ΜΑΚΡΟ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ


Ράγκναρ Φρίς

Ὑπὸ RAGNAR FRISCH
αθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Ὄσλο

ατὰ μετάφρασιν ΑΛΕΞ. Θ. ΣΤΑΘΗ

ὸς προγραμματισμὸς συνδέεται πρὸς τὴν οἰκο- ήμην

υτικωτέρων πλευρῶν τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης συνιστᾷ ν πνευματικῶν λειτουργιῶν, αἵτινες συμμετέχουν εἰς τὴν ὁ ἓν ἄκρον τῆς περιοχῆς συναντᾶται τὸ ἐπίμοχθον ἔργον των, εἰς τὸ μέσον εὐρεῖα φιλοσοφικὴ σκέψις καὶ εἰς τὸ αθηματικὸς λογισμός, ὅστις καθίσταται ἀπαραίτητος τασθοῦν ταυτοχρόνως πολλαπλᾶ λογικὰ στοιχεῖα.

παράδειγμα δύναται νὰ ληφθῇ ἡ ἐξέλιξις τῆς σπουδῆς, αντικοῦ πεδίου τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης. Πρὸ μιᾶς ἢ δύο γενεῶν ἦτο σύνηθες νὰ θεωρῆται ἡ νομισματικὴ θεωρία ὡς ἓν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον στεγανὸν διαμέρισμα κεχωρισμένον τῆς γενικῆς οἰκονομικῆς θεωρίας (τῆς ἀσχολουμένης πέριξ τῆς ἀναλύσεως τῶν σχετικῶν τιμῶν ὑπὸ εὐρυτάτην ἔννοιαν). Εὐλαβικῶς δὲ ἐτοποθετεῖτο ἔτι περισσότερον κεχωρισμένως τῶν ἀρχῶν καὶ τῶν μεθόδων τῶν δημοσίων οἰκονομικῶν. Ἐθεωρεῖτο ὡς λίαν παρακεκινδυνευμένον ν' ἀφεθῇ ὁ Ὑπουργὸς τῶν Οἰκονομικῶν νὰ συνειδητοποιήσῃ τὰς τεραστίας δυνατότητας αἵτινες θὰ διηνοίγοντο εἰς αὐτὸν ἐὰν ἐπεξέτεινε τὴν δραστηριότητά του εἰς τὸ νομισματικὸν πεδίον καὶ ἤρχιζε νὰ ἐξετάζῃ τὸ περισσότερον περιεκτικὸν πρόβλημα: τῆς ταυτοχρόνου κατευθύνσεως ὁλοκλήρου τῆς οἰκονομίας ἢ τουλάχιστον ἑνὸς μεγάλου μέρους αὐτῆς.

Εἰς τὴν ὁμάδα τῶν οἰκονομολόγων, οἵτινες ἐνεκαινίασαν νέας μεθόδους ἐπὶ τῶν ζητημάτων τούτων συγκαταλέγεται καὶ ὁ Καθηγητὴς Erik Lindahl, ὁ ὁποῖος πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν (καθὼς ἐπίσης καὶ δι' ἄλλους) ἐτήρησε τὴν παράδοσιν ἀπὸ τὸν Knut Wicksell. Εἰς τὰς περιφήμους ἐργασίας του «Penning politikens mal» τοῦ 1924 καὶ «Penning politikens medel» τοῦ 1929 ὁ Lindahl ἀνέλαβε μίαν συστηματικὴν ἔρευναν ἐπὶ τοῦ κατὰ ποῖον τρόπον ὁ νομισματικὸς τομεὺς δύναται νὰ ἐπενεργήσῃ ἐπὶ τῆς γενικῆς οἰκονομικῆς θεωρίας καὶ πῶς ἀμφότερα τὰ ὄργανα δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν πρὸς ἐξέτασιν τῆς καθοδηγήσεως τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης κατὰ τρόπον ***ἰσοζυγισμένον.***

Ἐν συνεπείᾳ, προωθήθη ἁλματωδῶς ἡ ἐξέλιξις πρὸς μίαν γενικὴν θεωρίαν καὶ μίαν γενικὴν διατύπωσιν τῶν στόχων τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς. Τελευταία φάσις τῆς ἀναπτύξεως αὐτῆς εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ μαθηματικοῦ ὀργάνου, γνωστοῦ ὡς τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὴν οἰκονομικὴν πολιτικήν. Τὸ θέμα ἀκριβῶς αὐτὸ πραγματεύεται ἡ παροῦσα ἐργασία.

Ἡ διατύπωσις τοῦ προβλήματος τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς εἰς ὅρους τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἀρκετὰ ἁπλῆ. Πράγματι δὲν περιλαμβάνει τίποτε περισσότερον ἀπὸ τὴν στοιχειώδη γυμνασιακὴν ἄλγεβραν. Ἡ λύσις ὅμως δὲν εἶναι τόσον ἁπλῆ. Ἐπειδὴ δὲ θ' ἀσχοληθῶμεν ἐπίσης καὶ μὲ μεθόδους λύσεων κατέστη ἀναπόφευκτος μία περισσότερον τεχνικὴ διαπραγμάτευσις τοῦ θέματος εἰς τὸ τελευταῖον μέρος τῆς μελέτης.

Ἡ μαθηματικὴ οὐσία τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ συνίσταται εἰς τὴν θεώρησιν ἑνὸς ἀριθμοῦ μεταβλητῶν, αἵτινες ὑπόκεινται εἰς τὴν συνθήκην νὰ εἶναι *μὴ ἀρνητικαὶ* (non negative $\geqq 0$), ἐπὶ πλέον νὰ εἶναι τοιαῦται ὥστε ὡρισμέναι γραμμικαὶ *συναρτήσεις* αὐτῶν νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικαί, τελικῶς δὲ νὰ πληροῦνται ὡρισμέναι γραμμικαὶ *ἐξισώσεις* μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν. Ἡ σειρὰ τῶν τιμῶν, αἵτινες πληροῦν τὰς συνθήκας ταύτας, καλεῖται *παραδεκτὴ περιοχὴ* (admissible region). Λεπτομερεστέρα περιγραφὴ τῆς ἐννοίας αὐτῆς δίδεται εἰς τὸ Κεφάλαιον 2.

Πολλὰ παραδείγματα ἐκ τοῦ μακρο-οἰκονομικοῦ τομέως ἔρχονται ἀμέσως εἰς τὸν νοῦν. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν αἱ μεταβληταὶ εἶναι ποσότητες παραχθεῖσαι εἰς ἀριθμὸν παραγωγικῶν τομέων, εἴτε ποσότητες καταναλωθεῖσαι εἰς ἀριθμὸν ὡρισμένων καταναλωτικῶν ὁμάδων, εἴτε ποσότητες εἰσαχθεῖσαι πρὸς χρῆσιν ὑπὸ τῶν παραγωγικῶν τομέων ἢ τῶν καταναλωτικῶν ὁμάδων, εἴτε ποσότητες ἐργασίας ἀπησχολημένης εἰς τοὺς διαφόρους παραγωγικοὺς τομεῖς κ.ο.κ. Εἰς ἕνα συγκεκριμένον πρόβλημα τὰ μεγέθη ταῦτα θὰ ὑπόκεινται κατὰ κανόνα εἰς τὴν συνθήκην νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικά. Ὑπὸ ἁπλουστευμένας δὲ προϋποθέσεις θὰ συνδέωνται δι' ἑνὸς μεγάλου ἀριθμοῦ γραμμικῶν ἐξισώσεων, λ.χ. ἐξισώσεων προκυψασῶν ἐκ μιᾶς διαβιομηχανικῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν-ἐκροῶν ἢ ἐξ ἐρεύνης τῶν ἐλαστικοτήτων τοῦ Engel εἰς τὰς καταναλωτικὰς ὁμάδας ἢ ἐξ ἐρεύνης ἐπὶ τοῦ κατὰ πόσον αἱ εἰσαγωγαὶ καὶ ἡ ἐργασία ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἐπιπέδου δραστηριότητος τῶν διαφόρων παραγωγικῶν τομέων.

Τοῦτο ὅμως δὲν εἶναι τὸ ὅλον θέμα. Πολλάκις θὰ ὑπάρχῃ μία *γραμμικὴ συνάρτησις* τῶν μεταβλητῶν ἢ μερικῶν ἐκ τῶν μεταβλητῶν, αἵτινες, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ συγκεκριμένου προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικαί. Θὰ ὑπάρχουν δὲ ἀρκεταὶ παρόμοιαι συναρτήσεις, αἵτινες πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικαί. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν ἀπαιτεῖται ὅπως παραχθοῦν ὡρισμέναι ποσότητες πρὸς κατανάλωσιν ἢ πρὸς ἐπένδυσιν, θὰ εἶναι δυνατόν, διὰ τῆς κλασσικῆς μεθόδου τῆς ἀναλύσεως εἰσροῶν-ἐκροῶν, νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὕψος τοῦ συνολικοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς ἑκάστου τομέως ὅταν περιλαμβάνωνται ἅπασαι αἱ ἄμεσοι καὶ ἔμμεσοι ἐπιδράσεις. Ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τούτων παραγωγῆς θὰ συνιστᾷ — ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν σταθερῶν συντελεστῶν παραγωγῆς — μίαν γραμμικὴν συνάρτησιν τῶν δοθέντων στοιχείων καταναλώσεως καὶ ἐπενδύσεως, θὰ εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ συντελεσταὶ τῶν γραμμικῶν αὐτῶν συναρτήσεων. Ἐν τῇ πράξει ὅμως θὰ ὑπάρχῃ, ὑπὸ δεδομένας βραχυπροθέσμους συνθήκας ὡρισμένον *ἄνω πέρας* (upper bound) εἰς τὸ ἐπίπεδον παραγωγῆς ἑκάστου τομέως, ὀφειλόμενον εἰς τὸ ὑφιστάμενον εἰς τὸν τομέα *σταθερὸν ἐπενδεδυμένον κεφάλαιον*. Οὕτω, δι' ἕκαστον παραγωγικὸν τομέα, ὅπου ἡ δυναμικότης τοῦ κεφαλαίου ἀποτελεῖ σπουδαῖον στοιχεῖον, ὑφίσταται ὡρισμένη γραμμικὴ συνάρτησις τῶν στοιχείων καταναλώσεως καὶ ἐπενδύσεως, ἥτις πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὴν ὑφισταμένην εἰς τὸν τομέα δυναμικότητα τοῦ κεφαλαίου. Ἄλλαις λέξεσιν, εἰς ἕκαστον τῶν ἐν λόγῳ τομέων θὰ ὑπάρχῃ μία καλῶς προσδιωρισμένη γραμμικὴ συνάρτησις τῶν στοιχείων καταναλώσεως καὶ ἐπενδύσεως, ἥτις πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητική.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν πέρατα θεωροῦντες τὸ διαθέσιμον *ἐργατικὸν δυναμικὸν* καὶ τὴν φύσιν τῆς ἀμετακινήτου ἐργασίας. Παρομοίως δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν πέρατα θεωροῦντες τὴν ἀνωτάτην ἐπιτρεπτὴν ἐπέκτασιν τοῦ ἰσοζυγίου ἐξωτερικῶν πληρωμῶν. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ὡς ἔγγιστα κάθε εἶδος περάτων ἐκφραζόντων ἐπιδιώξεις ἀνθρωπιστικάς, κοινωνικὰς ἢ πολιτικάς.

Ἡ συνδεδυασμένη ἐπίδρασις ὅλων τῶν παρομοίας φύσεως περάτων ὁρίζει τὴν παραδεκτὴν περιοχήν.

Ὅταν προσδιορισθῇ ἡ παραδεκτὴ περιοχή, ἡ διατύπωσις τῶν σκοπῶν τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς συμπληροῦται διὰ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς *συναρτήσεως προτιμήσεως* (preference function), ἣν προσπαθοῦμεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν, ὑποκειμένην εἰς τὴν συνθήκην ὅτι αἱ μεταβληταὶ θὰ παραμείνουν ἐντὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ συνάρτησις προτιμήσεως δύναται νὰ διατυπωθῇ ἁπλῶς ὡς τὸ ἀκαθάριστον ἐθνικὸν προϊόν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς μοναδικὸν στόχον τῆς οἰκονομικῆς πολιτικῆς τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ προϊόντος, ὑποκειμένου εἰς τὰς συνθήκας τὰς ἐκπεφρασμένας διὰ τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς. Ἡ συνάρτησις προτιμήσεως εἶναι δυνατὸν ἐπίσης νὰ ἐκφράζῃ ἕνα συμβιβασμὸν μεταξὺ τῆς αὐξήσεως τοῦ ἀκαθαρίστου ἐθνικοῦ προϊόντος καὶ τῆς μειώσεως τῆς ἐκτάσεως τοῦ ἰσοζυγίου ἐξωτερικῶν πληρωμῶν. Εἴτε νὰ ἐκφράζῃ ἕνα πολύπλευρον συμβιβασμὸν ἔνθα ὑπεισέρχονται ἐπίσης θεωρήσεις ἐπὶ ὡρισμένων τύπων ἐπιθυμητῶν μακρᾶς διαρκείας ἐπενδύσεων κ.ο.κ. Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἡ συνάρτησις προτιμήσεως θὰ καταρτισθῇ ὡς γραμμικὴ (ἐνίοτε καὶ ὡς μὴ γραμμική) συνάρτησις ἐκ μερικῶν ἢ ὅλων τῶν μεταβλητῶν, τῶν συντελεστῶν τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως ὄντων ἀριθμητικῶς καλῶς προσδιωρισμένων.

Ἡ διάρθρωσις τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς καὶ ἡ μορφὴ τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως θὰ εἶναι, βεβαίως, τελείως διάφορα εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ βραχυπροθέσμου καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μακροπροθέσμου προγράμματος ἀναπτύξεως, εἰς τὴν παροῦσαν ὅμως δὲν θὰ ἐπιμείνωμεν ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου.

Ἰδιαίτερον ζήτημα ἀποτελεῖ ὁ τρόπος προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως. Ἐπιρροὴ ἀποφασιστικῆς σημασίας, ὅσον ἀφορᾷ τὴν διαμόρφωσιν τῶν συντελεστῶν τούτων, θὰ προέλθῃ ἐκ τῶν ὑπευθύνων πολιτικῶν ἢ πολιτικῶν σωμάτων καὶ ὄχι ἐκ τῶν τεχνικῶν τοῦ προγραμματισμοῦ. Ἀφ' ἑτέρου, ὅμως, μόνον οἱ τεχνικοὶ τοῦ προγραμματισμοῦ θ' ἀντιληφθοῦν ἐπαρκῶς τὴν σημασίαν τῶν συντελεστῶν ὥστε νὰ δύνανται βάσει αὐτῶν νὰ ἐκτιμήσουν ἐὰν ἡ συνάρτησις προτιμήσεως περιέχῃ πολλοὺς ὅρους. Θὰ πρέπει, ὅθεν, νὰ χρησιμοποιηθῇ μία ἔμμεσος μέθοδος. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ σχολιάζεται εἰς τὸ κεφάλαιον 3.

2. Διατύπωσις τοῦ μαθηματικοῦ προβλήματος

Ὑπὸ τὴν κλασσικήν του μορφὴν τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δύναται μαθηματικῶς νὰ διατυπωθῇ ὡς ἀκολούθως:

Θεωρήσωμεν $(n+m)$ πραγματικὰς μεταβλητὰς $x_1, x_2, \ldots x_{n+m}$ πληρούσας m γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους γραμμικὰς ἐξισώσεις. Αἱ ἐξισώσεις δύνανται νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν τυποποιημένην μορφήν:

$$a_{i0} + \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m) \tag{2.1}$$

ἔνθα ἡ μήτρα a_{ij} εἶναι m τάξεως (οὐδεμία δὲ τῶν μεταβλητῶν ἐλλείπει ἐξ ὅλων τῶν ἐξισώσεων). Ὁ ἀριθμὸς τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας (degrees of freedom) εἶναι συνεπῶς n, εἶναι δὲ πάντοτε δυνατὸν τουλάχιστον κατὰ ἕνα τρόπον νὰ ἐκφρασθοῦν ὅλαι αἱ μεταβληταὶ εἰς ὅρους μιᾶς σειρᾶς ἐκ n μεταβλητῶν βάσεως, γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων μεταξύ των. Θεωρήσωμεν τάς:

$$x_u, x_v \ldots x_w \tag{2.2}$$

ὡς μίαν τοιαύτην σειρὰν βάσεως. Αἱ ἐξισώσεις δύνανται τότε νὰ γραφοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν βάσεως

$$x_j = b_{j0} + \sum_{k=u,v\ldots w} b_{jk} x_k \qquad (j=1,2 \ldots n+m) \tag{2.3}$$

ἔνθα αἱ b_{j0} καὶ b_{jk} εἶναι σταθεραί. Προφανῶς δὲ

$$b_{j0} = 0 \text{ καὶ } b_{jk} = \begin{Bmatrix} 1 \text{ ἐὰν } k=j \\ 0 \text{ ἄλλως} \end{Bmatrix} \qquad \text{ὅταν} \quad j = u, v \ldots w \tag{2.4}$$

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις (2.3) ληφθοῦν δι' ὅλα τὰ $j = 1, 2, \ldots n+m$ θὰ ἔχωμεν ἕνα σύστημα γραμμικῶς ἐξηρτημένων ἐξισώσεων, ἐὰν δὲ λάβωμεν τὰς (2.3) μόνον διὰ* $j = 1, 2 \ldots) u, v \ldots w (\ldots n+m$ θὰ ἔχωμεν σύστημα γραμμικῶς

* Ἡ ἀντίστροφος παρένθεσις)(χρησιμοποιεῖται πρὸς παράστασιν τῶν ἐξαιρουμένων ὅρων.

ἀνεξαρτήτων ἐξισώσεων. Ἀκριβέστερον: Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ b_{j0} καὶ b_{jk} λάβουν ὁποιανδήποτε τιμήν, τότε αἱ m ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (2.3) διὰ $j=1, 2 \ldots$) $u, v \ldots w$ ($\ldots n+m$ θὰ εἶναι πάντοτε γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι.

Θεωρήσωμεν μίαν γραμμικὴν *συνάρτησιν προτιμήσεως*

(2.5) $$f = \pi_0 + \sum_{j=1}^{n+m} \pi_j x_j$$

ἔνθα τὰ π ἀποτελοῦν δεδομένας σταθερὰς θετικάς, ἀρνητικὰς ἢ μηδέν. Ἐὰν εἰς τὴν (2.5) εἰσαγάγωμεν τὰς ἐκφράσεις τῆς (2.3) διὰ τὰς ἐξηρτημένας μεταβλητάς, ἡ συνάρτησις προτιμήσεως θὰ λάβῃ τὴν μορφήν:

(2.6) $$f \geqq p_0 + p_u x_u + p_v x_v + \ldots + p_w x_w$$

ἔνθα p_k $(k = u, v \ldots w)$ εἶναι γνωσταὶ σταθεραὶ θετικαί, ἀρνητικαὶ ἢ μηδέν. Ἐκ τῆς καθιερώσεως τῆς (2.6) δὲν περιορίζεται ἡ γενίκευσις.

Τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ συνίσταται εἰς πρόβλημα προσδιορισμοῦ ἐκείνης ἢ ἐκείνων τῶν σειρῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι μεγιστοποιοῦν τὴν (2.6) ὑποκειμένην εἰς τὰς ἀκολούθους δύο σειρὰς συνθηκῶν. Πρῶτον, τὴν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (2.3) καὶ δεύτερον, τὴν συνθήκην τῆς μὴ ἀρνητικότητος τὴν ἐκφραζομένην διὰ τῶν ἀνισοτήτων:

(2.7) $$x_j \geqq 0 \qquad (j=1, 2 \ldots n+m)$$

Μία μεγάλη ποικιλία προβλημάτων δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν μορφὴν ταύτην. Ἐὰν περιλαμβάνεται μεταβλητή, ἥτις δὲν ὑπόκειται εἰς τὴν συνθήκην τῆς μὴ ἀρνητικότητος, ἡ μεταβλητὴ αὕτη πρέπει ν' ἀποκλεισθῇ, ὁπότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς πρόβλημα μὲ τὸν ἴδιον μὲν ἀριθμὸν βαθμῶν ἐλευθερίας μὲ μίαν ὅμως ἐξίσωσιν καὶ μίαν μεταβλητὴν ἐπὶ ἔλαττον. Ἓν πρόβλημα περιλαμβάνον ὁποιανδήποτε γραμμικὴν ἀνισότητα, δηλαδὴ τὴν συνθήκην: δοθεῖσα γραμμικὴ συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν νὰ εἶναι μὴ ἀρνητική, δύναται ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν ἀνωτέρω μορφήν, λαμβανομένης ἁπλῶς τῆς τιμῆς τῆς ἐν λόγῳ γραμμικῆς συναρτήσεως ὡς ἓν νέον μέγεθος εἰσερχόμενον εἰς τὸν κατάλογον τῶν μεταβλητῶν.

Αἱ ἀνισότητες (2.7) εἰσάγουν διακοπὰς εἰς τὰς ὁριακὰς συνθήκας, τοῦτο δὲ καθιστᾷ τὴν μέθοδον τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange—ἥτις χρησιμοποιεῖται ἀρκετὰ ἐπιτυχῶς εἰς πολλὰ ἄλλα προβλήματα μεγιστοποιήσεως μὲ περιοριστικὰς συνθήκας (side conditions)—ἀνεφάρμοστον εἰς τὴν περίπτωσίν μας.

Νέαν κλασσικὴν μέθοδον χειρισμοῦ τῶν προβλημάτων τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀποτελεῖ ἡ ὀφειλομένη εἰς τὸν George B. Dantzig μέθοδος simplex. Εἰς τὸ Οἰκονομικὸν Ἰνστιτοῦτον τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Oslo μεγάλαι προσπάθειαι κατεβλήθησαν πρὸς χειρισμὸν τοῦ προβλήματος κατὰ διάφορον τρόπον ἐπὶ τῇ ἐλπίδι ἀνευρέσεως μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεθόδων, αἵτινες νὰ εἶναι πλεονεκτικώτεραι ἐπὶ περιπτώσεων μὲ μεγαλύτερον ἀριθμὸν μεταβλητῶν, εἰδικώτερον ἐπὶ προβλημάτων συναντωμένων εἰς τὸν μακρο-οἰκονομικὸν προγραμματισμόν. Εἰς ἓν πρόβλημα ἐθνικοῦ προγραμματισμοῦ ὡρισμένης ἐκτάσεως πρέπει νὰ γίνεται εὐχερὴς χειρισμὸς ἐπὶ μερικῶν ἑκατοντάδων μεταβλητῶν, ἑκατοντάδος δὲ ἢ καὶ περισσοτέρων βαθμῶν ἐλευθερίας. Μὲ τὸ σύγχρονον δὲ ὑλικὸν ὑπολογιστικῶν μηχανισμῶν δὲν εἶναι ἀπραγματοποίητον νὰ παρασκευάζωνται προβλήματα ὑψηλοτέρας τάξεως μὲ δεκάδας χιλιάδων μεταβλητὰς καὶ μερικὰς χιλιάδας βαθμῶν ἐλευθερίας.

Εὔκολον μορφὴν πνευματικῆς ἀσκήσεως ἀποτελεῖ ἡ λύσις ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς διαδικασίας ἐπαναλήψεως (iteration process) τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἑτέρου εἴδους. Αἱ μέθοδοι αὐταὶ δυνατὸν νὰ φαίνωνται καλαὶ ἐπὶ τοῦ χάρτου, εἰς τὰς περισσοτέρας ὅμως τῶν περιπτώσεων δὲν συγκλίνουν ἢ ἐὰν κατ' ἀρχὴν συγκλίνουν, ἡ σύγκλισις (convergency) εἶναι γενικῶς τόσον βραδεῖα ὥστε ἐν τῇ πράξει νὰ καθίσταται ἡ μέθοδος τελείως ἄχρηστος. Εἰς τὸ 'Ινστιτοῦτον τοῦ Oslo συνεκεντρώθη σημαντικὸν πλῆθος παρομοίων μεθόδων. Μερικαὶ ὅμως ἐκ τῶν χρησιμοποιηθεισῶν περιλαμβάνουν χαρακτηριστικά, ἅτινα τὰς καθιστοῦν χρησίμους ὑπὸ ὡρισμένας περιστάσεις. 'Απόψεις τινὲς τῶν πράγματι ἐπιτυχῶς χρησιμοποιηθεισῶν, ἐπὶ μικροῦ ἢ μέσου μεγέθους παραδειγμάτων, περιγράφονται εἰς ἀριθμὸν πολυγραφημένων ὑπομνημάτων τοῦ 'Ινστιτούτου τοῦ Oslo.

Δὲν πρέπει ὅμως νὰ λησμονῆται ὅτι κάθε μαθηματικὴ μέθοδος καὶ εἰδικώτερον μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ πρέπει νὰ κρίνεται ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὸν τύπον τῶν διαθεσίμων ὑπολογιστικῶν μηχανῶν. Εἰς ὅλας δὲ τὰς ἐργασίας μας καθωδηγήθημεν βάσει τῶν δυνατοτήτων καὶ τῶν ἐπιδιώξεων μιᾶς καταστάσεως καθ' ἣν τὸ διαθέσιμον ὑλικὸν ἀπετελεῖτο ἀπὸ μηχανὰς γραφείου IBM 602 A (ἢ τῆς ἠλεκτρονικῆς του βελτιώσεως 626 ἢ παρομοίου τύπου ὑπολογιστικῶν διατρητικῶν μηχανῶν) ἢ ἠλεκτρονικοὺς αὐτομάτους ὑπολογιστάς, μὲ μικρὰν ὑψηλῆς ταχύτητος μνήμην ὡς λ.χ. ἡ Oslo Machine Nusse (ἧς τὸ ἀκαδημαϊκὸν ὄνομα εἶναι «Norwegian Universal etc.», εὐκολώτερον ὅμως ἀναγνωριζομένης ὅταν ἀναφέρεται ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς νορβηγικῆς λέξεως «Nusse», ἥτις δύναται νὰ μεταφρασθῇ περίπου ὡς «μικρὸ ἔξυπνο κορίτσι»). Πιθανῶς αἱ ἀπόψεις μας νὰ τροποποιηθοῦν ὅταν ἐθισθῶμεν τὸν ἐξαιρετικῶς σύγχρονον ὑψηλῆς δυναμικότητος ἠλεκτρονικὸν ὑπολογιστὴν τὸν ὁποῖον θὰ διαθέτωμεν ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ ἐπομένου ἔτους.

