρώτης γραμμῆς τῶν μητρῶν A'^2, A'^3 κλπ. εἶναι ἁπλῆ, θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ προκληθοῦν σφάλματα καὶ σημαντικὴ ἀπώλεια χρόνου εἰς περιπτώσεις μεγάλων τεχνολογικῶν μητρῶν, λόγῳ τῆς σχετικῶς πολυπλόκου φύσεως τοῦ σταυροειδοῦς πολλαπλασιασμοῦ τῶν μητρῶν. Πρὸς ἀποφυγὴν τοῦ μειονεκτήματος αὐτοῦ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ κατωτέρω περιγραφομένη διαδικασία ὑπολογισμοῦ, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τροποποίησιν τῆς κλασσικῆς διαδικασίας τοῦ σταυροειδοῦς πολλαπλασιασμοῦ τῶν μητρῶν καὶ καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ταχείαν χρησιμοποίησιν τῶν ἀριθμομηχανῶν γραφείου.

Ἔστω, π.χ., ὅτι ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν: (αγΒ)Α:

$$(\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \ldots\ldots \quad \beta_{1\nu}) \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots\ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots\ldots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots\ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Τὸ γινόμενον τῶν δύο μητρῶν εἶναι μήτρα τάξεως 1Χν, μὲ στοιχεῖα κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς:

1) Βλ. ἀνωτ. 6.2.6.

$$
\begin{array}{ll}
1) & \beta_{11}\,\alpha_{11} + \beta_{12}\,\alpha_{21} + \ldots\ldots + \beta_{1\nu}\,\alpha_{\nu 1} \\
2) & \beta_{11}\,\alpha_{12} + \beta_{12}\,\alpha_{22} + \ldots\ldots + \beta_{1\nu}\,\alpha_{\nu 2} \\
 & \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
 & \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
 & \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\nu) & \beta_{11}\,\alpha_{1\nu} + \beta_{12}\,\alpha_{2\nu} + \ldots\ldots + \beta_{1\nu}\,\alpha_{\nu\nu}
\end{array}
$$

Τὰ ἀνωτέρω στοιχεῖα ὑπελογίσθησαν κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον τοῦ σταυροειδοῦς πολλαπλασιασμοῦ γραμμῶν καὶ στηλῶν. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα ἀποτελοῦν ἀθροίσματα τῶν γινομένων τῶν στοιχείων τῆς δοθείσης γραμμῆς (διανύσματος) ἐπὶ τὰ στοιχεῖα τῶν στηλῶν τῆς Α, δύνανται δὲ νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς συνήθεις στήλας προσθέσεως ὡς κάτωθι:

Πίναξ 9

$\beta_{11}\,\alpha_{11}$	$\beta_{11}\,\alpha_{12}$	$\ldots\ldots\ \beta_{11}\,\alpha_{1\nu}$
$\beta_{12}\,\alpha_{21}$	$\beta_{12}\,\alpha_{22}$	$\ldots\ldots\ \beta_{12}\,\alpha_{2\nu}$
.		.
.		.
.		.
$\beta_{1\nu}\,\alpha_{\nu 1}$	$\beta_{1\nu}\,\alpha_{\nu 2}$	$\ldots\ldots\ \beta_{1\nu}\,\alpha_{\nu\nu}$
1ον στοιχεῖον	2ον στοιχεῖον	νιοστὸν στοιχεῖον

Ἐκ τῆς ἐξετάσεως τῶν γινομένων τῆς πρώτης σειρᾶς τοῦ πίνακος 9, βλέπομεν ὅτι ταῦτα σχηματίζονται ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς πρώτης γραμμῆς τῆς Α ἐπὶ τὸ β_{11}, δηλαδὴ ἐπὶ τὸ πρῶτον στοιχεῖον τῆς αγΒ. Ὁμοίως, τὰ γινόμενα τῆς δευτέρας σειρᾶς τοῦ πίνακος σχηματίζονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἑνὸς ἑκάστου στοιχείου τῆς δευτέρας γραμμῆς τῆς Α ἐπὶ τὸ δεύτερον στοιχεῖον τῆς αγΒ. Γενικῶς τὰ γινόμενα τῆς σειρᾶς ι ($\iota=1, 2 \ldots \nu$) τοῦ πίνακος σχηματίζονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνὸς ἑκάστου τῶν στοιχείων τῆς γραμμῆς ι τῆς Α ἐπὶ τὸ στοιχεῖον $\beta_{1\iota}$ τῆς αγΒ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ταχέως τὰ γινόμενα ἑκάστης σειρᾶς τοῦ πίνακος 9, εἰσάγοντες εἰς τὴν ἀριθμομηχανὴν ἓν ἕκαστον τῶν στοιχείων τῆς αγΒ ὡς σταθερὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ πολλαπλασιάζοντες, ἄνευ διακοπῆς, μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τῆς Α. Τὰ μερικὰ γινόμενα θέτομεν κατὰ τὴν τάξιν τοῦ πίνακος 9 καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς προσθέσεις κατὰ στήλας, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν στοιχείων τοῦ γινομένου (αγΒ)Α. Οὕτω, π.χ., διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ γινομένου $\alpha\gamma A_1'^2$, εἰς τὸ προηγούμενον ἀριθμητικὸν παράδειγμα (1), ἀντὶ τοῦ σταυροειδοῦς πολλαπλασιασμοῦ τῆς ($\alpha\gamma A_1'$) ἐπὶ τὰς στήλας τῆς A_1', θὰ ἔχωμεν:

---

1) Βλ. παρ. 6 3.5.

0 X	(0	0.2	0.2	0.1)
0.2X	(0	0	0.2	0.4)
0.2X	(0.5	0.2	0	0)
0.1X	(0.1	0.2	0.6	0)

συνεπῶς:

0	0	0	0
0	0	0.04	0.08
0.1	0.04	0	0
0.01	0.02	0.06	0
0.11	0.06	0.10	0.08

Δηλαδή: $\alpha\gamma A_1'^2 = (0.11 \quad 0.06 \quad 0.10 \quad 0.08)$

Τὸ βασικὸν πλεονέκτημα τῆς διατάξεως ταύτης τοῦ ὑπολογισμοῦ εἶναι ὅτι ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ διανύσματος - πολλαπλασιαστοῦ εἰσάγεται εἰς τὴν ἀριθμομηχανὴν μόνον ἅπαξ καὶ ὄχι ν φοράς, ὡς ἀπαιτεῖ ὁ συνήθης ὑπολογισμός. Συνεπείᾳ τούτου ἐπιταχύνεται λίαν σημαντικῶς ὁ ὑπολογισμός. Καθίσταται οὕτω δυνατὴ ἡ ἐκτέλεσις 10 περίπου πολλαπλασιασμῶν κατὰ λεπτόν, ἔναντι 4 περίπου πολλαπλασιασμῶν κατὰ λεπτόν, βάσει τῆς συνήθους διαδικασίας τοῦ σταυροειδοῦς πολλαπλασιασμοῦ ([1]).

