ΑΙ ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΧΗΣ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑΙ ΝΟΜΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ ΑΥΤΩΝ

ΥΠΟ ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ κ. ΕΥΣΤ. ΜΑΡΓΑΡΙΤΗ

1. Αἱ μεταβληταὶ αἱ θεωρούμεναι ἐν τῷ λογισμῷ τῶν πιθανοτήτων ἔχουν κάπως διάφορον ἔννοιαν ἀπὸ ἐκείνην τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἢ Ἀνάλυσιν. Ὅταν ἀπὸ μίαν κάλπην, περιέχουσαν λευκά, μαῦρα καὶ ἐρυθρὰ σφαιρίδια κατ' ἀναλογίαν p_1, p_2, p_3, ἐξαγάγωμεν ἓν σφαιρίδιον κατὰ τύχην, τὸ χρῶμα τούτου ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τύχης, εἶναι ἓν μέγεθος τυχαῖον, ἐφ' ὅσον βεβαίως τὰ σφαιρίδια εἶναι ἐντελῶς ὅμοια κατὰ τὰ ἄλλα.

Γενικώτερον, ἂν εἶναι δυνατὸν αἱ διάφοροι καταστάσεις ἑνὸς μεγέθους νὰ ὑπαχθοῦν εἰς μέτρησιν, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐκ τῆς τύχης ἐξαρτωμένας μεταβλητὰς (variables aléatoires). Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς κ διαφόρους τιμὰς μιᾶς μεταβλητῆς μὲ τὰς ἀντιστοίχους πιθανότητας, τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots x_\kappa \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots p_\kappa \end{matrix}$$

συνιστοῦν τὸν νόμον πιθανότητος τῆς θεωρουμένης μεταβλητῆς, τάξεως κ.

Ἡ κατανομὴ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ταύτης δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τῶν σημείων M_1, $M_2 \ldots M_\kappa$ μὲ τὰς ἀντιστοίχους πιθανότητας p_1, $p_2 \ldots p_\kappa$ ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος $0x$ ἢ ἐπὶ δύο ἀξόνων $0x$, $0y$, ὁπότε αἱ πιθανότητες θὰ παρίστανται διὰ τῶν τεταγμένων.

Ἂν ἀντὶ τῆς μεταβλητῆς x θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν αὐτῆς $f(x)$, τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν

$$\begin{matrix} f(x_1) & f(x_2) \ldots\ldots & f(x_\kappa) \\ p_1 & p_2 \ldots\ldots & p_\kappa \end{matrix}$$

προσδιορίζει τὸν νόμον πιθανότητος τῆς ὑπ' ὄψει συναρτήσεως Εἶναι προφανὲς ὅτι

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_\kappa = 1$$

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι, δεδομένων ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος τῶν σημείων M_i καὶ τῶν μαζῶν τούτων p_i, ἐπιτυγχάνομεν μίαν παράστασιν τοῦ νόμου κατανομῆς μιᾶς μεταβλητῆς. Ἀλλὰ πολλάκις συμβαίνει νὰ εἶναι τὰ δεδομένα πολυσύνθετα (μέγα πλῆθος σημείων, μὲ μάζας πολὺ μεγάλας). Προκύπτει ὅθεν ἡ ἀναγκαιότης νὰ λαμβάνωμεν ἰδέαν μιᾶς κατανομῆς ἐξ ἐλαχίστων στοιχείων τοῦ συνόλου, μὲ τὴν βοήθειαν ἐλαχίστου ἀριθμοῦ χαρακτηριστικῶν.

ΡΟΠΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

2. Καλοῦμεν ροπὴν πρώτης τάξεως ἢ μέσον ἀριθμητικὸν τὴν τιμὴν $E(x)$ ἥτις ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ συμβόλου :

$$E(x) = m_1 = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}$$

Αὕτη παριστᾶ τὴν τετμημένην τοῦ κέντρου βάρους τῶν διαφόρων μαζῶν (πιθανοτήτων) μιᾶς μεταβλητῆς. Κατ' ἀνάλογον τρόπον, τὴν ποσότητα

$$E(x_2) = m_2 = \frac{\Sigma p_i x_i^2}{\Sigma p_i}$$

καλοῦμεν ροπὴν δευτέρας τάξεως καὶ παριστᾶ αὕτη τὴν πιθανὴν τιμὴν (μαθηματικὴν ἐλπίδα) τοῦ τετραγώνου τῆς x ἢ τὴν ροπὴν ἀδρανείας τῆς θεωρουμένης κατανομῆς, λογιζομένην κατ' ἀναφορὰν πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.

Ἐὰν ἡ ἀρχὴ μεταφερθῆ εἰς τὸ κέντρον βάρους τετμημένης m_1 ἡ ποσότης m_2 λαμβάνει τὴν τιμὴν

$$\mu_2 = \Sigma p_i (x_i - m_1)^2 = E[x - E(x)]^2$$

Γενικώτερον ἡ ποσότης

$$m_\rho = E(x_\rho) = \Sigma p_i x_i^\rho$$

καλεῖται ροπὴ τάξεως ρ.

Ἡ ποσότης

$$\mu_\rho = E(x - m_1)^\rho$$

εἶναι ἡ αὐτὴ ροπή, ἀναφερομένη εἰς τὴν m_1 ὡς ἀρχὴν συντεταγμένων.

Εἰδικῶς διὰ $\rho = 1$ καὶ $\rho = 2$ λαμβάνομεν

$$\mu = E(x - m_1) \quad \text{καὶ} \quad \mu_2 = E[x - m_1]^2$$

ἢ

$$\mu = E[x - E(x)] \quad \text{καὶ} \quad \mu_2 = E[x - E(x)]^2$$

ἐξ ὧν ἡ πρώτη καλεῖται μέση ἀπόκλισις, ἡ δὲ δευτέρα μέσον σφάλμα τετραγώνου ἢ μέση τετραγωνικὴ ἀπόκλισις.

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μ_2 καλεῖται ἀπόκλισις - τύπος (écart type) καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου σ_x. Ἤτοι, προφανῶς

$$\sigma_x^2 = E[x - E(x)]^2$$

Ἡ ποσότης σ_x ἔχει ἰδιάζουσαν σημασίαν, διότι μᾶς δίδει τὴν τάξιν μεγέθους τῆς μεταβλητῆς x_i δυνάμει τῆς γνωστῆς ἀνισότητος τοῦ Tchebichef — Bienaymé :

$$p_t \geqslant 1 - \frac{1}{t^2}$$

ἥτις ἐκφράζει τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Ἡ πιθανότης ἵνα ἡ μεταβλητὴ x_i μένῃ ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\pm t\sigma_x$ ἔνθα $t > 1$ εἶναι $p_t \geqslant 1 - 1/t^2$.

