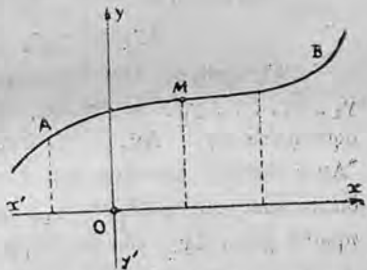
Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΝ

ΥΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Κ. ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

Δύο ποσότητες ἢ μεγέθη, ἔστωσαν x, y, σχετίζονται μεταξύ των ἐνίοτε κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς μεταβολὴν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν νὰ ἀντιστοιχῇ μεταβολὴ καὶ τοῦ ἄλλου. Ἐὰν εἶνε καθωρισμένος ὁ τρόπος τῆς ἐξαρτήσεως αὐτῶν καὶ δοθῇ τιμή τις εἰς τὸ ἓν ἐκ τούτων π.χ. εἰς τὸ x, ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστοιχον της τιμὴν τοῦ y. Ἐνίοτε, ὅμως, ὁ τρόπος τῆς ἐξαρτήσεως δὲν εἶνε πλήρως καθωρισμένος καὶ ἰδίᾳ ὅταν πρόκειται περὶ ζητήματος στατιστικῆς. Ἐὰν π.χ. πρόκειται περὶ τῶν ἐσόδων μιᾶς κοινότητος, ἢ ἑνὸς κράτους, ἢ μιᾶς ἐπιχειρήσεως κατὰ διάφορα χρονικὰ διαστήματα, π.χ. κατὰ τὰ διάφορα ἔτη, δὲν γνωρίζομεν τὸν τρόπον τῆς ἐξαρτήσεως τῶν δύο ποσῶν, χρόνου (εἰς ἔτη π.χ.) καὶ εἰσοδήματος (εἰς χρῆμα π.χ.), ἐκ παρατηρήσεων δ' ἔχομεν ἀντιστοίχους τιμὰς αὐτῶν. Π.χ. ἔστω ὅτι κατὰ τὰ ἔτη 1948, 1949, 1950, 1951, 1952 ἔχομεν ἀντίστοιχα εἰσοδήματα παριστάμενα μὲ E_{48}, E_{49}, E_{50}, E_{51}, E_{52}, δισεκατομύρια δραχμῶν. Καθ' ὅμοιον τρόπον, ἀπὸ μίαν σειρὰν μετρήσεων π.χ. προκύπτουν δύο σειραὶ ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία παριστάνει τὰς τιμὰς τοῦ x καὶ ἡ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους τοῦ y. Ἐπιδιώκομεν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δύο ἐν λόγῳ σειρῶν τιμῶν τοῦ x καὶ y νὰ εὕρωμεν τὸν τρόπον τῆς ἐξαρτήσεως αὐτῶν, ἤτοι μίαν ἐξίσωσιν μεταξὺ τῶν x καὶ y, π.χ. τὴν $y=\varphi(x)$, τοιαύτην ὥστε εἰς διδομένην τιμὴν τοῦ x νὰ ὑπολογίζεται ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ y, ἂν δὲ θεωρηθοῦν τὰ x, y ὡς συντεταγμέναι σημείου τοῦ ἐπιπέδου xoy ὡς πρὸς ἄξονας (ὀρθογωνίους) x'Ox, y'Oy, νὰ κατασκευάσωμεν κατὰ τὸ δυνατόν, τὴν ὑπὸ τῆς $y=\varphi(x)$ παριστανομένην καμπύλην, ἔστω AMB τοῦ ἔναντι σχήματος.



