

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ

Υπό κ. ΑΝΔΡΕΟΥ Γ. ΠΑΠΑΝΔΡΕΟΥ

Ἡ θεωρία τῶν παιγνίων εἶναι σχετικῶς νέα. Ἡ παλαιότερα διατύπωσις ταύτης ἀποδίδεται γενικῶς εἰς τὸν Ε. Borel εἰς τὸ ἔργον του «Περὶ τῶν συστημάτων γραμμικῶν μορφῶν μετὰ συμμετρικῆς ὀριζούσης καὶ τῆς γενικῆς θεωρίας τοῦ παιγνίου» (1927), ἀλλ' ἡ παρούσα μορφή της ὀφείλεται πρωτίστως εἰς τὸ ἔργον τῶν Johann von Neumann καὶ Oscar Morgenstern «Ἡ θεωρία τῶν παιγνίων καὶ ἡ οἰκονομικὴ συμπεριφορά» (1944). Ὡς ὑποδεικνύει καὶ ὁ τίτλος τοῦ σημαντικοῦ τούτου βιβλίου, αἱ ἐφαρμογαὶ τῆς νεωστὶ ἀναπτυχθείσης θεωρίας ἐπέζητήθησαν ἐπὶ τοῦ πεδίου τῆς οἰκονομικῆς συμπεριφορᾶς. Οὐχ' ἤττον μέχρι σήμερον ἡ θεωρία αὕτη συνέβαλε μᾶλλον εἰς τὸ πεδίου τῆς Στατιστικῆς καὶ τὸ τῆς στρατιωτικῆς ἢ ἐπιχειρηματικῆς ἢ εἰς τὸ πεδίου τῆς Οἰκονομικῆς. Πορὰ τὸ γεγονός τοῦτο, ἐπιβάλλεται νὰ προσεγγίσωμεν τὴν Θεωρίαν τῶν παιγνίων ἐκ τῆς ἀπόψεώς της, ὡς προεκτάσεως τῆς οἰκονομικῆς Θεωρίας τῆς Ἐπιλογῆς (Theory of Choice).

Ἡ Θεωρία τῆς Ἐπιλογῆς ἢ (Θεωρία τῶν Ἀποφάσεων—Theory of Decision) ἔχει συγκροτηθῆ ἕκ τῆς προσπάθειας χαρακτηρισμοῦ τοῦ ἐλλόγου στοιχείου τῆς συμπεριφορᾶς, ἢ τοῦ ἀποσκοπεῖ εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς ἐλλόγου (ὀρθολογικῆς) ἐκλογῆς. Ὑπὸ συνθήκας βεβαιότητος (ἐκφρασις διὰ τῆς ὁποίας ὑποδηλοῦται, ὅτι εἰς ἐκάστην πρᾶξιν τοῦ λαμβάνοντος τὰς ἀποφάσεις ἀντιστοιχεῖ ἕκβασις προσδοκωμένη μετὰ βεβαιότητος, τ.ἔ. μετὰ πιθανότητος ἴσης πρὸς μίαν ἔλλογον ἐκλογὴν) εἶναι δυνατόν νὰ ἔχωμεν :

1. Ἐν πλήρως διατεταγμένον σύνολον διαζευκτικῶν δυνατοτήτων τῆς ἐκλογῆς, τοῦ ὁποίου ἡ κατάταξις καθορίζεται ὑπὸ τοῦ λαμβάνοντος τὴν ἀπόφασιν.
2. Ὡρισμένους περιορισμούς ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν διαζευκτικῶν δυνατοτήτων ἀπορρέοντας ἐκ τοῦ περιβάλλοντος, διὰ τῶν ὁποίων χαρακτηρίζεται τὸ ἐφικτὸν σύνολον ἐκλογῶν τοῦ λαμβάνοντος τὰς ἀποφάσεις.
3. Ἐν κριτήριον ἐκλογῆς καὶ διὰ τὸ κριτήριον τῆς ἀριστοποίησεως (Optimality). Συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον αὐτό, ὁ λαμβάνων τὴν ἀπόφασιν ἐκλέγει μετὰ τῶν εἰς τὴν διάθεσίν του εὑρισκομένων διαζευκτικῶν λύσεων, ἐκείνην ἣτις δὲν εἶναι οὐδεμίαν ἄλλης χειροτέρα.