Διὰ $t = 5$ ἔχομεν $p_5 \geqslant 1 - 1/25$ ἢ $p_5 \geqslant 24/25$ ἢ $p_5 \geqslant 96/100$, ἤτοι ὑπάρχει πιθανότης 96/100 (σχεδὸν βεβαιότης) ἵνα ἡ μεταβλητὴ x κεῖται ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\pm 5\sigma_x$ ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχῆς, ἥτις ἐνταῦθα εἶναι ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς E(x). Τῆς ἀνισότητος τοῦ Tchebichef γίνεται ἐφαρμογὴ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ πρώτου μέρους τοῦ νόμου τῶν μεγάλων ἀριθμῶν. Ἡ σημασία λοιπὸν τῶν δύο πρώτων ροπῶν, ἤτοι τῆς $E(x) = m_1$ καὶ τῆς $\sigma_x^2 = E[x - E(x)]^2$, εἶναι ἄκρως ἐνδιαφέρουσα.

3. Ἀπὸ τὰ ἐκτεθέντα προηγουμένως καθίσταται φανερόν, ὅτι ἡ γνῶσις τῶν δύο πρώτων ῥοπῶν καὶ κατ' ἀκολουθίαν τῶν ποσοτήτων $E(x)$ καὶ σ_x παρέχει σπουδαίας ἐνδείξεις, χωρὶς νὰ ἀρκῆ διὰ τὸν πλήρη καθορισμὸν τοῦ νόμου πιθανότητος ἑνὸς μεγέθους ἐκ τῆς τύχης ἐξαρτωμένου ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, μιᾶς μεταβλητῆς ἀσυνεχοῦς. Ἐν τούτοις, ἂν δοθῆ ἐπαρκὴς ἀριθμὸς ῥοπῶν, καθορίζεται πλήρως ὁ νόμος οὗτος, ὡς δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἂς θεωρήσωμεν, πρῶτον, μίαν μεταβλητὴν x ἔχουσαν μίαν μόνον τιμὴν m, π. χ. Τότε ἡ μεταβλητὴ αὕτη ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ζεῦγος $(m_1, 1)$, διότι ἡ πιθανότης ἐνταῦθα εἶναι βεβαιότης. Ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς ἢ ῥοπὴ πρώτης τάξεως εἶναι m_1. Αἱ ῥοπαὶ ἀνωτέρας τάξεως εἶναι πᾶσαι καθωρισμέναι. Θὰ ἔχωμεν π. χ.

$$m_2 = \Sigma p_i x_i^2 = m_1^2 \quad \text{καὶ} \quad m_2 - m_1^2 = \sigma_x^2 = 0.$$

Δηλ. ἡ μέση τετραγωνικὴ ἀπόκλισις εἶναι 0. Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀναγκαία καὶ ἀρκετή. Ἐὰν ἡ ἀπόκλισις ἀπὸ τῆς $E(x)$ εἶναι 0, σημαίνει ὅτι ἡ x ἔχει μίαν μόνην τιμήν.

Βλέπομεν, λοιπόν, πῶς παρουσιάζεται ὁ νόμος διὰ τὴν περίπτωσιν μεταβλητῆς ἐχούσης μίαν μόνον τιμήν. Τοῦτο βεβαίως εἶναι μία καθαρὰ ὑπόθεσις, ἐπιτρέπουσα ὅμως νὰ ἐξετάσωμεν τὸν νόμον τῶν μεγάλων ἀριθμῶν ἀπὸ μίαν ἄλλην ἄποψιν. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ νόμος οὗτος θεωρεῖ τὰς ἐκ τῆς τύχης ἐξαρτωμένας μεταβλητάς, αἱ ὁποῖαι τείνουν νὰ συγκεντρωθοῦν πέριξ μιᾶς ὡρισμένης τιμῆς, λαμβάνουσαι οὕτω τὸν χαρακτῆρα μιᾶς μεταβλητῆς τάξεως 1, ἐφ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς ν τῶν πειραμάτων, οὗτινος αἱ μεταβληταὶ αὗται θεωροῦνται συναρτήσεις, αὐξάνει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἀναγκαία πρὸς τοῦτο προϋπόθεσις εἶναι, ὅπως σ_x τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ $1/\nu$.

4. Θεωρήσωμεν ἤδη μίαν μεταβλητὴν δευτέρας τάξεως $x \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{matrix} \right.$

Ἔχομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν 4 ἀγνώστους x_1, x_2, p_1, p_2, οἱ ὁποῖοι ὁρίζονται διὰ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 = p_1 + p_2 \\ m_1 &= p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ m_2 &= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 \\ m_3 &= p_1 x_1^3 + p_2 x_2^3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Λαμβάνοντες τὰς τρεῖς πρώτας ἐξισώσεις, βλέπομεν ὅτι ἡ συνθήκη ἵνα ὦσιν αὗται συμβιβασταὶ εἶναι :

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_0 & 1 & 1 \\ m_1 & x_1 & x_2 \\ m_2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς ἐπὶ α καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ β λαμβάνομεν τὴν σχέσιν

$$\begin{vmatrix} \alpha m_0 & \alpha & \alpha \\ \beta m_1 & \beta x_1 & \beta x_2 \\ m_2 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης προκύπτει τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha + \beta x_1 + x_1^2 &= 0 \\ \alpha + \beta x_2 + x_2^2 &= 0 \\ \alpha m_0 + \beta m_1 + m_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Λαμβάνοντες ἤδη τὰς 3 τελευταίας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1), ἔχομεν ὡς συνθήκην συμβιβαστοῦ τούτων τὴν σχέσιν :

$$\begin{vmatrix} m_1 & x_1 & x_2 \\ m_2 & x_1^2 & x_2^2 \\ m_3 & x_1^3 & x_2^3 \end{vmatrix} = 0$$

Ἐκ ταύτης δὲ λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰς σχέσεις :

$$\begin{vmatrix} \alpha m_1 & \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ \beta m_2 & \beta x_1^2 & \beta x_2^2 \\ m_3 & x_1^3 & x_2^3 \end{vmatrix} = 0$$

καὶ

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_1^2 + x_1^3 &= 0 \\ \alpha x_2 + \beta x_2^2 + x_2^3 &= 0 \\ \alpha m_1 + \beta m_2 + m_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Λαμβάνοντες τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις τῶν συστημάτων (2) καὶ (3), ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \alpha m_0 + \beta m_1 + m_2 &= 0 \\ \alpha m_1 + \beta m_2 + m_3 &= 0 \end{aligned}$$

Τὸ σύστημα λυόμενον πρὸς α καὶ β μᾶς δίδει

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -m_2 & m_1 \\ -m_3 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} m_0 & -m_2 \\ m_1 & -m_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}}$$

ὑποτιθεμένου βεβαίως ὅτι $m_0 m_1 - m_1^2 \neq 0$.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις (2), λαμβάνομεν δύο δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις ὡς πρὸς x_1 καὶ x_2, ὧν ἡ λύσις μᾶς δίδει τὰς τιμὰς τῶν x_1 καὶ x_2, ἃς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν (1), ὁπότε ἔχομεν ἐξίσωσιν μὲ ἀγνώστους p_1 καὶ p_2, αὕτη δὲ συνδυαζομένη μετὰ τῆς πρώτης τῶν ἰδίων ἐξισώσεων (1) μᾶς παρέχει τὰς τιμὰς τῶν p_1 καὶ p_2.