Ἡ σημασία τῆς εὑρέσεως τῆς $y=\varphi(x)$ καὶ τῆς κατασκευῆς τῆς παραστατικῆς καμπύλης AMB τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι, θὰ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y δι' οἱανδήποτε τιμὴν (πραγματικὴν) τοῦ x, ἐπὶ πλέον δὲ θὰ ἔχωμεν τὴν εἰκόνα τῆς πορείας τῆς τιμῆς τοῦ y. Οὕτω π. χ. ἂν ἔχωμεν τὴν ἐν λόγῳ ἐξίσωσιν $y=\varphi(x)$ καὶ τὴν παριστάνουσαν αὐτὴν καμπύλην διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος τοῦ χρόνου καὶ τῶν ἐσόδων κοινότητος ἢ κράτους π.χ., θὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ εἰσόδημα εἰς οἱανδήποτε ἐποχήν, π.χ. κατὰ τὰ ἔτη 1953, 1954,..., 1960, καθὼς καὶ κατὰ παρελθόντα ἔτη 1947, 1946, 1945 κλπ., διότι αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y θὰ δίδωνται ὑπὸ τοῦ $\varphi(1953)$, $\varphi(1954)$, . . . , $\varphi(1960)$ καὶ τῶν $\varphi(1947)$, $\varphi(1946)$, $\varphi(1945)$ κλπ. καθὼς ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὰς τεταγμένας τῶν σημείων τῆς καμπύλης AMB, τὰ ὁποῖα ἔχουν τετμημένας ἀντιστοίχους εἰς τὰ ἔτη 1953, 1964, . . . , 1960 κλπ.

Ἐνίοτε, ὅταν ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸν τρόπον τῆς ἀμοιβαίας ἐξαρτήσεως δύο μεταβλητῶν π.χ. τῶν x, y, δεχόμεθα ὅτι μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχει σχέσις τῆς μορφῆς π.χ.

$$(1) \qquad y = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \varphi_i(x),$$

ὅπου τὰ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . . , $\varphi_\nu(x)$ εἶνε γνωσταὶ συναρτήσεις τῆς x, τὰ δὲ α_1, α_2, ... α_ν συντελεσταὶ σταθεροὶ μὲν ἀλλ' ***ἄγνωστοι*** καὶ προσδιοριστέοι, ἀνεξάρτητοι δ' ἐν γένει μεταξύ των, καὶ ὁ προσδιορισμὸς αὐτῶν ἐξαρτᾶται συνήθως ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα παρατηρήσεων, πειραμάτων, μετρήσεων κλπ.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν α_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$) ἐφαρμόζομεν τὴν καλουμένην ***μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων***, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐκτίθεται κατωτέρω ἐν συντομίᾳ.

Ἂν αἱ τιμαὶ τῆς x, αἱ x_1, x_2, . . . , x_μ, ($\mu > \nu$) εἶνε ***ἀκριβεῖς***, αἱ δ' ἀντίστοιχοι τούτων τιμαὶ τῆς y, αἱ y_1, y_2, . . . , y_μ, εἶναι ἐν γένει ***μὴ ἀκριβεῖς***, παριστάνομεν τὰ σφάλματα διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τῆς y, ἢ τὰς διαφορὰς μεταξὺ τῶν ἀληθῶν ἢ ἀκριβῶν τιμῶν τοῦ y καὶ τῶν ἀντιστοίχων τῶν y_1, y_2, . . , y_μ μὲ Δy_1, Δy_2, . . . , Δy_μ. Θέτομεν δηλαδὴ

$$y_1 + \Delta y_1 = \alpha_1\varphi_1(x_1) + \alpha_2\varphi_2(x_1) + \ldots + \alpha_\nu \varphi_\nu(x_1)$$
$$y_2 + \Delta y_2 = \alpha_1\varphi_1(x_2) + \alpha_2\varphi_2(x_2) + \ldots + \alpha_\nu \varphi_\nu(x_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_\mu + \Delta y_\mu = \alpha_1\varphi_1(x_\mu) + \alpha_2\varphi_2(x_\mu) + \ldots + \alpha_\nu \varphi_\nu(x_\mu)$$

καὶ γενικῶς

$$y_\kappa + \Delta y_\kappa = \alpha_1\varphi_1(x_\kappa) + \alpha_2\varphi_2(x_\kappa) + \ldots + \alpha_\nu \varphi_\nu(x_\kappa)$$

Οὕτω ἔχομεν

$$\Delta y_\kappa = -y_\kappa + \alpha_1\varphi_1(x_\kappa) + \alpha_2\varphi_2(y_\kappa) + \ldots + \alpha_\nu \varphi_\nu(x_\kappa)$$

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εἶνε ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν τιμῶν y_1, y_2, . . . y_μ, αἱ ὁποῖαι, ὡς ἀνωτέρω ἀνεγράφη, δὲν θεωροῦνται ἀκριβεῖς. Τὰ σφάλματα Δy_1, Δy_2, . . . , Δy_μ εἶνε ἄγνωστα, ἀλλ' ἐν γένει μικραὶ ποσότητες. Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εἶναι ν καὶ ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν α_1, α_2, . . . , α_ν, ἠμποροῦμεν νὰ παραλείψωμεν τὰ πρῶτα μέλη Δy_κ τῶν ἐν λόγῳ ἐξισώσεων, λύοντες δ' αὐτὰς ἀκολούθως ὡς πρὸς α_1, α_2 . . . , α_ν, εὑρίσκομεν τιμὰς τούτων, αἱ ὁποῖαι δὲν θὰ εἶνε ἀκριβεῖς ἀλλὰ θὰ προσεγγίζουν πρὸς αὐτάς.