6. 3. 7. Ὑπολογιστικὴ ἀξία τοῦ θεωρήματος 1α. Διὰ νὰ κατανοηθῇ τώρα πλήρως ἡ ὑπολογιστικὴ ἀξία τοῦ θεωρήματος 1α (ἢ τοῦ θεωρήματος 1β) καὶ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν ἁπλουστεύσεων κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου τῶν ὑπὸ σύγκρισιν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων, εἶναι ἀνάγκη νὰ σημειωθοῦν τὰ ἑξῆς:

Ἡ πλήρης λύσις (κατὰ τὴν μέθοδον Doolittle καὶ Gauss) ἑνὸς συστήματος ν ἐξισώσεων συνεπάγεται ν^3 περίπου ἀριθμητικὰς πράξεις τῆς μορφῆς $\left(\alpha - \frac{\beta}{\gamma}\delta\right)$, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀπαιτεῖ κατὰ μέσον ὅρον 2 λεπτὰ τῆς ὥρας διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ ἀπὸ ὑπάλληλον μὲ ἀριθμομηχανὴν γραφείου ([2]). Οὕτω π.χ. ἕνα σύστημα 100 ἐξισώσεων ([3]) συνεπάγεται ἐκτέλεσιν 1.000.000 πράξεων τῆς ἀνωτέρω μορφῆς. Ὁ ὄγκος τῆς ἐργασίας διὰ τὴν λύσιν τοῦ συστήματος αὐτοῦ καθιστᾷ πρακτικῶς ἀδύνατον τὸν ὑπολογισμόν ([4]), ἄνευ χρησι-

---

1) Ἡ διαδικασία αὐτὴ ἀπαιτεῖ συνεχῆ ἔντασιν τῆς προσοχῆς τοῦ χειριστοῦ τῆς ἀριθμομηχανῆς καὶ προκαλεῖ ταχέως τὸν κάματον, μὲ συνέπειαν σφάλματα καὶ μείωσιν τῆς ἀποδόσεως.

2) Βλ. C. Hurd : Computing in Management Science εἰς Management Science Volume 1, January 1955.

3) Τὸ σύστημα τοῦτο δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μέγα, δεδομένου ὅτι ὑπάρχουν εἰς τὴν πρᾶξιν πίνακες εἰσροῶν—ἐκροῶν 400 × 400 ἢ καὶ μεγαλύτεροι.

4) Ὑπάλληλος χρησιμοποιῶν ἀριθμομηχανὰς γραφείου δὲν θὰ ἠδύνατο νὰ περατώσῃ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτὸν πρὸ τῆς παρόδου 10ετίας !

μοποιήσεως ἠλεκτρονικῶν μηχανῶν. Χρησιμοποιοῦντες ὅμως τὴν σειρὰν Newman [1], καὶ λύοντες κατὰ προσέγγισιν καὶ μόνον ὡς πρὸς μίαν τιμὴν (βάσει τοῦ θεωρήματος 1α), ὡς ἐπράξαμεν προηγουμένως, δυνάμεθα νὰ ἁπλουστεύσωμεν εἰς μέγα βαθμὸν τὸν ὑπολογισμόν:

Ἐκ τοῦ τύπου:

$$\tau_1^* = \alpha\gamma\,(\mathrm{I} + A + A^2 + \ldots\ldots + A^\lambda)\,K \qquad \ldots\ldots \alpha$$

ὅπου A εἶναι τάξεως $\nu\chi\nu$ καὶ K τάξεως $\nu\chi 1$, ἔχομεν:

$$\tau_1^* = (\alpha\gamma \mathrm{I} + \alpha\gamma A + \alpha\gamma A^2 + \ldots\ldots + \alpha\gamma A^\lambda)\,K$$

Αἱ γραμμαὶ $\alpha\gamma\mathrm{I}$ καὶ $\alpha\gamma A$ εἶναι δεδομέναι. Ἡ $\alpha\gamma A^2$ δύναται νὰ γραφῇ ὡς $(\alpha\gamma A)A$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τελευταίου γινομένου ἀπαιτεῖται πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἑκάστου τῶν ν στοιχείων τῆς $\alpha\gamma A$ ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν ν στηλῶν τῆς A. Ἀπαιτοῦνται δηλαδὴ ν^2 πολλαπλασιασμοί. Ὁμοίως, ν^2 πολλαπλασιασμοὶ ἀπαιτοῦνται δι' ἑκάστην ἐκ τῶν γραμμῶν $\alpha\gamma A^3$, $\alpha\gamma A^4$, . . . , $\alpha\gamma A^\lambda$. Κατὰ συνέπειαν τὸ σύνολον τῶν ἀπαιτουμένων πολλαπλασιασμῶν πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς $\alpha\gamma\,(\mathrm{I} + A + A^2 + \ldots\ldots + A^\lambda)$ θὰ εἶναι $(\lambda - 1)\,\nu^2$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τ_1^* ἀπαιτεῖται ἐπὶ πλέον (βάσει τοῦ τύπου α) νὰ πολλαπλασιασθοῦν τὰ ν στοιχεῖα τῆς γραμμῆς $\alpha\gamma\,(\mathrm{I} + A + A^2 + \ldots\ldots + A^\lambda)$ ἐπὶ τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης K, δηλαδὴ ἀπαιτοῦνται ἕτεροι ν πολλαπλασιασμοί. Κατὰ συνέπειαν τὸ σύνολον τῶν ἀπαιτουμένων πολλαπλασιασμῶν πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τ_1^* ἀνέρχεται εἰς $(\lambda - 1)\nu^2 + \nu$.

Οὕτω, διὰ τὸ σύστημα τῶν 100 ἐξισώσεων καὶ διὰ $\lambda = 3$ τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασιασμῶν θὰ εἶναι: $(3-1)\,100^2 + 100 = 20.100$.

Δεδομένου ὅτι διὰ τῆς προταθείσης διατάξεως τοῦ ὑπολογισμοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελεσθοῦν 10 περίπου πολλαπλασιασμοὶ κατὰ λεπτόν, ὁ χρόνος προσδιορισμοῦ, κατὰ προσέγγισιν, τοῦ συνολικοῦ κόστους κεφαλαίου δοθείσης παραγωγικῆς δραστηριότητος ἀνηκούσης εἰς σύστημα 100 ἐξισώσεων ἀνέρχεται εἰς 4 ἡμέρας περίπου. Διὰ τὴν σύγκρισιν δύο ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τοῦ αὐτοῦ συστήματος, ὁ αὐτὸς ὑπάλληλος χρειάζεται 8 περίπου ἡμέρες. Ὁ χρόνος ὅμως οὗτος μειοῦται κατὰ λόγον ἀντίστροφον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑπαλλήλων. Οὕτω ὁ ὑπολογισμὸς διὰ τὴν σύγκρισιν δύο ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων δύναται νὰ ὑποβιβασθῇ εἰς 1 ἡμέραν ἂν χρησιμοποιηθοῦν 8 ὑπάλληλοι ἀντὶ ἑνός.

Εἶναι προφανὲς ὅτι διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ καθίσταται πρακτικῶς δυνατὴ ἡ ἐκτέλεσις πολλῶν τοιούτων ὑπολογισμῶν, τῇ βοηθείᾳ τῶν συνήθων ὑπολογιστικῶν μέσων, πρὸς σύγκρισιν ὁμοκλαδικῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων ἀφορωσῶν εἰς διαφόρους κλάδους τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος.

---

1) Βλ. Παράρτημα Α, παράγρ. 1.2.

6. 3. 8. Ἀπαιτούμενος ἀριθμὸς συγκρίσεων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀρίστης διαρθρώσεως. Ἂς λάβωμεν μίαν οἰκονομίαν ἐκ τριῶν παραγωγικῶν κλάδων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὰς κάτωθι ὁμοκλαδικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας: Ὁ πρῶτος τὰς α καὶ α*, ὁ δεύτερος τὰς β καὶ β* καὶ ὁ τρίτος τὰς γ καὶ γ*.

Θὰ ὀνομάζωμεν, πρὸς διάκρισιν, τὰς α, β, γ «ἀρχικὰς» τὰς δὲ α*, β*, γ* «νέας» παραγωγικὰς δραστηριότητας.

Ἐκ τῶν ὡς ἄνω παραγωγικῶν δραστηριοτήτων λαμβάνομεν τοὺς ἑξῆς 8 συνδυασμούς, οἱ ὁποῖοι δύναται νὰ θεωρηθοῦν ὡς οἰκονομικῶς δυναταὶ διαρθρώσεις (1):

Π ί ν α ξ 10

1)	α	β	γ
2)	α	β*	γ
3)	α	β	γ*
4)	α	β*	γ*
5)	α*	β	γ
6)	α*	β*	γ
7)	α*	β	γ*
8)	α*	β*	γ*

Πρὸς ἐπιλογὴν τῆς ἀρίστης οἰκονομικῆς διαρθρώσεως σχηματίζομεν τὰ κάτωθι ζεύγη συγκρίσεως διὰ τὰς ὁμοκλαδικὰς παραγωγικὰς δραστηριότητας α – α*, β – β*, γ – γ*.