Ὁρίζομεν οὕτω τὰς τιμὰς τῶν x_1, x_2, p_1, p_2, ἤτοι τὸν νόμον πιθανότητος ἢ νόμον κατανομῆς τῆς θεωρηθείσης μεταβλητῆς δευτέρας τάξεως, διὰ τῶν τριῶν πρώτων ροπῶν (m_1, m_2, m_3). Αἱ ἄλλαι ροπαὶ δύνανται νὰ προκύψουν ἐκ τῶν πρώτων εὐκόλως καὶ εὑρίσκομεν πάλιν τὴν σχέσιν :

$$\begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

ὡς ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἡ θεωρουμένη μεταβλητὴ τείνῃ πρὸς συγκέντρωσιν γύρω μιᾶς ὡρισμένης τιμῆς. Ἡ παράστασις (4) εἶναι τῆς αὐτῆς μορφῆς πρὸς τὴν $\begin{vmatrix} 1 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0$ ἢ $m_2 - m_1^2 = 0$

εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μεταβλητῆς τάξεως 1.

Η ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ

5. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι, δεδομένης τῆς σειρᾶς τῶν ροπῶν (m_1, m_2, ... m_κ), καθίσταται σαφὴς ὁ νόμος πιθανότητος μιᾶς μεταβλητῆς ἀσυνεχοῦς τάξεως πεπερασμένης. Ἡ εὕρεσις ὅμως τῶν ροπῶν τούτων ἐπιτυγχάνεται ἁπλούστατα διὰ τῆς εἰσαγωγῆς μιᾶς νέας ἐννοίας.

Θεωρήσωμεν πράγματι τὴν πιθανὴν τιμὴν (μαθηματικὴν ἐλπίδα) τῆς συναρτήσεως e^{tx} μιᾶς μεταβλητῆς x ἥτις λαμβάνει τὰς τιμὰς x_1, x_2 ... x_κ μὲ ἀντιστοίχους πιθανότητας p_1, p_2 ..... p_κ. Ὡς γνωστόν, ἡ πιθανὴ τιμὴ

$$E(x_i) = \Sigma p_i x_i .$$

Ἐνταῦθα θὰ ἔχωμεν :

$$E[e^{tx_i}] = p_1 e^{tx_1} + p_2 e^{tx_2} + \ldots + p_\kappa e^{tx_\kappa}$$

Καλοῦμεν τὴν συνάρτησιν ταύτην φ(t) ὅτε :

$$\varphi(t) = p_1 e^{tx_1} + p_2 e^{tx_2} + \ldots + p_\kappa e^{tx_\kappa}$$

$$\varphi'(t) = p_1 x_1 e^{tx_1} + p_2 x_2 e^{tx_2} + \ldots + p_\kappa x_\kappa e^{tx_\kappa}$$

$$\varphi''(t) = p_1 x_1^2 e^{tx_1} + p_2 x_2^2 e^{tx_2} + \ldots + p_\kappa x_\kappa^2 e^{tx_\kappa}$$

καὶ γενικῶς

$$\varphi^{(\nu)}(t) = p_1 x_1^\nu e^{tx_1} + p_2 x_2^\nu e^{tx_2} + \ldots + p_\kappa x_\kappa^\nu e^{tx_\kappa}$$

διὰ t = o λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} \varphi(o) &= p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_\kappa = 1 = m_0 \\ \varphi'(o) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots + p_\kappa x_\kappa = E(x) = m_1 \\ \varphi''(o) &= p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + \ldots + p_\kappa x_\kappa^2 = E(x^2) = m_2 \qquad (5) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(\nu)}(o) &= p_1 x_1^\nu + p_2 x_2^\nu + p_3 x_3^\nu + \ldots + p_\nu x_\kappa^\nu = E(x^\nu) = m_\nu \end{aligned}$$

Ἀλλ' ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις e^{tx} ὡς πρὸς t δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς σειρὰν

$$\varphi(t) = \varphi(o) + \frac{t}{1}\varphi'(o) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(o) + \ldots + \frac{t^\nu}{\nu!}\varphi^\nu(o) + \ldots$$

Θέτοντες τὰς τιμὰς τὰς προερχομένας ἐκ τῆς σχέσεως (5) ἔχομεν :

$$\varphi(\varepsilon) = 1 + \frac{t}{1} m_1 + \frac{t^2}{2!} m_2 + \ldots + \frac{t^\nu}{\nu!} m_\nu + \ldots \qquad (6)$$

Εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο (6) βλέπομεν, ὅτι συντελεσταὶ τῶν ὅρων του εἶναι αἱ ροπαὶ διαφόρων τάξεων τῆς θεωρουμένης μεταβλητῆς x. Ἡ σημασία τῆς συναρτήσεως φ(t) εἶναι προφανής. Ἂν γνωρίζωμεν ταύτην, ἔχομεν ἀμέσως τὰς διαδοχικὰς ροπάς, διὰ τῆς ἀναπτύξεώς της εἰς σειρὰν κατὰ Maclaurin.

Ἡ συνάρτησις φ(t) καλεῖται συνάρτησις χαρακτηριστικὴ ἢ συνάρτησις γενέτειρα τῶν ροπῶν (Fonction characteristique ἢ fonction génératrice des moments), εἰσαχθεῖσα εἰς τὴν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων παρὰ τοῦ Cauchy τὸ 1853 καὶ εἶτα παρὰ τοῦ Poincaré.

Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος χαρακτηριστικὴ συνάρτησις $\varphi(t)$ εἶναι λύσις μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως τάξεως κ μὲ σταθεροὺς συντελεστάς, τῆς ὁποίας αἱ χαρακτηριστικαὶ ρίζαι, ὅλαι διάφοροι ἀλλήλων, εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς θεωρουμένης μεταβλητῆς x εἰς τὸν νόμον πιθανότητος.