Εἶνε ὅμως φανερόν, ὅτι θὰ προσεγγίσωμεν περισσότερον τὰς ἀκριβεῖς τιμὰς τῶν α_1, α_2, . . . , α_ν, ἂν ἔχωμεν τιμὰς τῆς y περισσοτέρας τοῦ ν, ἀλλὰ διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τίθεται τὸ ἐρώτημα, τοῦ πῶς πρέπει νὰ συνδυασθοῦν αἱ οὕτω προκύπτουσαι ὡς ἄνω ἐξισώσεις, διὰ νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ τῶν ἀγνώστων συντελεστῶν κατὰ τὸ δυνατὸν ἀκριβεῖς. Τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ καθορίζει ὁ Λογισμὸς τῶν πιθανοτήτων διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, στηρίζεται δὲ ἐπὶ τῆς ἑξῆς προτάσεως:

«Ἐξ ὅλων τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων συντελεστῶν α_1, α_2, . . . , α_ν, ***θεωροῦνται ἐκεῖναι ὡς πιθανώτατα ἀκριβεῖς, διὰ τὰς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων*** $\sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2$ ***γίνεται ἐλάχιστον».***

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων ἢ τῶν διαφορῶν Δy_1, Δy_2, ..., Δy_μ εἶνε $(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \ldots + (\Delta y_\mu)^2 = \sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2$.

Ἐπιδιώκομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν α_1, α_2, ..., α_ν εἰς τρόπον ὥστε τὸ $\sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2$ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον, θεωρουμένων μεταβλητῶν τῶν α_1 α_2,..α_ν.

Διὰ νὰ γίνῃ τὸ $\sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2$ ἐλάχιστον, ὅπου μεταβληταὶ θεωροῦνται τὰ α_1, α_2, ..., α_ν, πρέπει αἱ (μερικαὶ) παράγωγοι τοῦ ἐν λόγῳ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων ὡς πρὸς α_1, α_2, ..., α_ν νὰ εἶναι ἴσαι μὲ μηδέν, ἤτοι πρέπει νὰ ἔχωμεν :

$$\frac{d \sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2}{d \alpha_i} = 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ πληροῦνται καὶ ἄλλαι (συμπληρωματικαὶ) συνθῆκαι. Κατὰ ταῦτα πρέπει νὰ ἔχωμεν διὰ τὴν μερικὴν παράγωγον ὡς πρὸς α_1

$$\begin{aligned} &[-y_1+\alpha_1\phi_1(x_1)+\alpha_2\phi_2(x_1)+\ldots+\alpha_\nu\phi_\nu(x_1)]\phi_1(x_1)] \\ &+[-y_2+\alpha_1\phi_1(x_2)+\ldots+\alpha_\nu\phi_\nu(x_2)]\phi_1(x_2) \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+[-y_\mu+\alpha_1\phi_1(x_\mu)+\ldots+\alpha_\nu\phi_\nu(x_\mu)]\phi_1(x_\mu)] = 0, \end{aligned}$$

$$\text{ἢ } [-y_1+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_1)]\,\phi_1(x_1)+[-y_2+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_2)]\,\phi_1(x_2)+\ldots+$$
$$+[-y_\mu+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_\mu)]\,\phi_1(x_\mu)=0.$$

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν $\nu-1$ ἀκόμη ἐξισώσεις διὰ τὰς μερικὰς παραγώγους ὡς πρὸς α_2, α_3, ..., α_ν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν σφαλμάτων. Οὕτω ἔχομεν τὰς κατωτέρω ν ἐξισώσεις.