Ἐπὶ τοῦ προκειμένου, ἀρκετὰ ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ διαπίστωσις, ὅτι, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ἐκπληρώσεως ὀρισμένων τεχνικῶν ὄρων, ἡ διάταξις τῶν προτιμήσεων τοῦ λαμβάνοντος τὰς ἀποφάσεις εἶναι δυνατόν νὰ παρίσταται δι' οἰασδήποτε ἀριθμητικῆς συναρτήσεως, ἣτις θὰ διειθρεῖ τὴν διάταξιν ταύτην. Ἡ ἐν λόγῳ ἀριθμητικὴ συνάρτησις καλεῖται «τακτικὴ χρησιμότης» (ordinal utility).

Τοιουτοτρόπως, ἡ ἐπίτευξις τοῦ ἀρίστου σημείου (the optimization, ἡ ἀριστοποίησις) προλαμβάνει τὴν μορφήν μεγιστοποίησεως τῆς τακτικῆς χρησιμότητος.

Ἐάν, ἀφ' ἑτέρου, δεχθῶμεν ὅτι εἰς ἐκάστην ἐκλογὴν τοῦ λαμβάνοντος τὰς ἀποφάσεις, ἀντιστοιχεῖ, ὄχι μία μοναδικὴ ἕκβασις, ἀλλὰ μᾶλλον μίαν κατανομὴ πιθανότητος ἐκβάσεων, τότε ἀντιμετωπίζομεν πλέον τὸ πρόβλημα τῆς διατυπώσεως «Θεωρίας Ἐπιλογῆς ὑπὸ συνθήκας Κινδύνου» (Theory of Choice under Risk). Ἐπὶ τοῦ προκειμένου, εἶναι δυνατόν νὰ καταδειχθῆ, ὅτι διὰ τῆς χρησιμοποίησεως μερικῶν πολὺ ἀπλῶν καὶ λογικῶν ὑποθέσεων (ὡς π.χ. ἡ πλήρης διάταξις τῶν διαζευκτικῶν δυνατοτήτων, ἢ συνέχεια ([continuity] κλπ.), εἶναι δυνατόν νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ λαμβάνων τὰς ἀποφάσεις δρᾷ ἐλλόγως ἐνώπιον τοῦ κινδύνου, ἐάν ἐκλέγῃ τὴν ἰδιαιτέραν ἐκείνην πορείαν δράσεως, ἢ ὁποία μεγιστοποιεῖ τὴν «προσδοκωμένην χρησιμότητα». Τὴν τελευταίαν ταύτην δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν, λαμβάνοντες τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν χρησιμοτήτων τῶν διαφορῶν δυνατῶν ἐκβάσεων καὶ σταθμίζοντες αὐτὰ πρὸς τὴν πιθανότητα.

Ἀμφότεραι αἱ προεκθεθεῖσαι θεωρίαι, τόσοσ ἡ «Θεωρία τῆς Ἐπιλογῆς ἐν Βεβαιότητι», ὅσον καὶ ἡ «Θεωρία τῆς Ἐπιλογῆς ἐν Κινδύνῳ», εἰδονται ἐπὶ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ὑπάρχει ἐν περιωρισμένον, ἀλλὰ δεδομένον περιβάλλον. Ὅθεν ὑποτίθεται, ὅτι ὁ λαμβάνων δὲν ἀσκέει καμμίαν ἐπίδρασιν ἐπὶ τοῦ περιβάλλοντός του, ἢ ὅτι, καθ' οἰανδήποτε περίπτωσιν, ὑποτίθεται ὡς μὴ λαμβάνων ὑπ' ὧσιν ἐπίδρασιν τινα, τὴν ὁποίαν θὰ ἦτο δυνατόν νὰ ἀσκήσῃ ἐπὶ τοῦ περιβάλλοντος. Κατ' ἀκολουθίαν, ἀμφότεραι αἱ θεωρίαι καθίστανται ἀνεφάρμοστοι διὰ μίαν εὐρείαν καὶ σπουδαίαν τάξιν καταστάσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἡ ἔκβασις τῆς ἐκλογῆς τοῦ λαμβάνοντος τὰς ἀποφάσεις ἐξαρτᾶται (συνεχῶς) ὄχι μόνον ἀπὸ τὴν ἴδιαν αὐτοῦ ἐκλογὴν, ἀλλ' ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν ἐτέρων λαμβάνων ἀποφάσεις, αἷτινες ἐπιδιώκουν ἴδιους ἑαυτῶν σκοποὺς. Τοιαῦται καταστάσεις καὶ συγκεκριμένως καταστάσεις, εἰς τὰς ὁποίας δύο ἢ περισσότεροι παῖκται ἐπιδιώκουν διακεκριμένους (πράγματι δὲ ἀλλήλοσυγκρουμένους) ἀντικειμενικοὺς σκοποὺς καὶ εἶναι ἱκανοὶ νὰ ἐπηρέασουν (ἀλλ' ὄχι καὶ νὰ προσδιορίσουν διὰ μόνης τῆς ἰδικῆς των δραστηριότητος) τὴν ἔκβασιν, δὲν εἶναι δυνατόν νὰ γίνων ἀντικείμενον χειρισμοῦ διὰ κλασσικῶν μεθόδων. Πρόκειται περὶ τυπικῶν «καταστάσεων Παιγνίων τῶν Αἰθουσῶν» (Parlor Game Situations) [κατὰ τὴν ἀντιδιαστολήν τοῦ von Neuman, «Zur Theorie der Gesellschaftspiele», *mathematische Annalen* 100 (1928), σελ. 295–320, «τ υ χ η ρ ἄ π α ἱ γ ν ι α» (π.χ. πόκερ) καὶ εἰς «σ τ ρ α τ η γ ι κ ἄ π α ἱ γ ν ι α» (π.χ. ρουλέττα–ἦτις, ὡς γνωστόν, παίζεται εἰς μεγάλας αἰθούσας, parlors)]. Τὰ παίγνια ταῦτα ἀποτελοῦν τὸ κύριον ἀντικείμενον μελέτης ἐντὸς τοῦ πλαισίου τῆς Θεωρίας τῶν Παιγνίων.