Εἰς τὴν παροῦσαν περιγράφεται —μὲ ἐλαχίστας ἀποδείξεις— μία μέθοδος ἣν θεωροῦμεν ἐποικοδομητικήν.

'Ως ὑπόβαθρον ὅλων τῶν μεθόδων ἐπιλύσεως προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ πρέπει νὰ θεωροῦνται αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν λύσεων παρομοίων προβλημάτων. Συνοπτικῶς δύνανται αὗται νὰ συγκεφαλαιωθοῦν ὡς ἀκολούθως.

'Η σειρὰ τῶν σημείων, ἅτινα θεωροῦνται ἄριστα (optimal) – τὰ ὁποῖα δηλονότι ὑπάγονται εἰς τὴν παραδεκτὴν περιοχὴν καὶ εἶναι τοιαῦτα ὥστε εἰς τὴν περιοχὴν αὐτὴν νὰ εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ οἱονδήποτε σημεῖον ἱκανὸν νὰ δώσῃ εἰς τὴν συνάρτησιν προτιμήσεως μίαν τιμὴν ὑψηλοτέραν τῆς ἐξαχθείσης βάσει τῶν ὑπ' ὄψιν σημείων – σχηματίζουν ἓν συνεχόμενον γραμμικὸν σύνολον (a coherent linear manifold), τὸ ὁποῖον συνιστᾷ τὰ πέρατα τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς, ὅπου μία τουλάχιστον τῶν μεταβλητῶν ἰσοῦται ἀκριβῶς πρὸς τὸ μηδέν. Ἡ διάταξις τῶν διαστάσεων (the dimensionality) τῆς σειρᾶς αὐτῆς σημείων, ὁ ἀριθμὸς δηλαδὴ τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας αὐτῆς, δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε τῶν ἀριθμῶν $δ=0, 1, 2 \ldots n-1$, ἔνθα n ὁ ἀριθμὸς τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος. Ἡ περίπτωσις $δ=0$ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει μία μόνον καλῶς προσδιωρισμένη θέσις (corner) – δηλαδὴ μία κορυφὴ τομῆς ἐπιπέδων (vertex) – ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς ὅπου ἡ συνάρτησις προτιμήσεως λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμήν. Ἡ περίπτωσις $δ=1$ σημαίνει ὅτ τὸ μέγιστον ἐπιτυγχάνεται κατὰ μῆκος τῆς ἀκμῆς, ἥτις συνδέει δύο θέσεις (two corners) κ.ο.κ.

Ὁποιαδήποτε εἶναι ἡ διάταξις τῶν διαστάσεων τῆς ἀρίστης σειρᾶς σημείων (optimum pointset) θὰ ὑφίσταται τουλάχιστον μία θέσις μὲ ἀρίστας ἰδιότητας, ἓν ἄριστον δηλαδὴ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον n τῶν μεταβλητῶν νὰ μηδενίζωνται, αἱ δὲ n αὐταὶ μεταβληταὶ νὰ εἶναι τοιαῦται ὥστε ἡ ἀπαλοιφὴ των νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἐπαρκὴς πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ σημείου. Ἐὰν $δ=0$ θὰ ὑπάρχῃ μία, καὶ μόνον μία, ἀρίστη θέσις (optimal corner), ἐὰν $δ=1$ θὰ ὑπάρχουν δύο ἀκριβῶς ἄρισται θέσεις καὶ γενικώτερον ἐὰν δ εἶναι οἱοσδήποτε δοθεὶς ἀριθμὸς ($< n$) θὰ ὑπάρχουν $δ+1$ ἄρισται θέσεις.

3. Πρακτικὸς καθορισμὸς τῶν περάτων καὶ τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως

Σπουδαῖον πρακτικὸν πρόβλημα ἀποτελοῦν ὁ τρόπος καθορισμοῦ τῶν περάτων (bounds) καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῶν συντελεστῶν τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως. Εἶναι, πράγματι, τόσον δυσχερῶς ἐπιτεύξιμα ὥστε νὰ ἐπιβάλουν μίαν γενικὴν ἐνατένισιν τῆς ὁροθετικῆς γραμμῆς μεταξὺ τῶν καθηκόντων τοῦ πολιτικοῦ καὶ τοῦ ἐπιστήμονος. Ὑπὸ συνοπτικὴν διατύπωσιν καὶ συνεπῶς, κατ' ἀνάγκην, ἄνευ πλήρους ἀκριβείας, δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ὁ πολιτικὸς ὑποχρεοῦται νὰ εἰσφέρῃ τὴν ἀνθρωπίνην ἐκτίμησιν (human evaluation), τὰς κοινωνικῆς ἀξίας κρίσεις (social value judjements), ἐνῶ τὸ καθῆκον τοῦ ἐπιστήμονος συνίσταται εἰς τὴν ἀντικειμενικὴν ἐξακρίβωσιν τῆς πραγματικῆς καταστάσεως, τῶν ἐνυπαρχουσῶν τάσεων πρὸς μεταβολὴν καὶ τῶν ἀναμενομένων συνεπειῶν ἐὰν ἀπεφασίζετο ὅπως τεθοῦν εἰς ἐνέργειαν ὡρισμένα μέτρα. Εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτὴν ὁ ἐπιστήμων ὀφείλει νὰ λάβῃ ἁπλῶς ὡς δεδομένα τοὺς σκοποὺς καθ' ἑαυτοὺς καὶ τὰς κοινωνικῆς ἀξίας κρίσεις.

Ἐὰν ἐξετάσωμεν προσεκτικώτερον τὴν διάκρισιν ταύτην θὰ παρατηρήσωμεν βεβαίως—ὅπως πάντοτε ὁσάκις τίθεται ζήτημα διακρίσεως ἀρχῶν—ὅτι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν ὁριακαὶ περιπτώσεις δυσχερεῖς πρὸς λῆψιν ἀποφάσεως. Ἐν τελευταίᾳ ἀναλύσει, θὰ πρέπει ἴσως νὰ συγκρατήσωμεν τὴν ἀκόλουθον μόνον διατύπωσιν: οἱ σκοποὶ καὶ αἱ κοινωνικῆς ἀξίας κρίσεις εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ὁ ἐπιστήμων δὲν ἐπιθυμεῖ ν' ἀναλάβῃ πρὸς ἀνάλυσιν. Εἶναι τὸ μέρος τοῦ προβλήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι πολὺ δύσκολον ἢ πολὺ ἀσαφὲς ἵνα κατορθωθῇ ἡ βελτίωσίς του δι' ὀρθῶν ἐπιστημονικῶν μεθόδων. Συνεπῶς, μέχρις ἑνὸς σημείου, ἡ διάκρισις καθίσταται σχετικὴ καὶ θὰ μεταβάλλεται ἐφ' ὅσον μεταβάλλεται ὁ σκοπὸς τῆς ἀναλύσεως ἢ καθίστανται διαθέσιμα νέα ἐργαλεῖα ἀναλύσεως ἢ νέαι πληροφορίαι ἐπὶ πραγματικῶν περιστατικῶν. Παρὰ ταῦτα, ἡ διάκρισις μεταξὺ τῶν καθηκόντων τοῦ πολιτικοῦ καὶ τοῦ ἐπιστήμονος πρακτικῶς εἶναι δι' ὅλους τοὺς σκοποὺς ἀρκετὰ σαφής.

Τὸ ἀναλυτικὸν σύστημα τὸ περιλαμβανόμενον εἰς τὴν ἐργασίαν τοῦ προγραμματιστοῦ κυριαρχεῖται ἀπὸ κοινὸν νοῦν. Δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ συστηματοποιημένος κοινὸς νοῦς. Ὅταν δέ, εἰς ὅσους θεωροῦν τὸν ἑαυτόν τους «πρακτικὸν ἄνθρωπον», δὲν παρουσιάζεται ὑπ' αὐτὴν τὴν μορφήν, τοῦτο συμβαίνει ἁπλῶς διότι ὁ ἐπιστήμων ἵνα ἐξοικονομήσῃ χρόνον καὶ κόπον χρησιμοποιεῖ ὁρολογίαν, ἥτις δὲν συμπίπτει πρὸς τὴν καθημερινὴν γλῶσσαν. Ἐπίσης δὲ διότι ὀφείλει νὰ χρησιμοποιήσῃ μίαν συσκευὴν ἀναλύσεως ὡρισμένου μεγέθους.

Ὁ κοινὸς νοῦς μᾶς ὑπαγορεύει ὅτι ἐάν τις ἐπιθυμῇ νὰ κατευθύνῃ τὴν ἐξέλιξιν μιᾶς χώρας πρέπει ἐν πρώτοις νὰ ἐρευνήσῃ ποία εἶναι ἡ παροῦσα κατάστασις, ἐν συνεχείᾳ ν' ἀποφασίσῃ ποία θὰ ἐπεθύμει νὰ ἦτο, καὶ ἀκολούθως νὰ ἐξετάσῃ ποῖαι δυνατότητες ὑπάρχουν ἵνα ἡ κατάστασις ἀχθῇ ἀπὸ ὅ,τι εἶναι εἰς ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐπιθυμεῖται νὰ γίνῃ. Αὐταὶ εἶναι αἱ κύριαι γραμμαὶ τῆς θεωρητικῆς τοποθετήσεως.

Εἰς ὅλας τὰς ὑπαναπτύκτους χώρας—ζήτημα εἶναι ποία χώρα δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν ν' ἀποκληθῇ ἀπὸ τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην ἄποψιν ὑπανάπτυκτος —ἡ ἔννοια τοῦ χρόνου εἶναι ἰδιαιτέρως σπουδαία. Ἐπὶ πόσον μακροῦ χρονικοῦ διαστήματος πρέπει νὰ βασίσωμεν τὴν σκέψιν μας ὅταν ἐκτελοῦμεν ἐθνικὸν οἰκονομικὸν προγραμματισμόν.

Τελευταίως εἶχα τὴν εὐκαιρίαν νὰ ἐργασθῶ ἐπὶ τῆς μεθοδολογίας τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ τῆς Ἰνδίας καὶ θὰ ἐνθυμοῦμαι πάντοτε πῶς ὁ Πρωθυπουργὸς τῆς Ἰνδίας κ. Νεχροῦ ἐτόνισεν εἰς μίαν συζήτησιν τὴν τρομερὰν διαφορὰν τοῦ προβλήματος ὡς τοῦτο ἐμφανίζεται μεταξὺ τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν καὶ τῆς Ἰνδίας. Εἰς τὰς Ἡνωμένας Πολιτείας τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὸ πῶς δύναταί τις νὰ προωθήσῃ εἰς γενικὴν χρῆσιν τὰς τεχνικῶς πλέον ἐκλεπτυσμένας συσκευάς, ὅπως λ.χ. εἰς τὴν κατασκευὴν ἠλεκτρικῶν ψυγείων. Εἰς τὴν Ἰνδίαν τὸ ἐπεῖγον πρόβλημα ἦτο πῶς νὰ κρατηθῇ μακρὰν ἀπὸ τὸν λαὸν ἡ πεῖνα καὶ πῶς θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ δημιουργήσῃ ἡ χώρα ἀπόθεμα σιτηρῶν καθὼς καὶ ἄλλων βασικῶν διὰ τὴν διατροφὴν τοῦ πληθυσμοῦ ἀγαθῶν οὕτως ὥστε νὰ μὴ διακινδυνευθῇ ἡ ὑποχρεωτικὴ εἰσαγωγὴ σιτηρῶν ὑπὸ οἱονδήποτε κόστος. Ὅταν ἀναλογισθῇ τις ποία ἦτο ἡ κατάστασις τῆς Ἰνδίας πρὸ μερικῶν ἐτῶν, καθίσταται προφανὴς καὶ λίαν ρεαλιστικὴ ἡ διάκρισις αὐτὴ μεταξὺ τῶν δύο τύπων προβλημάτων. Ἐὰν δὲ συμβαίνῃ νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ παρόντος δυνατὸν νὰ παραβλεφθῇ, ἀκινδύνως διὰ τὸν ἰνδικὸν πληθυσμόν, τὸ πρόβλημα τῶν τεχνικῶν τελειοποιήσεων εἰς τὰ ἠλεκτρικὰ ψυγεῖα, τοῦτο ὀφείλεται ἁπλῶς εἰς τὸν χρονικὸν ὁρίζοντα (time horizon) ὅστις ἐπελέγη πρὸς καθιέρωσιν.

Ὅταν οἱ ὑπεύθυνοι Ἰνδοὶ πολιτικοὶ τοποθετοῦν τὰ ζητήματα—ὀρθῶς—ὡς τὰ τοποθετοῦν, τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι σκέπτονται βάσει ἑνὸς ὁρίζοντος ὅστις εἶναι τόσον εὐρὺς ὥστε νὰ καθίσταται ἀσφαλῶς δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος διατροφῆς ἐντὸς ὡρισμένου χρονικοῦ διαστήματος, ὄχι ὅμως ἀρκετὰ εὐρὺς ὥστε νὰ ἐπιτρέπεται ἡ διὰ τὸν ὄγκον τοῦ ἰνδικοῦ πληθυσμοῦ εἰσαγωγὴ τεχνικῶν τελειοποιήσεων ὅσον ἀφορᾷ τὴν ψύξιν. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ τῶν ψυγείων θ' ἀνακύψῃ, βεβαίως ἀφ' ἑαυτοῦ μελλοντικῶς καὶ εἰς τὴν Ἰνδίαν, εἰς χρόνον ὅμως τόσον ἀπομεμακρυσμένον ὥστε ἐπὶ τοῦ παρόντος νὰ μὴ αἰσθάνωνται τὴν ἀνάγκην νὰ ἐνοχληθοῦν σχετικῶς.

Ἀποτελεῖ δὲ ζήτημα κρίσεως τὸ πόσον βάρος θὰ ριφθῇ ἐπὶ προβλημάτων τοῦ πρώτου ὡς ἄνω τύπου—τῶν πλέον ζεόντων προβλημάτων—καὶ πόσον ἐπὶ προοπτικῶν, ἐκτεινομένων εἰς τὸ ἀπώτερον μέλλον. Θὰ ἔδει νὰ λεχθῇ ὅτι οἱ ὑπεύθυνοι πολιτικοὶ ἵνα μορφώσουν γνώμην ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου θὰ εἶναι ὡς νὰ ἔχουν ἀναλογισθῆ ποία θὰ ἦτο ἡ λύσις μιᾶς φανταστικῆς ἀναλύσεως ἑνὸς τεραστίου προβλήματος εἰς τὸ ὁποῖον ἔχουν προσδιορισθῆ ὅλαι αἱ δυναταὶ λεπτομέρειαι ὅσον ἀφορᾷ τὴν παροῦσαν κατάστασιν καὶ ἅπασαι αἱ δυνατότητες ὅσον ἀφορᾷ τὴν μέλλουσαν. Οὕτω ἔχομεν ἐνταῦθα ἕνα παράδειγμα εἰς τὸ ὁποῖον ἔχει ἐκκαθαρισθῆ ἡ διάκρισις μεταξὺ τῆς ὑπὸ τοῦ πολιτικοῦ διαμορφώσεως τῆς κοινωνικῆς ἀξιολογήσεως καὶ τῆς ὑπὸ τοῦ ἐπιστήμονος ἀντικειμενικῆς ἐργασίας. Ὁ πολιτικὸς ὀφείλει, εἴτε τὸ ἐπιθυμεῖ εἴτε ὄχι, νὰ ἐνεργήσῃ ὑπὸ ἀμφοτέρας τὰς ἰδιότητας. Σημειοῦται ὅμως ὅτι μόνον κατὰ τὴν ἀπολύτως ἀρχικὴν φάσιν τῆς ἀναλύσεως ἐπιτελεῖται παρόμοιος συμβιβασμός. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν περαιτέρω μελέτην τοῦ πολυπλόκου τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν περιγραφῆ διὰ τοῦ «ὁρίζοντος τῆς φαντασίας τοῦ πολιτικοῦ», δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν πλήρως καὶ μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀποτελεσματικότητα τὴν ἀρχὴν τῆς κατανομῆς τῆς ἐργασίας μεταξὺ τοῦ πολιτικοῦ καὶ τοῦ ἐπιστήμονος.

Τοῦτο πρέπει ν' ἀποτελῇ τὸ ὑπόβαθρον διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν συντελεστῶν, οἵτινες ἐκφράζουν τὰ πέρατα τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως. Μέσῳ συνεντεύξεων μεταξὺ τῶν ὑπευθύνων πολιτικῶν καὶ τῶν ὑπευθύνων τοῦ προγραμματισμοῦ οἱ τελευταῖοι θὰ προσπαθήσουν νὰ ἐπιλύσουν, βάσει σειρᾶς συντελεστῶν, ἐκεῖνο ὅπερ θὰ παρέχῃ κατὰ τὸ δυνατὸν ἐγγύτερον τὴν ἀκριβῆ εἰκόνα τῶν ἀξιολογικῶν κρίσεων τῶν ὑπευθύνων πολιτικῶν.

Εἰς τὸ Ἰνστιτοῦτον τοῦ Ὄσλο ἐπειραματίσθημεν μέχρις ἑνὸς βαθμοῦ ἐπὶ τοῦ τύπου τῶν συνεντεύξεων τῶν ἀπαραιτήτων διὰ τὸν καταρτισμὸν τῶν ἐν λόγῳ συντελεστῶν. Θεωρήσωμεν, ἐν πρώτοις, τὴν συνάρτησιν προτιμήσεως.

Οἱ συντελεσταὶ αὐτῆς πρέπει νὰ προσδιορισθοῦν ἐμμέσως διὰ τῆς θέσεως πρὸς ἐπιλογὴν διαζευκτικῶν περιπτώσεων καὶ τῆς σημειώσεως τῆς τάξεως διαδοχῆς, ἣν θὰ προετίμων οἱ πολιτικοὶ ἢ πολιτικαὶ ὁμάδες. Πρὸς τὸν σκοπὸν ἐπιτεύξεως τῆς τάξεως ταύτης διαδοχῆς διάφορα σχέδια εἶναι ἐπινοητά. Σχετικὸν παράδειγμα ἀποτελεῖ τὸ ἀκόλουθον.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἓν σύνθετον (a complex) χαρακτηριζόμενον ὑπὸ τριῶν ποσοτικῶν μεγεθῶν, x=καθαρὸν ἐθνικὸν προϊόν, y=πλεόνασμα ἐξαγωγῶν, καὶ z=ἐπενδύσεις κοινωνικοῦ κεφαλαίου (ὁδοί, σχολεῖα, νοσοκομεῖα κ.ο.κ.).

Θεωρήσωμεν ὅτι x^i, y^j, z^k $\begin{Bmatrix} i = 1, 2 \ldots \\ j = 1, 2 \ldots \\ k = 1, 2 \ldots \end{Bmatrix}$ ἀποτελοῦν μίαν σειρὰν ἐπιλεγεισῶν ἰσαπεχουσῶν (equidistant) τιμῶν τῶν ἐν λόγῳ μεταβλητῶν, περιλαμβανομένων εἰς σχέδιον συνεντεύξεως, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς δεδομένην συγκεκριμένην κατάστασιν εἰς ἣ ὁμὰς πολιτικῶν ἔχουν καταsταλάξει εἰς μίαν τάξιν προτιμήσεως (order of preference) ἐκπεφρασμένην διὰ τοῦ καταλόγου τῶν διατεταγμένων ἀριθμῶν (ranking numbers) f^{ijk}. Ἐπὶ τὸ ἀκριβέστερον, θεωρήσωμεν ὅτι $f^{ijk}=1$ εἶναι ὁ ἀποδιδόμενος ἀριθμὸς εἰς τὴν περίπτωσιν ἥτις θεωρεῖται ἡ πτωχοτέρα, $f^{ijk}=2$ ὁ ἀποδιδόμενος εἰς τὴν περίπτωσιν τὴν θεωρουμένην ἀμέσως μετὰ τὴν πτωχοτέραν κ.ο.κ.

Ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ἡ ἐπιλογὴ συνετελέσθη ὡς ἂν ὑπῆρχε μία συνάρτησις προτιμήσεως τῆς μορφῆς :

$$f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \tag{3.1}$$

ἔνθα α, β, γ, εἶναι σταθεραί, θὰ ὑπάρχῃ μία κατὰ προσέγγισιν γραμμικὴ σχέσις μεταξὺ τῶν διατεταγμένων ἀριθμῶν f^{ijk} καὶ τῶν ὑπολογισθεισῶν τιμῶν $f(x^i, y^j, z^k)$. Ἀκριβέστερον, ἐὰν f^{ijk} ληφθῇ ὡς τετμημένη καὶ $f(x^i, y^j, z^k)$ ὡς τεταγμένη, τὰ παρατηρούμενα εἰς τὸ διάγραμμα σημεῖα θὰ σχηματίζουν μίαν διακεκομμένην γραμμὴν μονοτόνως αὔξουσαν, διαγραφομένην πέριξ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς. Εἶναι ὅθεν φυσικὸν ὁ προσδιορισμὸς τῶν συντελεστῶν τῆς (3.1) νὰ ἐπιτυγχάνεται δι' ἐξομαλύνσεως τῶν στοιχείων διὰ μιᾶς γραμμικῆς συναρτήσεως παλινδρομήσεως τῆς μορφῆς :

$$f^{ijk} = A x^i + B y^j + \Gamma z^k + \Delta \tag{3.2}$$

Ὅταν οἱ συντελεσταὶ A, B, Γ εἶναι στατιστικῶς προσδιορισμένοι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{\Gamma} = \text{αὐθαίρετος θετικὸς πολλαπλασιαστής,} \tag{3.3}$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι οἱ συντελεσταὶ α, β, γ δύνανται νὰ ληφθοῦν (θετικῶς) ἀνάλογοι τῶν A, B, Γ. Προφανῶς θὰ εἶναι διαθέσιμοι μόνον οἱ λόγοι (ratios), μεταξὺ τῶν α, β, γ. Δυνάμεθα, ἐὰν ἐπιθυμοῦμεν ν' ἀναγάγωμεν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς δι' οἱουδήποτε κοινοῦ (θετικοῦ) παράγοντος, λ.χ. κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν $\alpha=1$. Δυνάμεθα δὲ νὰ δώσωμεν εἰς τὸ δ μίαν αὐθαίρετον τιμήν. λ.χ. $\delta=0$. Τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ δ εἶναι αὐθαίρετον δὲν πρέπει νὰ μᾶς παραπλανήση εἰς τὸ νὰ θέσωμεν αὐθαιρέτως τὸ Δ εἰς τὴν (3.2). Ἐὰν τὸ Δ δὲν προσδιορισθῇ διὰ τῆς ἀναλύσεως παλινδρομήσεως ἀλλὰ τοῦ δοθῇ μία αὐθαίρετος τιμή, τότε πράγματι θὰ μεταβάλωμεν τὰ σχετικὰ μεγέθη Α, Β, Γ.

Ἐνδιαφέρουσα ἦτο ἡ διαπίστωσις πόσον χαρακτηριστικῶς διάφοροι τιμαὶ τῶν συντελεστῶν α, β, γ προκύπτουν ἐκ διαφορετικῶν ἀτόμων ἢ διαφορετικῶν ὁμάδων ἀτόμων. Κατ' ἀρχὴν ὁποιαδήποτε τῶν σειρῶν αὐτῶν τιμῶν δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ἡ διατύπωσις ἑνὸς προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἢ νὰ γίνῃ συμβιβασμός.

Ὁποιαιδήποτε τιμαὶ προκύψουν διὰ τοὺς συντελεστὰς τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως, οὐδέποτε ἡ συνάρτησις αὐτὴ θὰ δυνηθῇ νὰ προκαλέσῃ ἀφ' ἑαυτῆς ἓν ἄλυτον γραμμικὸν πρόβλημα. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν τὰ πέρατα εἶναι διάφορα. Τὰ πέρατα εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα ἐκ τῆς θέσεως γραμμικῶν ἀνισοτήτων, προκυπτουσῶν λ.χ. ἐκ τεχνικῶν διαπιστώσεων ἐπὶ τῆς δυναμικότητος τοῦ ἐνυπάρχοντος σταθεροῦ κεφαλαίου εἰς τοὺς διαφόρους τομεῖς ἢ ἐκ τῶν περιορισμῶν τῶν προερχομένων ἐκ τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ ἢ τοῦ ἀμετακινήτου αὐτοῦ, ἢ ἐκ προκυπτόντων περιορισμῶν ἐκ τῆς ἀνάγκης ἐξοικονομήσεως ξένου συναλλάγματος, ἢ ἐκ τῆς ἀνάγκης διατηρήσεως τῆς παραγωγῆς ἢ τῶν εἰσαγωγῶν ὡρισμένων οὐσιωδῶν ἀγαθῶν καταναλώσεως ὑπεράνω ὡρισμένων φυσικῶν ἐπιπέδων διαβιώσεως κ.ο.κ. Σημειοῦται ὅτι δὲν ὑπάρχει τέλος εἰς τὰ εἴδη τῶν περάτων, ἅτινα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιβληθοῦν διὰ λόγους τεχνικοὺς ἢ ἀνθρωπιστικοὺς ἢ πολιτικοὺς ὡς ἀνεφέρθη εἰς τὸ Κεφάλαιον 1.