Παραβάλλοντες τὰ ἐν τῇ παραγράφῳ 4 διαλαμβανόμενα πρὸς ὅσα ἀνεπτύξαμεν ἀνωτέρω περὶ χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως, βλέπομεν ὁποίαν σημασίαν ἔχουν αἱ συνθῆκαι :

$$\begin{vmatrix} 1 & m_1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{vmatrix} = 0$$

Ἡ δευτέρα τῶν συνθηκῶν τούτων, ἐπὶ παραδείγματι, προέρχεται ὡς ἑξῆς. Διὰ μίαν μεταβλητὴν τάξεως δευτέρας ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις $\varphi(t)$ ἐπαληθεύει μίαν διαφορικὴν ἐξίσωσιν μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς ἔχουσαν τὴν μορφήν:

$$\alpha\varphi + \beta\varphi' + \varphi'' = 0$$

Εὑρίσκομεν τὰς παραγώγους δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως ταύτης, ἤτοι

$$\alpha\varphi' + \beta\varphi'' + \varphi''' = 0$$
$$\alpha\varphi'' + \beta\varphi''' + \varphi'''' = 0$$

Προκύπτει ὅθεν τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} \alpha\varphi + \beta\varphi' + \varphi'' &= 0 \\ \alpha\varphi' + \beta\varphi'' + \varphi''' &= 0 \\ \alpha\varphi'' + \beta\varphi''' + \varphi'''' &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν α καὶ β εὑρίσκομεν τὴν συνθήκην συμβιβαστοῦ τῶν ἐξισώσεων (7) ἥτις εἶναι :

$$\begin{vmatrix} \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \\ \varphi'' & \varphi''' & \varphi'''' \end{vmatrix} = 0$$

Θέτοντες δὲ $t = o$ λαμβάνομεν τὴν συνθήκην :

$$\begin{vmatrix} \varphi(o) & \varphi'(o) & \varphi''(o) \\ \varphi'(o) & \varphi''(o) & \varphi'''(o) \\ \varphi''(o) & \varphi'''(o) & \varphi''''(o) \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

ἢ τὴν ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαν ἀλγεβρικῶς συνθήκην (4)

Ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης καθίσταται προφανὲς ὁποίαν συμβολὴν παρέχει ἡ εἰσαγωγὴ τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως εἰς τὴν σπουδὴν τῶν νόμων πιθανοτήτων τῶν ἐκ τῆς τύχης ἐξαρτωμένων μεταβλητῶν.

6. Ἐπὶ τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα: Ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἐπὶ μέρους χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν ἔνθα $y = x_1 + x_2$ καὶ ἂς ζητήσωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν τῆς y. Πρὸς τοῦτο ζητήσωμεν τὴν πιθανὴν τιμὴν

$$E(e^{ty}) = E\,[e^{t(x_1+x_2)}] = E[e^{tx_1}.\,e^{tx_2}] = E(e^{tx_1})\,.\,E(e^{tx_2}) = \varphi_1(t)\,.\,\varphi_2(t).$$

$$\text{Όθεν } \varphi(t) = \varphi_1(t)\,.\,\varphi_2(t).$$

Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύεται δι' οἱονδήποτε ἀριθμὸν μεταβλητῶν. Ἡ ἀπόδειξίς του ὀφείλεται εἰς τὸν Cauchy.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τοῦτο εἰς τὴν ἀναζήτησιν τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς z ἥτις εἶναι ἄθροισμα πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἤτοι :

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_\kappa$$

Ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν x ὁρίζεται κατὰ τὰς διαδοχικὰς κληρώσεις ἐκ μιᾶς κάλπης περιεχούσης λευκὰ καὶ μαῦρα σφαιρίδια κατ' ἀναλογίαν p καὶ q. Καθ' ἑκάστην ἐξαγωγὴν ὑπάρχει ἡ συνθήκη νὰ πληρώνεται 1 δραχμὴ δι' ἕκαστον λευκὸν σφαιρίδιον καὶ 0 δι' ἕκαστον μαῦρο καὶ ἐπὶ πλέον τὸ ἐξαγόμενον σφαιρίδιον ἐπαναρρίπτεται εἰς τὴν κάλπην. Τὸ πείραμα ἐπαναλαμβάνεται κ φορὰς οὕτως ὥστε ὁρίζονται αἱ μεταβληταί :

$$x_1\begin{matrix}\nearrow p & q\\ \searrow 1 & 0\end{matrix}\Big|,\quad x_2\begin{matrix}\nearrow p & q\\ \searrow 1 & 0\end{matrix}\dots\dots\quad x_\kappa\begin{matrix}\nearrow p & q\\ \searrow 1 & 0\end{matrix}$$

Ἐνταῦθα $\varphi_{x_1}(t) = p_1e^{tx_1} + p_2e^{tx_2} = pe^{t\,.\,1} + qe^{t\,:\,0} = pe^t + q$

ὁμοίως $\varphi_{x_2}(t) = pe^t + q$ καὶ γενικῶς $\varphi_{x_\kappa}(t) = pe^t + q$

Ἂν ὅθεν διὰ $\Phi(t)$ καλέσωμεν τὴν χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν τῆς z λαμβάνομεν

$$\Phi(t) = (pe^t + q)^\kappa = (p + p\frac{t}{1} + p\frac{t^2}{2!} + \dots + q)^\kappa$$

ἢ

$$\Phi(t) = \left(1 + p\frac{t}{1} + p\frac{t^2}{2} + \dots\right)^\kappa \tag{9}$$

ἢ

$$\Phi(t) = 1 + \kappa pt + \frac{\kappa(\kappa-1)}{2}p^2t^2 + \kappa p\frac{t^2}{2} + \dots$$

ἢ

$$\Phi(t) = 1 + \kappa pt + \frac{t^2}{2}[\kappa p - \kappa p^2 + \kappa^2p^2] + \dots$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης συνάγομεν τὰς διαδοχικὰς ροπὰς τῆς μεταβλητῆς z. Εἶναι δὲ αὗται οἱ διαδοχικοὶ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς χαρακτηριστικῆς ταύτης συναρτήσεως $\Phi(t)$, ἤτοι

$$m_1 = \kappa p,\quad m_2 = \kappa p - \kappa p^2 + \kappa^2p^2 = \kappa p(1-p) + \kappa^2p^2 = \kappa pq + \kappa^2p^2$$

ἀλλὰ $\sigma_z^2 = m_2 - m_1^2$ ὅθεν $\sigma_z^2 = \kappa pq + \kappa^2p^2 - \kappa^2p^2 = \kappa pq$ καὶ

$$\sigma_z = \sqrt{\kappa pq}$$

7. Ἐὰν M εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιτυχιῶν, δηλαδὴ τῶν ἐξαχθέντων λευκῶν σφαιριδίων ἐκ τῆς κάλπης, ἡ μεταβλητὴ z γίνεται τώρα αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς M, ἤτοι

$$M = x_1 + x_2 + \dots + x^n$$

καὶ ἡ μεταβλητή, ἀναφερομένη εἰς τὸ κέντρον βάρους της, ἤτοι εἰς τὴν πιθανὴν αὐτῆς τιμὴν E(M), γίνεται $M - E(M) = M - np = \Sigma(x_i - p)$

Ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς ταύτης εἶναι:

$$\Phi(t) = (pe^{qt} + qe^{-pt})^n$$

Ἀναπτύσσοντες, πρῶτον, τὰς ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ἐκθετικὰς συναρτήσεις, λαμβάνομεν:

$$pe^{qt} = p\left[1 + qt + \frac{q^2t^2}{2!} + \frac{q^3t^3}{3!} + \ldots + \frac{p^n t^n}{n!} + \ldots\right]$$

$$qe^{-pt} = q\left[1 - pt + \frac{p^2t^2}{2!} - \frac{p^3t^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{p^n t^n}{n!} + \ldots\right]$$