Τὰ θεμελιώδη ἐννοιολογικὰ συστατικὰ στοιχεῖα τῆς Θεωρίας τῶν Παιγνίων ἔχουν ὡς ἔπεται: Π α ἱ γ ν ι ο ν καλεῖται σύνολον κανόνων, συμφώνως πρὸς τοὺς ὁποίους οἱ παῖκται ἔνεργοῦν κ ι ν ἡ σ ε ι ς.

Μία ἐκάστη συγκεκριμένη αὐτοτελὴς φάσις (a particular instance) ἐνὸς παιγνίου (game) καλεῖται «π α ρ τ ῖ σ η» (ply, παρτίδα) καὶ ἐν ἑκάστων βῆμα (γεγμ. : Zug) μιᾶς κινήσεως καλεῖται ἐ κ λ ο γ ῆ. Ἡ ἀκολουθία τῶν κινήσεων (διὰ τῆς ὁποίας ἐξειδικεύεται πλήρως ἡ κίνησις, πού πρέπει νὰ γίνῃ εἰς ἐκάστην καὶ εἰς πᾶσαν δυνατὴν κατάστασιν) καλεῖται σ τ ρ α τ η γ ι κ ῆ (βλ. λέξιν).

Ἀφ' ἧς ἅπαντες οἱ παῖκται ἐκλέξουν τὴν στρατηγικὴν του ἑκάστος, ἡ ἔκβασις—καὶ ἡ πληρωμὴ τῶν στοιχημάτων—τοῦ παιγνίου ἔχει ἤδη προσδιορισθῆ πλήρως. Κατὰ συνέπειαν, τὸ θεμελιώδες πρόβλημα συνίσταται εἰς τὴν ἀνῶδειξιν κριτηρίω διὰ τὴν παρ' ἐκάστου παίκτου ἐπιλογὴν τῆς βελτίστης στρατηγικῆς.

Ἡ Θεωρία τῶν Παιγνίων ὑπὸ τὴν παροῦσαν μορφήν της ἔδωκεν ἱκανοποιητικὴν λύσιν εἰς τὰξιν παιγνίων, καλουμένων «παίγνια δύο προσώπων καὶ σταθεροῦ ποσοῦ (ἀθροίσματος)». Ὡς καὶ ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ ὀνόματος ἐμφαίνεται, εἰς τὰ ἐν λόγῳ παίγνια λαμβάνουν μέρος δύο μόνον παῖκται. Ἐτι πλέον, ἡ πληρωμὴ τοῦ στοιχήματος τοῦ ἐνὸς παίκτου ἀποτελεῖ τὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ μένει, ἐὰν ἀπὸ σταθερὰν τινὰ ἀφαιρεθῆ τὸ στοιχῆμα (ἢ πληρωμὴ) τοῦ ἄλλου παίκτου. (Ἐνταῦθα, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς εἰδικὴν τὴν περίπτωσιν τοῦ «παιγνίου μηδενικοῦ ἀθροίσματος» [Zero Sum Game], καθ' ὃ τὰ κέρδη τοῦ ἐνὸς παίκτου ἰσοῦνται μὲ τὰς ἀπωλείας τοῦ ἐτέρου).