Θὰ εἶναι πάντοτε προνοητικὸν ν' ἀσκηθῇ ἡ εὐρυτέρα δυνατὴ περίσκεψις κατὰ τὸν καθορισμὸν τῶν περάτων. Ἐπὶ παραδείγματι, θὰ πρέπει νὰ ἐξακριβωθοῦν αἱ δυνατότητες παραγωγῆς ὠθούμεναι μέχρι τῶν ἀνωτάτων δυνατῶν ἐπιπέδων καὶ νὰ γίνουν δεκτὰ ὁριακὰ ἐπίπεδα καταναλώσεως τόσον χαμηλὰ ὅσον θὰ ἦσαν ἐπιτρεπτὰ διὰ παντὸς μέσου ἢ κατὰ προτίμησιν τελείως ἄνευ παρομοίων περάτων κ.ο.κ. Ἐὰν δὲν ἐπιδείξωμεν τοιαύτην περίσκεψιν, ἐὰν ἀντιθέτως πάσης φύσεως ἀνάγκαι ἀφεθοῦν καὶ ἐπιδράσουν ὁλοσχερῶς, τότε κατὰ πᾶσαν πιθανότητα θὰ καταλήξωμεν εἰς ἀντιφάσεις, θὰ ἀχθῶμεν δηλονότι εἰς μίαν κατάστασιν καθ' ἣν δὲν θὰ ὑφίσταται παραδεκτὴ περιοχή, καὶ συνεπῶς τὸ πρόβλημα προγραμματισμοῦ δὲν θὰ ἔχῃ λύσιν.

Ἐὰν ἰδιαίτερον τι στοιχεῖον τοῦ προγράμματος παρουσιάζεται ὡς ἐξαιρετικῶς σπουδαῖον, ὅπως λ.χ. ἡ ἐξασφάλισις ἑνὸς βασικοῦ ἐπιπέδου καταναλώσεως δι' ὡρισμένον βασικὸν καταναλωτικὸν ἀγαθόν, συνιστᾶται ὁ καθορισμὸς τοῦ ἀντιστοίχου πέρατος κατὰ τὸν ἀσθενέστερον δυνατὸν τρόπον ἀντὶ ν' ἀφεθῇ νὰ εἰσέλθῃ τὸ στοιχεῖον τοῦτο καταναλώσεως εἰς τὴν συνάρτησιν προτιμήσεως μὲ μίαν ἐξαιρετικῶς ὑψηλὴν στάθμισιν *. Ἐνεργοῦντες οὕτω, τὸ ἐν λόγῳ στοιχεῖον εἶναι βέβαιον ὅτι θὰ ἐπιδράσῃ ἰσχυρῶς ἐπὶ τῆς τελικῆς λύ-

* Ἐὰν τοῦτο συμβῇ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶμεν εἰς τὰς ἀκολούθους δυσχερείας. Θὰ εἶναι πρόσφορον ν' ἀντιμετωπισθῇ περιοριστικῶς μία ἐξαιρετικῶς ὑψηλὴ στάθμισις διὰ τὸ στοιχεῖον αὐτὸ καταναλώσεως ἐφ' ὅσον ἡ κατανάλωσις εἶναι χαμηλή, δὲν θὰ εἶναι ὅμως πρόσφορον νὰ ἐνεργήσωμεν οὕτω ὅταν ἡ κατανάλωσις αὐτὴ εἶναι ὑψηλή. Ἡ δυσχέρεια αὐτὴ δύναται νὰ ὑπερπηδηθῇ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μὴ γραμμικῆς συναρτήσεως προτι-

σεως, ἐὰν δὲ καθ' ὅλην τὴν δυνατὴν ἔκτασιν θὰ ἀχθῇ εἰς ἐπίπεδον ὑπεράνω τοῦ ἐπιβληθέντος ἐλαχίστου.

Παρὰ τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν περίσκεψιν κατὰ τὸν καθορισμὸν τῶν περάτων εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ ὅτι δὲν ὑφίσταται παραδεκτὴ περιοχή. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ καταβληθῇ προσπάθεια ἀναδιατυπώσεως τῶν προβλημάτων καὶ θὰ καταστῇ ἀναγκαία ἡ κατὰ συστηματικώτερον τρόπον ἐξέτασις τῶν δυνατῶν ἀναθεωρήσεων ὑπὸ τὸ ἐλάχιστον ὑπολογιστικὸν κόστος.

Ἴδωμεν, ἐν πρώτοις, ποῖαι δυνατότητες εἶναι θεωρητικῶς διαθέσιμοι. Ὑποθέσωμεν ὅτι μία σειρὰ ἐξισώσεων βάσεως εἶναι δεδομένη, λ.χ. ὅτι τὰ b_{jk} τῆς (2.3) εἶναι δεδομένα. Ποία θὰ εἶναι ἡ τάξις τῶν προτύπων συντελεστῶν a_{ij} οἵτινες εἶναι ἱκανοὶ νὰ ὁδηγήσουν εἰς τὰ δεδομένα b_{jk}; Μεγάλος ἀριθμὸς βαθμῶν ἐλευθερίας ὑφίσταται εἰς μίαν σειρὰν a_{ij}. Εἷς τρόπος προσδιορισμοῦ αὐτῶν συνίσταται εἰς τὴν ἐκλογὴν τῆς $m \times m$ ὑπομήτρας:

$$(3.4) \qquad a_{ij} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots m \\ j = 1, 2 \ldots) u, v \ldots w (\ldots n + m \end{pmatrix}$$

ἐξ ὁλοκλήρου αὐθαιρέτως, ὑποκειμένης ὅμως εἰς τὴν συνθήκην νὰ εἶναι μὴ μοναδικὴ (non singular), νὰ δίδῃ δηλαδὴ μίαν τιμὴν τῆς ὁριζούσης διάφορον τοῦ μηδενός. Ὅταν τὰ στοιχεῖα τῆς (3.4) ἐπιλεγοῦν, τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς προτύπου μήτρας (standard matrix) θὰ εἶναι προσδιοριστέα διὰ τῆς

$$(3.5) \qquad a_{ik} = - \sum_{j=1,2 \ldots) u, v \ldots w (\ldots n+m} a_{ij} b_{jk} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots m \\ k = 0, u, v \ldots w \end{pmatrix}$$

Ὁ τύπος αὐτὸς δεικνύει ὅτι ἡ οὐσία τῆς μεταβάσεως ἐκ τῶν συντελεστῶν b εἰς τοὺς συντελεστὰς a ἀποτελεῖ ἕνα ***γραμμικὸν μετασχηματισμὸν*** μὲ μὲ μίαν αὐθαίρετον, μὴ μοναδικήν, μήτραν μετατροπῆς (matrix of transformation). Ὡς πρὸς τὸν ἔλεγχον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας, σημειοῦται ὅτι ἡ μήτρα b περιέχει $m(n+1)$ δεδομένα στοιχεῖα καὶ ὅτι διὰ τῆς (3.5) καθορίζομεν τὸν ἴδιον ἀριθμὸν στοιχείων διὰ τὸν a.

Εἰδικὴ μορφὴ τοῦ προβλήματος τροποποιήσεως ἀνακύπτει ἐὰν ἀναζητήσωμεν τὸν τρόπον καθ' ὃν εἶναι δυνατὸν νὰ δημιουργηθῇ μία παραδεκτὴ περιοχὴ διὰ τῆς μεταβολῆς μόνον τῶν σταθερῶν ὅρων τῶν ἐξισώσεων. Τοῦτο κατ' ἀρχὴν εἶναι πάντοτε δυνατόν. Πράγματι, εἰς κάθε πρόβλημα ὅπου ὅλα τὰ b_{j0} εἶναι μὴ ἀρνητικὰ ὑφίσταται πάντοτε μία παραδεκτὴ περιοχή. Ἀρκεῖ μόνον νὰ θέσωμεν ὅλας τὰς μεταβλητὰς βάσεως ἴσας πρὸς μηδὲν ἵνα ἔχωμεν μίαν σειρὰν μὴ ἀρνητικῶν τιμῶν διὰ τὰς ὑπολοίπους μεταβλητάς. Κάθε δὲ δεδομένη μεταβολὴ τῶν σταθερῶν ὅρων b_{j0} τῶν ἐξισώσεων βάσεως δύναται νὰ γίνῃ διὰ καταλλήλου μεταβολῆς τῶν σταθερῶν ὅρων a_{i0} τῶν προτύπων ἐξι-

---

μήσεως. Ἐφ' ὅσον τὰ πέρατα εἶναι γραμμικά, ἡ παραδεκτὴ περιοχὴ θὰ εἶναι κυρτή, καὶ ἀπὸ μαθηματικῆς ἀπόψεως αὐτὸ εἶναι τὸ οὐσιῶδες σημεῖον. Ἐνταῦθα ὅμως δὲν θὰ ὑπεισέλθωμεν περισσότερον εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο.

σώσεων (standard equations). Πράγματι, ἐκ τῆς (3.5) διὰ $k=0$, μὲ ἀμετάβλητον τὸ δεδομένον a_{ij} $(j \neq 0)$ καὶ δεδομένον τὸ b_{j0}, λαμβάνομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ a_{i0}. Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ἡ δημιουργία παραδεκτῆς περιοχῆς δι' ἑνὸς τόσον δραστικοῦ τρόπου δὲν θὰ εἶναι κατορθωτὴ καθόσον ὑποχρεωτικῶς θὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν πολλοὶ τεχνικοὶ καὶ ἀνθρωπιστικοὶ σκοποί. Οὕτω, πρακτικῶς τὸ ζήτημα καταστρώσεως ἑνὸς προβλήματος περιλαμβάνοντος μίαν παραδεκτὴν περιοχὴν συνίσταται εἰς τὴν στάθμισιν τῶν ὑπὲρ καὶ τῶν κατά.

Συστηματικὸς τρόπος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τροποποιήσεως (modification problem) – ἐφόσον ἀποφασισθῇ ἡ μεταβολὴ τῶν σταθερῶν μόνον ὅρων – συνίσταται εἰς τὸν καθορισμὸν ὡρισμένων περάτων (γενικῶς κάτω περάτων) εἰς τὸν b_{j0}, ἅτινα θ' ἀποδειχθοῦν ἐπαρκῆ διὰ τὴν δημιουργίαν μιᾶς παραδεκτῆς περιοχῆς, ταυτοχρόνως δὲ ὁ καθορισμὸς ὡρισμένων περάτων εἰς τὸν a_{i0}, ἅτινα προκύπτουν ἐκ τεχνικῶν καὶ ἀνθρωπιστικῶν θεωρήσεων – ἴσως ἀκόμη διὰ τοῦ ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως προτιμήσεως διὰ τὸν a_{i0} – καὶ νὰ ἐξετασθῇ κατὰ πόσον ὑφίσταται παραδεκτὴ περιοχὴ εἰς αὐτὰ τὰ b_{j0} καὶ a_{i0} ὅταν συνδέωνται διὰ τῶν m ἐξισώσεων τῶν ληφθεισῶν ἐκ τῆς (3.5) διὰ $k=0$. Τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν διατύπωσιν ἑνὸς προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀφορῶντος τὸν τρόπον μεταβολῆς τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Κάλλιστα δὲ εἶναι δυνατόν, ὑπὸ πολυπλόκους περιστάσεις, μία τοιαύτη τεχνικὴ νὰ χρειάζεται ἵνα ἐπιτευχθῇ ἡ κατὰ τὸν καλύτερον δυνατὸν τρόπον συμφιλίωσις τῶν ἀκατορθώτων ἀπαιτήσεων τῶν πολιτικῶν.

4. Ἐπίλυσις γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ ἀντιστροφῆς μητρῶν ὅταν εἶναι περιωρισμένη ἡ ὑψηλῆς ταχύτητος μνήμη

Οὐσιῶδες σημεῖον κάθε μεθόδου ἐπιλύσεως γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ ἀντιστροφῆς μητρῶν ἀποτελεῖ ὁ ἀριθμὸς τῶν περιλαμβανομένων πολλαπλασιασμῶν καὶ /ἢ διαιρέσεων. Ἐὰν ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται μὲ κάποιαν μέθοδον κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον συγγενικὴν πρὸς τὴν τοῦ ἀλγορίθμου τοῦ Gauss, ὁ ἀριθμὸς τῶν περιλαμβανομένων πολλαπλασιασμῶν καὶ / ἢ διαιρέσεων εἰς μίαν μονόπλευρον λύσιν (one way solution) – δηλαδὴ μὲ μίαν δοθεῖσαν σειρὰν ἀριθμῶν εἰς τὸ δεξιὸν μέλος – εἶναι τῆς τάξεως $\frac{n^3}{3}$, ἔνθα n ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων. Μία πλήρης ἀντιστροφὴ τῆς μήτρας περιλαμβάνει ἐργασίαν τῆς τάξεως n^3. Ἀξιοσημείωτον εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης περιλαμβανομένη ἐργασία εἰς μίαν πλήρη ἀντιστροφὴν εἶναι μόνον τρεῖς φορὰς μεγαλυτέρα ἔναντι τῆς προβλεπομένης εἰς μονόπλευρον λύσιν, τοῦ παράγοντος 3 ὄντος ἀνεξαρτήτου τοῦ n.

Δὲν εἶναι ὅμως μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν πολλαπλασιασμῶν καὶ / ἢ διαιρέσεων ὅστις ὑπολογίζεται, ἀλλ' ἐπίσης καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων, ἅτινα θὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν (ὑπὸ γραπτὴν μορφήν, εἴτε διατρήσεως καρτελλῶν, εἴτε εἰσερχομένων εἰς μαγνητικὴν ταινίαν ἢ τύμπανον).

Τελικῶς δὲ πρέπει νὰ ἐξετασθῇ ὁ ἀνώτατος ἀριθμὸς στοιχείων, ἅτινα χρειάζεται ὅπως ἐναποθηκεύωνται εἰς κάθε στιγμὴν τῆς ἐργασίας. Τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι ἰδιαιτέρως σημαντικὸν ὅταν ἡ ἐργασία ἐπιτελεῖται ἐπὶ ἑνὸς αὐτομάτου ὑπολογιστοῦ μὲ περιωρισμένην δυναμικότητα ὅσον ἀφορᾷ τὴν λεγομένην ὑψηλῆς ταχύτητος μνήμην. Εἶναι δυνατὸν νὰ ρυθμισθῇ ἡ διαδικασία ἀπαλοιφῆς κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε εἰς βάρος (ἐλαφρῶς) τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πολλαπλασιασμῶν καὶ / ἢ διαιρέσεων νὰ μειωθῇ τὸ ἀνώτατον πλῆθος τῶν ἐναποθηκευομένων ἀριθμῶν. Τοῦτο δύναται νὰ ἐνεργηθῇ, ἐπὶ παραδείγματι, κατὰ τὴν ἀκόλουθον διαδικασίαν.

Ὁ ἁπλούστερος τρόπος διατυπώσεως τῆς βασικῆς ἰδέας εἶναι νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἐνεργοῦμεν κατὰ γύρους ὡρισμένου χαρακτῆρος οὕτως ὥστε εἰς τὸν πρῶτον γύρον μία τῶν μεταβλητῶν νὰ εἶναι ἐκπεφρασμένη εἰς ὅρους τῶν $(n-1)$ αὐτῶν, εἰς τὸν δεύτερον γύρον δύο τῶν μεταβλητῶν νὰ εἶναι ἐκπεφρασμένη εἰς ὅρους τῶν $(n-2)$ αὐτῶν κ.ο.κ. μέχρις ὅτου τελικῶς ὅλαι αἱ μεταβληταὶ νὰ εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς ὅρους οὐδεμιᾶς ἐξ αὐτῶν, δηλαδὴ νὰ εἶναι ἐκπεφρασμέναι ὡς σταθεροὶ ὅροι.

Ἡ ἰδέα αὐτὴ εἶναι δυνατὸν νὰ γενικευθῇ, ἐὰν εἰς κάθε βῆμα δὲν ἀπαλείφωμεν μίαν μόνον μεταβλητὴν τῆς σειρᾶς βάσεως ἀλλὰ τόσας ταυτοχρόνως ὡς εἶναι προδιαγεγραμμένον ἐκ τῆς τάξεως μιᾶς ἀντιστροφῆς, ἣν δίδει ἡ μηχανὴ ἀπ' εὐθείας δι' ἑνὸς κτυπήματος. Μολονότι ἕκαστον βῆμα κατὰ τὴν συνήθη ἀπαλοιφὴν εἰς τὸν ἀλγόριθμον τοῦ Gauss περιλαμβάνει μίαν διαίρεσιν, δηλαδὴ τὸν σχηματισμὸν ἑνὸς ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ (reciprocal number)—καὶ μερικοὺς πολλαπλασιασμούς — κάθε βῆμα τοῦ ἐπεκτεινομένου ἀλγορίθμου (extended algorithm) περιλαμβάνει τὸν σχηματισμὸν μιᾶς ἀντιστρόφου μήτρας (καί τινας πολλαπλασιασμοὺς μήτρας).

Τελικῶς ἡ διαδικασία δύναται νὰ γενικευθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν θὰ ὑπάρχουν περισσότεροι ἄγνωστοι παρὰ ἐξισώσεις, λ.χ. $n+m$ ἄγνωστοι καὶ m ἐξισώσεις. Τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα θὰ συνίσταται τότε εἰς γραμμικὰς συναρτήσεις ὅπου m τῶν μεταβλητῶν εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς ὅρους τῶν n ἐξ αὐτῶν. Ἡ περίπτωσις αὐτὴ συναντᾶται εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν ὅταν ἐπιθυμοῦμεν νὰ φέρωμεν τὰς ἐπὶ πλέον ἐξισώσεις εἰς μίαν μορφὴν βάσεως. Τὰ ἀκόλουθα συνιστοῦν τοὺς ἐπεξηγηματικοὺς γενικοὺς τύπους. Θεωρήσωμεν τάς :

$$a_{i0}+\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij}x_j=0 \qquad (i=1,2\ldots m) \tag{4.1}$$

ὅτι ἀποτελοῦν m γραμμικῶς ἀνεξαρτήτους ἐξισώσεις συνδεούσας τὰς $n+m$ μεταβλητὰς $x_1, x_2 \ldots x_{n+m}$, τῶν a ὄντων δεδομένων σταθερῶν.

Ἐκλέξωμεν σειρὰν ἐκ ν μεταβλητῶν $(\nu<m)$ καὶ ἀριθμήσωμεν ταύτας $\alpha \ldots \gamma$. Ἐκλέξωμεν ἐπίσης σειρὰν ν ἐξισώσεων καὶ ἀριθμήσωμεν ταύτας $\alpha' \ldots \gamma'$, καὶ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἐξισώσεις ταύτας ἵνα ἐκφράσωμεν τὰς ν μεταβλητὰς εἰς ὅρους τῶν ἑτέρων $n+m-\nu$ μεταβλητῶν. Πρὸς τοῦτο θεωρήσωμεν τὴν μήτραν :

(4.2) $\begin{pmatrix} a_{\alpha'\alpha} \ldots\ldots a_{\alpha'\gamma} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{\gamma'\alpha} \ldots\ldots a_{\gamma'\gamma} \end{pmatrix}$ καὶ τὴν ἀντίστροφόν της $\begin{pmatrix} a^{-1}_{\alpha\alpha'} \ldots\ldots a^{-1}_{\alpha\gamma'} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a^{-1}_{\gamma\alpha'} \ldots\ldots a^{-1}_{\gamma\gamma'} \end{pmatrix}$

Εἰς ὅρους τῆς ἀντιστρόφου ταύτης μήτρας, ἔχομεν

(4.3) $$x_r = b^{(1)}_{r0} + \sum_{j=k,2\ldots)\alpha\ldots\gamma(\ldots n+m} b^{(1)}_{rj}\, x_j \qquad (r=\alpha\ldots\gamma)$$

ἔνθα

(4.4) $$b^{(1)}_{rj} = \sum_{r'=\alpha'\ldots\gamma'} a^{-1}_{rr'}\, a_{r'j} \qquad \begin{pmatrix} r=\alpha\ldots\gamma \\ j=0,1\ldots)\alpha\ldots\gamma(\ldots n+m \end{pmatrix}$$

Εἰσάγοντες τὴν (4.3) εἰς ὅλας τὰς ἐξισώσεις (4.1) ἐξαιρέσει τῶν ἐξισώσεων α' ... γ', θὰ ἔχωμεν:

(4.5) $$a^{(1)}_{i0} + \sum_{j=1,2\ldots)\alpha\ldots\gamma(\ldots n+m} a^{(1)}_{ij}\, x_j = 0 \qquad (i=1,2\ldots)\alpha'\ldots\gamma'(\ldots m)$$

ἔνθα

(4.6) $$a^{(1)}_{ij} = a_{ij} + \sum_{r=\alpha\ldots\gamma} a_{ir}\, b^{(1)}_{rj} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2\ldots)\alpha'\ldots\gamma'(\ldots m \\ j=0,1,\ldots)\alpha\ldots\gamma(\ldots n+m \end{pmatrix}$$

Ἐκλέγομεν ἀκολούθως μίαν νέαν σειρὰν μεταβλητῶν, νῦν μ εἰς ἀριθμὸν ($\mu \leqq m-\nu$), ἀριθμοῦμεν αὐτὰς θ ... δ, καὶ ἐκλέγομεν ἐπίσης μ ἐξισώσεις τῆς (4.5) ἀριθμοῦντες αὐτὰς θ ... δ. Οὐδεμία τῶν μεταβλητῶν θ ... δ παρουσιάζεται εἰς τὴν σειρὰν α ... γ καὶ οὐδεμία τῶν ἐξισώσεων θ' ... δ' παρουσιάζεται εἰς τὴν σειρὰν α' ... γ'. Διὰ τῶν ἐξισώσεων θ' ... δ' τῆς (4.5) ἐκφράζομεν τὰς μεταβλητὰς θ ... δ εἰς ὅρους τῶν ἑτέρων $n+m-\nu-\mu$ μεταβλητῶν. Πρὸς τοῦτο θεωρήσωμεν τὴν μήτραν:

(4.7) $\begin{pmatrix} a^{(1)}_{\theta'\theta} \ldots a^{(1)}_{\theta'\delta} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a^{(1)}_{\gamma'\theta} \ldots a^{(1)}_{\gamma'\delta} \end{pmatrix}$ καὶ τὴν ἀντίστροφόν της $\begin{pmatrix} a^{-1(1)}_{\theta\theta'} \ldots a^{-1(1)}_{\theta\delta'} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a^{-1(1)}_{\delta\theta'} \ldots a^{-1(1)}_{\delta\delta'} \end{pmatrix}$

Εἰς ὅρους τῆς ἀντιστρόφου ταύτης μήτρας, ἔχομεν

(4.8) $$x_r = b^{(2)}_{r0} + \sum_{j=1,2\ldots)\alpha\ldots\gamma,\ \theta\ldots\delta(\ldots n+m} b_{rj}\, x_j \qquad (r=\theta\ldots\delta)$$

ἔνθα

(4.9) $$b^{(2)}_{rj} = -\sum_{r'=\theta'\ldots\delta'} a^{-1(1)}_{rr'}\, a^{(1)}_{r'j} \qquad \begin{pmatrix} r=\theta\ldots\delta \\ j=0,1\ldots)\alpha\ldots\gamma,\ \theta\ldots\delta(\ldots n+m \end{pmatrix}$$

Εἰσάγοντες τὴν (4.8) εἰς τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (4.3), θὰ ἔχωμεν:

(4.10) $$x_r = b^{(2}_{r0} + \sum_{j=1,2\ldots)\alpha\ldots\gamma,\theta\ldots\delta(\ldots n+m} b^{(2)}_{rj}\, x_j \qquad (r=\alpha\ldots\gamma)$$

ἔνθα

$$b_{rj}^{(2)} = b_{rj}^{(1)} \sum_{s=\theta...\delta} b_{rs}^{(1)} b_{sj}^{(2)} \qquad \begin{pmatrix} r = \alpha ... \gamma \\ j = 0,1...)\alpha...\gamma, \theta...\delta(...n+m \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Διὰ τῶν (4.10) καὶ (4.8) αἱ $\nu+\mu$ μεταβληταὶ $\alpha ... \gamma$, $\theta ... \delta$ εἶναι ἐκπεφρασμέναι εἰς ὅρους τῶν ὑπολειπομένων $n+m-\nu-\mu$ μεταβλητῶν.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον συνεχίζομεν μέχρις ὅτου παραμείνουν n μεταβληταὶ εἰς τὸ δεξιὸν μέλος. Ἐν συνεχείᾳ, αἱ ἐξισώσεις ἀνάγονται εἰς μίαν μορφὴν βάσεως. Ἐὰν $n=0$ ἔχομεν τὴν λύσιν ἑνὸς συνήθους συστήματος ἐξισώσεων.

5. Διευθυντικὴ τεχνικὴ

Κατὰ τὴν ἐργασίαν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ μὲ τὰς μεθόδους τοῦ Ἰνστιτούτου τοῦ Ὄσλο, συχνάκις ἀντιμετωπίσθη τὸ πρόβλημα μετακινήσεως ἐξ ἑνὸς ἀρχικοῦ σημείου κατὰ μίαν ***διεύθυνσιν***, προσδιωρισμένην κατὰ κάποιον εἰδικὸν τρόπον. Θεωρεῖται ὅθεν πρόσφορος ἡ θεώρησις ὡρισμένων γενικῶν ἀπόψεων ἐπὶ τῆς ὡς εἴρηται διευθυντικῆς τεχνικῆς (directional techniques). Πρὸς τοῦτο θὰ ὑποθέσωμεν, χάριν γενικεύσεως, ὅτι τὸ ἀρχικὸν σημεῖον x_k^0 $(k=u, v ... w)$ εἶναι δυνατὸν νὰ κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς. Ὅπερ σημαίνει ὅτι κάθε μεταβλητὴ x_j $(j=1,2...n+m)$ θὰ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ ἢ μηδέν.

Μία διεύθυνσις δύναται νὰ ὁρισθῇ διὰ τοῦ καθορισμοῦ ἑνὸς ***σημείου διευθύνσεως*** (directional point) x_k' $(k=u, v ... w)$ πρὸς τὸ ὁποῖον σκοπεύομεν ἐκ τοῦ x_k^0 $(k=u, v ... w)$. Αἱ αὐξήσεις (the increments) τῶν μεταβλητῶν βάσεως, καθὼς θὰ μετακινούμεθα ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου πρὸς τὸ σημεῖον διευθύνσεως, θὰ εἶναι:

$$d_k = x_k' - x_k^0 \qquad (k=u, v ... w) \tag{5.1}$$

Ἡ διεύθυνσις δύναται νὰ ὁρισθῇ εἴτε διὰ τῶν αὐξήσεων διευθύνσεως (directional increments) d_k εἴτε διὰ τῶν τιμῶν x_k' τῶν μεταβλητῶν βάσεως τοῦ σημείου διευθύνσεως. Ἑκάστη δὲ τῶν σειρῶν αὐτῶν στοιχείων εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἑτέραν βάσει τῆς (5.1).