Προσθέτοντες δὲ ἔχομεν

$$pe^{qt} + qe^{-pt} = \left(p + q + pqt, - pqt + \frac{pq^2t^2}{2} + \frac{qp^2t^2}{2} + \ldots\right)^n$$

καὶ

$$\Phi(t) = \left[1 + \frac{pq(p+q)t^2}{2} + \frac{pq(q^2 - p^2)t^3}{3!} + \frac{pp(q^3 + p^3)t^4}{4!} + \ldots\right]^n$$

ἢ

$$\Phi(t) = \left[1 + pq\frac{t^2}{2} + \frac{pq(q - p)t^3}{3!} + \frac{pq(1 - 3pq)t^4}{4!} + \ldots \right.$$
$$\left. + pq\left[q^{n-1} + (-1)^n p^{n-1}\right]\frac{t^n}{n!} \ldots\right]^n \qquad (10)$$

Παρατηροῦντες μόνον τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς ἐντὸς τῆς παρενθέσεως παραστάσεως, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὰς ροπὰς μέχρι τῆς τετάρτης τάξεως. Ἰδιαιτέρως ἔχομεν:

$$\mu_2 = npq, \quad \mu_3 = npq(q - p),$$
$$\mu_4 = npq(1 - 3pq) + 3n(n-1)p^2q^2 = npq(1 - 6pq) + 3n^2p^2q^2$$

Ἐὰν δὲ ὡς μεταβλητὴν λάβωμεν τὴν συχνότητα $f(x) = \frac{m}{n} - p$ ἢ $\frac{m - np}{n}$

θὰ ἔχωμεν $\mu_2 = \frac{pq}{n}$, $\mu_3 = \frac{pq(q-p)}{n^2}$ καὶ $\mu_4 = \frac{pq(1 - 6pq)}{n^3} + \frac{3p^2q^2}{n^2}$

Αἱ δύο πρῶται ροπαὶ εἶναι γνωσταὶ ἤδη ἀπὸ τὴν πρώτην ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τοῦ Bernoulli, τὴν βασιζομένην ἐπὶ τῆς ἀνισότητος τοῦ Tchebichef.

8. Μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσαμεν μεταβλητὰς τάξεως ὡρισμένης, δηλαδὴ λαμβανούσας ἕνα ὡρισμένον ἀριθμὸν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots x_n$ ὅπου n ἀριθμὸς πεπερασμένος, ὁσονδήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι.

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεταβλητὴ λαμβάνει μίαν ἀπειρίαν τιμῶν μεμονωμένων

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

καὶ εἰς ἑκάστην τῶν τιμῶν τούτων ἀντιστοιχεῖ μία πιθανότης τῆς ἀκολουθίας

$$p_1, p_2 \ldots p_n \ldots$$

μὲ τὴν προϋπόθεσιν πάντοτε ὅτι ἡ σειρὰ $p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$ εἶναι συγκλίνουσα καὶ τὸ ἄθροισμά της τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὁρίζομεν ἕνα νέον νόμον πιθανότητος.

Θεωρήσωμεν π. χ. ὡς σειρὰν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

$$0, 1, 2, \ldots n, \ldots$$

καὶ ὡς ἀντίστοιχον πιθανότητα p_n τὴν ποσότητα

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

ἔνθα λ ὡρισμένος τις ἀριθμός.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n + \ldots\ldots$ εἶναι ἴσον μὲ 1 διότι ἔχομεν

$$p_0 = e^{-\lambda},\ p_1 = e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1},\ p_2 = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}, \ldots p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

καὶ $\sum\limits_{n=o}^{n} p_n = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} + \ldots\right) = e^{-\lambda} . e^{\lambda} = 1.$

Ὁ οὕτως ὁριζόμενος νόμος καλεῖται νόμος τοῦ Poisson.

Ἴδωμεν τώρα ποία ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

Ὡς γνωστόν, $\phi(t) = E\,[e^{tx_i}] = p_1e^{tx_1} + p_2e^{tx_2} + \ldots + p_\kappa e^{tx_\kappa}$

Ἐνταῦθα, λοιπόν, $E\,[e^{tx_i}]$ θὰ εἶναι μία σειρὰ ἧς ὁ γενικὸς ὅρος ἔχει τὴν μορφὴν

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}e^{tx}$$

ἔνθα x ἡ μεταβλητὴ ἀντὶ n καὶ ἑπομένως:

$$\phi(t) = E\,[e^{tx_i}] = \sum_{x=o}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}e^{tx}$$

Διὰ $x = 0$ λαμβάνομεν: $e^{-\lambda}$

» $x = 1$ » : $e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1}e^{t}$

» $x = 2$ » : $e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}e^{2t}$

κ. ο. κ. Ἀθροίζοντες δὲ ἔχομεν:

$$\phi(t) = e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\lambda}{1}e^{t} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{2t} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}e^{nt}\ \ldots\right].$$

Ἡ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης σειρὰ εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συναρτήσεως $e^{\lambda e^t}$

ἑπομένως $\phi(t) = e^{-\lambda} . e^{\lambda e^t} = e^{\lambda e^t - \lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}$

$$\text{ὅθεν}\quad \phi(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \tag{11}$$

Ὑπολογίζομεν τὰς διαδοχικὰς ῥοπὰς $m_0, m_1, m_2 \ldots$ λαμβάνοντες:

$$\phi(o) = m_0 = e^{\lambda(e^0-1)} = e^{\lambda \cdot 0} = 1$$

$$\phi'(o) = m_1 = e^{\lambda(e^0-1)} \cdot \lambda = 1 \cdot \lambda = \lambda$$

$$\phi''(t) = m_2 = e^{\lambda(e^t-1)} \, [\lambda^2 e^{2t} + \lambda e^t] \text{ διὰ } t = 0 \quad \text{ἤτοι}$$

$$\phi''(o) = e^0 \, [\lambda^2 e^0 + \lambda e^0] = \lambda + \lambda^2.$$

Ἂν θέλωμεν αἱ ῥοπαὶ νὰ ἀναφέρωνται εἰς τὸ κέντρον βάρους των ἔχομεν

$$\mu = \lambda - \lambda = 0 \, , \; \mu_2 = m_2 - m_1^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda \, .$$

9. Ἐὰν τέλος θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ μεταβλητὴ ἀποβαίνουσα συνεχὴς λαμβάνει πάσας τὰς τιμὰς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ μὲ ἔντασιν τῆς συνεχοῦς αὐτῆς κατανομῆς τὴν συνάρτησιν

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \tag{12}$$

ἔνθα x_0, σ εἶναι δύο σταθεραί, ὁρίζομεν τὸν νόμον πιθανότητος τοῦ Laplace — Gauss ἢ ὁμαλὸν νόμον (κανονικόν).