Εἰς τὰ παίγνια δύο προσώπων καὶ σταθεροῦ ἀθροίσματος, ἡ βελτίστη στρατηγικὴ διὰ τὸν πρῶτον παίκτην (τὸν ὁποῖον ἀποκαλοῦμεν «μεγιστοποιοῦντα» παίκτην) ταυτίζεται μὲ τὴν ἐγγυωμένην αὐτῷ τὸ μέγιστον μεταξύ τῶν ἐλαχίστων δυνατῶν κερδῶν, ἐξ οὗ καὶ ὀνομάζεται «μεγιστο-ἐλαχίστη στρατηγικὴ» (max - min - strategy). Ἀντιστρόφως, διὰ τὸν δεῦτερον παίκτην (τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν «ἐλαχιστοποιοῦντα» παίκτην), βελτίστη στρατηγικὴ εἶναι ἡ ἐξασφαλίζουσα αὐτῷ τὸ ἐλάχιστον μεταξύ τῶν μεγίστων δυνατῶν ἀπωλειῶν (ζημιῶν) τούτου δὲ ἔνεκεν ἀποκαλεῖται «ἐλαχιστο-μεγίστη» στρατηγικὴ (min - max - strategy). Εἶναι προφανές, ὅτι ἡ μεγιστο-ἐλαχίστη-στρατηγικὴ ἔγκριται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τοῦ μεγίστου τῆς σειρᾶς τῶν ἐλαχίστων, ἐνῶ ἡ ἐλαχιστο-μεγίστη στρατηγικὴ συνίσταται εἰς τὴν ἐπιλογὴν τοῦ ἐλαχίστου ἐκ τῆς στήλης τῶν μεγίστων εἰς τὴν μήτραν τῶν πληρωμῶν τῶν στοιχημάτων, τῆς ὁποίας τὸ τυπικὸν στοιχεῖον: a_{ij} ἀποτελεῖ ἡ πληρωμὴ τοῦ στοιχήματος τοῦ

πρώτου παίκτου, ήτις αντιστοιχεί εις την i -στήν στρατηγικήν του πρώτου παίκτου και εις την j -στήν στρατηγικήν του δευτέρου παίκτου. Έν τούτοις, τὸ στρατηγικὸν τοῦτο ζεύγος ἀποτελεῖ λύσιν, μόνον ἂν τὸ μέγιστον τῆς σειρᾶς τῶν ἐλαχίστων ἰσοῦται μὲ τὸ ἐλάχιστον τῆς στήλης τῶν μεγίστων. Τοῦτο συμβαίνει, μόνον ὅταν ἡ μήτρα τῶν πληρωμῶν τῶν στοιχημάτων ἐμφανίζῃ ἓν ἀψιδοειδὲς σημεῖον (saddle point=σελλοειδὲς σημεῖον). Ἐὰν δὲν ὑπάρχει ἀψιδοειδὲς σημεῖον, εἶναι δυνατὸν νὰ καταδειχθῇ, ὅτι θὰ ὑφίσταται «βέλτιστον» (optimum) μικτῆς στρατηγικῆς διὰ τοὺς δύο ἀντιπάλους (ἡ λέξις «μικτῆ» σημαίνει ἑνταῦθα τὴν εἰσαγωγὴν μηχανισμοῦ τυχερᾶς πιθανότητος εἰς τὴν ἐπιλογὴν τῆς στρατηγικῆς), ἡ ὁποία δίδει λύσιν εἰς τὸ παίγνιον.

Τὰ παίγνια πλειόνων προσώπων καὶ (ἢ) μὴ-σταθεροῦ ἀθροίσματος παρουσιάζουν, οὐχ ἥττον, πολὺ μεγαλύτερον ἐνδιαφέρον, διὰ τὸν λόγον, ὅτι δημιουργοῦν τὴν δυνατότητα συμπτᾶξεων (συμπαιγνίας) μεταξύ παικτῶν, ὁπότε καὶ τὰ συνδεδεασμένα κέρδη θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνῆρθοῦν.

Διὰ τὴν σπουδαίαν ταύτην τάξιν παιγνίων, ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ τυπικὴ διὰ τὰς οἰκονομικὰς καταστάσεις, ἡ Θεωρία τῶν Παιγνίων δὲν παρέσχε μέχρι τοῦδε ἰκανοποιητικὰς λύσεις. Ἐπομένως, ἡ ὀριστικὴ συμβολὴ ταύτης εἰς τὴν Οἰκονομικὴν ἐξακολουθεῖ νὰ τελεῖ ἓν ἀμφιβόλω.