$$\left(-y_1+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_1)\right)\phi_1(x_1)+\left(-y_2+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_2)\right)\phi_1(x_2)+\ldots+$$
$$+\left(-y_\mu+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_\mu)\right)\phi_1(x_\mu)=0.$$

$$\left(-y_1+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_1)\right)\phi_2(x_1)+\left(-y_2+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_2)\right)\phi_2(x_2)+\ldots+$$
$$+\left(-y_\mu+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_\mu)\right)\phi_2(x_\mu)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(-y_1+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_1)\right)\phi_\nu(x_1)+\left(-y_2+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_2)\right)\phi_\nu(x_2)+\ldots+$$
$$+\left(-y_\mu+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\phi_i(x_\mu)\right)\phi_\nu(x_\mu)=0.$$

Ἐκ τῶν ν ὡς ἀνωτέρω ἐξισώσεων προσδιορίζονται τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καὶ μὲ τὰς οὕτω εὑρισκομένας τιμάς των ἀντικαθιστῶμεν αὐτὰ εἰς τὴν

$$y = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \ldots + \alpha_\nu \varphi_\nu(x),$$

ὑποθέτοντες ὅτι πληροῦνται καὶ ἄλλαι συμπληρωματικαὶ συνθῆκαι, περὶ τῶν ὁποίων ἔγινε λόγος ἀνωτέρω, τὰς ὁποίας δὲν ἀνεφέραμεν ἐπακριβῶς.

Περίπτωσις δύο μεταβλητῶν ἀνεξαρτήτων μεταξύ των (προσδιοριστέων) α_1, α_2. Ἂν $f(\alpha_1, \alpha_2)$ εἶνε συνάρτησις τῶν α_1, α_2 (συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος ὡς πρός αὐτάς), ἵνα γίνη ἐλαχίστη ἡ τιμὴ αὐτῆς διὰ ζητουμένας τιμὰς τῶν α_1, α_2, παρατηροῦμεν ὅτι ἂν αἱ ζητούμεναι ἀκριβεῖς τιμαὶ τῶν α_1, α_2 εἶνε αἱ $\alpha_1 + \Delta\alpha_1$, $\alpha_2 + \Delta\alpha_2$ τότε ἡ διαφορὰ $f(\alpha_{11} + \Delta\alpha_1, \alpha_{22} + \Delta\alpha_2) - f(\alpha_{11}, \alpha_{22})$ θὰ εἶνε θετικὴ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ τὰς περιεχομένας μεταξὺ τῶν $-|\varepsilon|$ καὶ $|\varepsilon|$ ὅπου τὸ ε ὑποτίθεται ἀρκούντως (κατὰ τὸ δυνατὸν) μικρὰ ποσότης, ἤτοι ἂν εἶνε: $\quad -|\varepsilon| < \Delta\alpha_1, \ \Delta\alpha_2 < |\varepsilon|$

ἔχομεν ὡς ἀναγκαίας συνθήκας τὰς

$$(1) \qquad f_{\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) = 0, \qquad f_{\alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

καὶ ἀκόμη τὰς

$$(2) \qquad f_{\alpha_1^2} > 0 \ , \qquad f_{\alpha_1^2} f_{\alpha_2^2} - f^2_{\alpha_1 \alpha_2} > 0$$

ὅπου οἱ δεῖκται παριστάνουν μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως ἢ δευτέρας ὡς πρὸς τὰς ὑπ' αὐτῶν παριστανομένας μεταβλητάς.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) προσδιορίζονται αἱ τιμαὶ τῶν α_1, α_2 αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς συνθήκας (2)

Ἐφαρμογαί. 1) Διὰ τὸν καθορισμὸν σταθερᾶς β π.χ. ὅταν εἶναι $y = \beta$ (ἤτοι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x), ἔχομεν :

$$\sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2 = (-y_1+\beta)^2 + (-y_2+\beta)^2 + \ldots + (-y_\mu+\beta)^2$$

$$\frac{d \sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2}{d\beta} = \mu\beta - (y_1+y_2+\ldots+y_\mu) = 0,$$

$$\beta = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_\mu}{\mu}$$ (ἤτοι ἡ μέση τιμὴ τῶν $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$).

2) Εὕρεσις τῆς συναρτήσεως $y = \alpha_1 x + \alpha_2$.

Ἔχομεν $$\sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2 = (-y_1+\alpha_1 x_1+\alpha_2)^2 + \ldots + (-y_\mu+\alpha_1 x_\mu+\alpha_2)^2$$

$$\frac{d \sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2}{d\alpha_1} = (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\mu)\alpha_1 + (x_1+x_2 l - 4x_\mu)\alpha_2 - (x_1 y_1+\ldots+x_\mu y_\mu) = 0$$

$$\frac{d \sum_{\kappa=1}^{\mu} (\Delta y_\kappa)^2}{d\alpha_2} = (x_1+x_2+\ldots+x_\mu)\alpha_1 + \mu\alpha_2 - (y_1+y_2+\ldots+y_\mu) = 0$$

$$\text{ἢ} \quad (1) \quad \begin{cases} \alpha_1 \sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa^2 + \alpha_2 \sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa\, y_\kappa \\ \alpha_1 \sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa + \mu\alpha_2 = \sum_{\kappa=1}^{\mu} y_\kappa , \end{cases}$$

καὶ

$$\alpha_1 = \left[\left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa\right)\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} y_\kappa\right) - \mu \sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa\, y_\kappa\right] : \left[\left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa\right)^2 - \mu \sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa^2\right]$$

$$\alpha_2 = \left[\left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa\right)\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa\, y_\kappa\right) - \left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa^2\right)\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} y_\kappa\right)\right] : \left[\left(\sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa\right)^2 - \sum_{\kappa=1}^{\mu} x_\kappa^2\right]$$

Αἱ (1) καλοῦνται συνήθως (εἰς τὴν στατιστικὴν) ***κανονικαὶ ἐξισώσεις*** *.

3) Ἂν τιμαὶ $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Ἔχομεν κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτήν:

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_\mu - x_{\mu-1} = \lambda \quad \text{π.χ., ὅτε}$$
$$x_\sigma = x_1 + (\sigma-1)\,.\,\lambda , \qquad (\sigma = 1, 2 \ldots, \mu)$$
$$y_\sigma = (x_1 - \lambda + \sigma\,.\,\lambda)\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda\sigma\alpha_1 + (\alpha_1 x_1 - \lambda\alpha_1 + \alpha_2).$$

Ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν α_1, α_2.

4) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν 2 διακρίνομεν τὴν περίπτωσιν $y = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$ (περίπτωσις παραβολῆς β' βαθμοῦ) κλπ.

5) Ἀξιοσημείωτος εἶνε ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν

$$y = \alpha_1 x^{\alpha_2} , \qquad \alpha_2 \lessgtr 0 ,$$

εἰς τὴν ὁποίαν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν α_1, α_2 ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἰς τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἀφοῦ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους (κοινοὺς ἢ νεπερείους) τῶν ἴσων μελῶν, ὅτε ἔχομεν:

$$\text{λογ}\, y = \text{λογ}\, \alpha_1 + \alpha_2\, \text{λογ}\, x.$$

6) Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς εὑρέσεως τοῦ τρόπου κατανομῆς εἰσοδήματος ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν **

$$y = \alpha_1 x^{-\alpha_2} , \qquad (\alpha_2 > 0),$$

ὅπου x παριστάνει τὸ εἰσόδημα καὶ y τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀτόμων τῶν ἐχόντων αὐτό. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν α_1, α_2, ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, ἀκολούθως δὲ γίνεται σύγκρισις τῆς κατανομῆς τοῦ εἰσοδήματος α') κατὰ διαφόρους ἐποχὰς εἰς τὸν αὐτὸν τόπον (χώραν)· β') εἰς διαφόρους τόπους κατὰ τὴν αὐτὴν χρονικὴν ἐποχὴν ἢ περίοδον· γ') εἰς διαφόρους τόπους καὶ κατὰ διαφόρους ἐποχάς.

7) Διὰ τὴν περίπτωσιν $\quad y = \alpha_1 x^{\alpha_2} + \alpha_3$

ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων παρουσιάζει αἰσθητὴν δυσκολίαν καὶ διὰ τοῦτο καταφεύγουν συνήθως εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τεχνασμάτων.

---

* (Βλ. ἀριθμητικὰς ἐφαρμογὰς τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εἰς τὴν Στατιστικήν, Σ. Μαργαρίτη, 1952, σελ. 207 κ.ἑ).

** (Κατὰ V. Pareto : La courbe de Revenues : Cours d' Economie Politique, 2 Lausane, 1897).