Ἡ παραστατικὴ καμπύλη τῆς συναρτήσεως f(x) εἶναι ἡ κωδωνοειδὴς τοιαύτη. Ἂν ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων τοποθετηθῇ εἰς τὸ x_0 καὶ σ ληφθῇ ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν x θὰ ἔχωμεν

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

καὶ

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Ἂς ζητήσωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὴν χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν. Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν πιθανὴν τιμὴν τῆς e^{tx} ἤτοι τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2x}} \, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{13}$$

Ἔνθα e^{tx} εἶναι ἡ ἐξετασθεῖσα καὶ ἀνωτέρω ἐκθετικὴ συνάρτησις καὶ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

ἡ συνάρτησις f(x) ἥτις ἀντιπροσωπεύει τὴν μᾶζαν ἢ τὴν πιθανότητα εἰς κάθε ἀπειροστὸν διάστημα τοῦ ἄξονος τῶν x.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς φ(x) καθίσταται εὐχερὴς ἂν κάμωμεν μερικὰς ἀντικαταστάσεις. Θέτομεν

$$\frac{x - x_0}{\sigma} = \omega \qquad \text{ὅτε} \quad x = \omega\sigma + x_0$$

καὶ ἔχομεν

$$E(e^{tx}) = E(e^{t[x_0+\omega\sigma]}) = E(e^{tx_0+t\omega\sigma}) = E(e^{tx_0}) \ . \ E(e^{t\sigma\omega})$$

ὥστε
$$\varphi(t) = E(e^{tx_0}) \ . \ E(e^{t\sigma\omega}) \qquad (14)$$

Ὑπολογίζομεν πρῶτον τὴν $E(e^{t\sigma\omega})$

Πρὸς τοῦτο θέτομεν $t\sigma = T$ ὅτε $E(e^{t\sigma\omega}) = E(e^{T\omega})$

καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$E(e^{T\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{T\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\varphi$$

ἢ

$$E(e^{T\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} e^{T\omega} \, d\omega$$

ἢ

$$E(e^{T\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}+T\omega} \, d\omega$$

ἢ

$$E(e^{T\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}+T\omega+\frac{T^2}{2}\ \ \frac{T^2}{2}} \, d\omega$$

ἢ

$$E(e^{T\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2-2T\omega+T^2}{2}} \ e^{\frac{T^2}{2}} \, d\omega$$

ἢ

$$E(e^{T\omega}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{T^2}{2}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\omega-T)^2}{2}} \, d\omega \qquad (15)$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς σχέσεως (15) ἔχομεν γινόμενον τοῦ σταθεροῦ παράγοντος $e^{\frac{T^2}{2}}$ ἐπὶ τὴν συνάρτησιν $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\omega-T)^2}{2}} d\omega$ ἥτις ἔχει τὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1$$

διότι παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

Ἔχομεν ὅθεν, δυνάμει τῆς σχέσεως (14), τὴν ἔκφρασιν τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν

$$\varphi(t) = e^{tx_0} \cdot e^{\frac{T^2}{2}} \quad \text{ἢ} \quad \varphi(x) = e^{tx_0} \cdot e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

ἂν δὲ ὑποτεθῇ $x_0 = 0$ ἤτοι ἡ τετμημένη τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης ὡς ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, λαμβάνομεν

$$\varphi(t) = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \tag{16}$$

ἥτις παριστᾷ τὴν χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν τοῦ ἀνηγμένου νόμου τοῦ Laplace Gauss.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν διαδοχικῶν ροπῶν ἀποβαίνει ἤδη εὐχερέστατος διὰ τῆς (16). Τὸ ἀνάπτυγμα αὐτῆς εἶναι:

$$\varphi(t) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \ldots + \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^h \cdot \frac{1}{h!} + \ldots$$

Ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος τούτου συνάγεται ὅτι αἱ ροπαὶ περιττῆς τάξεως εἶναι ὅλαι ἴσαι πρὸς 0, αἱ δὲ τῶν ἀρτίας προκύπτουν ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀρτίων δυνάμεων τῆς t·

ἤτοι $\mu_2 = \sigma^2 \qquad \mu_4 = 3\sigma^4 \qquad \mu_6 = 15\sigma^6$

καὶ γενικῶς

$$\mu_{2\rho} = \frac{(2\rho)!\,\sigma^{2\rho}}{2^\rho \rho!}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ροπῶν ἡ $\mu_2 = \sigma^2$ εἶναι ἐντελῶς ἰδιαζούσης σημασίας, διότι $\sqrt{\mu_2} = \sigma$ ἤτοι ἡ μέση τετραγωνικὴ ἀπόκλισις. Αὕτη, εἰς τὸν ἀνηγμένον νόμον τοῦ Laplace—Gaus, λαμβάνεται σήμερον ὡς μονάς, ἀντὶ νὰ ἰσοῦται πρὸς $1/\sqrt{2}$ εἰς τὴν ἰσοδύναμον μορφήν, τὴν χρησιμοποιουμένην πρότερον, ἤτοι:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἂν ἔχωμεν ὁσασδήποτε ἐκ τῆς τύχης ἐξαρτωμένας μεταβλητὰς ἀνεξαρτήτους καὶ ἀκολουθούσας τὸν ὁμαλὸν νόμον Laplace—Gauss, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀκολουθεῖ ὁμοίως τὸν αὐτὸν νόμον καὶ ἂν καλέσωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο διὰ $z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, ἡ μέση τετραγωνικὴ ἀπόκλισις σ_z ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ μέρους ἀποκλίσεων, ἤτοι

$$\sigma_z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἐκφράζει τὴν σταθερότητα τοῦ νόμου τοῦ Laplace—Gauss καὶ ἡ σημασία της εἶναι σπουδαιοτάτη εἰς τὴν θεωρίαν τῶν σφαλμάτων.

10. Ἀνακεφαλαιοῦντες ὅσα περὶ χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως ἐξεθέσαμεν, συνοψίζομεν ὡς ἑξῆς τὰ συμπεράσματά μας:

Ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ὁρίζεται ὡς ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς ἢ πιθανὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως e^{tx_m} καὶ διεκρίναμεν τρεῖς περιπτώσεις εἰς τὴν ἀναζήτησίν της.

α) Ἡ μεταβλητὴ x_m λαμβάνει πεπερασμένον ἀριθμὸν τιμῶν μεμονωμένων μὲ ἀντίστοιχον πιθανότητα p_m. Ἡ μορφὴ τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως προσδιορίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\varphi(t) = \sum_{m=1}^{\kappa} p_m e^{tx_m}$$

Ἐφαρμογὴ ταύτης εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli ἔνθα $\varphi(t) = (pe^t = q)^n$ καὶ ἐξ αὐτῆς προσδιορίζονται $m_1 = np$, $m_2 = npq + n^2p^2$, $\mu_2 = m_2 - m_1^2 = npq$ ἐξ οὗ $\sigma = \sqrt{npq}$.