Π ί ν α ξ 11 (2)

α – α*	β – β*	γ – γ*
1) α β γ	1) α β γ	1) α β γ
5) α* β γ	2) α β* γ	3) α β γ*
2) α β* γ	3) α β γ*	2) α β* γ
6) α* β* γ	4) α β* γ*	4) α β* γ*
3) α β γ*	5) α* β γ	5) α* β γ
7) α* β γ*	6) α* β* γ	7) α* β γ*
4) α β* γ*	7) α* β γ*	6) α* β* γ
8) α* β* γ*	8) α* β* γ*	8) α* β* γ*

1) Ὁ ὅρος «οἰκονομικῶς δυνατὴ διάρθρωσις» σημαίνει ἐνταῦθα διάρθρωσις ἔχουσα ἀνὰ μίαν ὁμοκλαδικὴν δραστηριότητα, δι' ἕκαστον κλάδον π.χ. αβγ ἢ α* β γ*.

2) Ἡ ἀρίθμησις τῶν διαρθρώσεων συμφωνεῖ πρὸς τὴν ἀρίθμησιν αὐτῶν εἰς τὸν πίνακα 10.

Αἱ ἀνωτέρω 8 διαρθρώσεις παριστοῦν ἐπηυξημένας μήτρας τύπου Leontief, συνεπῶς δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς ταύτας ἀντιστοιχοῦν συστήματα ἐξισώσεων (1) διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν τιμῶν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων α, α*, β, β*, γ, γ*. Ἔστω ὅτι ἐκ τῆς λύσεως τῶν συστημάτων αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν τιμὴν (συνολικὸν κόστος κεφαλαίου) τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τοῦ πρώτου κλάδου, δηλ. τῶν α καὶ α*, λαμβάνομεν τ_{11}, τ_{12}, τ_{13}, τ_{14}, τ_{15}, τ_{16}, τ_{17} καὶ τ_{18}, ὅπου τὸ πρῶτον ὑπόσημον παριστᾷ τὴν πρώτην παραγωγικὴν δραστηριότητα τῆς διαρθρώσεως (τὴν α ἢ α*), τὸ δὲ δεύτερον ὑπόσημον τὴν διάρθρωσιν (2) εἰς ἣν ἀνήκει ἡ παραγωγικὴ δραστηριότης.

Ἐκ τῶν τιμῶν $\tau_{11} - \tau_{18}$ δυνάμεθα, βάσει τοῦ θεωρήματος 1β, νὰ ἐκτελέσωμεν ἀμέσως τὰς συγκρίσεις τῆς δευτέρας καὶ τρίτης στήλης τοῦ πίνακος 11, ἄνευ λύσεως τῶν σχετικῶν συστημάτων ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων β – β* καὶ γ – γ*. Οὕτω, π.χ., πρὸς σύγκρισιν τῶν β καὶ β* εἰς τὰς διαρθρώσεις αβγ καὶ α β* γ (πρῶτον ζεῦγος συγκρίσεων 2ας στήλης), ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὴν σχέσιν μεταξὺ τ_{11} καὶ τ_{12}, δηλαδὴ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν τιμῶν τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος α καὶ α* εἰς ἑκάστην τῶν διαρθρώσεων αὐτῶν. Ἂν $\tau_{11} > \tau_{12}$, θὰ εἶναι – συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα 1β – καὶ ἡ τιμὴ τῆς β μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς τῆς β*. Ὁμοίως σκεπτόμενοι δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ταχέως τὰς συγκρίσεις τῶν δύο τελευταίων στηλῶν τοῦ πίνακος 11, βάσει τῶν τιμῶν τῶν α καὶ α*. Κατὰ συνέπειαν αἱ συγκρίσεις αὗται δὲν ἐμφανίζουν ὑπολογιστικὰ προβλήματα (3). Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα προσεκτικώτερον τὰς συγκρίσεις τῆς πρώτης στήλης τοῦ πίνακος 11. Τὸ ἐνδιαφέρον ἐρώτημα ἐνταῦθα εἶναι ἐὰν δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν τὴν ἀρίστην διάρθρωσιν τῆς δοθείσης οἰκονομίας χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν ὁλόκληρον τὴν ὑπολογιστικὴν ἐργασίαν ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν τιμῶν $\tau_{11} - \tau_{18}$.

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ εἶναι εὐτυχῶς καταφατική. Εἶναι δυνατὸν νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν εἰς δοθεῖσαν οἰκονομικὴν διάρθρωσιν ἡ τιμὴ μιᾶς παραγωγικῆς δραστηριότητος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς ἄλλης ὁμοκλαδικῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος, τὴν ὁποίαν ἡ πρώτη ὑποκαθιστᾷ εἰς τὴν διάρθρωσιν ταύτην, τότε ἡ τιμὴ τῆς πρώτης ἐξακολουθεῖ κατὰ κανόνα νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς τῆς δευτέρας καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις τοιαύτης ὑποκαστάσεως.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν, κατόπιν ἀντικαστάσεως τῆς α ὑπὸ τῆς α* εἰς τὴν διάρθρωσιν α β γ, λάβωμεν τιμὴν τ_{15} τῆς α* μικροτέραν τῆς τιμῆς τ_{11} τῆς α, τότε ἡ τιμὴ τῆς α* θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τιμῆς τῆς α καὶ εἰς ἄλλας διαρθρώσεις εἰς τὰς ὁποίας ἡ α* ἀντικαθιστᾷ τὴν α. Δυνάμεθα ὡς ἐκ τούτου νὰ ἀγνοήσωμεν τὰς διαρθρώσεις :

1) Βλ. παραρτ. Α, παράγρ. 2. 3.

2) Κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν σειρὰν τοῦ πίνακος 10.

3) Δὲν παρουσιάζουν ἐπίσης κατὰ κανόνα οὐσιαστικὸν ἐνδιαφέρον καὶ δύνανται νὰ παραληφθοῦν, ὡς θὰ εἴδωμεν ἐν συνεχείᾳ.

$$\begin{array}{llll} 1) & \alpha & \beta & \gamma \\ 2) & \alpha & \beta^* & \gamma \\ 3) & \alpha & \beta & \gamma^* \\ 4) & \alpha & \beta^* & \gamma^* \end{array}$$

αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνουν τὴν α καὶ νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν ἐξέτασιν μόνον τῶν διαρθρώσεων αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνουν τὴν α^*, ἤτοι εἰς τάς :

$$\begin{array}{llll} 5) & \alpha^* & \beta & \gamma \\ 6) & \alpha^* & \beta^* & \gamma \\ 7) & \alpha^* & \beta & \gamma^* \\ 8) & \alpha^* & \beta^* & \gamma^* \end{array}$$

Περαιτέρω περιορισμὸς τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν διαρθρώσεων εἶναι δυνατός, βάσει τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων. Ἐκ τῆς ἀρχικῆς συγκρίσεως μεταξὺ τῶν διαρθρώσεων $\alpha\,\beta\,\gamma$ καὶ $\alpha^*\,\beta\,\gamma$ ἔχομεν τὴν τιμὴν τ_{15} τῆς α^* εἰς τὴν διάρθρωσιν $\alpha^*\,\beta\,\gamma$. Ἔστω ὅτι ἐκ τῆς λύσεως τοῦ σχετικοῦ συστήματος εὑρίσκεται τιμὴ τ_{16} τῆς α^* εἰς τὴν διάρθρωσιν $\alpha^*\,\beta^*\,\gamma$ καὶ ὅτι $\tau_{15} > \tau_{16}$. Θὰ εἶναι τότε, βάσει τοῦ θεωρήματος 1β, αἱ τιμαὶ τῶν β καὶ γ εἰς τὴν διάρθρωσιν $\alpha^*\,\beta\,\gamma$ μεγαλύτεραι τῶν τιμῶν τῶν β^* καὶ γ εἰς τὴν διάρθρωσιν $\alpha^*\,\beta^*\,\gamma$. Ἑπομένως ἡ διάρθρωσις $\alpha^*\,\beta^*\,\gamma$ θὰ εἶναι συμφερωτέρα τῆς $\alpha^*\,\beta\,\gamma$. Ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται διαρθρώσεις διαφέρουν μόνον ὡς πρὸς τὴν δευτέραν παραγωγικὴν δραστηριότητα, ἡ διαφορὰ εἰς τὴν οἰκονομικότητα αὐτῶν σημαίνει προφανῶς ὅτι ἡ τιμὴ τῆς β εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς β^*. Ἀλλὰ τότε δυνάμεθα, ὡς καὶ προηγουμένως, νὰ ἀπορρίψωμεν ὡς ἀσυμφόρους τὰς διαρθρώσεις αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνουν τὴν β δηλαδή, ἐν προκειμένῳ τὰς διαρθρώσεις 5 καὶ 7.

Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς τῆς καλλιτέρας διαρθρώσεως περιορίζεται, τοιουτοτρόπως, εἰς ἐπιλογὴν μεταξὺ τῶν διαρθρώσεων 6 καὶ 8 :

$$\begin{array}{llll} 6) & \alpha^* & \beta^* & \gamma \\ 8) & \alpha^* & \beta^* & \gamma_* \end{array}$$

Εἰς τὴν προηγουμένην σύγκρισιν ὑποτίθεται ὡς ὑπολογισθεῖσα ἡ τιμὴ τ_{16} τῆς α^* εἰς τὴν διάρθρωσιν $\alpha^*\,\beta^*\,\gamma$. Ἔστω ὅτι ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τιμῆς τῆς α^* εἰς τὴν διάρθρωσιν $\alpha^*\,\beta^*\,\gamma^*$ εὑρίσκομεν τιμὴν τ_{18} μεγαλυτέραν τῆς τιμῆς τ_{16}. Τοῦτο θὰ ἐσήμαινεν (βάσει τοῦ θεωρήματος 1β) ὅτι ἡ διάρθρωσις 6 εἶναι καλυτέρα τῆς διαρθρώσεως 8 καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη θὰ ὠφείλετο εἰς τὸ μεγαλύτερον συνολικὸν κόστος κεφαλαίου τῆς γ^* ἐν σχέσει μὲ τὸ κόστος κεφαλαίου τῆς γ, καθ' ὅσον αἱ διαρθρώσεις 6 καὶ 8 διαφέρουν μόνον κατὰ τὰς παραγωγικὰς ταύτας δραστηριότητας.

Ὡς παρατηροῦμεν, εἰς τὴν ἀνωτέρω διαδικασίαν συγκρίσεων πρέπει νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες μόνον τιμαί, ἤτοι αἱ τ_{11}, τ_{15}, τ_{16} καὶ τ_{18}. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν αὐτῶν ἀπαιτεῖται ἡ λύσις 4 συστημάτων ἐξισώσεων ἑκάστου ὡς πρὸς τὴν τιμήν. Οὕτω ἡ ὑπολογιστικὴ ἐργασία μειοῦται λίαν σημαντικῶς, ἀφ' ἑνὸς μὲν διότι χάριν τοῦ θεωρήματος 1β δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ λυθοῦν τὰ 8 συστήματα ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τῶν β καὶ β* καὶ γ ἢ γ*, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι βάσει τῆς τελευταίας διαδικασίας ἐμειώθη ἐκ νέου σημαντικῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν διαθρώσεων. Οὕτω, ἀντὶ τῆς λύσεως 24 συστημάτων ἑκάστου ὡς πρὸς μίαν τιμὴν (ἢ 8 συστημάτων ὡς πρὸς τρεῖς τιμάς), ἔχομεν νὰ λύσωμεν τελικῶς 4 συστήματα καὶ ἕκαστον ὡς πρὸς μίαν τιμήν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν πρὸς λύσιν συστημάτων εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν «νέων» παραγωγικῶν δραστηριοτήτων τῆς οἰκονομίας (1), σὺν ἕν. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἑκάστη «νέα» παραγωγικὴ δραστηριότης συγκρίνεται ἅπαξ μὲ τὴν ἀντίστοιχον «ἀρχικὴν» ὁμοκλαδικὴν δραστηριότητα (2), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ λύσιν (ὡς πρὸς μίαν τιμὴν) ἀντιστοίχων συστημάτων ἐξισώσεων, ἐνῶ ἐξ ἄλλου πρέπει νὰ προηγηθῇ ἡ λύσις (ὡς πρὸς μίαν τιμὴν) τοῦ «ἀρχικοῦ» συστήματος, δηλαδὴ τοῦ συστήματος τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τὰς «ἀρχικὰς» παραγωγικὰς δραστηριότητας.

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία ἐπιλογῆς τῶν πρὸς ἐξέτασιν διαρθρώσεων ἐστηρίχθη, ὡς εἴπομεν, εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀρχῆς τῆς παρούσης παραγράφου. Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὴν ἐξέτασιν τῆς βασιμότητος τῆς ὑποθέσεως ταύτης, ἡ ὁποία παρουσιάζει ἀναμφισβητήτως ὑπολογιστικὸν ἐνδιαφέρον, ἰδίᾳ εἰς περιπτώσεις πραγματικῶν ἀναλύσεων, εἰς τὰς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν συγκρίσεων τῆς μορφῆς τοῦ πίνακος 11 εἶναι συνήθως ἀπαγορευτικῶς μέγας.

Πρακτικὸς κανών. Ἐὰν $\tau_1 > \tau_1'$, ὅπου τ_1 καὶ τ_1' εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1 καὶ Π_1^*, ἀνηκουσῶν εἰς τὰς ἐπηυξημένας τεχνολογικὰς μήτρας τύπου Leontief Λ_1 καὶ Λ_2 ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν μόνον κατὰ τὰς παραγωγικὰς ταύτας δραστηριότητας, τότε ἡ τιμὴ τῆς Π_1 θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς τῆς Π_1^* καὶ εἰς πᾶσαν (σχεδὸν) ἄλλην περίπτωσιν τεχνολογικῶν μητρῶν διαφερουσῶν μόνον κατὰ τὰς δραστηριότητας ταύτας.

Ἔστωσαν αἱ ἐπηυξημέναι τεχνολογικαὶ μῆτραι τύπου Leontief Λ_1 καὶ Λ_2 τάξεων $(\nu+1)\,\nu$:

$$\Lambda_1 = \left[\frac{I-A_1}{\mathbf{0}-K_1}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_\nu \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1\nu} \\ -\alpha_{21} & 1 & \dots & -\alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ -\alpha_{\nu 1} & -\alpha_{\nu 2} & \dots & 1 \\ \hline -\alpha_{(\nu+1)1} & -\alpha_{(\nu+1)2} & \dots & -\alpha_{(\nu+1)\nu} \end{array}\right] \end{array} \qquad (6.31)$$

1) Ἤτοι τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ ὁποῖαι φέρουν ἀστερίσκον.

2) Ἡ σύγκρισις αὕτη δυνατὸν νὰ γίνεται ἐμμέσως, δηλαδὴ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος 1β.

$$\Lambda_2 = \left[\frac{\mathrm{I}-\mathrm{A}_2}{\mathbf{0}-\mathrm{K}_2}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Pi^*_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_\nu \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1\nu} \\ -\alpha'_{21} & 1 & \dots & -\alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ -\alpha'_{\nu 1} & -\alpha_{\nu 2} & \dots & 1 \\ \hline -\alpha'_{(\nu+1)1} & -\alpha_{(\nu+1)2} & \dots & -\alpha_{(\nu+1)\nu} \end{array}\right] \end{array} \qquad (6.32)$$

αἱ ὁποῖαι διαφέρουν μόνον κατὰ τὴν πρώτην αὐτῶν παραγωγικὴν δραστηριότητα.