Δι' ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν – μεταβλητῶν βάσεως ἢ ἀνεξαρτήτων – ἡ αὔξησις διευθύνσεως ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως :

$$d_j = x_j' - x_j^0 \qquad (j=1,2 ... n+m) \tag{5.2}$$

Ἐὰν ὅλαι αἱ αὐξήσεις διευθύνσεως τῶν μεταβλητῶν βάσεως εἶναι δεδομέναι, αἱ ἀντίστοιχοι τῶν ἄλλων μεταβλητῶν δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῆς :

$$d_j = \sum_{k=u,v...w} b_{jk} d_k \qquad (j=1,2 ... n+m) \tag{5.3}$$

Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς (2.3).

Θεωρήσωμεν ἤδη δύο ἐπὶ πλέον τρόπους καθορισμοῦ μιᾶς διευθύνσεως, εἰδικώτερον, τὴν ***πλήρως αὐξητικὴν μέθοδον*** (completely incremental method) καὶ τὴν ***μέθοδον τῶν ροπῶν*** (moment method).

Εἰς τὴν πλήρως αὐξητικὴν μέθοδον ἐκλέγομεν n μεταβλητὰς — μεταβλητὰς βάσεως ἢ ἐξηρτημένας μεταβλητάς —, ἴσας εἰς ἀριθμὸν πρὸς τοὺς βαθμοὺς ἐλευθερίας, καὶ διαγράφομεν τὰς αὐξήσεις διευθύνσεως αὐτῶν τῶν ἐπιλεγεισῶν μεταβλητῶν. Δεχόμεθα ὅτι ἡ ἐπιλογὴ ἐγένετο κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ $n \times n$ ὑπομήτρα (submatrix).

$$b_{ik} \qquad \begin{pmatrix} i = r, s \ldots t \\ k = u, v \ldots w \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

νὰ εἶναι μὴ μοναδική, ἔνθα οἱ ἀριθμοὶ $i = r, s \ldots t$ εἶναι αἱ ἐπιλεγεῖσαι μεταβληταί.

Μὲ δεδομένον τὸ d_i $(i = r, s \ldots t)$ τὸ γραμμικὸν σύστημα:

$$\sum_{k=u,v\ldots w} b_{ik}\, d_k = d_i \qquad (i = r, s \ldots t) \tag{5.5}$$

θὰ ἔχῃ μίαν μοναδικὴν λύσιν διὰ d_k $(k = u, v \ldots w)$. Ἐφόσον δὲ αἱ αὐξήσεις διευθύνσεως τῆς βάσεως εἶναι γνωσταί, ὅλαι αἱ λοιπαὶ αὐξήσεις θὰ προσδιορίζωνται διὰ τῆς (5.3).

Εἰς τὴν μέθοδον τῶν ροπῶν διαγράφομεν ἐπίσης τὰς αὐξήσεις διευθύνσεως (ἢ τὰς τιμὰς διευθύνσεως — the directional values) δι' ὡρισμένον ἀριθμὸν ἐπιλεγεισῶν μεταβλητῶν, τώρα ὅμως ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δυνατὸν νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας. Ἵνα καλυφθῇ ἡ ἐλευθερία, ἥτις ἐκ τοῦ γεγονότος τούτου θὰ παραμείνῃ, προσθέτομεν τὴν προδιαγραφὴν (specification) ὅτι τὸ διάνυσμα τῆς διευθύνσεως βάσεως d_k θὰ εἶναι γραμμικῆς μορφῆς εἰς τὰ ὁριακὰ διανύσματα τῶν ἐπιλεγεισῶν μεταβλητῶν. Ἀκριβέστερον: Θεωρήσωμεν τὰ $i = r, s \ldots t$ ὡς ἀποτελοῦνται $\nu\,(\leqq n)$ ἐπιλεγεῖσας μεταβλητὰς δι' ἃς αἱ αὐξήσεις διευθύνσεως d_i (ἢ αἱ τιμαὶ διευθύνσεως x_i') εἶναι δεδομέναι. Ἡ ἐπιλεγεῖσα σειρὰ ὑποτίθεται τοιαύτη ὥστε τὰ ὁριακὰ διανύσματα:

$$b_{rk},\ b_{sk},\ \ldots\ b_{tk} \tag{5.6}$$

νὰ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ἐφ' ἑνὸς πεδίου μεταβλητικότητος $k = u, v \ldots w$. Προσδιορίζομεν ἀκολούθως τὴν κίνησιν ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ διάνυσμα διευθύνσεως d_k ἀνήκει εἰς τὸ ὁριζόμενον γραμμικὸν σύνολον (manifold) διὰ τῶν διανυσμάτων (5.6) ἅτινα εἶναι ὀρθογωνικὰ πρὸς τὰ ὁριακὰ ἐπίπεδα (boundary planes), δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν:

$$d_k = C_r b_{rk} + C_s b_{sk} + \ldots C_t k_{tk} \qquad (k = u, v \ldots w) \tag{5.7}$$

ἔνθα C_r, $C_s \ldots C_t$ ἀποτελοῦν σειρὰν σταθερῶν ἀνεξαρτήτων τοῦ k.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν (5.7) ἐπὶ b_{ik} $(i = r, s \dots t)$ καὶ ἐκτελέσωμεν τὴν ἄθροισιν τῶν k, θὰ ἔχωμεν:

$$(5.8) \qquad M_{ir}C_r + M_{is}C_s + \dots + M_{it}C_t = d_i \qquad (i = r, s \dots t)$$

ἔνθα αἱ ροπαὶ ὁρίζονται διὰ τῆς:

$$(5.9) \qquad M_{\alpha\beta} = \sum_{k=u,\, v \dots w} b_{\alpha k}\, b_{\beta k}$$

Ἡ (5.8) ἀποτελεῖ γραμμικὸν σύστημα ν ἐξισώσεων πρὸς προσδιορισμὸν τῶν ν ἀγνώστων C. Τὸ σύστημα εἶναι μὴ μοναδικὸν λόγῳ τῆς ὑποθέσεώς μας ὅσον ἀφορᾷ τὴν γραμμικὴν ἀνεξαρτησίαν τῶν διανυσμάτων (5.6). Τὸ σύστημα εἶναι ἐπιπροσθέτως συμμετρικὸν καὶ θετικῶς ὡρισμένον, δηλαδὴ τῆς ἰδίας φύσεως ὡς τὸ ἔχομεν συναντήσει εἰς τὴν γραμμικὴν ἀνάλυσιν παλινδρομήσεως. Ὅταν τὰ C προσδιορισθοῦν διὰ τῆς (5.8) τὰ d_k προσδιορίζονται διὰ τῆς (5.7) καὶ τελικῶς τὰ d_j διὰ τῆς (5.3).

Εἰς τ' ἀνωτέρω οὐδὲν ἐλέχθη ὅσον ἀφορᾷ τὴν φύσιν τῶν τιμῶν ἂς θὰ περιγράψωμεν (prescribe) διὰ τὰς αὐξήσεις διευθύνσεως (ἢ τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου διευθύνσεως). Ἐπὶ παραδείγματι, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιζητῆται ὅπως αἱ τιμαὶ τῶν ἐπιλεγεισῶν μεταβλητῶν κατευθυνθοῦν πρὸς τὸ μηδέν, ἢ νὰ ἐπιζητῆται ὅπως διασφαλισθῇ ὅτι αἱ ἐπιλεγεῖσαι μεταβληταὶ παραμείνουν ἀμετάβλητοι (εἰς τὴν μέθοδον τῶν ροπῶν τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ μόνον διὰ (ν–1) τῶν ἐπιλεγεισῶν μεταβλητῶν, ἄλλως ἔχομεν τὴν νόθον λύσιν – the trivial solution – : οὐδεμία μεταβολή). Ὑπάρχουν ἐπίσης ἕτεροι, περισσότερον πολύπλοκοι τρόποι προσδιορισμοῦ μιᾶς διευθύνσεως (συγκρίνατε λ.χ. τοὺς τοῦ κεφαλαίου 8).

Ἡ τεχνικὴ διευθύνσεως δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὅταν ἐργαζώμεθα ἐπὶ τῆς κατευθύνσεώς μας πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς ἢ ἀκόμη θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ ὅταν εὑρισκώμεθα ἐντὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς καὶ ἀναζητοῦμεν τὰς ἀρίστας μεταβλητὰς (optimum variables), δηλαδὴ τὰς μεταβλητὰς αἵτινες μηδενίζονται εἰς τὸ ἄριστον σημεῖον (optimum point).

Ὅταν μία διεύθυνσις ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου x_k^0 $(k = u, v \dots w)$ εἶναι κατὰ κάποιον τρόπον καθωρισμένη δυνάμεθα νὰ μετακινηθῶμεν κατ' αὐτὴν τὴν διεύθυνσιν ἐπὶ βραχυτέραν ἢ μακροτέραν ἀπόστασιν, δηλαδὴ ὄχι ἀπαραιτήτως ἐπὶ τόσην ἀπόστασιν ὥστε νὰ φθάσωμεν ἀκριβῶς εἰς τὸ σημεῖον διευθύνσεως, ὅπερ ἀρχικῶς ἐθεωρήσαμεν. Κατὰ τὴν μετακίνησιν αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν μεταβλητῶν θὰ ἀλλάξουν γραμμικῶς συμφώνως πρὸς τὸν τύπον.

$$(5.10) \qquad x_j = x_j^0 + \lambda d_j \qquad (j = 1, 2 \dots n+m)$$

ἔνθα λ εἶναι παράμετρος παράγουσα τὴν κίνησιν. Ἡ τιμὴ $\lambda = 0$ δίδει τὸ ἀρχικὸν σημεῖον καὶ $\lambda = 1$ τὸ σημεῖον διευθύνσεως. Ἐὰν τὸ ἀρχικὸν σημεῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς δυνατὸν ν' ἀποφασίσωμεν νὰ μετακινηθῶμεν, λ.χ. ἐπὶ τόσην ἀπόστασιν ὥστε νὰ μὴ ἐξέλθωμεν τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς, ἢ εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ τὸ μῆκος τῆς κινήσεως βάσει ἑτέρων θεωρήσεων.

6. Κολοβωτικὴ τεχνικὴ

Συχνάκις θὰ ἔχωμεν νὰ θεωρήσωμεν ὄχι μόνον τὴν διαδικασίαν μετακινήσεως ἐξ ἑνὸς ἀρχικοῦ σημείου πρὸς ἓν προσδιωρισμένον σημεῖον πληροῦν ὡρισμένας προδιαγραφὰς (specifications), ὡς ἐγένετο εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, ἀλλὰ θὰ πρέπει ν' ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ γενικώτερον πρόβλημα *τοῦ προσδιορισμοῦ ἑνὸς νέου γραμμικοῦ συνόλου* (manifold) ὅπερ νὰ πληροῖ ὡρισμένας προδιαγραφάς, ὀλιγωτέρας εἰς ἀριθμὸν τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας τοῦ προβλήματος. Εἰδικώτερον, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς μορφῆς τῶν ἐξισώσεων βάσεως ἐπὶ ἑνὸς *νέου κολοβωμένου χώρου* (a new truncated space). Ἡ ἰδέα ἑνὸς ἀρχικοῦ σημείου καθίσταται νῦν περιττὴ καθόσον πράγματι δὲν ἀσχολούμεθα πλέον καθόλου μὲ ἰδιάζοντα σημεῖα ἢ μὲ ἰδιαζούσας κινήσεις παρὰ μόνον μὲ τὸ σχῆμα ὡρισμένων γραμμικῶν συνόλων (linear manifolds).

Ἀρχίζομεν ἐκλέγοντες μίαν ὑποσειρὰν μεταβλητῶν. Θεωρήσωμεν ταύτας ὅτι εἶναι (6.1) μ ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ $r, s \ldots t$ καὶ μεταβληταὶ βάσεως $R, S \ldots T$, ἔνθα:

$$(6.2) \qquad \mu + \nu \leqq n \qquad 0 \leqq \mu \qquad 0 \leqq \nu$$

Δεχόμεθα ὅτι ἡ ἐπιλογὴ ἐγένετο κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ τάξις τῆς $\mu \times (n-\nu)$ μήτρας:

$$(6.3) \qquad \left\| \begin{array}{llll} b_{ru} & b_{rv} \ldots) \, b_{rR} & b_{rS} \ldots b_{rT} \, (\ldots b_{rw} \\ b_{su} & b_{sv} \ldots) \, b_{sR} & b_{sS} \ldots b_{sT} \, (\ldots b_{sw} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ b_{tu} & b_{tv} \ldots) \, b_{tR} & b_{tS} \ldots b_{tT} \, (\ldots b_{tw} \end{array} \right\|$$

νὰ εἶναι ἀκριβῶς μ. Τοῦ μ, βάσει τῆς (6.2), μὴ ὄντος μεγαλυτέρου τοῦ $n-\nu$ (ἡ (6.3) εἶναι ἰσχυροτέρα συνθήκη ἔναντι τῆς ἀντιστοίχου συνθήκης, ἥτις ἐπεἐπεβλήθη *πρὸ* τῶν παραλειφθεισῶν ν στηλῶν τῶν μεταβλητῶν βάσεων $R, S \ldots T$).

Ἐνεργηθείσης τῆς ἐπιλογῆς ταύτης, διερευνῶμεν τὸ γραμμικὸν σύνολον τὸ ὁριζόμενον διὰ τῶν $(\mu+\nu)$ συνθηκῶν:

$$(6.4) \qquad \underbrace{x_r = x_s = \ldots = x_t = 0}_{\mu} \qquad \underbrace{x_R = x_S = \ldots = x_T = 0}_{\nu}$$

Ἡ συνθήκη (6.4) μᾶς παρέχει $n-(\mu+\nu)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας, ὅπερ σημαίνει ὅτι μεταξὺ τῶν ἀρχικῶν μεταβλητῶν βάσεως $k = u, v \ldots w$ ὑπάρχει μία ὑποσειρὰ ἐκ $n-(\mu+\nu)$ μεταβλητῶν, τῶν $U, V \ldots W$, τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι μία γραμμικῶς ἀνεξάρτητος σειρά, ἥτις νὰ δύναται κατὰ συνέπειαν νὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς παραγωγὴν (generate) τῶν ὑπολειπομένων βαθμῶν ἐλευθερίας $n-(\mu+\nu)$. Κατὰ κανόνα μία τοιαύτη σειρὰ δύναται νὰ ἐπιλεγῇ κατὰ διαφόρους τρόπους. Ἐφόσον ἐδέχθημεν διὰ τὴν (6.3) ὅτι εἶναι τάξεως μ θὰ ὑπάρχῃ τουλάχιστον μία σειρὰ $n-(\mu+\nu)$ μεταβλητῶν δυναμένη νὰ ἐπιλεγῇ διὰ τὸν σκοπόν μας, δηλαδὴ ἡ ληφθεῖσα σειρὰ ἐκ τῶν $u, v \ldots) R, S \ldots T(\ldots w$ διὰ τῆς παραλείψεως τῶν μ μεταβλητῶν $H = A, B \ldots C$ ἔνθα $A, B \ldots C$, εἶναι σειρὰ ἧς ἡ ὁρίζουσα :

$$
(6.5) \qquad |b_{iH}| = \begin{vmatrix} b_{rA} & b_{rB} & \ldots & b_{rC} \\ b_{sA} & b_{sB} & \ldots & b_{sC} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{tA} & b_{tB} & \ldots & b_{tC} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i = r, s \ldots t \\ H = A, B \ldots C \end{pmatrix}
$$

εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Ἐὰν χρειάζεται, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὅλας τὰς ὑπολειπομένας μεταβλητάς, δηλαδὴ τὰς μὴ τεθεῖσας ἴσας πρὸς μηδέν, δηλαδὴ τὰς $j = 1, 2 \ldots) r, s \ldots t, R, S \ldots T(\ldots n+m$, εἰς ὅρους τῶν $n-(\mu+\nu)$ μεταβλητῶν βάσεως $K = u, v \ldots) R, S \ldots T, A, B \ldots C(\ldots w$. Χάριν συντομίας σημειοῦμεν τὰς μεταβλητὰς ταύτας διά :

$$
(6.6) \qquad K = \underbrace{U, V \ldots W}_{n-(\mu+\nu)} = u, v \ldots) \underbrace{R, S \ldots T}_{\nu} (\ldots) \underbrace{A, B, \ldots C}_{\mu} (\ldots w
$$

Οὕτω, αἱ $U, V \ldots W$ ἀποτελοῦν ὑποσειρὰν τῶν ἀρχικῶν μεταβλητῶν βάσεως $u, v \ldots w$, εἶναι δὲ αὕτη μία γραμμικῶς ἀνεξάρτητος ὑποσειρά. Συνοπτικῶς, εἶναι ἁπλῶς μία κολοβωμένη σειρὰ μεταβλητῶν βάσεως. Διὰ τοὺς πρακτικοὺς ὑπολογισμοὺς πραγματικῶς δὲν χρειάζεται νὰ ἐκφρασθοῦν ὅλαι αἱ μεταβληταὶ εἰς ὅρους τῶν μεταβλητῶν τῆς κολοβωμένης σειρᾶς, συχνάκις ὅμως θὰ εἶναι χρήσιμον νὰ γίνῃ τοῦτο. Ἡ σχετικὴ διαδικασία ἔχει ὡς ἀκολούθως.

Ἀρχίζομεν δεχόμενοι ὅτι αἱ ἐξισώσεις εἶναι δεδομέναι ὑπὸ τὴν μορφὴν βάσεως τῆς (2.3). Ἡ διαδικασία τῆς θέσεως τῶν μεταβλητῶν βάσεως $R, S \ldots T$ ἴσων πρὸς μηδὲν δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς παραλείψεως ἁπλῶς τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς (2.3). Τοῦτο οὐδέποτε εἶναι δυνατὸν νὰ προκαλέσῃ οἱασδήποτε γραμμικὰς ἐξαρτήσεις μεταξὺ οἱωνδήποτε τῶν μεταβλητῶν. Ἡ διαδικασία τῆς θέσεως τῶν ἐξηρτημένων μεταβλητῶν $r, s \ldots t$ ἴσων πρὸς μηδὲν καὶ ἡ συναγωγὴ τῶν ἐξ αὐτοῦ προκυπτόντων συνεπειῶν δύναται πάντοτε νὰ κατορθωθῇ διὰ τῆς, ἐν πρώτοις, ἀλλαγῆς τῆς συνθέσεως τῆς σειρᾶς βάσεως. Ἐξάγομεν ἐκτὸς τῆς σειρᾶς βάσεως τὰς $A, B \ldots C$ εἰσάγοντες αὐτὰς εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἐξηρτημένων μεταβλητῶν, ἀντ' αὐτῶν δὲ περιλαμβάνομεν εἰς τὴν σειρὰν βάσεως τὰς $r, s \ldots t$ (τοῦτο δὲν ἀλλάσσει τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταβλητῶν τῆς σειρᾶς βάσεως ἐφόσον καὶ εἰς τὰς δύο σειρὰς $A, B \ldots C$ καὶ $r, s \ldots t$ ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν εἶναι ὁ ἴδιος, δηλαδὴ μ). Ὅταν τοῦτο ἐκτελεσθῇ δυνάμεθα ἁπλῶς νὰ παραλείψωμεν τοὺς ὅρους τοὺς περιλαμβάνοντας τὰς $r, s \ldots t$ εἰς τὰς ἐκφράσεις τῆς νέας βάσεως.

Οἱ τύποι πρὸς ἐκπλήρωσιν τῶν μεταβολῶν αὐτῶν ἀναπτύσσονται εἰς τὸ κεφάλαιον 4 τοῦ ὑπομνήματός μας ἐπὶ τῶν «Ἀρχῶν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ». Ἐνταῦθα δίδομεν μόνον τὸ ἀποτέλεσμα. Ἐὰν b καὶ b' εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἐξισώσεων βάσεως τῆς ἀρχικῆς καὶ τῆς νέας μορφῆς ἀντιστοίχως (πρὶν τεθῇ οἱαδήποτε τῶν μεταβλητῶν ἴση πρὸς μηδὲν ὡς ἐγένετο ἤδη) θὰ ἔχωμεν, σημειοῦντες τὴν ἀντίστροφον τῆς (6.5) διὰ τοῦ b^{-1}_{Hi} καὶ πρὸς συντομίαν τὸ p_k διὰ b_{0k} :

(6.7) $$b'_{Hi} = b^{-1}_{Hi} \qquad \begin{pmatrix} H = A,\ B \dots C \\ i\ = r,\ s \dots t \end{pmatrix}$$

(6.8) $$b'_{HK} = -\sum_{i=r,\,s\dots t} b^{-1}_{Hi}\, b_{iK} \qquad \begin{pmatrix} H = A,\ B \dots C \\ K = 0,\ u,\ v \dots)\, A, B \dots C\, (\dots w \end{pmatrix}$$

(6.9) $$b'_{ji} = \sum_{H=A,B\dots C} b_{jH}\, b^{-1}_{Hi} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2 \dots)\, u, v \dots w, r, s \dots t\, (\dots n+m \\ i = r, s \dots t \end{pmatrix}$$

(6.10) $$b'_{jK} = b_{jK} + \sum_{H=A,B\dots C} b_{jH}\, b'_{HK} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2 \dots)\, u, v \dots w, r, s \dots t\, (\dots n+m \\ K = 0,\ u,\ v \dots)\, A, B \dots C\, (\dots w \end{pmatrix}$$

(6.11) $$b_{jK} = b_{jK} - \sum_{i=r,s\dots t} b'_{ji}\, b_{iK} \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2 \dots)\, u, v \dots w, r, s \dots t\, (\dots n+m \\ K = 0,\ u,\ v \dots)\, A, B \dots C\, (\dots w \end{pmatrix}$$

Πίναξ (6.12) ***Κατάλογος τῶν τύπων πρὸς χρησιμοποίησιν κατὰ τὴν διενέργειαν ὑποκαταστάσεων εἰς τὴν σειρὰν βάσεως.***

b' = συντελεσταὶ τῆς νέας μορφῆς βάσεως

	$k=0 \quad k=u, v\dots$	$r, s \dots t$	$R, S \dots T$
$j = 0\,(f)$ 1 2 ⋮) u ( ) v (⋮) w (⋮	(6.10) ἢ (6.11)	(6.9)	(6.10) ἢ (6.11)
A B ⋮ C	(6.8)	(6.7)	(6.8)
⋮ n+m	(6.10) ἢ (6.11)	(6.9)	(6.10) ἢ (6.11)

Ὁ ἀριθμὸς τῶν περιλαμβανομένων πολλαπλασιασμῶν καὶ / ἢ διαιρέσεων μὴ ὑπολογιζομένων τῶν ἐλέγχων, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν δὲ ὅτι ἡ ἀντιστροφὴ τάξεως μ ἐκτελεῖται βάσει μεθόδου τινός, λ.χ. τοῦ ἀλγορίθμου ἀποκλεισμοῦ τοῦ Gauss (Gaussian elimination algorithm), ὁ ὁποῖος περικλείει μίαν ἐργασίαν τάξεως μ^3, θὰ εἶναι ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα (6.13).

Πίναξ (6.13) ***Ἀριθμὸς πολλαπλασιασμῶν καὶ / ἢ διαιρέσεων περιλαμβανομένων εἰς μίαν μετατόπισιν τοῦ περιεχομένου τῆς βάσεως.***

	Ἐργασία ἀπαιτουμένη ὅταν αἱ ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ r, s ... t καὶ αἱ ν μεταβληταὶ βάσεως R, S...T ἔχουν τεθῆ ἴσαι πρὸς μηδέν	Πρόσθετος ἐργασία ὅταν οὐδεὶς βαθμὸς ἐλευθερίας ἐγκαταλείπεται, αἱ προηγούμεναι ὅμως μεταβληταὶ βάσεως A, B...C παραλείπονται ἐκ τῆς σειρᾶς βάσεως καὶ ἀντ' αὐτῶν εἰσάγονται εἰς τὴν σειρὰν βάσεως αἱ μ προηγουμένως ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ r, s ... t
(6.7)	μ^3	0
(6.8)	$\mu^2(n-\mu-\nu+1)$	$\mu^2\nu$
(6.9)	0	$\mu^2(m-\mu+1)$
(6.10)	$\mu(m-\mu+1)(n-\mu-\nu+1)$	$\mu\nu(m-\mu+1)$
Σύνολον	$\mu^3+\mu(m+1)(n-\mu-\nu+1)$	$\mu(\mu+\nu)(m+1)-\mu^3$

Ἐὰν τὸ m εἶναι πολὺ μεγάλο ἐνῶ τὰ n, μ καὶ ν εἶναι τῆς ἰδίας τάξεως μεγέθους καὶ σημαντικῶς μικρότερα τοῦ m, ἡ ἀπαιτουμένη πρόσθετος ἐργασία διὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ περιεχομένου τῆς σειρᾶς βάσεως χωρὶς νὰ τεθῇ οἱαδήποτε μεταβλητὴ ἴση πρὸς μηδέν, θὰ εἶναι τῆς ἰδίας τάξεως μεγέθους ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀπαιτουμένην ἐργασίαν καθ' ἣν ὡρισμέναι μεταβληταὶ τίθενται ἴσαι πρὸς μηδέν. Βασικὸν χαρακτηριστικὸν ἀποτελεῖ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἐργασία εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν πρώτην δύναμιν τοῦ m. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐὰν τὸ n εἶναι μόνον μετρίως μέγα (ἐντεῦθεν καὶ τὰ μ καὶ ν θὰ εἶναι ἐπίσης μετρίως μεγάλα) ἐνῶ τὸ m εἶναι πολὺ μεγάλο, ἡ ἐργασία θὰ εἶναι εἰσέτι σχετικῶς εὔκολος.