β) Ἡ μεταβλητὴ x_m λαμβάνει μίαν ἀπειρίαν τιμῶν π. χ. $0, 1, 2, \ldots n$ μὲ ἀντιστοίχους πιθανότητας $p_m\ e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$. Ἡ μορφὴ τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως προσδιορίζεται ἐκ τοῦ τύπου.

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} e^{nt}.$$

Ἐφαρμογὴ ταύτης εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ νόμου τοῦ Poisson ἔνθα

$$\varphi(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Ἐκ ταύτης δὲ προσδιορίζονται :

$$m_1 = \lambda, \quad m_2 = \lambda + \lambda^2, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \lambda.$$

γ) Ἡ μεταβλητὴ x λαμβάνει ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ἀποβαίνουσα συνεχὴς εἰς τὸ διάστημα τοῦτου. Εἰς ἑκάστην τιμὴν ταύτης ἀτιστοιχεῖ μία πιθανότης τῆς μορφῆς $p_{x,\, x+dx} = f(x)\,dx$ ἔνθα $f(x)$ καλεῖται συνάρτησις τῶν στοιχειωδῶν πιθανοτήτων.

Ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις προσδιορίζεται ἐκ τοῦ τύπου

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

Ἐφαρμογὴ ταύτης εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ νόμου Laplace—Gauss ἔνθα λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\varphi(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

καὶ ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζονται αἱ ροπαὶ ἀρτίας τάξεως ὑπὸ τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\mu_{2\rho} = \frac{(2\rho)!}{2^\rho \rho!} = \sigma^2\rho.$$

Διὰ $\rho = 1$ ἔχομεν τὴν $\mu_2 = \sigma^2$ ἐξ ἧς $\sqrt{\mu_2} = \sigma$.

Ὡς εἶναι φανερόν, καὶ εἰς τὰς τρεῖς θεωρηθείσας περιπτώσεις παραμένει ἀμετάβλητος ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις e^{tx_m}, εἰς τὸν ἐκθέτην τῆς ὁποίας περιέχεται ἡ μεταβλητὴ x_m διαφέρει ὅμως τὸ σύμβολον τῆς ἀθροίσεως καθὼς καὶ τὰ ὅρια ἐντὸς τῶν ὁποίων γίνεται ἡ ἄθροισις αὕτη.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

11. Ἀνωτέρω ὡρίσαμεν ὡς χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν, εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς μεταβλητῆς συνεχοῦς ἧς αἱ τιμαὶ ἐκτείνονται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, τὴν πιθανὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως e_{xt}.

Ἤδη ἂς θεωρήσωμεν τὴν πιθανὴν τιμὴν τῆς e^{-xt} ἥτις παρίσταται ὁμοίως διὰ τῆς φ(t) ἤτοι

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt}\, d\, F(x) \tag{17}$$

Ἵνα βεβαίως ἡ ρητὴ συνάρτησις φ(t) μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς t θεωρηθῆ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (17) ἔνθα F(x) εἶναι μία συνάρτησις μὴ φθίνουσα καὶ πεπερασμένη.

Τούτου δοθέντος, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $F(\infty) - F(-\infty) = M$ ὅτε $F_1(x) = (1/M)\, F(x)$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι $(1/M)\, \varphi(t)$ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως φ(t). Διὰ προσθέσεως μιᾶς σταθερᾶς, τοῦθ' ὅπερ οὐδόλως ἀλλοιώνει τὴν φ(t), δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $F_1(-\infty) = 0$ ὁπότε $F_1(\infty) = 1$. Τοῦτο, ὅμως, προσδιορίζει τὴν μορφὴν τῆς $F_1(x)$, ἥτις δύναται πλέον νὰ θεωρηθῆ ὡς συνάρτησις τῶν ὁλικῶν πιθανοτήτων καὶ ἡ χαρακτηριστική της συνάρτησις θὰ εἶναι $(1/M)\, \varphi(t)$.

Εἰς σχετικὴν ἐργασίαν του ὁ D. V. Widder ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη ἵνα ἡ φ(t) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (17) (ἔνθα F(x) συνάρτησις μὴ φθίνουσα καὶ τὸ ὁλοκλήρωμα συγκλίνει διὰ $\alpha < t < \sigma$) εἶναι ὅπως φ(t) εἶναι συνεχὴς καὶ ἐπὶ πλέον ἀληθεύει ὡς ταυτότης:

$$K = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \varphi\,(s_i + s_j)\,\xi_i\,\xi_j \geqslant 0 \tag{18}$$

διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν n, ξ καὶ $\alpha < s < \beta$.

Ἐπίσης, ἵνα ἡ φ(t) εἶναι χαρακτηριστικὴ συνάρτησις, δέον ἡ συνάρτησις F (x) νὰ εἶναι πεπερασμένη.

Ἀλλ' ἔχομεν

$$\varphi\,(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF\,(x) = F\,(\infty) - F\,(-\infty).$$

Ὅθεν πρέπει νὰ ἀληθεύουν αἱ ἀνισότητες $\varphi\,(0) \leqslant M < \infty$.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ Widder στηρίζεται ἐπὶ δύο λημμάτων ἅτινα ὀφείλονται εἰς τοὺς S. Bernstein καὶ Hamburger.

12. Δίδομεν κατωτέρω μίαν ἁπλῆν ἀνάλυσιν τῶν συνθηκῶν αἵτινες δέον νὰ ἀληθεύουν διὰ τὴν παραδοχὴν τῆς φ (t) ὡς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως, στηριζόμενοι ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Widder.

Πρὸς τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι φ(t) εἶναι μιὰ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις. Τότε K παριστᾶ τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα (ἢ πιθανὴν τιμὴν) τῆς ποσότητος

$$\left|\, \xi_0 e^{-s_0 x} + \dots + \xi_n e^{s_n x} \right|^2$$

ἥτις βεβαίως δὲν εἶναι ἀρνητική, ἐφ' ὅσον ἡ βάσις δὲν εἶναι τοιαύτη. Ὅθεν ἡ

συνθήκη (18) ***εἶναι ἀναγκαία ἵνα*** $\varphi(t)$ ***εἶναι χαρακτηριστικὴ συνάρτησις.***

Ἀφ' ἑτέρου, ἂς δεχθῶμεν ὅτι ἡ $\varphi(t)$ δύναται νὰ τεθῆ ὑπὸ τὴν μορφὴν (17). Τότε, ἂν παραδεχθῶμεν ἰσχύουσαν καὶ τὴν συνθήκην (18), δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι $F(x)$ δὲν εἶναι φθίνουσα.