Ἐκ τῶν (6.31) καὶ (6.32) λαμβάνομεν τὰ συστήματα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{21} & \dots & -\alpha_{\nu 1} \\ -\alpha_{12} & 1 & \dots & -\alpha_{\nu 2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ -\alpha_{1\nu} & -\alpha_{2\nu} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{(\nu+1)1} \\ \alpha_{(\nu+1)2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{(\nu+1)\nu} \end{bmatrix} . \qquad (6.33)$$

καὶ

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha'_{21} & \dots & -\alpha'_{\nu 1} \\ -\alpha_{12} & 1 & \dots & -\alpha_{\nu 2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ -\alpha_{1\nu} & -\alpha_{2\nu} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau'_1 \\ \tau'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau'_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'_{(\nu+1)1} \\ \alpha_{(\nu+1)2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{(\nu+1)1} \end{bmatrix} \qquad (6.34)$$

διὰ τὰς τιμὰς τ_1, τ_1, . . . , τ_ν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_1, Π_2, . . . , Π_ν τῆς Λ_1 καὶ τ'_1, τ'_2, . . . , τ'_ν τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π^*_1, Π_2, ... , Π_ν τῆς Λ_2.

Ἐκ τῆς λύσεως (διὰ τοῦ κανόνος (Cramer)) τῶν συστημάτων (6.33) καὶ (6.34) ὡς πρὸς τὰς τιμὰς τ_1 καὶ τ'_1 ἔχομεν:

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{(\nu+1)1} & -\alpha_{21} & \dots\dots & -\alpha_{\nu 1} \\ \alpha_{(\nu+1)2} & 1 & \dots\dots & -\alpha_{\nu 2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{(\nu+1)\nu} & -\alpha_{2\nu} & \dots\dots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_{21} & \dots\dots & -\alpha_{\nu 1} \\ -\alpha_{12} & 1 & \dots\dots & -\alpha_{\nu 2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ -\alpha_{1\nu} & -\alpha_{2\nu} & \dots\dots & 1 \end{vmatrix}} = \frac{|B_1|}{|I-A'_1|} \qquad (6.35)$$

καὶ

$$\tau'_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha'_{(\nu+1)1} & -\alpha'_{21} & \dots\dots & -\alpha'_{\nu 1} \\ \alpha_{(\nu+1)2} & 1 & \dots\dots & \alpha_{\nu 2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \alpha_{(\nu+1)\nu} & -\alpha_{2\nu} & \dots\dots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\alpha'_{21} & \dots\dots & -\alpha'_{\nu 1} \\ -\alpha_{12} & 1 & \dots\dots & -\alpha_{\nu 2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ -\alpha_{1\nu} & -\alpha_{2\nu} & \dots\dots & 1 \end{vmatrix}} = \frac{|B_2|}{|I-A'_2|} \qquad (6.36)$$

Ἔστω δὲ ὅτι :

$$\tau_1 > \tau'_1 \qquad (6.37)$$

Θὰ ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ διάρθρωσις μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἐκ τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων Π_2, Π_3, . . . , Π_ν (αἱ ὁποῖαι εἶναι κοιναὶ δι' ἀμφοτέρας τὰς τεχνολογικὰς μήτρας Λ_1 καὶ Λ_2) μεταβάλλεται, ἀλλ' ἐντὸς τῶν ὁρίων τὰ ὁποῖα καθορίζουν αἱ τεχνολογικαὶ μῆτραι τύπου Leontief (1). Ἐρω-

1) Βλ. Παράρτημα Α, παράγρ. 1.2.

τᾶται: Ποία ἡ ἐπίδρασις τῆς μεταβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τῆς σχέσεως (6.37); Αἱ περιπτώσεις μεταβολῆς, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τῶν διαρθρώσεων Λ_1 καὶ Λ_2 εἶναι αἱ ἀκόλουθοι: α) Δυνατὸν νὰ μεταβληθοῦν ἓν ἢ περισσότερα διακλαδικὰ στοιχεῖα τῶν $\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_\nu$ εἰς ἀμφοτέρας τὰς διαρθρώσεις Λ_1, Λ_2. β) Δυνατὸν νὰ μεταβληθοῦν ἓν ἢ περισσότερα ἐκ τῶν ἀκραίων στοιχείων, $\alpha_{(\nu+1)2}$, $\alpha_{(\nu+1)3}$, $\ldots$, $\alpha_{(\nu+1)\nu}$ εἰς ἀμφοτέρας τὰς διαρθρώσεις Λ_1, Λ_2. γ) Δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ταυτοχρόνως τὰς μεταβολὰς (α) καὶ (β).

Περίπτωσις 1η. Ἔστω ὅτι εἰς ἀμφοτέρας τὰς μήτρας $(\mathrm{I}-\mathrm{A}'_1)$ καὶ $(\mathrm{I}-\mathrm{A}'_2)$ τῶν συστημάτων (6.33) καὶ (6.34) τὸ στοιχεῖον α_{12} γίνεται α'_{12}. Ὑποτίθεται ὅτι τὸ α'_{12} πληροῖ τὰς συνθήκας τῶν μητρῶν τύπου Leontief [1], εἶναι δηλαδή,

$$1 > \alpha'_{12} \geqslant 0$$

$$1 > \alpha'_{12} + \alpha_{13} + \ldots + \alpha_{1\nu} > 0$$

καὶ συνεπῶς: $$1 > |\mathrm{I}-\mathrm{A}'_{1*}| \quad , \quad |\mathrm{I}-\mathrm{A}'_{2*}| > 0$$

ὅπου $|\mathrm{I}-\mathrm{A}'_{1*}|$ καὶ $|\mathrm{I}-\mathrm{A}'_{2*}|$ εἶναι αἱ ὁρίζουσαι τῶν μητρῶν αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῶν ἀρχικῶν $(\mathrm{I}-\mathrm{A}'_1)$ καὶ $(\mathrm{I}-\mathrm{A}'_2)$ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ α_{12} εἰς α'_{12}.

Ἂς εἴδωμεν τώρα ποία εἶναι ἡ ἐπίδρασις τῆς μεταβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τῆς σχέσεως (6.37).

Ἡ νέα τιμὴ $\boldsymbol{\tau}_1$ τῆς Π_1 θὰ ἰσοῦται προφανῶς μὲ τὴν ἀρχικὴν τιμὴν σὺν τῇ μεταβολῇ αὐτῆς, λόγῳ ἀλλαγῆς τοῦ α_{12} εἰς α'_{12}:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \tau_1 + \frac{d\tau_1}{d\alpha_{12}} \Delta\alpha_{12} \qquad (6.38)$$

ὅπου $\frac{d\tau_1}{d\alpha_{13}}$ εἶναι ἡ παράγωγος ὡς πρὸς α_{12} καὶ $\Delta\alpha_{12}$ ἡ μεταβολὴ τοῦ α_{12} τοιαύτη ὥστε:

$$1 > \alpha_{12} + \Delta\alpha_{12} = \alpha'_{12} \geqslant 0 \qquad (6.39)$$

Ἡ νέα τιμὴ $\boldsymbol{\tau}'_1$ τῆς $\Pi_1{*}$ θὰ εἶναι, ἀναλόγως:

$$\boldsymbol{\tau}'_1 = \tau' + \frac{d\tau'_1}{d\alpha_{12}} \Delta\alpha_{12} \qquad (6.40)$$

Ἀλλά [2]:

$$\frac{d\tau_1}{d\alpha_{12}} = - \frac{|\mathrm{B}_1| \cdot |\mathrm{E}_{1\,(1,2)}|}{|\mathrm{I}-\mathrm{A}'_1|^2} \qquad (6.41)$$

1) Βλ. Παράρτημα Α, παράγρ. 1.2.

2) Ἐπειδὴ τὸ α_{12} εὑρίσκεται μόνον εἰς τοὺς παρονομαστὰς $|\mathrm{I}-\mathrm{A}'_1|$ καὶ $|\mathrm{I}-\mathrm{A}'_2|$ τῶν (6.35) καὶ (6.36), ἡ παραγώγισις γίνεται συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα παραγωγίσεως συναρτήσεων τῆς μορφῆς $\psi = \frac{\alpha}{\sigma(x)}$, ($\alpha$ = σταθερά), ὁπότε ἔχομεν: $\frac{d\psi}{dx} = - \frac{\alpha\sigma'(x)}{[\sigma(x)]^2}$

καὶ

$$\frac{d\tau'_1}{d\alpha_{12}} = -\frac{|B_2| \cdot |E_{2\,(1,2)}|}{|I-A'_2|^2} \qquad (6.42)$$

ὅπου $|E_{1\,(1,2)}|$ καὶ $|E_{2\,(1,2)}|$ εἶναι παράγωγοι τῶν $|I-A'_1|$ καὶ $|I-A'_2|$ ἀντιστοίχως, ὡς πρὸς α_{12} (1).

Αἱ (6.41) καὶ (6.42) δύνανται νὰ γραφοῦν:

$$\frac{d\tau_1}{d\alpha_{12}} = \frac{|B_1|}{|I-A'_1|} \cdot \frac{-|E_{1\,(1,2)}|}{|I-A'_1|} = \tau_1 \frac{-|E_{1\,(1,2)}|}{|I-A'_1|} \qquad (6.43)$$

καὶ

$$\frac{d\tau'_1}{d\alpha_{12}} = \frac{|B_2|}{|I-A'_2|} \cdot \frac{-|E_{2\,(1.2)}|}{|I-A'_2|} = \tau'_1 \frac{-|E_{2\,[1.2]}|}{|I-A'_2|} \qquad (6.44)$$

Θέτοντες $\dfrac{-|E_{1\,(1,2)}|}{|I-A'_1|} = \Gamma_1$ καὶ $\dfrac{-|E_{2\,(1,2)}|}{|I-A'_2|} = \Gamma_2$.

δι' ἁπλούστευσιν, ἔχομεν:

$$\frac{d\tau_1}{d\alpha_{12}} = \tau_1 \Gamma_1 \text{ καὶ } \frac{d\tau'_1}{d\alpha_{12}} = \tau'_1 \Gamma_2 \qquad (6.45)$$

Συνεπῶς ἐκ τῶν (6.38) καὶ (6.40):

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \tau_1 (1 + \Gamma_1 \Delta\alpha_{12}) \qquad (6.46)$$

$$\text{καὶ } \boldsymbol{\tau}'_1 = \tau'_1 (1 + \Gamma_2 \Delta\alpha_{12}) \qquad (6.47)$$

Διερεύνησις τῆς σχέσεως μεταξὺ $\boldsymbol{\tau}_1$ καὶ $\boldsymbol{\tau}'_1$. Ἐκ τῶν (6.46) καὶ (6.47) βλέπομεν ὅτι ἡ σχέσις μεταξὺ $\boldsymbol{\tau}_1$ καὶ $\boldsymbol{\tau}'_1$ ἐξαρτᾶται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐκ τῆς σχέσεως μεταξὺ τ_1 καὶ τ'_1, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐκ τῆς σχέσεως μεταξὺ Γ_1 καὶ Γ_2. Ἐπειδὴ $|E_{1\,(1,2)}|$ καὶ $|E_{2\,(1,2)}|$ εἶναι αἱ ἐλάσσονες τοῦ $-\alpha_{12}$ εἰς τὰς μήτρας $(I-A'_1)$ καὶ $(I-A'_2)$, αἱ $-|E_{1\,(1,2)}|$ καὶ $-|E_{2\,(1,2)}|$ ἀποτελοῦν τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τοῦ $-\alpha_{12}$ εἰς τὰς ὡς ἄνω μήτρας. Κατὰ συνέπειαν αἱ παραστάσεις:

$$\frac{-|E_{1\,(1,2)}|}{|I-A'_1|} \text{ καὶ } \frac{-|E_{2\,(1,2)}|}{|I-A'_2|}$$

δηλαδὴ αἱ Γ_1 καὶ Γ_2 εἶναι στοιχεῖα τῶν ἀντιστρόφων μητρῶν $(I-A_1')^{-1}$ καὶ

---

1) Αἱ $|E_{1\,(1,2)}|$ καὶ $|E_{2\,(1,2)}|$ εἶναι προφανῶς ἐλάσσονες τοῦ στοιχείου $-\alpha_{12}$ εἰς τὰς $|I-A'_1|$ καὶ $|I-A'_2|$.

$(I-A'_2)^{-1}$, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀνήκει εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν καὶ δευτέραν στήλην τῶν μητρῶν αὐτῶν [1].

Ἐκ τῆς σχέσεως:

$$(I-A)^{-1} = (I + A + A^2 + A^3 + \ldots\ldots)$$

συμπεραίνομεν ἐξ ἄλλου [2] ὅτι πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς ἀντιστρόφου μήτρας τύπου Leontief εἶναι μὴ ἀρνητικὰ καὶ μεγαλύτερα εἰς ἀπόλυτον τιμὴν τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς $(I-A)$.

Συνεπῶς:

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2 > \alpha_{21} > 0 \qquad (6.48)$$

Ἐκ τῆς ἀναλύσεως Waugh [3] περὶ τῆς συγκλίσεως τῶν ἀντιστρόφων μητρῶν τύπου Leontief, γνωρίζομεν ὅτι:

$$\begin{aligned} N(I-A)^{-1} &= N(I + A + A^2 + A^3 + \ldots) \\ &\leqslant N(I) + N(A) + N(A^2) + \ldots \\ &\leqslant 1 + N(A) + N(A)^2 + \ldots \\ &\leqslant \frac{1}{1-N(A)} \end{aligned}$$

ὅπου N παριστᾷ τὴν «νόρμαν» τῶν ἀντιστοίχων μητρῶν, δηλαδὴ τὸ *μέγιστον* (εἰς ἀπόλυτον τιμὴν) *ἐκ τῶν ἀθροισμάτων τῶν στοιχείων τῶν στηλῶν τῶν μητρῶν αὐτῶν.* Διὰ τὰς μήτρας τύπου Leontief εἶναι N (A) = μέγιστον $\Sigma\alpha_{\iota\kappa} < 1$. [4]. Εἰδικώτερον ὅσον ἀφορᾷ τὰς ἐνταῦθα ἐξεταζομένας μήτρας ἡ N (A) δὲν ὑπερβαίνει συνήθως τὰς 0,5 ἢ 0,6, ἐπειδὴ αἱ μῆτραι αὗται ἀποτελοῦν ἐλλειπεῖς διαρθρώσεις καὶ δὲν περιλαμβάνουν σημαντικοὺς (ἀπὸ ἀπόψεως τιμῆς) τεχνολογικοὺς συντελεστάς, ὡς εἶναι π.χ. ὁ τεχνολογικὸς συντελεστὴς ἐργασίας. Συνεπῶς ἡ τιμὴ τῆς $N(I-A)^{-1}$ θὰ κυμαίνεται ἐν προκειμένῳ περὶ τὰ 2 ἢ 2,5 [5].

Ἐφ᾽ ὅσον ὅμως ἡ τιμὴ ὅλων τῶν στοιχείων τῆς ἰσχυροτέρας στήλης [6] τῆς ἀντιστρόφου μήτρας εἶναι περίπου 2 ἢ 2·5, καθίσταται προφανὲς ὅτι ἡ

1) Βλ. Α. Α. Λάζαρη «Στοιχεῖα κλπ.», IV 5.

2) Βλ. Παράρτημα Α. παράγρ. 1.2.

3) Βλ. F. Waugh «Inversion of the Leontief Matrix in power series», Econometrica 1950.

4) Βλ. Παράρτημα Α, παρ. 1. 2.

5) $\frac{1}{1-0.5} = 2$ ἢ $\frac{1}{1-0.6} = 2 \cdot 5$

6) «Ἰσχυροτέραν» καλοῦμεν ἐνταῦθα τὴν στήλην τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων καθορίζει τὴν τιμὴν τῆς «νόρμας».

τιμὴ ἑνὸς μόνον ἐκ τῶν στοιχείων (οἱασδήποτε στήλης) αὐτῆς εἶναι πολὺ μικρά, συνήθως δὲ μικροτέρα τῆς μονάδος (1).

Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ θέσωμεν :

$$1 \simeq \Gamma_1, \; \Gamma_2 > \alpha_{12} > 0 \qquad (6.49)$$

ἀντὶ τῆς (6.48).

Ἐξ ἄλλου τὸ $\Delta\alpha_{12}$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ (2) μικρὸς κλασματικὸς ἀριθμὸς καὶ συνεπῶς αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν γινομένων $\Gamma_1\Delta_{12}$ καὶ $\Gamma_2\Delta\alpha_{12}$ εἰς (6.46) καὶ (6.47) εἶναι :

$$\Gamma_1 > |\Gamma_1\Delta\alpha_{12}| \qquad \text{καὶ} \qquad \Gamma_2 > |\Gamma_2\alpha_{12}| \qquad (6.50)$$

Οὕτω, τὰ γινόμενα τοῦ δεξιοῦ σκέλους τῶν ἐξισώσεων (6.46) καὶ (6.47) εἶναι προφανῶς (εἰς ἀπολύτους τιμὰς) τῆς τάξεως δεκάτων τινῶν ἢ ἑκατοστῶν, ἐφ' ὅσον προκύπτουν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μικρῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Ἀλλὰ τότε καὶ ἡ διαφορὰ (3) τῶν γινομένων αὐτῶν εἶναι τοιαύτη ὥστε δὲν δύναται νὰ ἐπηρεάσῃ οὐσιωδῶς τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν $\boldsymbol{\tau}_1$ καὶ $\boldsymbol{\tau}_1'$. Ἡ σχέσις αὐτὴ ἐξαρτᾶται συνεπῶς κατὰ κύριον λόγον ἀπὸ τὴν σχέσιν τῶν τ_1 καὶ τ_1'. Ἐπειδὴ δὲ ὑπεθέσαμεν (6.37) ὅτι $\tau_1 > \tau_1'$, θὰ εἶναι :

$$\boldsymbol{\tau}_1 > \boldsymbol{\tau}_1' \qquad (6.51)$$

Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν (6.46) καὶ (6.47) ἐν συνδυασμῷ μὲ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, ἀντιστροφὴ τῆς σχέσεως (6.51) εἶναι δυνατὴ ἐὰν συντρέχουν αἱ ἀκόλουθοι προϋποθέσεις ἀθροιστικῶς :

α) $\Gamma_2 > \Gamma_1$

β) $\Delta\alpha_{12} > 0$

γ) $(\tau_1 - \tau_1')$ εἶναι μικρὸς κλασματικὸς ἀριθμὸς τοιοῦτος ὥστε

$$\frac{\tau_1'}{\tau_1} > \frac{1 + \Gamma_1\Delta\alpha_{12}}{1 + \Gamma_2\Delta\alpha_{12}}$$

ἢ ἐὰν συντρέχουν αἱ ἀντίστροφοι σχέσεις (α) καὶ (β), ἡ δὲ (γ) παραμένῃ ὡς ἔχει.

Ἡ πιθανότης πληρώσεως τῶν ἀνωτέρω προϋποθέσεων εἶναι μικρά.

---

1) Τοῦτο εἶναι τοσοῦτον μᾶλλον πιθανώτερον, ὅσον ἡ μήτρα εἶναι μεγαλυτέρα (ὁπότε ἔχει περισσότερα στοιχεῖα ἑκάστη στήλη αὐτῆς), δηλαδὴ ὅσον αὕτη πλησιάζῃ περισσότερον εἰς τὴν πραγματικότητα. Βλ. καὶ πίνακα τεχνολογικῶν συντελεστῶν εἰσροῆς εἰς τὸ Παράρτημα Δ.

2) Ἐφ' ὅσον $0 \leqslant \alpha_{12} < 1$ τὸ δὲ $\Delta\alpha_{12}$ παριστᾷ μεταβολὴν τοῦ α_{12} τοιαύτην ὥστε $0 \leqslant \alpha_{12} + \Delta\alpha_{12} < 1$ (βλ. καὶ (6.39) ἀνωτέρω).

3) Ἐὰν βεβαίως ὑφίσταται διαφορά.

Ὁπωσδήποτε, ὅταν ἡ διαφορὰ $\tau_1 - \tau_1'$ εἶναι μικρὸς κλασματικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν ὑπὸ σύγκρισιν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων αἱ πρὸς δεδομένην διάρθρωσιν εἶναι περίπου ἴσαι, πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν τὸ ἐνδεχόμενον τῆς ἀντιστροφῆς τῆς σχέσεως μεταξὺ τῶν τιμῶν τῶν δραστηριοτήτων αὐτῶν ὡς πρὸς ἄλλην διάρθρωσιν καὶ νὰ ἐξετάζεται ἰδιαιτέρως ἡ περίπτωσις.

Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις ἰσχύει βεβαίως καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν μεταβολῆς τῶν $\alpha_{1\kappa}$ ($\kappa = 2, 3, \ldots, \nu$), δύναται δὲ νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ μικρῶν προσαρμογῶν [1] καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις μεταβολῆς τῶν λοιπῶν διακλαδικῶν στοιχείων $\alpha_{\iota\kappa}$ ($\iota, \kappa = 3, 4, \ldots, \nu$) τῶν Λ_1 καὶ Λ_2. Ἐὰν μεταβάλλωνται ταυτοχρόνως πολλὰ διακλαδικὰ στοιχεῖα $\alpha_{\iota\kappa}$ προκύπτει βεβαίως τὸ ζήτημα τῆς ἀθροιστικῆς ἐπιδράσεως αὐτῶν ἐπὶ τῶν τιμῶν τ_1 καὶ τ_1'. Ἡ πιθανότης ὅμως τοιαύτης ἐπιδράσεως εἶναι μικρὰ καὶ ἐν πάσῃ περιπτώσει δὲν φαίνεται νὰ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν πιθανότητα ἀλληλοεξουδετερώσεως εἰς σημαντικὸν βαθμὸν τῶν ἐπιδράσεων αὐτῶν, λόγῳ τῆς μεγάλης διασπορᾶς τῶν διακλαδικῶν στοιχείων.

Περίπτωσις 2α. Ἔστω ὅτι εἰς ἀμφοτέρας τὰς μήτρας Λ_1 καὶ Λ_2 τὸ ἀκραῖον στοιχεῖον $\alpha_{(\nu+1)2}$ γίνεται $\alpha'_{(\nu+1)2}$ τοιοῦτον ὥστε $\alpha'_{(\nu+1)2} > 0$. Ἡ νέα τιμὴ τ_1 τῆς Π_1 θὰ ἰσοῦται τότε μὲ τὴν ἀρχικὴν τιμὴν τ_1 σὺν τῇ μεταβολῇ αὐτῆς, λόγῳ ἀλλαγῆς τοῦ στοιχείου $\alpha_{(\nu+1)2}$ εἰς $\alpha'_{(\nu+1)2}$:

$$\tau_1 = \tau_1 + \frac{d\tau_1}{d\alpha_{(\nu+1)2}} \Delta\alpha_{(\nu+1)2} \qquad (6.52)$$

Ἀναλόγως, ἡ τ_1' θὰ εἶναι:

$$\tau'_1 = \tau'_1 + \frac{d\tau_1'}{d\alpha_{(\nu+1)2}} \Delta\alpha_{(\nu+1)2} \qquad (6.53)$$

Ἐκ τῶν (6.35) καὶ (6.36) λαμβάνομεν διὰ παραγωγίσεως [2]:

$$\frac{d\tau_1}{d\alpha_{(\nu+1)2}} = \frac{-|E_{1(\nu+1)2}|}{|I - A_1'|} = \Gamma_1'$$

---

1) Ἐπειδὴ τὰ στοιχεῖα $\alpha_{\iota\kappa}$ ($\iota, \kappa = 3, 4, \ldots, \nu$) εὑρίσκονται εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων (6.35) καὶ (6.36), ἡ παραγώγισις ὡς πρὸς ἓν ἐκ τῶν στοιχείων αὐτῶν γίνεται συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα παραγωγίσεως συναρτήσεων τῆς μορφῆς: $\Psi = \frac{\sigma(\chi)}{\varphi(\chi)}$ δηλαδή, $\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\sigma'(\chi)\varphi(\chi) - \sigma(\chi)\varphi'(\chi)}{[\varphi(\chi)]^2}$, ὁπότε καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις μεταβάλλεται ἀναλόγως.

2) Ἐπειδὴ τὸ στοιχεῖον $\alpha_{(\nu+1)2}$ εὑρίσκεται μόνον εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῶν (6.35) καὶ (6.36) ἡ παραγώγισις γίνεται βάσει τοῦ κανόνος παραγωγίσεως συναρτήσεων τῆς μορφῆς $\Psi = \frac{1}{\alpha}\sigma(\chi)$, ὁπότε ἔχομεν $\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{1}{\alpha}\sigma'(\chi)$.

καὶ

$$\frac{d\tau'_1}{d\alpha_{(\nu+1)2}} = \frac{-|E_{2(\nu+1)2}|}{|I-A_2'|} = \Gamma_2'$$

ὅπου $|E_{1(\nu+1)2}|$ εἶναι ἡ ἐλάσσων τοῦ στοιχείου $\alpha_{(\nu+1)2}$ τῆς B_1 καὶ $|E_{2(\nu+1)2}|$ ἡ ἐλάσσων τοῦ αὐτοῦ στοιχείου τῆς $|B_2|$. Ἐπειδὴ αἱ $|B_1|$ καὶ $|B_2|$ διαφέρουν ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους $|I-A_1'|$ καὶ $|I-A_2'|$ μόνον κατὰ τὴν πρώτην στήλην, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐλάσσων τοῦ στοιχείου $\alpha_{(\nu+1)2}$ τῶν πρώτων εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐλάσσονα τοῦ στοιχείου $-\alpha_{12}$ τῶν τελευταίων.

Δηλαδὴ εἶναι :

$$|E_{1(\nu+1)2}| = |E_{1(1,2)}|$$

καὶ

$$|E_{2(\nu+1)2}| = |E_{2(1,2)}|$$

Ἀλλὰ τότε : $\Gamma_1' = \Gamma_1$ καὶ $\Gamma_2' = \Gamma_2$.

Κατὰ συνέπειαν αἱ (6.52) καὶ (6.53) δύνανται νὰ διατυπωθοῦν :

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \tau_1 + \Gamma_1 \Delta\alpha_{(\nu+1)2} \tag{6.54}$$

καὶ

$$\boldsymbol{\tau}'_1 = \tau_1' + \Gamma_2 \Delta\alpha_{(\nu+1)2} \tag{6.55}$$

Ἐκ τῶν (6.54) καὶ (6.55) βλέπομεν ὅτι αἱ τιμαὶ $\boldsymbol{\tau}_1$ καὶ $\boldsymbol{\tau}'_1$ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰς τιμὰς τ_1 καὶ τ'_1 καὶ τὰ γινόμενα $\Gamma_1 \Delta\alpha_{(\nu+1)2}$ καὶ $\Gamma_2 \Delta\alpha_{(\nu+1)2}$. Ἀλλὰ Γ_1 καὶ Γ_2 εἶναι συνήθως, ὡς ἐλέχθη, κλασματικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ $\Delta\alpha_{(\nu+1)2}$ εἶναι ἐπίσης μικρὸς ἀριθμὸς δεδομένου ὅτι παριστᾷ μεταβολὴν ἀμέσου κόστους κεφαλαίου (capital - output coefficient), τὸ ὁποῖον εἰς τὰς πραγματικὰς περιπτώσεις κυμαίνεται μεταξὺ 3–3 1/2 μονάδας περίπου (¹). Κατὰ συνέπειαν τὰ γινόμενα $\Gamma_1 \Delta\alpha_{(\nu+1)2}$ καὶ $\Gamma_2 \Delta\alpha_{(\nu+1)2}$ εἶναι συνήθως τῆς τάξεως δεκάτων ἢ ἑκατοστῶν, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι ἔτι μικροτέρα. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ τιμαὶ $\boldsymbol{\tau}_1$ καὶ $\boldsymbol{\tau}'_1$ ἐξαρτῶνται ***κατὰ κύριον λόγον*** ἐκ τῶν τιμῶν τ_1 καὶ τ'_1. Ἐπειδὴ δὲ ἐν προκειμένῳ ἔχομεν $\tau_1 > \tau'_1$ θὰ εἶναι—πλὴν ἐξαιρετικῶν περιπτώσεων – καὶ $\boldsymbol{\tau}_1 > \boldsymbol{\tau}'_1$.

Ἀντιστροφὴ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως μεταξὺ τῶν $\boldsymbol{\tau}_1$ καὶ $\boldsymbol{\tau}'_1$ θὰ ἦτο δυνατὴ ἂν

α) $\Gamma_2 > \Gamma_1$

β) $\Delta\alpha_{(\nu+1)2} > 0$

καὶ γ) ἡ διαφορὰ $\tau_1 - \tau'_1$ ἦτο πολὺ μικρά, τῆς τάξεως π. χ. δεκάτων ἢ ἑκατοστῶν, οὕτως ὥστε :

$$\tau_1 - \tau'_1 < (\Gamma_2 - \Gamma_1)\, \Delta\alpha_{(\nu+1)2}$$

---

1) Βλ. π.χ. United Nations: Document No E/2041 καὶ Intern. Bank of Reconstration and Developement: Document No E/218.

ἢ ἂν

α) $\Gamma_1 > \Gamma_2$

β) $\Delta\alpha_{(\nu+1)2} < 0$

καὶ γ) ἡ διαφορὰ $\tau_1 - \tau'_1$ ἦτο πολὺ μικρά, τοιαύτη ὥστε $\tau_1 - \tau'_1 < (\Gamma_1 - \Gamma_2)$. $\Delta\alpha_{(\nu+1)2}$. Προφανῶς ἀνάλογος ἀνάλυσις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ εἰς περίπτωσιν μεταβολῆς οἱουδήποτε ἀκραίου στοιχείου $\alpha_{(\nu+1)\kappa}$ ($\kappa=2, 3, \ldots \nu$).

Περίπτωσις 3η. Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀναφέρεται εἰς τὴν μεταβολὴν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ταυτοχρόνως ἐκ τῶν στοιχείων $\alpha_{\iota\kappa}$ καὶ $\alpha_{(\nu+1)\kappa}$ ($\iota, \kappa = 2, 3 \ldots \nu$) τῶν Λ_1 καὶ Λ_2 καὶ συνεπῶς ἀνάγεται εἰς τὰς περιπτώσεις 1 καὶ 2 ἀνωτέρω.

Ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως καθίσταται, νομίζομεν, σαφὲς ὅτι ὁ ἀνωτέρω προταθεὶς «Πρακτικὸς Κανὼν» ἐπιλογῆς τῶν πρὸς σύγκρισιν διαρθρώσεων, δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἀσφαλῶς ἐπὶ πραγματικῶν περιπτώσεων καὶ ὅτι μόνον εἰς ἐξαιρετικὰς περιπτώσεις ἀπαιτεῖται εἰδικὴ ἀνάλυσις πρὸς καθορισμὸν τῶν συμφερωτέρων διαρθρώσεων.

(Συνεχίζεται)