Ὁ ἀνώτατος ἀριθμὸς στοιχείων πρὸς ἐναποθήκευσιν εἰς ἕνα αὐτόματον ὑπολογιστήν, κατὰ τὴν πρόοδον τῆς ἐργασίας αὐτῆς, ἀσφαλῶς δὲν θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συντελεστῶν βάσεως τοῦ παλαιοῦ συστήματος πλέον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συντελεστῶν βάσεως τοῦ νέου συστήματος, πραγματικῶς δὲ εἶναι σημαντικῶς μικρότερος αὐτοῦ ὅταν ἡ ἐργασία ἐκτελεῖται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἐξαλείφεται μέρος τῶν παλαιῶν συντελεστῶν καθὼς θ' ἀνακύπτουν οἱ νέοι. Ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν οἱ τύποι χρησιμοποιοῦνται γραμμὴ πρὸς γραμμή, δηλαδὴ διὰ διαδοχικὰς τιμὰς τοῦ j, τὰ παλαιὰ στοιχεῖα θὰ ἐξέρχωνται τόσον ταχέως ὅσον θὰ ἐμφανίζωνται νέα οὕτως ὥστε ἐν τῇ πράξει ὁ ἀνώτατος ἀριθμὸς τῶν ἐναποθηκευμένων στοιχείων νὰ μὴ χρειάζεται νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συντελεστῶν τοῦ παλαιοῦ συστήματος.

Ὅταν τὰ b'_{jk} $(j = 1, 2 \ldots) u, v \ldots w, r, s \ldots t (\ldots w, A, B \ldots C$ καὶ $K = u, v \ldots)$ $R, S \ldots T, A, B \ldots C (\ldots w)$ ἔχουν ὑπολογισθῇ ὡς ἐπεξηγεῖται εἰς τὰς (6.7) – (6.13), θὰ ἔχωμεν τὰς νέας ἐξισώσεις βάσεως ὑπὸ τὴν ἐπεξηγηματικὴν μορφήν:

$$x_j = b'_{j0} + \sum_{K=u,v\ldots w} b'_{jK} x_K \qquad \begin{array}{c}(j = 1, 2 \ldots) u, v \ldots w, r, s \ldots t (\ldots w, A, B \ldots C) \\ \text{ὅταν πληροῦται ἡ (6.4)}\end{array} \tag{6.14}$$

Οἱ τύποι (6.14) ἀποτελοῦν ταυτότητας, αἵτινες ἰσχύουν δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν μεταβλητῶν ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς ἢ ἐπὶ τῶν περάτων αὐτῆς ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν μόνον ὅτι ἡ ὁρίζουσα (6.5) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς κολοβώσεως μιᾶς ἐλευθερίας καὶ τῆς λήψεως τῶν ἀντιστοίχων νέων ἐξισώσεων βάσεως (6.14) θὰ πρέπει νὰ προβῶμεν εἰς νέαν κολόβωσιν ἐλευθερίας κ.ο.κ. Ἡ ὅλη διαδικασία θὰ ἐμφανίζεται ὡς εἷς διαδοχικὸς ἀποχωρισμὸς τῶν μεταβλητῶν ἐκ τῆς σειρᾶς βάσεως.

Εἶναι ἐπίσης δυνατὸν νὰ ἐνεργήσωμεν κατὰ διάφορον τρόπον. Δυνάμεθα νὰ κρατήσωμεν καθ' ὅλον τὸν χρόνον τὴν ἰδίαν σειρὰν βάσεως καὶ νὰ ὑποβιβάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως περιοριστικῶν συνθηκῶν (side conditions). Τοῦτο ἐπεξηγεῖται πλήρως εἰς ἰδιαίτερον ὑπόμνημα ὑπὸ τὸν τίτλον: «Ἡ μέθοδος multiplex εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμόν».

7. Τρόποι εἰσδοχῆς εἰς τὴν παραδεκτὴν περιοχήν. Μέθοδος ἐπιλύσεως γραμμικῶν ἀνισοτήτων

Κατὰ τὴν ἐργασίαν μας, εἰς τὸ Ἰνστιτοῦτον τοῦ Ὅσλο, ἐπὶ προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, διεπιστώθη πρόσφορον ὅπως ἡ ἔρευνα ἀχθῇ εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῆς διὰ κινήσεων ἀρίστης διασχίσεως (optimum through) τοῦ ***ἐσωτερικοῦ*** τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς. Πρέπει ὅθεν νὰ ἐξευρεθῇ ἓν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικόν, δηλαδὴ νὰ εὑρεθῇ ἓν σημεῖον εἰς ὃ ὅλαι αἱ μεταβληταὶ εἶναι σταθερῶς θετικαί, ὄχι μηδενικαί. Ἐκ μιᾶς τυπικῆς ἀπόψεως τοῦτο εἶναι τὸ ἴδιον ὡς νὰ εὑρεθῇ ἡ λύσις ἐπὶ σειρᾶς γραμμικῶν ἀνισοτήτων. Πράγματι, βάσει τῆς (2.3) τὸ πρόβλημα δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς τὸ τῆς ἀνευρέσεως τοιούτων θετικῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν $x_u, x_v \ldots x_w$ ὥστε νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη:

$$b_{j0} + \sum_{k=u,v\ldots w} b_{jk} x_k \geqq 0 \qquad (j = 1, 2 \ldots) u, v \ldots w (\ldots n+m) \tag{7.1}$$

Ἀρχίζομεν διὰ τῆς ὑποδιαιρέσεως τοῦ προβλήματος εἰς δύο χωριστὰ προβλήματα. Τὸ πρῶτον συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν ***τῆς διευθύνσεως*** (the direction) τῆς κινήσεως ἐξ ἑνὸς ἀρχικοῦ σημείου. Τὸ δεύτερον συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν ***τοῦ μήκους*** (the length) τῆς κινήσεως.

Προσδιορισμὸς τῶν ἀριθμῶν τῆς διευθύνσεως

Εἷς τρόπος ἐνεργείας συνίσταται εἰς τὴν ἐκκίνησιν ἐξ οἱουδήποτε σημείου, δηλαδή, ἐξ ἑνὸς σημείου ὅπου κάθε μεταβλητὴ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι θετική, ἀρνητικὴ ἢ μηδέν, λ.χ. συμβατικῶς τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ὅλαι αἱ μεταβληταὶ βάσεως μηδενίζονται. Ἐκ τοῦ σημείου τούτου μετακινούμεθα πρὸς ἓν σημεῖον διευθύνσεως (directional point) προσδιοριζόμενον βάσει τῆς πλήρως αὐξητικῆς μεθόδου (completely incremental method) τοῦ κεφαλαίου 5. Αἱ μεταβληταί, αἵτινες εἶναι αἱ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἐπιλεγεῖσαι προσδιορίζονται ὡς ἑξῆς:

Καθορίζεται ἡ τάξις προτεραιότητος τῶν μεταβλητῶν, ὅπερ σημαίνει ὅτι λαμβάνεται πρῶτον ἡ ἰσχυρότερον ἀρνητικὴ μεταβλητή, δηλαδὴ ἡ μεταβλητή, ἥτις εἶναι ἀρνητικὴ μὲ τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν, δεύτερον, ἡ ἀμέσως ἀκολουθοῦσα ἰσχυρότερον ἀρνητικὴ μεταβλητὴ κ.ο.κ.

Συμβατικῶς θὰ καταβληθῇ προσπάθεια ἀναγωγῆς τῶν μεταβλητῶν, ἐπὶ παραδείγματι, διὰ διαιρέσεως τῶν ὅρων τῆς (2.3) διὰ τῆς:

$$\sqrt{b_{ju}^2,\ b_{jv}^2 \ldots b_{jw}^2} \tag{7.2}$$

ἐν τῇ πράξει ὅμως ὀλίγη ὠφέλεια θὰ προκύψῃ ἐκ παρομοίας ἐνεργείας. Καθὼς ὅμως ἡ ἐργασία θὰ προοδεύῃ θὰ καταστῇ ἐμφανὴς μία ἄλλη λίαν χρήσιμος μορφὴ ἀναγωγῆς. Θὰ γίνῃ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον ἀντιληπτὴ ἡ ἔκτασις τῆς μεταβολῆς τῶν διαφόρων μεταβλητῶν, ἥτις εἶναι δυνατὸν ν' ἀναμένηται, θὰ εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ ἐκτιμηθῇ καὶ τὸ ἀπόλυτον μέγεθος τῶν μεταβλητῶν ἐν σχέσει πρὸς τὴν τάξιν μεγέθους τῆς ἀναμενομένης μεταβολῆς.

Ὅταν ὅλαι αἱ ἀρνητικαὶ μεταβληταὶ ἐξαντληθοῦν, συνεχίζομεν μὲ τὰς μηδενικὰς μεταβλητάς, τῆς μεταξὺ αὐτῶν τάξεως προτεραιότητος ὁριζομένης, ἐφόσον χρειάζεται, διὰ τυχαίας ἐκλογῆς (random drawing). Ὅταν ἐξαντληθοῦν καὶ αἱ μηδενικαὶ μεταβληταί, συνεχίζομεν μὲ τὰς θετικὰς μεταβλητὰς κατὰ τὴν ἀνιοῦσαν αὐτῶν τάξιν.

Ὅταν προσδιορισθῇ ἡ τάξις προτεραιότητος τῶν μεταβλητῶν, ἀρχίζομεν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ καταλόγου καὶ ἀριθμοῦμεν ἀριθμὸν μεταβλητῶν ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας τοῦ προβλήματος. Ἐὰν κατὰ τὴν διαδικασίαν λήψεως τῶν μεταβλητῶν, μίαν πρὸς μίαν, εὑρεθῇ μεταβλητὴ ἧς τὸ ὁριακὸν διάνυσμα (boundary vector) συμβαίνει νὰ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένον πρὸς τὰ ὁριακὰ διανύσματα τῶν ἤδη ληφθεισῶν μεταβλητῶν (ἅτινας συνήθως δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν δι' ἁπλῆς ἐξετάσεως τῶν γραμμῶν καὶ τῶν στηλῶν τῆς μήτρας b_{jk}) ἡ μεταβλητὴ αὕτη παραλείπεται καὶ ἡ διαδικασία προχωρεῖ διὰ τῆς προσθήκης εἰς τὴν σειρὰν νέων μεταβλητῶν. Ὅταν συμπληρωθῇ ἡ τελικὴ σειρὰ ἐκ n μεταβλητῶν χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύστημα (5.5) θέτοντες:

(7.3) $$d_i = \begin{cases} -x_i & \text{ἐὰν} \quad x_i^0 < 0 \\ 0 & \text{ἐὰν} \quad x_i^0 \geqq 0 \end{cases}$$

Τοιουτοτρόπως προσδιορίζεται μία διεύθυνσις.

Ἑτέραν μέθοδον ἀποτελεῖ ἡ διαδικασία διὰ τῶν ἀρνητικῶν μόνον μεταβλητῶν — ἤ, δυνατόν, διὰ τῶν μὴ θετικῶν — καὶ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου τῶν ροπῶν τοῦ κεφαλαίου 5. Αὕτη θὰ περικλείῃ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ροπῶν καθὼς καὶ κάποιαν ἐπὶ πλέον σκέψιν πρὸς καθιέρωσιν τῶν ἐν συνεχείᾳ βημάτων. Εἶναι δὲ εὐκολώτερον καὶ περισσότερον μηχανικὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ μέθοδος (7.3). Εἰδικώτερον, ἐὰν ἡ δυναμικότης τοῦ αὐτομάτου ὑπολογιστοῦ εἶναι ἀρκετὰ εὐρεῖα ὥστε νὰ εἶναι δυνατὸς ὁ χειρισμὸς τοῦ συστήματος (5.5) δι' ἑνὸς ἁπλοῦ κτυπήματος τῆς μηχανῆς, θὰ πρέπει νὰ λεχθοῦν πολλὰ ὡς πρὸς τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου ταύτης. Μεγάλον πλεονέκτημα ἀποτελεῖ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁποιαδήποτε μέθοδος χρησιμοποιθεῖ μία μόνον μονόπλευρος λύσις χρειάζεται καὶ ὄχι μία πλήρης ἀντιστροφή.

Ὅταν καθορισθῇ ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως, πρέπει νὰ προσδιορισθοῦν ***ἡ ἔννοια*** (the sense) — θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ — καὶ ***τὸ μῆκος*** (the length) τῆς κινήσεως. Ἵνα τοῦτο πραγματοποιηθῇ θὰ οἰκοδομήσωμεν ἐπὶ μιᾶς ἀρχῆς, δυναμένης ν' ἀποκληθῇ ***ἡ ἀρχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀπολύτου τιμῆς*** (the principle of the absolute value sum). Αὕτη δύναται νὰ περιγραφῇ ὡς ἑξῆς:

Καθὼς μετακινούμεθα ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου κατὰ μῆκος τῆς ἤδη προσδιορισθείσης γραμμῆς, μερικαὶ ἢ ὅλαι αἱ μεταβληταὶ θὰ μεταβληθοῦν. Εἴς τινα σημεῖα μερικαὶ ἐκ τούτων θὰ μεταβάλουν ἐπίσης πρόσημον, μερικαὶ ἴσως μεταβληθοῦν ἀπὸ ἀρνητικαὶ εἰς θετικάς, ἄλλαι ἀπὸ θετικὰς εἰς ἀρνητικάς. Εἰς κάθε σημεῖον κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς, δηλαδὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ λ τοῦ τύπου (5.10), σημειοῦμεν ποῖαι τῶν μεταβλητῶν εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ θεωροῦμεν τὸ ἄθροισμα:

(7.4) $S(\lambda) =$ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν ὅλων τῶν μεταβλητῶν αἵτινες εἶναι ἀρνητικαὶ (τῶν ἀριθμῶν τῆς διευθύνσεως ὄντων δεδομένων).

Ἔχομεν τ' ἀκόλουθα θεωρήματα ὑπάρξεως * (πρὸς συντομίαν θὰ παραλείπεται ὁ ἄνω δείκτης 0 ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ x_j).

Ἐὰν ὑπάρχουν ἀμφότερα, ἄνω καὶ κάτω, τῶν ἀκολούθων περάτων (ἐντεῦθεν τὸ ἓν ἀρνητικὸν καὶ τὸ ἕτερον θετικὸν) καὶ ἔχομεν:

---

* Αἱ μεγάλαι ἀγκύλαι δεικνύουν τὰς συνθήκας διὰ τὰ ἀθροιζόμενα προσφύματα. Ἡ ἄθροισις ὑφίσταται διὰ νὰ ἐπεκταθῇ εἰς ἐκείνας καὶ μόνον εἰς ἐκείνας τὰς τιμὰς δι' ἃς πληροῦνται αἱ συνθῆκαι. Ἐὰν οὐδὲν j ὑφίσταται πληροῦν τὰς συνθήκας, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πέρας πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς μὴ ὑπάρχον.

$$(7.5)\quad -\sum_j d_j\,[\,x_j = 0,\ d > 0\,] \gtreqless \sum_j d\ [\,x_j < 0,\ d_j\ \text{θετ., ἀρν. ἢ μηδὲν}\,] \gtreqless -\sum_j d_j\,[\,x_j = 0,\ d_j < 0\,]$$

τότε δὲν θὰ ὑπάρχῃ τιμὴ τοῦ λ ἥτις νὰ καθιστᾷ τὸ S(λ) μικρότερον τῆς τιμῆς τοῦ S(0) τῆς ὑποτιθεμένης εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον.

Εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ (7.5) δὲν πληροῦται πρέπει νὰ ἔχωμεν, εἴτε

$$(7.6)\quad -\sum d_j\,[x_j = 0,\quad d_j < 0\,] < \sum d_j\,[\,x_j < 0,\quad d_j\ \text{θετ., ἀρν. ἢ μηδὲν}\,]\ \text{ἢ}$$

$$(7.7)\quad \sum d_j\,[x_j < 0,\quad d_j\ \text{θετ., ἀρν. ἢ μηδὲν}] < -\sum d_j\,[\,x_j = 0,\quad d_j > 0\,].$$

Ἐὰν πληροῦται ἡ (7.6) θὰ ὑπάρχῃ ἓν μοναδικῶς προσδιωρισμένον θετικὸν λ (ἢ ἓν μοναδικῶς προσδιωρισμένον θετικὸν λ διάστημα), τὸ ὁποῖον νὰ δίδῃ τὴν μικροτέραν τιμήν, ἣν τὸ ἄθροισμα S(λ) δύναται νὰ λάβῃ δι' ἓν θετικὸν λ, ἡ δὲ τιμὴ τοῦ S(λ) εἰς τὸ ἄριστον αὐτὸ σημεῖον (εἰς τὸ ἄριστον αὐτὸ διάστημα) θὰ εἶναι μικροτέρα της τιμῆς τοῦ S(0) εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον.

Ἐὰν ἀμφότεραι αἱ ἀνισότητες (7.6) καὶ (7.7) πληροῦνται (ὅπερ θὰ συμβῇ ἐὰν ἓν τουλάχιστον τῶν περάτων δὲν ὑφίσταται) θὰ ὑπάρχῃ μία θετικὴ ἀρίστη τιμὴ (ἓν θετικὸν ἄριστον διάστημα) τοῦ λ καθὼς ἐπίσης καὶ μία ἀρνητικὴ ἀρίστη τιμὴ (ἓν ἀρνητικὸν ἄριστον διάστημα). Ποία ἐκ τῶν δύο αὐτῶν ἀρίστων τιμῶν εἶναι ἡ καλυτέρα δύναται νὰ ἐλεγχθῇ διὰ πραγματικοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν δύο τιμῶν, χρησιμοποιουμένων πρὸς τοῦτο τῶν περιγραφομένων κατωτέρω ἀλγορίθμων. Ἡ ἀναγκαιότης τοιούτων διπλῶν ὑπολογισμῶν οὐδέποτε θὰ σημειωθῇ ἐφόσον ὅλαι αἱ μεταβληταὶ εἶναι εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ ἔχομεν:

$$\sum_j d_j\,[\,x_j < 0,\quad d_j\ \text{θετ., ἀρν. ἢ μηδὲν}\,] \neq 0$$

Παραθέσωμεν, ἐν πρώτοις, τὸν ἀλγόριθμον πρὸς προσδιορισμὸν μιᾶς θετικῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ λ.

Ἐὰν πληροῦται τὸ κριτήριον (7.6) διὰ τὴν ὕπαρξιν μιᾶς θετικῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ λ, ἡ τιμὴ αὐτὴ (τὸ διάστημα τοῦτο) προσδιορίζεται διὰ τοῦ ἐν πρώτοις ὑπολογισμοῦ τοῦ μεγέθους V_0, ὁριζομένου βάσει τῆς:

$$(7.8)\quad V_0 = -\sum_j d_j\,[\,x_j < 0,\ d_j\ \text{θετ., ἀρν. ἢ μηδὲν}\,] - \sum_j d_j\,[\,x_j = 0,\ d_j < 0\,].$$

Σημειοῦται ὅτι εἰς τὸν τύπον αὐτὸν τὸ d_j εἰσέρχεται εἰς τὴν ἄθροισιν μὲ τὸ ἀκριβὲς πρόσημον, θετικόν, ἀρνητικὸν ἢ μηδέν. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ d_j δὲν ὑπεισέρχεται. Ὅταν πληροῦται ἡ (7.6) τὸ μέγεθος V_0 θὰ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζονται οἱ συντελεσταί:

$$(7.9)\quad \lambda_j = \left|\,\frac{x_j}{d_j}\,\right| \quad \text{Δι' ὅλα τὰ } j \text{ ἔνθα } x_j \text{ καὶ } d_j \text{ ἔχουν ἀντίθετα σημεῖα, δηλαδὴ εἴτε } x_j \text{ σταθερῶς θετικὸν καὶ } d_j \text{ σταθερῶς ἀρνητικὸν εἴτε ἀντιστρόφως.}$$

Ὅλα τὰ μεγέθη λ_j θὰ εἶναι θετικὰ καὶ πεπερασμένα. Τὰ μεγέθη αὐτὰ εἶναι τακτοποιημένα κατὰ μίαν τάξιν διαδοχῆς ἀπὸ τὸ κατώτατον εἰς τὸ ἀνώτατον. Θεωρήσωμεν τὴν τάξιν ταύτην διαδοχῆς :

$$(7.10) \qquad 0 < \lambda_{(1)} < \lambda_{(2)} < \lambda_{(3)} < \ldots$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ $\lambda_{(1)}$ εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τῆς σχέσεως (7.9), τὸ $\lambda_{(2)}$ ὁ δεύτερος μικρότερος ἀριθμὸς τῆς (7.9) κ.ο.κ. Κατὰ κανόνα θὰ ὑπάρχῃ μία μόνον τιμὴ τοῦ j ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ $\lambda_{(1)}$, μία τιμὴ τοῦ j ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ $\lambda_{(2)}$ κ.ο.κ., κατ' ἀρχὴν ὅμως τίποτε δὲν θὰ ἐμποδίζῃ μερικαὶ τιμαὶ τοῦ j ν' ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ $\lambda_{(1)}$ καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον θὰ ὑπάρχουν μερικαὶ τιμαὶ τοῦ j ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὸ $\lambda_{(2)}$ κ.ο.κ.

Θεωρήσωμεν τὸ $V_{(r)}$ ὡς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ d_j, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $\lambda_{(r)}$, ἢ ἐὰν ὑπάρχουν μερικαὶ τιμαὶ τοῦ j — δηλαδὴ $j = \alpha, \beta \ldots \gamma$ — αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ $\lambda_{(r)}$ τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων αὐτῶν τιμῶν θὰ εἶναι :

$$(7.11) \qquad V_{(r)} = |d_\alpha| + |d_\beta| + \ldots + |d_\gamma| \qquad (r = 1, 2 \ldots)$$

Σημειοῦται ὅτι εἰς τὴν (7.11) λαμβάνεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ d_j, ὄχι ὅπως εἰς τὴν (7.8) τὸ ἄθροισμα τῶν d_j, μὲ τὸ ἀκριβὲς αὐτῶν πρόσημον.

Ὅλα τὰ μεγέθη $V_{(1)}, V_{(2)} \ldots$ θὰ εἶναι σταθερῶς θετικά.

Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν τὴν κάτωθι ἀκολουθίαν ἀριθμῶν :

$$(7.12) \qquad \begin{aligned} V_{[0]} &= V_0 && (V_0 \text{ ὑπολογιζόμενον βάσει τῆς (7. 8)}) \\ V_{[1]} &= V_0 + V_{(1)} && (V_{(1)} \text{ ὑπολογιζόμενον βάσει τῆς (7.11)}) \\ V_{[2]} &= V_0 + V_{(1)} + V_{(2)} && (V_{(2)} \text{ ὑπολογιζόμενον βάσει τῆς (7.11)}) \end{aligned}$$

κ.ο.κ.

Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ $V_{(r)}$ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ *μιᾶς ἑνιαίας πράξεως συνεχοῦς ἀθροίσεως* ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ d_j ἀπ' εὐθείας. Ὑποαθροίσεις (subtotals) λαμβάνονται μόνον διὰ τὰ $r = 1, 2 \ldots$

Ἡ ἀρχικὴ τιμὴ τῆς συνεχοῦς ἀθροίσεως, δηλαδὴ τὸ $V_{[0]} = V_0$ θὰ εἶναι ἀρνητικὴ ἐὰν πληροῦται ἡ (7.6). Οἱ ἀριθμοὶ $V_{[0]}, V_{[1]} \ldots$ συνιστοῦν μίαν μονοτόνως αὔξουσαν ἀκολουθίαν. Ἐν τέλει, ὅταν φθάσωμεν εἰς τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν αὐτῆς, δηλαδή :

$$(7.13) \qquad V_{[\omega]} = V_0 + V_{(1)} + V_{(2)} + \ldots + V_{(\omega)}$$

ἔνθα τὸ $V_{(\omega)}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον $\lambda_{(\omega)}$, τῶν συντελεστῶν λ ὑπολογιζομένων βάσει τῆς (7.9), τὸ μέγεθος $V_{[\omega]}$ θὰ ἔχῃ γίνει μὴ ἀρνητικόν. Θεωρήσωμεν ὅτι τὸ r εἶναι ὁ πρῶτος διαδοχικὸς ἀριθμός, ὥστε νὰ εἶναι :

$$(7.14) \qquad V_{[r]} \geqq 0$$

τότε, ἐὰν $V_{[r]} > 0$, τὸ $\lambda = \lambda_{(r)}$ θὰ εἶναι ἡ ἀρίστη τιμὴ μεταξὺ τῶν θετικῶν τιμῶν τοῦ λ. Ὅπερ σημαίνει ὅτι εἰς τὸ σημεῖον $\lambda = \lambda_{(r)}$ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν $S(\lambda)$ προϋποθέτει τὴν ἐλαχίστην τιμήν, ἥτις δύναται νὰ ὑποτεθῇ διὰ κάθε θετικὸν λ. Δι' οὐδὲν ἕτερον θετικὸν λ τὸ $S(\lambda)$ εἶναι τόσον μικρὸν ὅσον εἰς τὸ σημεῖον $\lambda = \lambda_{(r)}$, ἡ τιμὴ δὲ αὐτὴ τοῦ $S(\lambda_{(r)})$ θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $S(0)$. Ἡ ἀρίστη τιμὴ τοῦ $S(\lambda_{(r)})$ δυνατὸν νὰ εἶναι ἴση πρὸς μηδὲν ὁπότε, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, θὰ ἔχωμεν προσεγγίσει τὴν παραδεκτὴν περιοχήν, ἢ δυνατὸν νὰ συμβαίνῃ ἡ $S(\lambda_{(r)})$ νὰ ἐξακολουθῇ νὰ εἶναι θετική, ὁπότε δὲν θὰ ἔχωμεν προσεγγίσει τὴν παραδεκτὴν περιοχήν.

Ἐὰν $V_{[r]} = 0$, τότε τὸ $S(\lambda)$ θὰ διατηρῇ μίαν σταθερὰν τιμὴν εἰς ὁλόκληρον τὸ διάστημα ἀπὸ τὸ $\lambda_{(r)}$, περιλαμβανόμενον, μέχρι τὸ $\lambda_{(r+1)}$. Αὐτὴ δὲ ἡ τιμὴ τοῦ $S(\lambda)$ εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν τιμῶν, ἃς δύναται νὰ λάβῃ, ἀπὸ κάθε ἄλλο μὴ ἀρνητικὸν λ, εἶναι δὲ πραγματικῶς μικροτέρα τοῦ $S(0)$.

Ὁ ἀλγόριθμος πρὸς προσδιορισμὸν μιᾶς ἀρνητικῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ λ δύναται νὰ δοθῇ κατὰ παρόμοιον τρόπον. Ἐὰν τὸ κριτήριον (7.7), διὰ τὴν ὕπαρξιν μιᾶς ἀρνητικῆς ἀρίστης τιμῆς (ἑνὸς ἀρνητικοῦ ἀρίστου διαστήματος) τοῦ λ πληροῦται, τὸ λ αὐτὸ (τὸ διάστημα τοῦτο) δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ μεγέθους $\overline{V}_0$, ὁριζομένου διὰ τῆς σχέσεως:

$$\overline{V}_0 = \boldsymbol{\Sigma} d_j \,[\, x_j < 0,\ d_j \text{ θετ., ἀρν. ἢ μηδὲν} \,] + \boldsymbol{\Sigma} d_j \,[\, x_j = 0,\ d_j > 0 \,] \tag{7.15}$$

Ὅταν πληροῦται ἡ (7.7) τὸ $\overline{V}_0$ πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζομεν τοὺς συντελεστάς:

$$\overline{\lambda}_j = \left| \frac{x_j}{d_j} \right| \quad \text{Δι' ὅλα τὰ } j \text{, ἔνθα } x_j \text{ καὶ } d_j \text{ ἔχουν τὸ ἴδιον πρόσημον, δηλαδὴ εἶναι εἴτε ἀμφότερα σταθερῶς θετικὰ εἴτε ἀμφότερα σταθερῶς ἀρνητικά.} \tag{7.16}$$

Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς (7.16) θὰ εἶναι θετικοὶ καὶ πεπερασμένοι. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι νῦν τακτοποιημένοι κατὰ μίαν τάξιν διαδοχῆς ἐκ τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸ μεγαλύτερον. Θεωρήσωμεν τὴν τάξιν ταύτην διαδοχῆς:

$$0 < \overline{\overline{\lambda}}_{(1)} < \overline{\overline{\lambda}}_{(2)} < \overline{\overline{\lambda}}_{(3)} < \ldots \tag{7.17}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς θετικῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ λ, ὁρίζομεν τώρα τά:

$$\overline{V}_{(s)} = |d_\alpha| + |d_\beta| + \ldots + |d_\gamma| \qquad (s = 1, 2 \ldots) \tag{7.18}$$

ὅπου τὰ $j = \alpha, \beta \ldots \gamma$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῶν μεταβλητῶν αἵτινες διὰ τῆς (7.16) ἀντιστοιχοῦν εἰς $\overline{\lambda}_{(s)}$. Ὅλοι δὲ αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ $\overline{V}_{(s)}$ εἶναι σταθερῶς θετικοί.

Περαιτέρω διὰ μιᾶς συνεχοῦς ἀθροίσεως ὑπολογίζομεν τό:

$$\overline{V}_{[s]} = \overline{V}_0 + \overline{V}_{(1)} + \overline{V}_{(2)} + \ldots + \overline{V}_{(s)} \qquad (s = 1, 2 \ldots) \tag{7.19}$$

Ὁ πρῶτος τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι ἀρνητικὸς ὅταν πληροῦται ἡ συνθήκη (7.17). Οἱ ἀριθμοὶ $\overline{v}_{[0]}, \overline{v}_{[1]} \ldots$ σχηματίζουν μίαν μονοτόνως αὔξουσαν ἀκολουθίαν. Ἐν τέλει, ὅταν φθάσωμεν εἰς τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν τῆς ἀκολουθίας, δηλαδή:

(7.20) $$\overline{v}_{[\bar{\omega}]} = \overline{v}_0 + \overline{v}_{(1)} + \overline{v}_{(2)} + \ldots + \overline{v}_{(\bar{\omega})}$$

ἔνθα τὸ $\overline{v}_{(\bar{\omega})}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέγιστον $\overline{\overline{\lambda}}_{(\bar{\omega})}$, τῶν πηλίκων τοῦ λ ὑπολογιζομένων βάσει τῆς (7.16), ὁ $\overline{v}_{[\bar{\omega}]}$ καθίσταται μὴ ἀρνητικός. Θεωρήσωμεν τὸ s ὡς τὸν πρῶτον διαδοχικὸν ἀριθμὸν ὥστε νὰ εἶναι:

(7.21) $$\overline{v}_{[s]} \geqq 0$$

δυνάμεθα τότε νὰ ἐξαγάγωμεν συμπεράσματα ἀνάλογα πρὸς τὰ διατυπωθέντα σχετικῶς μὲ τὴν (7.14).

Ἡ θετικὴ ἀρίστη τιμὴ $\overline{\lambda}$, ἥτις ὑπολογίζεται κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, θὰ εἰσαχθῇ μὲ ἀντίθετον πρόσημον εἰς τὴν (5.10) πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ νέου σημείου x'_j, δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν:

(7.22) $$x'_j = x_j - \overline{\lambda} d_j \qquad (j = 1, 2 \ldots n + m)$$

Αἱ ἀποδείξεις δίδονται εἰς τὸ κεφάλαιον 6 τοῦ ὑπομνήματος «Ἀρχαὶ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ».

Ἡ διαδικασία ἐπαναλαμβάνεται, γύρον πρὸς γύρον, μέχρις ὅτου προσεγγίσομεν τὴν παραδεκτὴν περιοχήν. Ἐὰν τοῦτο πραγματοποιηθῇ κατὰ μῆκος μιᾶς διευθύνσεως κειμένης ἐπὶ τῶν περάτων (δηλαδή, μὲ μίαν τουλάχιστον τῶν μεταβλητῶν ἴσην πρὸς μηδὲν) καὶ ἐπιζητοῦμεν νὰ εἰσέλθωμεν σταθερῶς ἐντὸς τοῦ ἐσωτερικοῦ, δυνάμεθα συνήθως νὰ τὸ ἐπιτύχωμεν δι' ἁπλῆς ἐξετάσεως τῶν στοιχείων καὶ μιᾶς δοκιμαστικῆς τροποποιήσεως. Ἐὰν τοῦτο δὲν φέρῃ ταχέως ἀποτέλεσμα θὰ ἐκτελέσωμεν ἕνα ἐπὶ πλέον γύρον εἰσάγοντες μὴ θετικὰς τιμὰς διὰ τὸ d_i, δι' ἐκείνας ἀκριβῶς τὰς μεταβλητὰς ἃς ἐπιζητοῦμεν ὅπως γίνουν θετικαὶ ἢ θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν μέθοδον τῶν ροπῶν, περιλαμβάνοντες εἰς τὴν ἐπιλεγεῖσαν σειρὰν μόνον τὰς μεταβλητὰς ἃς θέλωμεν νὰ γίνουν θετικαί.

Τὴν ἀκόλουθον πρότασιν δὲν ἔχω ἀποδείξει, πιστεύω ὅμως ἀληθῆ.

Πρότασις (7.23). Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ μίαν κενὴν παραδεκτὴν περιοχὴν (δηλαδὴ διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν δὲν ὑπάρχουν σημεῖα καθιστῶντα ὅλας ταυτοχρόνως τὰς μεταβλητάς μὴ ἀρνητικὰς) εἶναι ὅτι ἡ ἐξαιρετικὴ περίπτωσις (7.5) ἐπιτυγχάνεται ἔπειτα ἀπὸ πεπερασμένον ἀριθμὸν γύρων τοῦ περιγραφέντος ἀνωτέρω ἀλγορίθμου.

***

Εἰς μίαν ὁμάδα ἐργασίας, εἰς τὸ Ἰνδικὸν Ἰνστιτοῦτον Στατιστικῆς, κατὰ τὸν χειμῶνα τοῦ 1954–55, εἷς τῶν συνεργατῶν μου (δὲν ἐνθυμοῦμαι πλέον ποῖος ἦτο ἐξ αὐτῶν) εἰσηγήθη ὅτι: ὅταν τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ μετασχηματισθῇ εἰς πρόβλημα ἐπιλύσεως σειρᾶς γραμμικῶν ἀνισοτήτων (ὅπερ εἶναι ἐνδεχόμενον βάσει ἑνὸς θεωρήματος τοῦ J. von Neymann) δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ὁλόκληρον τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τῆς μεθόδου S(λ). Δὲν γνωρίζω πόσον καρποφόρος εἶναι ἡ ἰδέα αὐτή. Ὑποπτεύομαι ὅμως ὅτι θὰ ἐξαρτηθῇ ἐκ τοῦ πόσον μέγας εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας τῆς ἀρίστης σειρᾶς. Ἡ σειρὰ σημείων, ἥτις κατὰ τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν ἦτο ἡ ἀρίστη σειρὰ σημείων (δυνατὸν μόνον ἓν μοναδικὸν σημεῖον) θὰ ἐμφανισθῇ ὡς ἡ παραδεκτὴ περιοχὴ εἰς τὸ τροποποιημένον πρόβλημα (transformed problem). Πρὸς τὸν σκοπὸν ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου S(λ) δὲν χρειάζεται νὰ γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων τὴν διάταξιν τῶν διαστάσεων (the dimensionality) τῆς σειρᾶς τῶν σημείων ἥτις σχηματίζει τὴν παραδεκτὴν περιοχήν.

8. Ἡ μέθοδος τοῦ δυναμικοῦ τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως πρὸς εἰκασίαν τῶν περιοριστικῶν μεταβλητῶν.

Ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς σημεῖον ἐντὸς τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς. Ἐὰν ἠδυνάμεθα ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ αὐτοῦ σημείου νὰ ἐνεργήσωμεν κίνησιν, ἥτις θὰ μᾶς παρεῖχε κάποιαν βάσιν πρὸς διάκρισιν τῶν ἀρίστων μεταβλητῶν –δηλαδὴ τῶν μηδενιζομένων μεταβλητῶν εἰς ἓν ἄριστον σημεῖον– θὰ ἦτο δυνατὸν βάσει μιᾶς τῶν μεθόδων τοῦ κεφαλαίου 6, νὰ φέρωμεν τὰς μεταβλητὰς ταύτας εἰς τὸ μηδὲν καὶ κρατοῦντες αὐτὰς ἐκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν ἕνα νέον γύρον μὲ τὸν μειωμένον ἀριθμὸν βαθμῶν ἐλευθερίας, τὸν προκύπτοντα ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι μερικαὶ μεταβληταὶ ἐτέθησαν ἴσαι πρὸς μηδέν. Ὁ νέος γύρος θὰ πρέπει νὰ ἐκκινῇ ἀπὸ τὴν ἀρχήν, δηλαδὴ ἐκ τῆς ἀναζητήσεως τῆς κατευθύνσεως εἰσδοχῆς ἐντὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς τοῦ νέου κολοβωμένου χώρου. Ἐὰν ἡ διαδικασία ἀναζητήσεως τῆς κατευθύνσεως ἐντὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς ἐκτελεῖται δι' ἑνὸς ὑψηλῶς μηχανοποιημένου τρόπου, βάσει τοῦ περιγραφέντος εἰς τὸ κεφάλαιον 7, αἱ ὑπολογιστικαὶ δυσχέρειαι δὲν θὰ εἶναι ἀνυπέρβλητοι.

Ἐὰν ἀντ' αὐτοῦ ἐργαζώμεθα βάσει τῆς μεθόδου τῶν ροπῶν – θιγείσης ἐλαφρῶς περὶ τὸ τέλος τοῦ κεφαλαίου 6 – δὲν θὰ χρειασθῇ ὅπως ἡ διαδικασία εἰσδοχῆς ἐντὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς ἐκτελεῖται δι' ἀλλεπαλλήλων ἐπαναλήψεων. Ἀπὸ ὡρισμένων ὅμως ἀπόψεων τὸ ὑπολογιστικὸν κόστος τῆς μεθόδου τῶν ροπῶν θὰ εἶναι ὑψηλὸν οὕτως ὥστε τελικῶς, ὑπὸ εὐνοϊκὰς περιστάσεις, νὰ θεωρῆται οἰκονομικωτέρα ἡ μέθοδος κολοβώσεως τοῦ κεφαλαίου 7.

Ἐφόσον χρησιμοποιοῦμεν κριτήριον διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἓν ἄριστον σημεῖον ἔχει προσεγγισθῆ – συγκρίνατε κεφάλαιον 10 – δυνάμεθα δὲ νὰ χρησιμοποιήσωμεν διορθωτικὰς διαδικασίας ἐφαρμοζομένας ὅταν προσεγγίζεται μία θέσις, ἥτις ἀποδεικνύεται ὅτι δὲν εἶναι ἡ ἀρίστη, ἡ μέθοδος τὴν ὁποίαν εἰσηγούμεθα, βασιζομένη ἐπὶ τρόπων διακρίσεως τῶν ἀρίστων μεταβλητῶν, καθίσταται πρόσφορος ὅταν αἱ συνθῆκαι εἶναι τοιαῦται ὥστε νὰ συνοδεύεται δι' ἑνὸς λογικοῦ ὑπολογιστικοῦ κόστους. Διάφορα παραδείγματα ἀπέδειξαν ὅτι παρόμοιαι περιπτώσεις ὑπάρχουν. Τὸ μέγα πλεονέκτημα τῆς μεθόδου ταύτης συνίσταται εἰς τὸ ὅτι, ὑπὸ εὐνοϊκὰς περιστάσεις, δυνάμεθα ἐλευθέρως ν' ἀποκόψωμεν εἰς κάθε γύρον ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν μεταβλητῶν καὶ νὰ πλησιάσωμεν οὕτω τὸ ἄριστον σημεῖον διὰ ταχυτάτης προόδου ἀντὶ τοῦ καθ' ἑκάστην φορὰν χειρισμοῦ μιᾶς μεταβλητῆς. Τοῦτο εἶναι θεμελιώδους σημασίας ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταβλητῶν εἶναι μέγας.

Θὰ δείξωμεν τώρα τὸν τρόπον ἐφαρμογῆς τοῦ δυναμικοῦ τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως πρὸς εἰκασίαν τῶν ἀρίστων μεταβλητῶν (the logarithmic potential method for guessing about optimum variables) ὅταν ἐκκινῶμεν ἐξ ἑνὸς ἀρχικοῦ σημείου x_k^0 $(k=u, v \ldots w)$ ἐντὸς τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς, δηλαδὴ ἔνθα ὅλα τὰ $x_j^0 > 0$ $(j=1,2\ldots n+m)$.

Ὁρίζομεν τὸ δυναμικὸν διὰ τῆς σχέσεως:

$$\Omega = \Omega\,(x_u,\, x_v \ldots x_w) = \sum_{j=1,2\ldots n+m} \log x_j \tag{8.1}$$

ἔνθα x_j διὰ $j=1,2\ldots)\,u, v, \ldots w\,(\ldots n+m$, ὁρίζονται ὡς συναρτήσεις τῶν $x_u, x_v \ldots x_w$ βάσει τῆς (2.3). Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς τὸ δυναμικὸν εἶναι συνεχὲς καὶ μὲ συνεχεῖς μερικὰς παραγώγους πάσης τάξεως, κάθε σημεῖον ὅμως ἐπὶ τῶν περάτων (on the boundary) * εἶναι μοναδικὸν σημεῖον ἔνθα τὸ δυναμικὸν τείνει πρὸς τὸ πλὴν ἄπειρον. Καθὼς περιπλανώμεθα ὅθεν πέριξ τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς τὸ δυναμικὸν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ δίκην ραντάρ, τὸ ὁποῖον μᾶς καθοδηγεῖ μακρὰν τῶν περάτων.

Αἱ συνιστῶσαι κατευθύνσεις (the gradient components) τοῦ δυναμικοῦ εἶναι:

$$\Omega_k = \frac{\partial \Omega}{\partial x_k} \qquad (k=u, v \ldots w) \tag{8.2}$$

αἱ δὲ ἐπεξηγηματικαὶ αὐτῶν ἐκφράσεις εἰς ὅρους τῶν μεταβλητῶν θὰ εἶναι:

$$\Omega_k = \sum_{j=1}^{n+m} \frac{b_{jk}}{x_j} \quad \text{δηλαδὴ} \quad \Omega_k = \frac{1}{x_k} + \sum_{j=1,2\ldots)u,v\ldots w(\ldots n+m} \frac{b_{jk}}{x_j} \quad (k=u,v\ldots w) \tag{8.3}$$

Ἡ κατεύθυνσις (the gradient) (8.3) ὁμοῦ μετὰ τοῦ διανύσματος προτιμήσεως, δηλαδὴ τοῦ διανύσματος οὗτινος αἱ συνιστῶσαι εἶναι p_k $(k=u,v\ldots w)$ ὁρίζουν δύο διαφόρους διευθύνσεις κατὰ τὰς ὁποίας, καθ' ὡρισμένην ἔννοιαν, ἐπιζητεῖται ὅπως μεταβῶμεν. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως θὰ πρέπει νὰ κατευθυνθῶμεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν p_k, ἐνῶ ἵνα

* Ἐννοεῖται τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς.

ἀπομακρυνθῶμεν ἀπὸ τὰ πέρατα θὰ πρέπει νὰ κατευθυνθῶμεν κατὰ τὴν διεύθυνσιν Ω_k. Ἡ ἀρίστη λύσις συνίσταται εἰς μίαν εὐφυᾶ συμφιλίωσιν μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν διευθύνσεων καθ' ὅμοιον τρόπον ὅπως ἡ ἀρίστη λύσις ἐν τῇ πολιτικῇ παραγωγῆς τῶν ἐπιχειρήσεων, ἥτις συνίσταται εἰς ἕνα εὐφυᾶ συμβιβασμὸν μεταξὺ τῆς κινήσεως πρὸς τὴν διεύθυνσιν (ἐν τῷ χώρῳ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν) καθ' ἣν περισσότερον ἀποτόμως αὐξάνεται τὸ προϊὸν καὶ τῆς κινήσεως πρὸς τὴν διεύθυνσιν καθ' ἣν μειοῦται περισσότερον ἀποτόμως τὸ κόστος.

Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἐπιζητοῦμεν ὅπως μετακινηθῶμεν κατὰ τὴν συμφιλιωθεῖσαν διεύθυνσιν :

(8.4) $$d_k = p_k + c\Omega_k \qquad (k = u, v \dots w)$$

ἔνθα c εἶναι σταθερὰ πρὸς προσδιορισμόν.

Δεχόμενοι τὴν (8.4), ἔνθα c εἶναι σταθερὰ εἰς τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν κάθε τιμὴν μεταξὺ $-\infty$ καὶ $+\infty$, εἶναι τὸ ἴδιον ὡς νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ διεύθυνσις τῆς κινήσεως ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου εἰς τὸ διδιάστατον γραμμικὸν σύνολον (manifold) ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου καὶ σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ διανύσματος προτιμήσεως καὶ τῆς κατευθύνσεως τοῦ δυναμικοῦ (the gradient of the potential). Τὸ πρόβλημα συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς c κατὰ ἄριστον τρόπον (in an optimal way).

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἐπιλέξει ὡρισμένην τιμὴν διὰ τὴν c. Οἱ ἀριθμοὶ διευθύνσεως d_k διὰ τὰς μεταβλητὰς βάσεως θὰ δίδωνται διὰ τῆς (8.4) – ἔνθα εἰσάγομεν τότε τὰς τιμὰς τοῦ ἀρχικοῦ σημείου διὰ Ω_k ὡς αὗται ὑπελογίσθησαν διὰ τῆς (8.3)–. Ἐντεῦθεν οἱ ἀριθμοὶ διευθύνσεως d_j δι' ὅλας τὰς μεταβλητὰς θὰ δίδωνται διὰ τῆς (5.3), καὶ αἱ τιμαὶ ὅλων τῶν ἐν κινήσει μεταβλητῶν κατὰ τὴν διεύθυνσιν αὐτὴν θὰ δίδωνται διὰ τῆς (5.10).

Τοῦτο, γραφόμενον ἐπεξηγηματικῶς εἰς ὅρους τῆς c, γίνεται :

(8.5) $$x_j = x_j^0 + \lambda (p_j + c\Omega_j) \qquad (j = 1, 2 \dots n+m)$$

ἔνθα :

(8.6) $$p_j = \sum_{k=u,v\dots w} b_{jk}\, p_k \quad \text{καὶ} \quad \Omega_j = \sum_{k=u,v\dots w} b_{jk}\, \Omega_k \qquad (j = 1, 2 \dots n+m)$$

Βάσει τῆς κινήσεως αὐτῆς, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως θὰ εἶναι

(8.7) $$f = f(\lambda) = f^0 + \lambda\,(P + cM)$$

ἔνθα f^0 εἶναι ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον, καὶ

(8.8) $$P = \sum_{k=u,v\dots w} p_k^2 \quad \text{καὶ} \quad M = \sum_{k=u,v\dots w} p_k\, \Omega_k$$

Ἐκ τῆς (8.7) ἔπεται ὅτι τὸ f εἶναι μία γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ λ κατὰ μῆκος τῆς θεωρουμένης εὐθείας γραμμῆς. Ἐὰν θέλωμεν ν' αὐξήσωμεν τὴν συνάρτησιν προτιμήσεως θὰ δώσωμεν εἰς τὸ λ τὸ ἴδιον πρόσημον ὅπως εἰς τὸ $(P+cM)$, δηλαδή:

$$\text{πρόσημον } \lambda = \text{πρόσημον } (P+cM) \tag{8.9}$$

καὶ θὰ καταστήσωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ λ τόσον μεγάλην ὅσον εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτραπῇ ἐκ τῶν συνθηκῶν βάσει τῶν ὁποίων θὰ παραμείνωμεν ἐντὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς.

Ὅταν ἡ ἔννοια τῆς κινήσεως καθορίζεται ὡς δεικνύει ἡ (8.9), ἔχομεν:

$$f = f(\lambda) = f^0 + |\lambda| \cdot |P+cM| \tag{8.10}$$

(Ὅταν τὸ πρόσημον τοῦ λ εἶναι προσδιωρισμένον διὰ τῆς (8.9))

Ἐὰν τὸ ἀρχικὸν σημεῖον x_k^0 εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς, θὰ ὑπάρχῃ κάποιο μικρὸ διάστημα τοῦ $|\lambda|$ ἔνθα ὅλαι αἱ μεταβληταὶ παραμένουν πάντοτε σταθερῶς θετικαὶ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον x_k παραμένει πάντοτε ἐντὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς. Διὰ τοιαύτας τιμὰς τοῦ $|\lambda|$ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως διὰ τῆς (8.10) θὰ αὐξάνωνται. Καθὼς τὸ $|\lambda|$ αὐξάνει – ἐὰν ἡ παραδεκτὴ περιοχὴ εἶναι πεπερασμένη δηλαδὴ ὁλοσχερῶς κλειστὴ – ταχύτερον ἢ βραδύτερον θὰ φθάσωμεν εἰς ***ἓν σημεῖον διασπάσεως*** (breaking out point), ὅπερ σημαίνει ἓν σημεῖον ὅπου τουλάχιστον μία τῶν μεταβλητῶν ἔχει μηδενισθῆ καὶ θὰ καθίστατο ἀρνητικὴ ἐὰν ἐπροχωρούσαμεν περαιτέρω*. Ἡ τιμὴ τοῦ $|\lambda|$ διὰ τὴν ὁποίαν τοῦτο συμβαίνει θὰ ἐξαρτᾶται προφανῶς ἐκ τῆς c καὶ συνεπῶς ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως εἰς τὸ σημεῖον διασπάσεως θὰ εἶναι συνάρτησις τῆς c. Μία φυσικὴ ἀρχὴ διὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς τιμῆς τῆς c θὰ εἶναι νὰ διενεργηθῇ αὕτη κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως εἰς τὸ σημεῖον διασπάσεως. Τοῦτο ἀποτελεῖ τὴν ἀρχήν μας πρὸς ἐπιλογὴν τῆς c.

Αὐτὸ εἶναι τὸ ἴδιον ὡς νὰ ἐλαχιστοποιήσωμεν τὴν συνάρτησιν $F(c)$ ὁριζομένην διὰ τῆς:

$$\frac{1}{f' - f^0} = F_{(c)} = \frac{N_{(c)}}{|P+cM|} \tag{8.11}$$

$$N(c) = \text{«Numerator»} = \operatorname*{Max}_j \left| \frac{p_j + c\Omega_j}{x_j^0} \right| \quad \begin{array}{|l} p_j + c\Omega_j < 0 \\ \quad \text{ὅταν } P+cM > 0 \\ p_j + c\Omega_j > 0 \\ \quad \text{ὅταν } P+cM < 0 \end{array} \tag{8.12}$$

---

* Ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ἡ περιγραφεῖσα διαδικασία δὲν ὁδηγεῖ εἰς σημεῖον διασπάσεως λόγῳ ἀνοικτῆς παραδεκτῆς περιοχῆς εἶναι νόθος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνάρτησις προτιμήσεως δυνατὸν νὰ καταστῇ αὐθαιρέτως μεγάλη.

τοῦ f' παριστῶντος τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως εἰς τὸ σημεῖον διασπάσεως.

Ἄλλαις λέξεσιν, ἔχομεν ν' ἀντιμετωπίσωμεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος minimax (ἐλάχιστον–μέγιστον):

$$(8.13)\qquad \operatorname*{Min}_{c}\ \operatorname*{Max}_{j}\ \frac{\left|\dfrac{p_j + c\Omega_j}{x_j^0}\right|}{|P + cM|}\qquad \begin{array}{|l} p_j + c\Omega_j < 0 \quad \text{ὅταν} \quad P + cM > 0 \\ p_j + c\Omega_j > 0 \quad \text{ὅταν} \quad P + cM < 0 \end{array}$$

Ἡ διακεκομμένη γραμμὴ τῆς ὁποίας τετμημένη εἶναι ἡ c καὶ τεταγμένη ἡ N(c) εἶναι πάντοτε κυρτὴ πρὸς τὰ ἄνω (convex upwards). Τοῦτο διευκολύνει μεγάλως. Ἡ ἀρίστη τετμημένη c_{opt} ἥτις ἐπιλύει τὸ πρόβλημα minimax (8.13), δηλαδὴ ἐκείνη ἥτις δίδει τὸ ἐλάχιστον τῆς (8.11), δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τοῦ ἀκολούθου ἀλγορίθμου.

Καθὼς τὸ c κυμαίνεται ἀπὸ τὸ $-\infty$ πρὸς τὸ $+\infty$ θεωροῦμεν κεχωρισμένως τὸν κλάδον τῆς διακεκομμένης γραμμῆς (c, N) τῆς (8.12), ἔνθα $P+cM>0$, καὶ τὸν κλάδον ἔνθα $P+cM<0$. Εἰς καθένα τῶν κλάδων τούτων προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον c_{opt} τὸ ὁποῖον δίδει τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως (8.11). Εἰς κάθε κλάδον τὸ ἄριστον προσδιορίζεται διὰ μιᾶς σειρᾶς προσεγγίσεων ἀρχῆς γενομένης ἐκ τῆς ἀρχικῆς τιμῆς.

$$(8.14)\qquad c^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{c_0}{2} & \text{ἐπὶ τοῦ κλάδου ἔνθα } P + cM > 0 \\[2ex] \dfrac{3c_0}{2} & \text{ἐπὶ τοῦ κλάδου ἔνθα } P + cM < 0 \end{cases}$$

τῆς διαχωριστικῆς τετμημένης c_0 δι' ἀμφοτέρους τοὺς κλάδους ὁριζομένης διὰ τῆς σχέσεως:

$$(8.15)\qquad c_0 = \frac{P}{-M}$$

Αἱ διαδοχικῶς ἐπαναλαμβανόμεναι τιμαὶ (iteration values) $c^{(2)}$, $c^{(3)}\ldots$ ὑπολογίζονται τότε διὰ τῆς:

$$(8.16)\qquad c^{(k+1)} = c^{(k)} \pm \left[\, c_0 + \left(\frac{p_j}{\Omega_j}\right)_{j = j_{max}(c^{(k)})} \right] \qquad (k=1,2\ldots\infty)$$

ἔνθα

(8.17) $j_{max}(c)$ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ j ἥτις μεγιστοποιεῖ τὴν (8.12) μὲ δεδομένον τὸ c.

Τὸ πρόσημον τῆς (8.16) ἐκλέγεται συμφώνως πρὸς τὸν ἀκόλουθον κανόνα:

Κανὼν (8.18). Ἐὰν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ $y = p_j + c\Omega_j$ ἥτις προσδιορίζεται διὰ τοῦ $j = j_{max}(c^{(k)})$ εἶναι τοιαύτη ὥστε κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς αὐτῆς τὸ $|y|$ νὰ μεταβάλλεται κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν τοῦ $|c|$, τότε τὸ $|c|$ θὰ αὐξάνεται, δηλαδὴ τὸ πρόσημον τῆς (8.16) θὰ ἐκλέγεται κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν $|c^{(k+1)}| > |c^{(k)}|$. Ἐὰν τὸ $|y|$ μεταβάλλεται κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν ὡς τὸ $|c|$ κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς τῆς προσδιοριζομένης διὰ τοῦ $j = j_{max}(c^{(k)})$, τότε θὰ ὑπάρχουν δύο περιπτώσεις: τὸ $|c|$ θὰ αὐξάνεται, δηλαδὴ τὸ $|c^{(k+1)}|$ θὰ γίνεται $> |c^{(k)}|$ ἐὰν $\left|\frac{p_j}{\Omega_j}\right| < |c_o|$, θὰ ἐλαττοῦται δὲ τὸ $|c|$, δηλαδὴ $|c^{(k+1)}|$ θὰ γίνεται $< |c^{(k)}|$ ἐὰν $\left|\frac{p_j}{\Omega_j}\right| > |c_o|$.

Ἐφόσον τὸ μέγιστον τῆς (8.12) εὑρίσκεται μὲ δεδομένον τὸ $c^{(k)}$, τὸ πρόσφυμα $j_{max}(c^{(k)})$ θὰ εἶναι γνωστὸν καὶ ἐντεῦθεν ἀμέσως τὸ $c^{(k+1)}$ διὰ τῆς (8.16). Τοῦτο δίδει τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως δι' ἕνα νέον ἐπαναλαμβανόμενον γύρον (iteration round) τῆς μορφῆς (8.16) – (8.18).

Καθὼς πλησιάζομεν τὴν ἀρίστην τιμὴν c_{opt} αἱ κατὰ προσέγγισιν τιμαὶ θὰ ἀρχίσουν νὰ διακυμαίνωνται. Τότε τὸ ἄριστον θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ληφθέντων ὁρίων. Εἰς πλείστας περιπτώσεις τοῦτο δίδει μίαν ἀρκοῦντος παραπλησίαν προσέγγισιν, ἐὰν ὅμως χρειάζεται δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ j αἵτινες προσδιορίζουν ἐπακριβῶς τὸ ἄριστον σημεῖον.

Οὕτω, τὸ καθετὶ συναρτᾶται πρὸς τὸν ταχὺν προσδιορισμὸν τοῦ maximum πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς (8.12) διὰ δεδομένην τιμὴν τοῦ $c^{(k)}$. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ προσαρμόζεται καλῶς ἐπὶ ἑνὸς ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ ἢ ἑνὸς μηχανισμοῦ διατρήτων καρτελλῶν. Εὐρεῖα ἐναποθηκευτικὴ ἱκανότης δὲν χρειάζεται καθόσον ὅλα τὰ στοιχεῖα ἐκ τῶν ἐξαγομένων, τὰ ὁποῖα εἶναι κατώτερα τοῦ ἐξευρισκομένου ἑκάστοτε μεγίστου, δύνανται ν' ἀπορρίπτωνται καὶ νὰ κρατῆται μόνον τὸ ἀνώτατον.

Ὅταν προσδιορισθῇ τὸ ἄριστον c_{opt} δι' ἀμφοτέρους τοὺς κλάδους, λαμβάνεται ἐκείνη ἡ τιμὴ ἐκ τῶν δύο c_{opt} ἥτις δίδει τὴν μικροτέραν τιμὴν τῆς συναρτήσεως (8.11). Αἱ δύο ἐν λόγῳ τιμαὶ ὑπολογίζονται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἁπλῶς τῶν εὑρεθεισῶν δύο τιμῶν τοῦ c.

Ὅταν προσδιορισθῇ τὸ τελικὸν c_{opt}, θεωροῦμεν τὴν κατάστασιν εἰς τὸ σημεῖον διασπάσεως. Ὑπολογίζομεν δὲ τὰς τιμὰς τοῦ $|\lambda|$ διὰ μερικὰς τῶν μεταβλητῶν ἃς θὰ ἐθίγομεν ἐὰν εἴχομεν συνεχίσει πέραν τοῦ σημείου διασπάσεως. Ἵνα διαπιστώσωμεν ποῖαι εἶναι αἱ μεταβληταὶ αὐταὶ ὑπολογίζομεν συστηματικῶς ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ:

$$(8.19) \qquad |\lambda|_j = \frac{x_j^0}{-d_j} \quad \Big| \quad d_j < 0$$

καὶ κατατάσσομεν αὐτὰς κατὰ τὴν ἀνιοῦσαν τάξιν. Θὰ ὑπάρχουν πάντοτε δύο τουλάχιστον j δίδοντα τὸ μικρότερον τῶν μεγεθῶν (8.19) (λόγῳ τοῦ ἀρίστου προσδιορισμοῦ τοῦ c_{opt} ὃν ἔχομεν ἐκτελέσει), αὐτὰ δὲ τὰ δύο j ὑποδηλοῦν τὰς μεταβλητὰς ὧν ἡ ἀπαλοιφὴ διέγραψε τὰ πέρατα τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς. Τὴν τάξιν διαδοχῆς τῶν μεταβλητῶν, ὡς αὕτη καθωρίσθη βάσει τῶν μεγεθῶν τῆς (8.19), θὰ ὀνομάσωμεν ***τάξιν προτεραιότητος*** (priority order) προσδιοριζομένην ὡς πρὸς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον διασπάσεως. Ἡ τάξις αὕτη προτεραιότητος θὰ ληφθῇ ὡς ἀρχὴ βάσει τῆς ὁποίας θ' ἀνιχνευθοῦν κατ' εἰκασίαν αἱ ἄρισται μεταβληταί, δηλαδὴ αἱ μεταβληταὶ αἵτινες εἶναι πιθανὸν νὰ μηδενίζωνται εἰς ἓν ἄριστον σημεῖον *.

Ζήτημα ἀνακύπτει ὅσον ἀφορᾷ τὸ εἰς ἀριθμὸν πλῆθος τῶν ὑποψηφίων, δηλαδὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν αἵτινες θὰ περιληφθοῦν εἰς τὴν εἰκασίαν μας.

Ἐμπειρικῶς διεπιστώσαμεν ὅτι προσφέρεται μᾶλλον καλῶς ὅπως εἰς ἕκαστον γύρον περιληφθοῦν πρόσθετοι ὑποψήφιαι ἴσαι εἰς ἀριθμὸν πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας μὲ τὸν ὁποῖον φθάνομεν εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον διασπάσεως.

Ἐφόσον ὁ κανὼν αὐτὸς δίδει συνήθως κλασματικοὺς ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμεν μίαν ὑποδειγματικὴν διαδικασίαν διὰ τὴν στρογγυλοποίησίν τους εἰς ἀκεραίους.

Ὑπολογίζομεν, ἐν πρώτοις, διὰ τοῦ ἀκολούθου ἀναδρομικοῦ τύπου (recurrence formulae).

(8.20) $$N_t = N_{t-1} - \sqrt{N_{t-1}}$$

τὸν ἀριθμὸν τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας N_t, ὁ ὁποῖος πρέπει θεωρητικῶς νὰ κρατηθῇ κατὰ τὸν γύρον ὑπ' ἀριθ. t, τῆς ἀρχικῆς τιμῆς οὔσης $N_0 = n$. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ N_t στρογγυλοποιοῦνται ἀκολούθως πρὸς τὸν πλησιέστερον ἀκέραιον.

(8.21) $$n_t = \text{πλησιέστερος ἀκέραιος τοῦ } N_t$$

τὸ δὲ $n_{t-1} - n_t$ λαμβάνεται ὡς ὁ ἀριθμὸς τῶν νέων ὑποψηφίων αἵτινες θὰ περιληφθοῦν εἰς τὴν ἀρίστην εἰκασίαν μας (optimality guess) πρὶν ἀρχίσωμεν τὸν γύρον ὑπ' ἀριθ. t. Ἢ κατ' ἄλλον τρόπον ἐκφραζόμενον : ὅταν μεταβαίνωμεν ἐκ τοῦ γύρου t—1 εἰς τὸν γύρον t, μειοῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας κατά :

(8.22) $$n_{t-1} - n_t$$

Ἐπὶ παραδείγματι ἐὰν $n=12$ θὰ ἔχωμεν τὸ σχῆμα ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα (8.23) :

---

* Ἡ ἰδέα διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν τιμῶν τοῦ $|\lambda|_j$ διὰ τὴν διάταξιν τῶν ὑποψηφίων κατὰ μίαν τάξιν προτεραιότητος εἰσήχθη πρὸ μερικῶν ἐτῶν ὑπὸ τῆς κ. Inger Haugstad, προϊσταμένης ὑπολογιστρίας τοῦ Πανεπιστημιακοῦ Οἰκονομικοῦ Ἰνστιτούτου τοῦ Ὄσλο. Βραδύτερον περισσότερον ἐκλεπτυσμέναι ἀρχαὶ ἐδοκιμάσθησαν ἐπιτυχῶς πλὴν ὅμως περικλείουν ὑψηλότερον ὑπολογιστικὸν κόστος.

Πίναξ (8.23). *Παράδειγμα ὑπολογισμοῦ τῶν (8.20) — (8.22)*

Ἀριθμὸς γύρου	Λύσις τοῦ (8.20) N_t	Ἀριθμὸς βαθμῶν ἐλευθερίας μὲ τὸν ὁποῖον ἐκτελεῖται ὁ γύρος αὐτὸς n_t	Ἀριθμὸς μεταβλητῶν τιθεμένων ἴσων πρὸς μηδὲν ὅταν ἀρχίζωμεν τὸν γύρον αὐτὸν $n_t - n_{t-1}$
t=0	12.0000	12	0
1	8.5359	9	3
2	5.6143	6	3
3	3.2448	3	3
4	1.4435	1	2
5	0.2421	0	1

Ὅταν λαμβάνεται ἀπόφασις ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν αἵτινες θὰ τεθοῦν ἴσαι πρὸς μηδέν, ὄχι μόνον πρέπει νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν τάξιν προτεραιότητος καὶ τὸν κανόνα προσδιορισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑποψηφίων ὅπως περιληφθοῦν ἀλλ' ἐπίσης καὶ τὸν κανόνα (6.3) – (6.5). Ὁ τελευταῖος κανὼν θὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ νὰ παραμερίσωμεν μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητάς.

9. Ἡ μέθοδος τῶν ροπῶν πρὸς εἰκασίαν τῶν περιοριστικῶν μεταβλητῶν.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν μέθοδον τῶν ροπῶν πρὸς εἰκασίαν τῶν περιοριστικῶν μεταβλητῶν (for guessing about limiting variables).

Θεωρήσωμεν ἓν ἀρχικὸν σημεῖον ὅπου αἱ ν $(0 \leqq \nu \leqq n)$ μεταβληταὶ r, s...t – μεταβληταὶ βάσεως ἢ ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ – εἶναι ἴσαι πρὸς μηδέν, δηλαδὴ

$$x_r = x_s^0 = \ldots = x_t^0 = 0 \tag{9.1}$$

ὅλων τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν ὄντων σταθερῶς θετικῶν. Ἐὰν $\nu > 0$ (ὅλαι δὲ αἱ μεταβληταὶ εἶναι μὴ ἀρνητικαὶ) εὑρισκόμεθα εἰς ἓν σημεῖον ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς. Ἐὰν $\nu = 0$ εὑρισκόμεθα εἰς τὸ ἐσωτερικόν.

Θεωρήσωμεν μίαν κίνησιν ἐκ τοῦ σημείου τούτου κατὰ τὴν διεύθυνσιν:

$$d_k = p_k + B_r b_{rk} + B_s\, b_{sk} + \ldots + B_t b_{tk} \qquad (k = u, v \ldots w) \tag{9.2}$$

ἔνθα αἱ σταθεραὶ B_i $(i = r, s \ldots t)$ – ἀνεξάρτητοι τοῦ k – ἀποτελοῦν τὰς λύσεις τοῦ συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων:

$$(9.3)\qquad M_{i0} + M_{ir} B_r + M_{is} B_s + \ldots + M_{it} B_t = 0 \qquad (i = r, s \ldots t)$$

ἔνθα αἱ ροπαὶ M δίδονται διὰ τῆς (5.9), ἡ δὲ μήτρα τῶν ροπῶν τοῦ συστήματος ὑποτίθεται διάφορος τοῦ μηδενὸς οὕτως ὥστε τὰ B νὰ εἶναι μοναδικῶς προσδιωρισμένα. Τὰς λύσεις B θὰ καλέσωμεν *συντελεστὰς παλινδρομήσεως* (regression coefficients). Εἶναι οἱ στοιχειώδεις συντελεσταὶ παλινδρομήσεως τοῦ p_k ἐπὶ τῆς σειρᾶς b_{rk}, $b_{sk} \ldots b_{tk}$.

Μὲ τοὺς ἀριθμοὺς διευθύνσεως τῆς (9.2) ἐκτελοῦμεν κίνησιν τῆς μορφῆς (5.10), ἔνθα τὸ λ αὐξάνεται ἀπὸ τὸ μηδὲν μὲ θετικὰς τιμάς. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως αὐτῆς θὰ μεταβληθῇ ἐπίσης ἡ συνάρτησις προτιμήσεως. Ἀκριβέστερον: διὰ κάθε θετικὴν τιμὴν τοῦ λ αὔτη (ἡ συνάρτησις προτιμήσεως) αὐξάνεται ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἀρχικήν της τιμήν. Πράγματι, ἔχομεν:

$$(9.4)\qquad f - f^0 = \lambda \sum_{k=u,v\ldots w} p_k d_k = -\lambda \frac{\begin{vmatrix} 0 & M_{0r} & M_{0s} \ldots M_{0t} \\ M_{r0} & M_{rr} & M_{rs} \ldots M_{rt} \\ M_{s0} & M_{sr} & M_{ss} \ldots M_{st} \\ . & . & . \quad . \quad . \\ M_{t0} & M_{tr} & M_{ts} \ldots M_{tt} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_{rr} & M_{rs} \ldots M_{rt} \\ M_{sr} & M_{ss} \ldots M_{st} \\ . & . \quad . \quad . \\ M_{tr} & M_{ts} \ldots M_{tt} \end{vmatrix}} = \lambda \sum_{i=u,v\ldots w} \sum_{j=u,v\ldots w} M_{i0} M_{ij}^{-1} M_{j0}$$

ἔνθα M_{ij}^{-1} εἶναι τὰ στοιχεῖα ἀντιστροφῆς τῆς μήτρας M_{ij}. Αὕτη εἶναι μία μήτρα ροπῶν καὶ ἐντεῦθεν θετικῶς ὡρισμένη. Ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ τοῦ δεξιοῦ τῆς (9.4) εἶναι κατὰ συνέπειαν θετικῶς ὡρισμένη.

Ὅλαι αἱ μεταβληταὶ x_r, $x_s \ldots x_t$ θὰ παραμείνουν ἀντιθέτως ἀμετάβλητοι κατὰ τὴν διακύμανσιν τοῦ λ, ἄλλαις λέξεσιν εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ λ, διότι

$$(9.5)\qquad x_i - x_i^0 = \lambda \sum_{k=u,v\ldots w} b_{ik} d_k = \lambda (M_{i0} + M_{ir} B_r + M_{is} B_s + \ldots + M_{it} B_t) \quad (i = r, s \ldots t)$$

Ἡ εἰς τὸ δεξιὸν τῆς (9.5) παρένθεσις εἶναι μηδενικὴ βάσει τῆς (9.3).

Ἐφόσον αἱ ὑπόλοιποι τῶν μεταβλητῶν εἶναι ὅλαι σταθερῶς θετικαί, δυνάμεθα ν' ἀφήσωμεν τὸ **λ** ν' αὐξηθῇ κατὰ ὡρισμένην μὴ μηδενικὴν ποσότητα πρὶν θίξωμεν οἱονδήποτε ὁριακὸν ἐπίπεδον (boundary plane). Ὅταν τοῦτο συμβῇ θὰ ἔχωμεν τὸν προσδιορισμὸν μερικῶν νέων ὑποψηφίων. Ὁ ἀριθμός των εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς ἰδίας μεθόδου τοῦ κεφαλαίου 8.

Μετὰ τὴν διενέργειαν τῶν εἰκασιῶν αὐτῶν, μετακινούμεθα πρὸς ἓν νέον σημεῖον ἔνθα μηδενίζονται αἱ νέαι αὐταὶ μεταβληταὶ ὡς καὶ αἱ προηγουμένως ἀχθεῖσαι εἰς τὸ μηδέν. Τοῦτο δύναται νὰ πραγματοποιηθῇ βάσει οἱασδήποτε μεθόδου ἐκ τῶν ἐπεξηγηθεισῶν εἰς τὸ κεφάλαιον 5. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν ἕνα νέον γύρον μὲ ἕνα μεγαλύτερον ἀριθμὸν μηδενικῶν μεταβλητῶν. Ἐὰν τὸ πρῶτον σύστημα ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (9.3) ἔχει διὰ τῆς μεθόδου τοῦ κεφαλαίου 4 ἐπιλυθῆ, τὸ δὲ τελικὸν ἀποτέλεσμα ἔχει ἐναποθηκευθῆ, ἡ λύσις τοῦ ἑπομένου συστήματος τῆς μορφῆς (9.3) θὰ συνίσταται ἁπλῶς εἰς τὴν *συνέχισιν* τῆς προτύπου διαδικασίας ἀποκλεισμοῦ (standard elimination procedure) διὰ μέσου τῶν προστεθεισῶν νέων γραμμῶν καὶ στηλῶν.

10. Κριτήρια διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου (optimality)*

Πρὸ τῆς ἐπεξεργασίας ὑπολογιστικῶν κανόνων διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς ἰδιότητος τοῦ ἀρίστου * ἑνὸς σημείου, θεωρεῖται σκόπιμος ἡ παράθεσις ὡρισμένων γενικῶν κανόνων αὐτῆς.

(10.1) *Ἱκανὴ συνθήκη διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου, γενικὴ διατύπωσις* (Κάθε σημεῖον ἐπὶ τῆς ὁριακῆς περιοχῆς—on the boundary).

Δοθὲν σημεῖον εἶναι ἄριστον ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ὑπάρχουν n γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ δυνάμεναι νὰ ὑποδιαιρεθοῦν εἰς δύο ὑποσειράς, ἡ μία ἐκ ν καὶ ἡ ἑτέρα ἐκ (n−ν) μεταβλητῶν ($0 \leqq \nu \leqq n$), οὕτως ὥστε :

(α) Αἱ τιμαὶ προτιμήσεως ** (preference prices) τῶν ν μεταβλητῶν νὰ εἶναι ἀρνητικαὶ καὶ αἱ τιμαὶ προτιμήσεως τῶν (n−ν) μεταβλητῶν νὰ εἶναι μηδενικαί. (Ἡ συνθήκη (α) ἀποτελεῖ ἰδιότητα ἀνεξάρτητον τοῦ θεωρηθέντος σημείου).

(β) Εἰς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον αἱ ν μεταβληταὶ νὰ εἶναι μηδενικαὶ καὶ αἱ (n−ν) μεταβληταὶ νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικαί.

(γ) Ὅλαι αἱ λοιπαὶ m μεταβληταὶ νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικαί.

***Ἀπόδειξις*:** Θεωρήσωμεν τὰς n−ν τὸ πλῆθος μεταβλητὰς κ=α, β ... γ καὶ τὰς ν τὸ πλῆθος μεταβλητὰς k = u, v ...) α, β ... γ (... w. Ἐξ ὑποθέσεως ἡ συνάρτησις προτιμήσεως δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

(δ) $$f = p_0 + \sum_{k=u,v...)\alpha,\beta...\gamma(...w} p_k x_k$$

ἔνθα ὅλα τὰ περιλαμβανόμενα εἰς τὸ σύμβολον τῆς ἀθροίσεως p εἶναι ἀρνητικά. Ὁ τύπος αὐτὸς ἐφαρμόζεται εἰς κάθε σημεῖον x_k(k=u, v ... w) ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς ἢ ἐπὶ τοῦ πέρατος αὐτῆς. Θεωρήσωμεν

* Μολονότι ὁ μεταφραστὴς πιστεύει ὅτι ὁ ὅρος «optimality» δύναται ν' ἀποδοθῇ ἑλληνιστὶ ὡς «ἀριστότης» προέκρινε τὴν περιφραστικὴν διατύπωσιν «ἰδιότης τοῦ ἀρίστου» πρὸς ἀποφυγὴν προτύπων ὅρων.

** Διὰ τοῦ ὅρου «τιμαὶ προτιμήσεως» νοοῦνται ἐνταῦθα οἱ συντελεσταί, οἵτινες ἀνακύπτουν ὅταν αἱ ν+(n−ν) = n θεωρηθεῖσαι μεταβληταὶ λαμβάνωνται ὡς σειρὰ βάσεως.

x'_k $(k = u, v \dots w)$ ὡς κάθε ἕτερον σημεῖον ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἢ ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς, καὶ θεωρήσωμεν f' ὡς τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$(\varepsilon) \qquad f' - f = \sum_{k=u,v\dots)\alpha,\beta\dots\gamma(\dots w} p_k (x'_k - x_k)$$

Ἐὰν ὅλα τὰ p_k τῆς ἀθροίσεως αὐτῆς εἶναι σταθερῶς ἀρνητικὰ θὰ εἶναι ἀδύνατον νὰ καταστήσωμεν τὴν διαφορὰν $f' - f$ θετικὴν χωρὶς νὰ γίνῃ ἀρνητικὴ μία τουλάχιστον τῶν διαφορῶν $(x'_k - x_k)$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον ἐὰν ὅλα τὰ $x_k = 0$, οὐδὲν δὲ τῶν x_k δύναται νὰ γίνῃ ἀρνητικόν. Ἐντεῦθεν, ἐὰν πληροῦται καὶ ἡ συνθήκη (γ) τὸ θεωρούμενον σημεῖον θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἄριστον. Ἡ οὐσία τῆς ἀποδείξεως συνίσταται εἰς τὸ ὅτι οὐδεμία θετικὴ τιμὴ προτιμήσεως πρέπει νὰ προκύψῃ, διὰ δὲ τὰς τιμὰς προτιμήσεως, αἵτινες εἶναι ἀρνητικαί, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν πρέπει νὰ εἶναι μηδέν.

(10.2) ***Ἱκανὴ συνθήκη διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου, εἰδικὴ διατύπωσις*** (Μία θέσις ἐπὶ τῆς ὁριακῆς περιοχῆς – a corner on the boundary).

Δοθὲν σημεῖον εἶναι ἄριστον ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ὑπάρχουν n γραμμικῶς ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, τοιαῦται ὥστε:

(α) Αἱ τιμαὶ προτιμήσεως τῶν n αὐτῶν μεταβλητῶν νὰ εἶναι μὴ θετικαί. (Ἡ συνθήκη αὐτὴ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρηθέντος σημείου).

(β) Εἰς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον αἱ ἐν λόγῳ n μεταβληταὶ νὰ εἶναι μηδενικαί.

(γ) Ὅλαι αἱ ἄλλαι m μεταβληταὶ νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικαί.

Ἡ εἰδικὴ διατύπωσις ἐλήφθη ἐκ τῆς γενικῆς διὰ τῆς θεωρήσεως ἁπλῶς τῆς περιπτώσεως ἔνθα ὄχι μόνον αἱ ν ἀλλὰ προσέτι καὶ αἱ $(n-\nu)$ μεταβληταὶ εἶναι πραγματικῶς μηδενικαί.

(10.3) ***Ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου, γενικὴ διατύπωσις*** (Κάθε σημεῖον ἐπὶ τῆς ὁριακῆς περιοχῆς).

Σημεῖον ὅπερ εἶναι ἄριστον πρέπει νὰ πληροῖ τὴν (10.1) διὰ κάποιαν τιμὴν τοῦ ν. Ἐὰν παραβλέψωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ σύνολον τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς εἶναι ἄριστον, δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν ὅτι πρέπει νὰ πληροῦται ἡ (10.1) μὲ $\nu \geqq 1$.

Ἡ ἀπόδειξις δὲν δίδεται ἐνταῦθα καθόσον ἀνεπτύχθη εἰς τὸ ὑπόμνημά μας «Ἀρχαὶ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ».

(10.4) ***Ἀναγκαία συνθήκη διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου, εἰδικὴ διαπίστωσις*** (Μία θέσις).

Εἰς ἓν σημεῖον, ἔνθα αἱ μεταβληταὶ βάσεως εἶναι μηδενικαὶ καὶ ὅλαι αἱ ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ σταθερῶς θετικαὶ (μία ἁπλῶς προσδιωρισμένη θέσις), δὲν ἀποτελεῖ μόνον *ἱκανὴν συνθήκην* διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου ὅτι ὅλαι αἱ τιμαὶ προτιμήσεως p_k ($k = u, v \ldots w$) εἶναι μὴ θετικαὶ – ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (10.2) – ἀλλ' ἐπιπροσθέτως καὶ *ἀναγκαίαν*.

Ἐὰν μία τουλάχιστον τῶν ἐξηρτημένων μεταβλητῶν εἶναι μηδενική, ἡ ἀναγκαιότης δὲν ἀκολουθεῖ. Ἄλλαις λέξεσιν, ἓν σημεῖον εἰς τὴν παραδεκτὴν περιοχήν, ἔνθα ὅλαι αἱ μεταβληταὶ βάσεως εἶναι μηδενικαὶ καὶ ἐπὶ πλέον μία τουλάχιστον ἐξηρτημένη μεταβλητὴ εἶναι μηδενικὴ (πολλαπλῶς προσδιωρισμένη θέσις), δύναται νὰ εἶναι ἄριστον καὶ ἂν ἀκόμη δὲν εἶναι ὅλαι αἱ τιμαὶ προτιμήσεως μὴ θετικαί. Ἐὰν ὅμως βάσει τῆς (10.2) εἶναι ἄριστον, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ἡ *ἰδία* θέσις διὰ μέσου τῶν ἄλλων μεταβλητῶν βάσεως κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ (10.1) *.

(10.5) ***Βαθμοὶ ἐλευθερίας τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς.***

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις δύνανται νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς μίαν μορφὴν βάσεως, ἔνθα $(n-\nu)$ τῶν τιμῶν προτιμήσεως εἶναι μηδενικαὶ – συγκρίνατε (10.1 δ) – αἱ δὲ ἕτεραι ν τιμαὶ προτιμήσεως εἶναι ἀρνητικαί, ὄχι μηδενικαί, ἕκαστον σημεῖον κείμενον εἰς τὴν παραδεκτὴν περιοχὴν (δηλαδὴ ἔχει ὅλας τὰς $n+m$ μεταβλητὰς μὴ ἀρνητικὰς) καὶ ἀνῆκον εἰς τὸ γραμμικὸν σύνολον διαστάσεων $(n-\nu)$, ὅπερ παράγεται ἐὰν θέσωμεν τὰς ν μεταβλητὰς ἴσας πρὸς μηδὲν καὶ ἀφήσωμεν τὰς $(n-\nu)$ μεταβλητὰς ὅπως πραγματοποιήσουν μίαν ἀνεξάρτητον διακύμανσιν, εἶναι ἄριστον. Ἐπὶ τοῦ ἐν λόγῳ γραμμικοῦ συνόλου θὰ ἔχωμεν $f=p_0$ καὶ

(10.6)
$$x_j = b_{j0} + \sum_{\kappa=\alpha,\beta\ldots\gamma} b_{j\kappa}\, x_\kappa \qquad (j=1,2\ldots n+m)$$

Ὁ κανὼν (10.5) προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς (10.1).

Ἤδη, θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς ἀρχὰς αὐτὰς ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου ἐπὶ τῶν ἀποτελεσμάτων μερικῶν ὑπολογιστικῶν διαδικασιῶν αἵτινες ἐσχολιάσθησαν εἰς προηγούμενα κεφάλαια.

Ἐὰν ἡ τελευταία μας εἰκασία περὶ τῶν ἀρίστων ὑποψηφίων ἐγένετο βάσει τῆς μεθόδου τῶν ροπῶν καὶ ἐφθάσαμεν ἓν στάδιον ἔνθα :

(10.7)
$$x_r = x_s = \ldots = x_t = 0$$

ὅλα δὲ τὰ d_k, ὁριζόμενα βάσει τῆς (9.2), καθίστανται μηδενικὰ διὰ $k=u,v\ldots w$, πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὴν δυνατότητα ὅτι ἔχομεν προσεγγίσει ἓν σημεῖον εἰς τὸ ἄριστον χωρίον.

Ἐὰν ὅλοι οἱ συντελεσταὶ B_r, $B_s \ldots B_t$, οἵτινες ὑπεισέρχονται εἰς τὰ ἐν λόγῳ d_k, εἶναι μὴ ἀρνητικοί, δυνάμεθα ἀμέσως ν' ἀποφανθῶμεν ὅτι ἔχομεν

* Ὅταν ἓν γραμμικὸν σύνολον ἐπὶ τῆς ὁριακῆς περιοχῆς (εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $\nu=n$ μία θέσις) εἶναι πολλαπλῶς προσδιωρισμένον, συνηθίζεται ν' ἀναφέρεται ὡς περὶ «ἐκφυλισμοῦ» (degeneracy). Ὁ ὅρος αὐτὸς δὲν εἶναι ἐπιτυχής. Περισσότερον κατάλληλον καὶ διδακτικὸν ἁρμόζει νὰ λέγεται «ἓν πολλαπλῶς προσδιωρισμένον» γραμμικὸν σύνολον.

πραγματικῶς προσεγγίσει ἓν ἄριστον σημεῖον καὶ ὅτι θὰ ὑφίσταται ἐκεῖ ἓν χωρίον (n—ν) διαστάσεων ἐκ τοιούτων σημείων, τοῦ ν ὄντος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεταβλητῶν εἰς τὴν σειρὰν x_r, $x_s \dots x_t$. Ἐὰν N ἐκ τῶν συντελεστῶν B εἶναι πραγματικῶς μηδενικοί, θὰ ὑπάρχῃ ἀκόμη ἓν χωρίον (n—ν+N) διαστάσεων ἐκ τοιούτων σημείων. Αἱ ἀντίστοιχοι N συνθῆκαι τῆς (10.7) θὰ δύνανται τότε νὰ παραμερισθοῦν.

Τοῦτο διαπιστοῦται ἁπλῶς διὰ τῆς σημειώσεως ὅτι ἐὰν ὅλα τὰ d_k, ἅτινα εἶναι ὡρισμένα βάσει τῆς (9.2), εἶναι μηδενικὰ — γεγονὸς ὅπερ ἐκφράζει ἓν μόνον χαρακτηριστικὸν τῶν ὁριακῶν διανυσμάτων b_{ik} καὶ τῶν διανυσμάτων προτιμήσεως p_k καὶ δὲν ἔχει οὐδεμίαν σχέσιν μὲ τὰ ἰδιάζοντα σημεῖα (δηλαδὴ τὰς ἰδιαιτέρας τιμὰς τῶν x_u, $x_v \dots x_w$) ἅτινα δυνατὸν νὰ συμβαίνῃ νὰ ἔχωμεν ὑπὸ θεώρησιν — θὰ ἔχωμεν :

$$f = p_0 + \sum_{k=u,v\dots w} p_k x_k = p_0 - \sum_{i=r,s\dots t} \sum_{k=u,v\dots w} B_i b_{ik} x_k = p_0 - \sum_{i=r,s\dots t} B_i (x_i - b_{i0})$$

δηλαδὴ

$$f = [\, p_0 + \sum_{i=r,s\dots t} B_i b_{i0} \,] - \sum_{i=r,s\dots t} B_i x_i \tag{10.8}$$

Ἐφόσον ὁ τύπος αὐτὸς ἀποδειχθῇ ἰσχυρὸς διὰ ὁποιασδήποτε τιμὰς τῶν μεταβλητῶν βάσεως ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἢ ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἀμέσως ὅτι ὅλοι οἱ συντελεσταὶ B_i $(i = r, s \dots t)$ θὰ εἶναι μὴ ἀρνητικοί, οὐδαμόθεν δὲ τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σημεῖον ὅπερ νὰ δίδῃ μίαν τιμὴν τοῦ f μεγαλυτέραν τῆς ληφθείσης τιμῆς διὰ τῆς ἀποδόσεως εἰς τὰς μεταβλητὰς τὰς τιμὰς τῆς (10.7). Τῆς ἀρίστης τιμῆς διὰ τὴν συνάρτησιν προτιμήσεως ἐπιτυγχανομένης οὕτω διὰ τῆς :

$$f_{opt} = p_0 + \sum_{i=r,s\dots t} B_i b_{i0} \tag{10.9}$$

Ἐὰν ὅλα τὰ d_k, τὰ ὁριζόμενα διὰ τῆς (9.2), εἶναι μηδενικὰ διὰ $k = u, v \dots w$, ἐνῶ εἷς ἢ περισσότεροι συντελεσταὶ B εἶναι ἀρνητικοί, θὰ ἔχωμεν μίαν τῶν ἀκολούθων καταστάσεων :

(I) Πραγματικῶς εὑρισκόμεθα εἰς ἓν ἄριστον σημεῖον, ἐὰν δὲ τὰ πράγματα ἔχουν οὕτω, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ μετασχηματίσωμεν τὴν ἔκφρασιν (10.8) κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν μίαν γραμμικὴν μορφὴν μὲ μόνον μὴ ἀρνητικοὺς συντελεστὰς B. Αὐτὴ εἶναι ἡ περίπτωσις καθ' ἣν τὸ ἄριστον χωρίον εἶναι πολλαπλῶς προσδιωρισμένον καὶ ἄριστον.

(II) Δὲν εὑρισκόμεθα εἰς ἓν ἄριστον σημεῖον. Μία ἢ περισσότεραι τῶν εἰκασιῶν μας περὶ τῶν ἀρίστων ὑποψηφίων θὰ ἦτο ὅθεν ἐσφαλμένη καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν ὅπως προχωρήσωμεν πρὸς τὸ ἄριστον σημεῖον θὰ πρέπει καὶ πάλιν νὰ παραλείψωμεν μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητὰς δι' ἃς δοκιμαστικῶς ὡρίσαμεν τὴν μηδενικὴν τιμήν.

Αἱ δύο αὐταὶ περιπτώσεις ἀναλύονται πληρέστερον εἰς τὸ ὑπόμνημά μας «Ἡ μέθοδος multiplex εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμόν».

Ἀκολούθως θ' ἀντιμετωπίσωμεν τὸ πρόβλημα ἀπὸ διάφορον ἄποψιν. Θὰ θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν διὰ κάποιον λόγον ἐπελέξαμεν μίαν σειρὰν ἐκ n γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν (τόσας ὅσοι εἶναι οἱ βαθμοὶ ἐλευθερίας τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος) κατ' εἰκασίαν δὲ ἐθεωρήσαμεν ὅτι τὸ προσδιοριζόμενον σημεῖον διὰ τῆς θέσεως τῶν n αὐτῶν μεταβλητῶν ἴσων πρὸς μηδὲν εἶναι τὸ ἄριστον σημεῖον.

Ἐὰν ἡ ἐπιλεγεῖσα σειρὰ συμπίπτῃ πρὸς τὴν χρησιμοποιηθεῖσαν ὡς σειρὰν βάσεως ὑπὸ τὴν ἀρχικὴν μορφὴν (2.3) τῶν ἐξισώσεών μας, τὸ πρόβλημα εἶναι ἁπλοῦν. Ἱκανὴν συνθήκην διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου τοῦ σημείου, τοῦ ληφθέντος διὰ τῆς θέσεως τῶν μεταβλητῶν βάσεως ἴσων πρὸς μηδέν, ἀποτελεῖ, συμφώνως πρὸς τὴν (10.2), τὸ γεγονὸς ὅτι ὅλαι αἱ τιμαὶ p_k ($k=u,v...w$) τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως εἶναι μὴ θετικαὶ (ὅλοι δὲ οἱ σταθεροὶ ὅροι τῶν ἐξισώσεων βάσεως εἶναι μὴ ἀρνητικοί). Τοῦτο δύναται νὰ διαπιστωθῇ εὐκόλως ἐκ τῶν ἐπεξηγηματικῶν ἐκφράσεων, αἵτινες ὑποτίθενται γνωσταί. Ἐὰν αἱ τιμαὶ προτιμήσεως δὲν εἶναι ὅλαι μὴ θετικαί, αἱ δὲ ἐξηρτημέναι μεταβληταὶ εἶναι ὅλαι θετικαί, ὄχι μηδενικαί, τὸ σημεῖον δὲν εἶναι ἄριστον. Ἐὰν ὅμως μία τουλάχιστον τῶν ἐξηρτημένων μεταβλητῶν εἶναι μηδενικὴ τὸ σημεῖον δυνατὸν νὰ εἶναι ἄριστον, μία δὲ περαιτέρω προσεκτικὴ ἐξέτασις εἶναι ἀναγκαία.

Ἐὰν ἡ ἐπιλεγεῖσα γραμμικῶς ἀνεξάρτητος σειρὰ n δὲν συμπίπτει ἀκριβῶς πρὸς τὴν ἀρχικὴν σειρὰν βάσεως, συγκειμένην ἐκ τῶν μεταβλητῶν $k=u, v ... w$, θὰ χρειασθοῦν μερικοὶ ὑπολογισμοί.

Θεωρήσωμεν τὰς μ τὸ πλῆθος μεταβλητὰς $r, s ... t$ ὡς τὰς μεταβλητὰς τῆς ἤδη ἐπιλεγείσης σειρᾶς αἵτινες δὲν ἐμφανίζονται εἰς τὴν ἀρχικὴν σειρὰν βάσεως. Τότε, θὰ ὑπάρχουν ἀκριβῶς μ ἐκ τῶν παλαιῶν μεταβλητῶν, αἵτινες δὲν ἀνήκουν εἰς τὴν ἤδη ἐπιλεγεῖσαν σειράν. Θεωρήσωμεν τὰς μ αὐτὰς μεταβλητὰς ὡς $A, B ... C$. Βάσει τῶν τύπων τοῦ κεφαλαίου 6 δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐξαγάγωμεν ἐκτὸς τῆς σειρᾶς βάσεως τὰς $A, B ... C$, ἀντ' αὐτῶν δὲ νὰ περιλάβωμεν τὰς $r, s ... t$ οὕτως ὥστε νὰ καταστήσωμεν τὴν νέαν σειρὰν βάσεως ἀκριβῶς συμπίπτουσαν πρὸς τὴν ἤδη ἐπιλεγεῖσαν σειράν. Μετὰ δὲ τὸν πλήρη ὑπολογισμὸν τῶν νέων ἐξισώσεων βάσεως θὰ δυνηθῶμεν νὰ διαπιστώσωμεν τὸ κριτήριον. Εἶναι, ἐν τούτοις, δυνατὸν νὰ προβῶμεν κατ' ἄλλον ὀλιγώτερον ὑπολογιστικῶς δαπανηρὸν τρόπον.

Ὑπολογίζομεν, ἐν πρώτοις, τὰς νέας τιμὰς p'_i ($i=r, s ... t$). Τοῦτο ἐκτελεῖται διὰ μιᾶς μονοπλεύρου λύσεως τοῦ συστήματος:

$$\sum_{i=r,s...t} p_i' \, b_{iH} = p_H \qquad (H=A, B ... C) \tag{10.10}$$

Τὸ σύστημα (10.10) ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ (6.9) διὰ $j=0$. Ἐὰν *ὄχι ὅλαι* αἱ μ τιμαὶ p_i', αἱ ληφθεῖσαι ὡς λύσεις τῆς (10.10), εἶναι μὴ θετικαί, ἐνῶ *ὅλαι* αἱ m μεταβληταὶ αἵτινες δὲν περιλαμβάνονται εἰς τὴν σειρὰν τῶν n μηδενικῶν μεταβλητῶν (αἵτινες ὁρίζουν τὸ σημεῖον μας), εἶναι σταθερῶς θετικαί, τὸ σημεῖον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἄριστον. Ἐὰν — εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν — μία ἢ περισσότεραι τῶν m μεταβλητῶν εἶναι μηδενικαί, δὲν δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν ἐπὶ τῆς ὑπάρξεως ἢ τῆς μὴ ὑπάρξεως τῆς ἰδιότητος τοῦ ἀρίστου εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὴν σειρὰν τῶν n μηδενικῶν μεταβλητῶν τῶν ληφθεισῶν ὡς ὁρισμὸν τοῦ σημείου μας. Ἄλλαις λέξεσι, πρέπει νὰ μεταβάλλωμεν τὴν σειρὰν βάσεως.

Ἐὰν ***ὅλαι*** αἱ νέαι τιμαὶ p_i', αἵτινες προκύπτουν ὡς λύσεις τοῦ (10.10) εἶναι πραγματικῶς μὴ θετικαί, τὸ σημεῖον δυνατὸν νὰ εἶναι ἄριστον, δυνάμεθα δὲ νὰ ἐλέγξωμεν τοῦτο διὰ μερικῶν προσθέτων ὑπολογισμῶν.

Ἀκολούθως προβαίνομεν εἰς τὰς ἑπομένας πράξεις.

Ὑπολογίζομεν ὅλα νὰ p_K' διὰ $K=u,v\ldots)A,B\ldots C(\ldots w$, βάσει τῆς σχέσεως:

$$p_K' = p_K - \sum_{i=r,s\ldots,t} p_i' b_{iK} \qquad (K=u.v\ldots)A,B\ldots c(\ldots w) \tag{10.11}$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν (6.11) διὰ $j=0$. Ἐὰν ***ὄχι ὅλαι*** αἱ $(n-\mu)$ νέαι τιμαὶ p_K', αἵτινες προσδιωρίσθησαν διὰ τῆς (10.11), εἶναι μὴ θετικαὶ ἡ κατάστασις εἶναι παρομοία πρὸς τὴν σχολιασθεῖσαν ἀνωτέρω ἔνθα ***ὄχι ὅλα*** τὰ p_i' τὰ προκύψαντα ἐκ τῆς (10.10) ἦσαν μὴ θετικά.

Ἐὰν ἀντιθέτως ***ὅλαι*** αἱ νέαι τιμαὶ p_K' αἱ προσδιορισθεῖσαι διὰ τῆς (10.11) εἶναι πραγματικῶς μὴ θετικαὶ τὸ σημεῖον δυνατὸν νὰ εἶναι ἄριστον, δυνάμεθα δὲ νὰ ἐλέγξωμεν τοῦτο διὰ μερικῶν ὑπολογισμῶν.

Ἐλέγχομεν τώρα — ἐὰν δὲν τὸ ἐπράξαμεν ἤδη — ὅτι τὸ θεωρηθὲν σημεῖον ἀνήκει εἰς τὴν παραδεκτὴν περιοχήν. Τοῦτο πραγματοποιεῖται διὰ τοῦ ἐλέγχου ὅτι ὅλοι οἱ σταθεροὶ ὅροι τῆς νέας μορφῆς ἐξισώσεων βάσεως εἶναι μὴ ἀρνητικοί. Τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ κριτηρίου — ὡς διακεκριμένου τοῦ μέρους τοῦ ἀφορῶντος τοὺς συντελεστὰς τῆς συναρτήσεως προτιμήσεως — δὲν ἀποτελεῖ μόνον ἱκανὴν συνθήκην ἀλλά, εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, καὶ ἀναγκαίαν. Ὑπολογίζομεν, πρῶτον, τοὺς σταθεροὺς ὅρους b_{H0}' $(H=A, B\ldots C)$ τῶν νέων ἐκφράσεων διὰ τὰς ἐξηρτημένας μεταβλητάς. Οἱ σταθεροὶ αὐτοὶ ὅροι πληροῦν τὰς ἐξισώσεις

$$\sum_{H=A,B\ldots C} b_{iH} b_{H0}' = -b_{i0} \qquad (i=r,s\ldots t) \tag{10.12}$$

Τὸ σύστημα αὐτὸ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ (6.8) διὰ $K=0$. Πρὸς προσδιορισμὸν τῶν μ ἀγνώστων b_{H0}' βάσει τῆς (10.12) χρειαζόμεθα μίαν μονόπλευρον μόνον λύσιν. Ἐὰν ***ὄχι ὅλα*** αὐτὰ τὰ b_{H0}' εἶναι μὴ ἀρνητικά, τὸ θεωρούμενον σημεῖον δὲν εἶναι ἄριστον, καθόσον δὲν ἀνήκει εἰς τὴν παραδεκτὴν περιοχήν. Ἐὰν ὅλα τὰ b_{H0}' εἶναι μὴ ἀρνητικὰ προβαίνομεν εἰς ἕνα τελικὸν ἔλεγχον.

Ὑπολογίζομεν ἀκολούθως ὅλα τὰ μεγέθη:

$$b_{j0}' = b_{j0} + \sum_{H=A,B\ldots C} b_{jH} b_{H0}' \qquad (j=1,2\ldots)u,v\ldots w,r,s\ldots t(\ldots n+m) \tag{10.13}$$

Ἡ ἔκφρασις αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν (6.10) διὰ $K=0$. Ἐὰν ***ὄχι ὅλα*** τὰ μεγέθη b'_{j0} εἶναι μὴ ἀρνητικά, τὸ θεωρούμενον σημεῖον *δὲν θὰ εἶναι* ἄριστον καθόσον δὲν ἀνήκει εἰς τὴν παραδεκτὴν περιοχήν. Ἐὰν ὅλα αὐτὰ τὰ b'_{j0} εἶναι μὴ ἀρνητικὰ – καὶ ὅλοι οἱ προηγούμενοι ἔλεγχοι (10.10) – (10.12) ἐξωθοῦν ἐπίσης πρὸς τὸ θετικὸν – τὸ σημεῖον εἶναι πραγματικῶς ἄριστον.

***

Ἐὰν τὸ συνολικὸν κριτήριον διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀρίστου (optimality) δὲν ἀποδειχθῇ καταφατικῶς εἶναι δυνατὸν ν' ἀκολουθηθοῦν διάφοροι διαδικασίαι.

Μία μέθοδος συνίσταται εἰς τὴν μετακίνησιν κατὰ μικρὰν ἀπόστασιν ἐντὸς τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς, βάσει μιᾶς διευθυντικῆς τεχνικῆς, καὶ ἐκεῖθεν ἡ ἐκτέλεσις νέας ἐκκινήσεως. Ἐὰν ἡ ἐντὸς τῆς παραδεκτῆς περιοχῆς μετακίνησις διενηργήθη κατὰ εὔλογον τρόπον, θὰ ἔχωμεν ἓν νέον σημεῖον ἐκκινήσεως ἀπὸ τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθῇ μία κατὰ πολὺ ταχυτέρα πρόοδος παρὰ ἀπὸ τὸ ἀρχικὸν σημεῖον ἐκκινήσεως. Ὡς ἄλλην διαζευκτικὴν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ ἐξασφαλίσωμεν – εἰ δυνατὸν διὰ τῆς μεθόδου τοῦ κεφαλαίου 7 – ὅτι θὰ ἔχωμεν μίαν θέσιν εἰς τὴν ὁριακὴν περιοχήν, ἐὰν δὲ καὶ τὸ σημεῖον αὐτὸ δὲν δίδει θετικὴν ἀπάντησιν εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐλέγχων (10.10) – (10.13) θὰ ἀποπερατώσωμεν τὴν διαδικασίαν διὰ μερικῶν γύρων τῆς μεθόδου Simplex. Ἐφόσον ὁ ὄγκος τῶν μεταβλητῶν ἔχει ταξινομηθῇ πρέπει ν' ἀναμένηται ὅτι ἡ τελικὴ αὐτὴ ἐργασία ταχέως θὰ ἀχθῇ εἰς πέρας.

Ἐκφραζόμενον ἀκριβέστερον : Εἶναι ὀρθὸν ὅπως ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μέθοδος τοῦ δυναμικοῦ τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως θὰ μᾶς ἀγάγῃ εἰς κάποιο μέρος τῆς ὁριακῆς περιοχῆς ἔνθα ἡ θέσις (ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων—a vertex) τὴν ὁποίαν προσηγγίσαμεν θὰ εἶναι γειτονικὴ μιᾶς ἀρίστης θέσεως ἢ παραπλησίως γειτονική. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἐν λόγῳ θέσις εἶναι χωρισμένη ἀπὸ μίαν ἀρίστην θέσιν μόνον διὰ μιᾶς ἀκμῆς ἢ τὸ πολὺ διὰ μιᾶς ἁλύσου συνισταμένης ἐκ μικροῦ ἀριθμοῦ ἀκμῶν. Ἐὰν αὐτὴ εἶναι ἡ περίπτωσις ἡ μέθοδος simplex θὰ πρέπει νὰ μᾶς ἀγάγῃ ταχέως διὰ μιᾶς τελικῆς φάσεως ἀπὸ μίαν θέσιν προσδιωρισμένην διὰ τῆς μεθόδου τοῦ δυναμικοῦ τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως πρὸς ἓν ἄριστον σημεῖον.