Ἂς θεωρήσωμεν ἀρχικῶς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ κατανομὴ τῶν μεταβλητῶν εἶναι συγκεντρωμένη εἰς ἕνα πεπερασμένον ἀριθμὸν σημείων, ὅλων τῶν ἄλλων σημείων ἐχόντων πιθανότητα μηδέν. Ἔστωσαν δὲ $x_0, x_1 \ldots x_n$ τὰ σημεῖα ταῦτα, μὲ τὰς ἀντιστοίχους πιθανότητας $p_0, p_1 \ldots p_n$. Ἔχομεν νὰ δείξωμεν ὅτι

$$p_i > 0 .$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι $p_0 < 0$ καὶ ἂς προσδιορίσωμεν τοὺς $n+1$ ἀριθμοὺς $\xi_0 \ldots \xi_n$ κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ἐπαληθεύουν τὰς n ἐξισώσεις

$$\begin{aligned}
A_1 &= \xi_0 e^{-s_0 x_1} + \;.\;.\;. + \xi_n e^{-s_n x_1} = 0 \\
A_2 &= \xi_0 e^{-s_0 x_1} + \;.\;.\;. + \xi_n e^{-s_n x_2} = 0 \\
&\cdots \\
&\cdots \\
A_n &= \xi^0 e^{-s_0 x_n} + \;.\;.\;. + \xi_n e^{-s_n x_n} = 0
\end{aligned}$$

ἔνθα δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὰ s_i αὐθαιρέτους τιμάς, μὲ μόνον τὸν περιορισμὸν

$$A_0 = \xi_0 e^{s-{}_0 x_0} + \xi_1 e^{-s_1 x_0} + \ldots + \xi_n e^{-s_n x_0} \neq 0$$

Ὅθεν συνάγομεν

$$K = p_0 A_0^2 + p_1 A_1^2 + \ldots + p_n A_n^2 = p_0 A_0^2 < 0$$

τοῦθ' ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν $K \geqslant 0$.

Ὅθεν ἔχομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι ***ὅλαι αἱ πιθανότητες τῆς μορφῆς*** p_i ***πρέπει νὰ εἶναι θετικαί.***

13. Ἤδη ἂς θεωρήσωμεν μίαν γενικωτέραν περίπτωσιν, ὑποθέτοντες ὅτι :

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{0}^{n} \xi_i e^{-s_i x} \right)^2 d\,F(x) \geqslant 0 \tag{19}$$

Θέτομεν

$$\xi_i = \xi\left(\frac{iA}{n}\right) \qquad s_i = \frac{iA}{n}$$

καὶ ἔστω ὅτι x εἶναι πεπερασμένον μὲ κατώτερον πέρας $-B$ ἔστω πρὸς τὴν ἀρνητικὴν κατεύθυνσιν τοῦ x, ἤτοι $x \rangle -B$.

Ὅταν $n \to \infty$ θὰ ἔχωμεν :

$$K = \int_{-B}^{\infty} \left(\int_{0}^{A} \xi(u) e^{-xu} du \right)^2 d\,F(x)$$

καὶ διὰ $A \to \infty$

$$K = \int_{-B}^{\infty} \left(\int_{0}^{\infty} \xi(u) e^{-xu} du \right)^2 d F(x).$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ἀκόμη ὅτι F(x) εἶναι φθίνουσα εἴς τι διάστημα $(\alpha_1 \ldots \alpha_2)$. Θέτομεν:

$$\theta(x) = \int_{0}^{\infty} \xi(u) e^{-xu} du \qquad (20)$$

Ἔχοντες, ὅμως, ὑπ' ὄψει τοὺς τύπους ἀντιστροφῆς τοῦ Widder διὰ τὰ ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς (20), τύπους ἰσχύοντας διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς x δι' ἃς τὸ ὁλοκλήρωμα συγκλίνει, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν μίαν συνάρτησιν θ(x) ἥτις νὰ πληροῖ τὰς ἑξῆς συνθήκας.

1) Νὰ εἶναι $[\theta(x)]^2 < \varepsilon$ ἔξω τοῦ διαστήματος $(\alpha_1\ \alpha_2)$.

2) Ἂν α'_1, α'_2 εἶναι τμῆμα τι ὡρισμένον ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\alpha_1\ \sigma_2$ καὶ $\int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} d F(x) = -\mu$, τοῦ $\mu > 0$ καὶ ὡρισμένου, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος α'_1, α'_2 $[\theta(x)]^2 > m$, ἔνθα $m = \mu\varepsilon$.

3) Ἡ ἐξ ἀντιστροφῆς συνάρτησις τῆς θ(x), διδομένη ὑπὸ τῶν τύπων κατὰ Widder, ἔστω ἡ ξ(u), καθιστᾷ τὸ ὁλοκλήρωμα (20) συγκλῖνον διὰ $-B < x < \infty$. Ὅθεν θὰ ἔχωμεν

$$K = \int_{-B}^{\alpha_1} [\theta(x)]^2 dF + \int_{\alpha_2}^{\infty} [\theta(x)]^2 dF + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} [\theta(x)]^2 dF < \varepsilon - m\rho = 0.$$

Ἤτοι $K < 0$, ὅπερ ἄτοπον καὶ ἀντίθετον τῇ ὑποθέσει (19). Τοῦτο ἄγει ἡμᾶς εἰς τὸ νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ F(x) δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι φθίνουσα.

Καὶ εἰς τὰς δύο λοιπὸν ἐξετασθείσας περιπτώσεις ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ παραδοχὴ τῶν συνθηκῶν (18) ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν ἰδιότητα τῆς F(x) νὰ μὴ εἶναι φθίνουσα καὶ ἑπομένως τὸ ἐπαρκὲς τῶν συνθηκῶν τούτων ἵνα ἡ φ(t) θεωρηθῇ ὡς χαρακτηριστικὴ συνάρτησις.

14. Εἰς τὰς συνθήκας (18) δυνάμεθα νὰ δώσωμεν μίαν ἁπλῆν μορφήν, δεδομένου ὅτι αὗται ἰσοδυναμοῦν πρὸς τὴν ἀναγκαιότητα ὅπως πᾶσαι αἱ ὁρίζουσαι

$$\varphi(2s_0), \quad \begin{vmatrix} \varphi(2s_0) & \varphi(s_0+s_1) \\ \varphi(s_1+s_0) & \varphi(2s_1) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \varphi(2s_0) & \varphi(s_0+s_1) & \varphi(s_0+s_2) \\ \varphi(s_1+s_0) & \varphi(2s_1) & \varphi(s_1+s_2) \\ \varphi(2s_2) & \varphi(s_0+s_1) & \varphi(2s_2) \end{vmatrix} \qquad (21)$$

εἶναι ὅλαι $\geqslant 0$.

Αὗται δύνανται νὰ τεθοῦν ὑπὸ μορφὴν ὁριζούσης τοῦ Hankel ἂν $s_i = s_0 + i\alpha$ καὶ $2s_0 = t$. Ἔχομεν, ὅθεν, τὴν ὄπισθεν μορφὴν τῶν σχέσεων (21) διὰ τὴν τρίτην ἐξ αὐτῶν: