ΑΠΛΗ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ

Ὑπὸ τοῦ Δρος ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΑΝΑΓΝΟΥ
Καθηγητοῦ τοῦ ἐν Οὐασιγκτῶνι Πανεπιστημίου Χάουαρντ

Συσχέτισις: Ι. Εἰσαγωγή. Εἰς μίαν ὁμάδα στατιστικῶν προβλημάτων ἀσχολούμεθα μὲ τὴν μελέτην τῶν μέτρων κεντρικῆς τάσεως, ὅπως εἶναι οἱ διάφοροι μέσοι ὅροι, καθὼς καὶ μὲ τὴν μελέτην τῆς σχετικῆς ἀκριβείας τῶν μέτρων κεντρικῆς τάσεως. Δηλαδή, τὴν μελέτην τῶν μέτρων διασπορᾶς ὅπως ἡ μέση ἀπόκλισις, ἡ βασικὴ ἀπόκλισις (σ) καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Εἰς ἄλλην ὁμάδα, πάλιν, μελετῶμεν τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ὁ χρόνος ὑπεισέρχεται ὡς μεταβλητή. Εἰς τὴν ἐν λόγῳ ὁμάδα ὑπάγονται οἱ ἀριθμοδεῖκται καὶ αἱ χρονολογικαὶ σειραί. Τέλος, εἰς τρίτην ὁμάδα μελετῶμεν τὰς σχέσεις μεταξὺ μεταβλητῶν καὶ ποσοτικοῦ καθορισμοῦ τῶν ἐν λόγῳ σχέσεων. Εἰς τὴν τρίτην αὐτὴν ὁμάδα, μὲ τὴν ὁποίαν θ' ἀσχοληθῶμεν εἰς τὸ παρὸν ἄρθρον, ἀνήκουν τρία προβλήματα. Πρῶτον, τὸ πρόβλημα τῆς ἁπλῆς συσχετίσεως, δεύτερον, τὸ πρόβλημα τῆς πολλαπλῆς συσχετίσεως καὶ τρίτον, τὸ πρόβλημα τῆς μερικῆς συσχετίσεως.

Ἡ μελέτη τῆς συσχετίσεως, ἀδιάφορον ἂν πρόκειται περὶ ἁπλῆς, πολλαπλῆς ἢ μερικῆς, δὲν ἀποτελεῖ μελέτην διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν τῆς ὑπάρξεως ἢ μὴ αἰτιολογικῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν. Ἡ ἐξακρίβωσις τῆς ὑπάρξεως ἢ μὴ τοιούτων σχέσεων πρέπει νὰ διαπιστοῦται δι' ἄλλων ἐπιστημονικῶν μέσων. Ἐὰν ἐξακριβωθῇ, ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτος αἰτιολογικὸς σύνδεσμος, τότε ἡ στατιστικὴ μᾶς βοηθεῖ νὰ μετρήσωμεν πόσον στενὸς εἶναι ὁ σύνδεσμος. Εἶναι ἀνάγκη νὰ κατανοηθῇ καλῶς τὸ σημεῖον αὐτό, διότι διαφορετικὰ εἶναι δυνατὸν νὰ καταλήξωμεν εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα. Δὲν εἶναι ἀπίθανον, λόγου χάριν, νὰ ἐξακριβώσωμεν μαθηματικὴν σχέσιν μεταξὺ γεννήσεων εἰς τὴν Ἀμερικὴν καὶ παραγωγῆς ἀδαμάντων εἰς τὴν Νότιον Ἀφρικήν. Εἶναι δυνατὸν νὰ προχωρήσωμεν εἰς μαθηματικὸν προσδιορισμὸν τῆς συσχετίσεως, ἀλλὰ ἡ συσχέτισις αὐτὴ δὲν μᾶς λέγει τίποτε — διότι λογικῶς δὲν ὑπάρχει αἰτιολογικὸς σύνδεσμος μεταξὺ τῆς παραγωγῆς ἀδαμάντων καὶ γεννήσεων. Ἐξ ἄλλου, ὅταν θέλωμεν νὰ μελετήσωμεν τὴν ἐπίδρασιν τῆς αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς ἐπὶ τῶν τιμῶν, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαπιστώνομεν αἰτιολογικὸν σύνδεσμον καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως εἶναι νοητός.

Παρετήρησα ἀνωτέρω, ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς συσχετίσεως περιλαμβάνει

Σημ. Εἰς τὸ παρὸν ἄρθρον χρησιμοποιοῦνται στοιχεῖα τὰ ὁποῖα κατ' ἔτος συλλέγονται ἀπὸ φοιτητάς μου διὰ τὰ στατιστικὰ ἐργαστήρια τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Χάουαρντ. Ἡ συμμετοχὴ τῶν φοιτητῶν εἶναι πολλαπλῆ, κυρίως εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν μαθηματικῶν ὑπολογισμῶν.

τρία βασικὰ ὑποπροβλήματα: Πρῶτον τὸ πρόβλημα τῆς ἁπλῆς συσχετίσεως, εἰς τὸ ὁποῖον μετροῦμεν τὸ μέγεθος τῆς συσχετίσεως μεταξὺ δύο μεταβλητῶν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι μόνον αἱ δύο μεταβληταὶ ὑπάρχουν. Ἡ ὕπαρξις ἄλλων μεταβλητῶν ἀγνοεῖται.

Εἰς τὴν μελέτην τοῦ προβλήματος τῆς πολλαπλῆς συσχετίσεως, δὲν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν μόνον δύο μεταβλητάς, ἀλλὰ ὅλας τὰς δυνατὰς μεταβλητὰς καὶ μελετοῦμεν τὴν συνδυασμένην καὶ ὁλικὴν ἐπίδρασίν των ἐπὶ ὡρισμένης ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς μερικῆς συσχετίσεως, δὲν λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν μίαν μόνον ἀνεξάρτητον μεταβλητήν, ἀγνοοῦντες τὴν ὕπαρξιν ὅλων τῶν ἄλλων, ὅπως γίνεται εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἁπλῆς συσχετίσεως, οὔτε προσπαθοῦμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν συνδυασμένην ἐπίδρασιν ὅλων τῶν δυνατῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ὅπως γίνεται εἰς τὴν πολλαπλῆν. Εἰς τὴν μερικήν, μελετῶμεν τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, χωρὶς νὰ ἀγνοοῦμεν τὴν ὕπαρξιν ἄλλων ἀνεξαρτήτων, ἀλλ' ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἄλλαι μεταβληταὶ παραμένουν σταθεραὶ καὶ συνεπῶς μετροῦμεν μόνον τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς μεταβαλλομένης ἀνεξαρτήτου.

II. 1. ***Ἁπλῆ συσχέτισις.*** Ἔχει ἀποδειχθῆ, ὅτι ὑπάρχει κάποια σχέσις μεταξὺ βάρους καὶ ὕψους ἑνὸς ἀτόμου. Εἰς τὸν πίνακα I, σελ. 83 καὶ 84, μᾶς δίδονται τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα χρειαζόμεθα διὰ τὸ πρόβλημά μας. Κατ' ἀρχὴν πρέπει ν' ἀποδείξωμεν καὶ ἐμπειρικῶς, ὅτι ὑπάρχει σχέσις μεταξὺ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (X_2) ὕψους καὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς (X_1) βάρους τῶν φοιτητῶν. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὸ λεγόμενον διάγραμμα διασπορᾶς διὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ὀργανωθῆ εἰς κατανομὴν συχνότητος ἢ τὸν πίνακα συσχετίσεως δι' ὠργανωμένα στοιχεῖα. Ὁ σκοπὸς τῶν δύο πινάκων εἶναι νὰ μᾶς διαφωτίσουν ἐπὶ τῶν ἀκολούθων σημείων: α) Ὑπάρχει σχέσις μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν; Μὲ ἄλλους λόγους, αἱ μεταβολαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (X_2), ἐπηρεάζουν τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν (X_1); β) Εἶναι ἡ ἐν λόγῳ σχέσις γραμμικὴ ἢ μή; γ) Εἶναι ἡ σχέσις στενή;

2. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ διάγραμμα διασπορᾶς, κατασκευάζομεν τὴν κλίμακα τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς (X_1) ἐπὶ τοῦ καθέτου ἄξονος καὶ τὴν κλίμακα διὰ τὰς ἀξίας τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (X_2) ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἄξονος. Ἀπὸ τὸν πίνακα I λαμβάνομεν τὸ πρῶτον ζεῦγος ἀξιῶν $X_1 = 145$ καὶ $X_2 = 67$. Ἐκ τοῦ καθέτου ἄξονος (145) σύρομεν νοητὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν μέχρι τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον συναντᾷ αὕτη νοητὴν κάθετον γραμμὴν ἐκ τοῦ ἄξονος (X_2) καὶ εἰδικῶς ἐκ τοῦ σημείου ὅπου $X_2 = 67$. Εἰς τὴν διασταύρωσιν τοποθετοῦμεν τὸ πρῶτον σημεῖον, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰς ἀξίας 145 καὶ 67. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ἐργαζόμεθα μὲ τὰ ὑπόλοιπα ζεύγη ἀξιῶν τῆς ἐξηρτημένης καὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ὅταν ἐξαντληθοῦν τὰ ζεύγη ἀξιῶν, ἔχομεν πλῆρες τὸ διάγραμμα διασπορᾶς καὶ ἐπιχειροῦμεν νὰ ἀναγνώσωμεν τὰς πληροφορίας τὰς ὁποίας μᾶς δίδει (ἴδε διάγραμμα I), (σελ. 85). Κατ' ἀρχήν, ὑπάρχει ἔνδειξις συσχετίσεως μεταξὺ X_1 καὶ X_2, διότι τὰ διάφορα ση-

Π ί ν α ξ I

Βάρη, ὕψη, ἡλικίαι καὶ εἰσόδημα πατρὸς

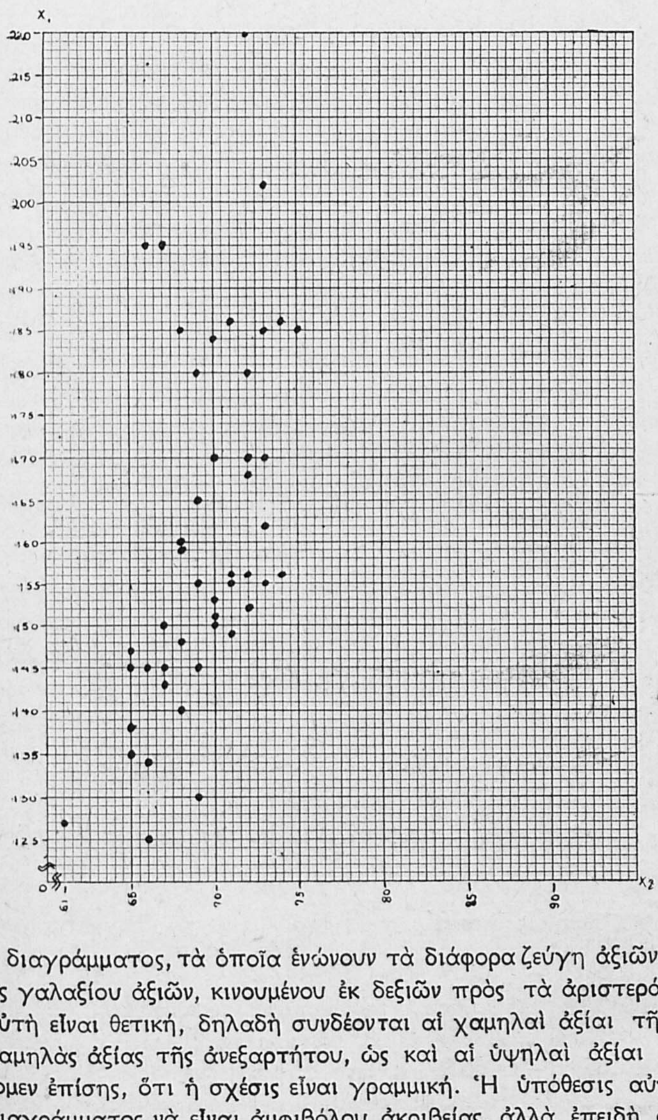
52 φοιτητῶν τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Howard

Βάρος (X_1)	Ὕψος (X_2)	Ἡλικία (X_3)	Εἰσόδημα πατρὸς (X_4)
145	67	26	36
148	68	25	60
195	66	23	100
202	73	21	63
184	70	25	36
149	71	20	40
134	66	20	46
156	74	20	60
185	75	20	50
220	72	25	50
159	68	25	47
168	72	20	45
155	69	23	40
153	70	23	15
130	69	19	52
145	69	18	60
143	67	19	65
125	66	19	40
155	69	20	60
185	68	20	42
130	69	21	80
160	68	21	60
170	70	28	40
125	66	20	22
180	72	25	30

Π η γ ή : Πραγματικὰ στοιχεῖα συγκεντρωθέντα ἐξ ὁμάδος 52 φοιτητῶν τοῦ Πανεπιστημίου Χάουαρντ.

4. 5. 84

Βάρος (X_1)	Ύψος (X_2)	Ἡλικία (X_3)	Εἰσόδημα πατρὸς (X_4)
170	72	23	25
160	68	19	52
138	65	24	30
150	70	30	30
155	71	18	27
185	73	18	50
186	74	19	49
140	68	23	30
157	72	19	40
170	73	19	66
170	73	24	53
170	72	18	32
151	70	20	35
135	65	19	35
150	70	23	36
145	66	28	20
180	69	21	55
156	72	24	51
150	67	19	50
156	71	18	70
155	73	18	120
127	61	26	60
145	65	20	50
195	67	30	38
186	71	22	46
162	73	24	46
142	65	26	50
$\Sigma = 8288$	3610	1138	2485



Διάγραμμα Ι. Διάγραμμα βάρους καὶ ὕψους 52 φοιτητῶν

μεῖα τοῦ διαγράμματος, τὰ ὁποῖα ἑνώνουν τὰ διάφορα ζεύγη ἀξιῶν, ἀποτελοῦν ἕνας εἶδος γαλαξίου ἀξιῶν, κινουμένου ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά. Ἡ κατεύθυνσις αὐτὴ εἶναι θετική, δηλαδὴ συνδέονται αἱ χαμηλαὶ ἀξίαι τῆς ἐξηρτημένης μὲ χαμηλὰς ἀξίας τῆς ἀνεξαρτήτου, ὡς καὶ αἱ ὑψηλαὶ ἀξίαι μὲ ὑψηλάς. Ὑποθέτομεν ἐπίσης, ὅτι ἡ σχέσις εἶναι γραμμική. Ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ φαίνεται ἐκ τοῦ διαγράμματος νὰ εἶναι ἀμφιβόλου ἀκριβείας, ἀλλὰ ἐπειδὴ ὁ ἀντικειμενικός μας σκοπὸς εἶναι μεθοδολογικός, ὑποθέτομεν ὅτι τὸ διάγραμμα μᾶς δίδει γραμμικὴν (ἐν ἀντιθέσει πρὸς κυκλικὴν) σχέσιν.

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ διάγραμμα διασπορᾶς ἔχομεν τὴν πληροφορίαν, ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν σχέσις δὲν εἶναι πολὺ στενή, ἤτοι δὲν παρατηρεῖται μεγάλη συγκέντρωσις τῶν σημείων.

3. Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι τὰ στοιχεῖα μας ἔχουν ὀργανωθῆ εἰς κατανομὰς συχνότητος. Διὰ τὰ στοιχεῖα τῶν βαρῶν ἔχομεν τὸν πίνακα ΙΙα (σελ. 86) καὶ διὰ τὰ στοιχεῖα ὑψῶν ἔχομεν τὴν κατανομὴν τοῦ πίνακος ΙΙβ (σελ. 86).

Πίναξ IIα

Κατανομὴ συχνότητος βαρῶν εἰς λίβρας
52 φοιτητῶν τοῦ Πανεπιστημίου Howard

Βάρη εἰς λίβρας	Συχνότης
125 – 134.9	6
135 – 144.9	5
145 – 154.9	12
155 – 164.9	11
165 – 174.9	6
175 – 184.9	3
185 – 194.9	5
195 – 204.9	3
205 – 214.9	0
215 – 224.9	1
Σύνολον	52

Πηγή: Πραγματικὰ στοιχεῖα.

Πίναξ IIβ

Κατανομὴ συχνότητος ὑψῶν εἰς ἴντσας
52 φοιτητῶν τοῦ Πανεπιστημίου Howard

Ὕψη εἰς ἴντσας	Συχνότης
61 – 62.9	1
63 – 64.9	0
65 – 66.9	9
67 – 68.9	10
69 – 70.9	13
71 – 72.9	10
73 – 74.9	8
75 – 76.9	1
Σύνολον	52

Πηγή: Πραγματικὰ στοιχεῖα.

Θέλομεν νὰ ἐξακριβώσωμεν τὰς ἰδίας πληροφορίας, τὰς ὁποίας μᾶς ἔδωσε τὸ διάγραμμα διασπορᾶς (σελ. 85), ἀλλὰ τὰ στοιχεῖα μας δὲν εἶναι ἀνοργάνωτα. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν τὸν πίνακα συσχετίσεως (πίναξ III, σελ. 94 – 95). Χρησιμοποιοῦμεν μίαν κάθετον στήλην, τὴν ὁποίαν χωρίζομεν εἰς τόσα διαμερίσματα ὅσα εἶναι τὰ ταξικὰ διαστήματα τῆς κατανομῆς συχνότητος τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς. Εἰς ἕκαστον διαμέρισμα τοποθετοῦμεν ἕνα ταξικὸν διάστημα, ἀρχίζοντες μὲ τὰς μικρὰς ἀξίας ἀπὸ τὸ κάτω μέρος τῆς στήλης καὶ προχωροῦντες πρὸς τὰ ἄνω μὲ τὰς μεγαλυτέρας ἀξίας. Ὁριζοντίως κάμνομεν τὸ ἴδιον διὰ τὰ ταξικὰ διαστήματα τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ἀρχίζομεν ἀπὸ ἐπάνω ἀριστερὰ καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιά. Ἴδε πίνακα III (σελ. 94–95).

Ἀκολούθως λαμβάνομεν τὸ ταξικὸν διάστημα 215–224.9 τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς καὶ εὑρίσκομεν πόσοι φοιτηταὶ ἀνήκουν εἰς τὴν ὁμάδα αὐτήν. Εὑρίσκομεν ὅτι ἔχομεν ἕνα μόνον φοιτητήν, τοῦ ὁποίου τὸ βάρος εἶναι μεταξὺ 215–224.9 λίβρες. Τὸ ὕψος τοῦ ἐν λόγῳ φοιτητοῦ ὑπάγεται εἰς τὸ ταξικὸν διάστημα 71 – 72.9 ἰντσῶν. Τοποθετοῦμεν εἰς τὸ ἀντίστοιχον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐκκινοῦντες ὁριζοντίως ἀπὸ τὸ ταξικὸν διάστημα 215–224.9 καὶ καθέτως ἀπὸ τὸ ταξικὸν διάστημα 71–72.9.

Λαμβάνομεν ἤδη τὸ ἑπόμενον ταξικὸν διάστημα βαρῶν, δηλαδὴ 205–214.9. Παρατηροῦμεν εἰς αὐτό, ὅτι δὲν ἔχομεν φοιτητὰς μὲ ἀντίστοιχον βάρος. Προχωροῦμεν εἰς τὸ τρίτον ταξικὸν διάστημα: 194 – 204.5. Ἐδῶ ἔχομεν τρεῖς φοιτητὰς τὰ ὕψη τῶν ὁποίων ἀντιστοίχως ὑπάγονται εἰς τὰ ταξικὰ διαστήματα:

65 – 66.9	ἀριθ.	φοιτητῶν	1
67 – 68.9	»	»	1
. . . . .	. .	. .	.
73 – 74.9	»	»	1

Εἰς τὴν διασταύρωσιν τοῦ ταξικοῦ διαστήματος 194 – 204.5, εἰς ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ταξικῶν διαστημάτων τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τοποθετοῦμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν φοιτητῶν, οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν εἰς τὴν διασταύρωσιν. Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν, ἕνα φοιτητὴν εἰς ἑκάστην διασταύρωσιν.

Προχωροῦμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἕως ὅτου ἐξαντλήσωμεν ὅλα τὰ ταξικὰ διαστήματα τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς.

Εἶναι δυνατὸν ν' ἀκολουθήσωμεν καὶ τὴν ἀντίστροφον πορείαν. Δηλαδὴ νὰ λαμβάνωμεν τὰ ταξικὰ διαστήματα τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς διαδοχικῶς καὶ νὰ τὰ συνδέωμεν μὲ τὰ ταξικὰ διαστήματα τῆς ἐξηρτημένης, ὡς ἀκολούθως:

Φοιτηταί, ἐπὶ παραδείγματι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὕψος 69 – 70.9 ἰντσῶν, κατανέμονται ὡς ἑξῆς ὡς πρὸς τὸ βάρος :

	Ἴντσες	Βάρος εἰς λίβρες	ἀριθ. φοιτητῶν
ὕψος	69 – 70.9	175 – 184.9	2
		165 – 174.9	1
		155 – 164.9	2
		145 – 154.9	6
		135 – 144.9	0
		125 – 134.9	2

Οὕτω, δι' ἑκάστην ὁμάδα ὕψους ἔχομεν ἀντίστοιχον κατανομὴν φοιτητῶν βάσει βάρους.

Μελετῶντες τώρα τὸν συμπληρωμένον πίνακα συσχετίσεως, παρὰ τὰς παρεκκλίσεις ὡρισμένων μονάδων, παρατηροῦμεν τάσιν συσχετίσεως μικρῶν βαρῶν μὲ μικρὰ ὕψη καὶ μεγάλων βαρῶν μὲ μεγάλα ὕψη (ἴδε πίνακα ΙΙΙ, σελ. 94–95). Τοῦτο μαρτυρεῖ τὴν ὕπαρξιν θετικῆς συσχετίσεως. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ συσχέτισις φαίνεται νὰ εἶναι γραμμική, ἂν καὶ αὐστηρὸς στατιστικὸς ἔλεγχος πιθανὸν νὰ ἀποδείξῃ ὅτι ἡ περὶ ὑπάρξεως γραμμικῆς συσχετίσεως ὑπόθεσις εἶναι ὀλίγον παρακεκινδυνευμένη. Μὲ τὴν ἐπιφύλαξιν αὐτήν, θὰ παραδεχθῶμεν ὅτι ἡ συσχέτισις εἶναι γραμμική. Ὡς πρὸς τὴν στενότητα συσχετίσεως, ὁ πίναξ μᾶς λέγει ὅτι δὲν πρόκειται περὶ πολὺ στενῆς συσχετίσεως.

4. Ἡ ὑπόθεσις ὑπάρξεως γραμμικῆς συσχετίσεως μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κάμωμεν χρῆσιν τῆς ἁπλῆς ἐξισώσεως:

$$X_1 = \alpha + \beta X_2 \qquad (1)$$

ὅπου X_1 ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν (βάρος) καὶ X_2 εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν (ὕψος). Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀξιῶν τῶν δύο ἀγνώστων α καὶ β, δι' ἕκαστον ζεῦγος ἀξιῶν τῶν μεταβλητῶν X_1, X_2, ἔχομεν καὶ μίαν ἐξίσωσιν. Διὰ τὰ 52 ζεύγη (διότι ἔχομεν στοιχεῖα διὰ 52 φοιτητάς), ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται:

$$\Sigma X_1 = N\alpha + \beta \Sigma X_2 \qquad (2)$$

ὅπου Σ ἀναφέρεται εἰς τὸ σύνολον. Δεδομένου ὅτι ἔχομεν δύο ἀγνώστους α καὶ β, χρειαζόμεθα δύο κανονικὰς ἐξισώσεις. Ἡ πρώτη εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (2) μὲ τὸν συντελεστὴν τῆς ἀγνώστου α, δηλαδὴ 1. Ἡ δευτέρα, εὑρίσκεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως (2) μὲ τὸν συντελεστὴν τῆς ἀγνώστου β, δηλαδὴ X_2. Οὕτως ἔχομεν:

Πρώτη κανονική: $$\Sigma X_1 = N\alpha + \beta \Sigma X_2 \qquad (3)$$

Δευτέρα κανονική: $$\Sigma X_1 X_2 = \alpha \Sigma X_2 + \beta \Sigma X_2^2 \qquad (4)$$

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν δύο ἐξισώσεων, χρειαζόμεθα τὰς ἀξίας : ΣX_1, ΣX_2, ΣX_1X_2, ΣX_2^2. Αἱ ἀξίαι αὐταὶ εἰς τὸ πρόβλημά μας εἶναι :

$$\Sigma X_1 = 8288$$

$$\Sigma X_2 = 3610$$

$$\Sigma X_1X_2 = 577001$$

$$\Sigma X_2^2 = 251070$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὰς δύο κανονικὰς ἐξισώσεις, ἔχομεν :

$$8288 = 52\alpha + 3610\beta \qquad (3)$$

$$577001 = 3610\alpha + 251070\beta \qquad (4)$$

ἐπιλύοντες τὰς δύο ἐξισώσεις διὰ α καὶ β, ἔχομεν :

$$\alpha = -110.7 \quad \text{καὶ}$$

$$\beta = \quad 3.89$$

Αἱ ἀξίαι τῆς τάσεως παριστώμεναι συμβολικῶς διὰ X_{1c}, ὑπολογίζονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως :

$$X_{1c} = \alpha + \beta X_2 \qquad (5)$$

Ἀντικαθιστῶντες δι' ἕκαστον ζεῦγος ἀξιῶν τῶν μεταβλητῶν τὰς ὑπολογισθείσας ἀξίας τῶν ἀγνώστων $\alpha = -110.7$ καὶ $\beta = 3.89$, εὑρίσκομεν τὰς ἀξίας τῆς τάσεως. [Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἐν λόγῳ ἀξιῶν, προβαίνομεν εἰς τὴν χάραξιν τῆς τάσεως εἰς τὸ διάγραμμα διασπορᾶς (σελ. 85)].

5. Παρατηροῦμεν τότε, ὅτι αἱ πραγματικαὶ ἀξίαι δὲν συμπίπτουν μὲ τὰς ἀξίας τῆς τάσεως, ἀλλ' εἶναι μικρότεραι ἢ μεγαλύτεραι. Εὑρίσκομεν τὰς διαφορὰς μεταξὺ πραγματικῶν ἀξιῶν τῶν βαρῶν, καὶ τῶν ἀξιῶν τῆς τάσεως, δηλαδὴ τὰς διαφορὰς $X_1 - X_{1c}$. Ἐὰν αἱ ἀξίαι τῆς τάσεως εἶναι ἀκριβεῖς, τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν διαφορῶν πρέπει νὰ εἶναι $\underline{\underline{0}}$.

Τὸ ἀποτέλεσμα ὅμως αὐτὸ μᾶς δημιουργεῖ τὴν ἀνωμαλίαν, ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρήσωμεν τὴν διασπορὰν τῶν πραγματικῶν στοιχείων περὶ τὴν γραμμὴν τῆς τάσεως, λόγῳ ἐκμηδενισμοῦ τῶν διαφορῶν. Διὰ ν' ἀποφύγωμεν τὴν δυσκολίαν αὐτήν, ὑψώνομεν τὰς διαφορὰς εἰς τὸ τετράγωνον, δηλαδὴ προσδιορίζομεν τὴν ἔκφρασιν $(X_1 - X_{1c})^2$.

Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο δέον νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχήν μας ἐπὶ δύο ἐκφράσεων, αἱ ὁποῖαι φαίνονται παρόμοιαι, ἀλλὰ δὲν εἶναι. Ἡ μία ἔκφρασις εἶναι $(X_1 - \overline{X}_1)^2$. Ἡ ἔκφρασις αὐτὴ μετρεῖ ἀποκλίσεις τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ὅρου καὶ χρησιμοποιεῖται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς βασικῆς ἀποκλίσεως (σ). Ἡ ἑτέρα ἔκφρασις $(X_1 - X_{1c})^2$ μετρεῖ ἀποκλίσεις τῶν ἀξιῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς ἀπὸ τῆς τάσεως καὶ χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ στατιστικοῦ μέτρου τῆς διασπορᾶς S. Τὸ μέτρον αὐτὸ μετὰ τοῦ σ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἁπλῆς συσχετίσεως. Προτοῦ ὅμως προχωρήσωμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ μέτρου διασπορᾶς τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν ἀπὸ τῆς τάσεως πρέπει νὰ καθορίσωμεν τὰς σχέσεις μεταξὺ ὡρισμένων στατιστικῶν μέτρων.

6. Ἡ βασικὴ ἀπόκλισις (σ) ἀντιπροσωπεύει ὅλων τῶν εἰδῶν τὰς ἀποκλίσεις. Δηλαδὴ αὕτη εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀποκλίσεων τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ὅρου. Τὸ σύνολον τοῦτο περιέχει : α) τὰς ἀποκλίσεις τῶν ἀξιῶν τῆς τάσεως ἀπὸ τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν, καὶ β) τὰς ἀποκλίσεις τῶν ἀξιῶν τῆς τάσεως ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ὅρου τῶν ἀξιῶν αὐτῆς. Αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἐκφράζονται συμβολικῶς ὡς ἀκολούθως. Πρῶτον: $(X-\bar{X})^2$, συνολικὴ ἀπόκλισις. Δεύτερον: $(X_c - \bar{X}_c)^2$ ἀπόκλισις τῶν ἀξιῶν τῆς τάσεως ἀπὸ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ὅρου τῶν ἐν λόγῳ ἀξιῶν. Τρίτον $(X - X_c)$, ἀποκλίσεις τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν ἀπὸ τῆς τάσεως. Τώρα ἐκ τῆς σχέσεως $(X-\bar{X})^2$ ὑπολογίζομεν τὴν βασικὴν ἀπόκλισιν σ ὡς ἀκολούθως $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N}}$, ὅπου f ἀναφέρεται εἰς τὰς συχνότητας ἑκάστου ταξικοῦ διαστήματος. Ἐπίσης ἐκ τῆς σχέσεως $(X_c - X_c)^2$ εὑρίσκομεν τὴν βασικὴν ἀπόκλισιν $\sigma_c = \sqrt{\frac{\Sigma f x_c{}^2}{N}}$ καὶ τέλος ἐκ τῆς σχέσεως $(X - X_c)^2$ ὑπολογίζομεν τὸ S δηλαδὴ τὸν συντελεστὴν διασπορᾶς, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὰς ἀποκλίσεις τῶν πραγματικῶν ἀξιῶν ἀπὸ τῆς τάσεως. Οὕτως ἔχομεν $S = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N}}$.

Αἱ μεταξὺ τῶν σ, σ_c καὶ S σχέσεις, μᾶς δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\sigma = \sigma_c + S$$

7. Παρετηρήσαμεν, ὅτι διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ συντελεστοῦ διασπορᾶς S εὑρίσκομεν τὰς διαφορὰς $X - X_c$ καὶ εἰς τὸ πρόβλημά μας $X_1 - X_{1c}$. Διὰ ν' ἀποφύγωμεν ἐκμηδενισμὸν τοῦ συνόλου τῶν διαφορῶν, ὑψώνομεν τὰς διαφορὰς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀθροίζομεν. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιπτώσεων.

Οὕτως ἔχομεν :

$$S^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} \qquad \text{καὶ} \qquad S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} \qquad (1)$$

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα ἔχουν ὠργανωθῆ εἰς κατανομὴν συχνότητος, τότε διὰ πραγματικὰς ἀξίας λαμβάνομεν τὰς μέσας ἀξίας τῶν ταξικῶν διαστημάτων, ὁπότε αἱ ἀποκλίσεις τῶν μέσων ἀξιῶν ἀπὸ τῆς τάσεως πολλαπλασιάζονται μὲ τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας καὶ ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις διὰ τὸ πρόβλημά μας καθίσταται :

$$Sx_1 = \sqrt{\frac{\Sigma f x_1^2}{N}} \qquad (2)$$

Εἰς τὸ πρόβλημά μας χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἔκφρασιν (1) καὶ ἔχομεν :

$$Sx_1 = \sqrt{\frac{16028.5}{52}} = \sqrt{308.2} = 17.5$$

Προσδιωρίσαμεν ἕως ἐδῶ τὴν τάσιν καὶ τὸν συντελεστὴν διασπορᾶς. Ἤδη εἴμεθα ἕτοιμοι νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἁπλῆς συσχετίσεως, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ r.

Ἐὰν παραστήσωμεν τελείαν συσχέτισιν διὰ τοῦ λόγου 1.00, ἡ σχέσις αὔτη μᾶς λέγει ὅτι ὅλαι αἱ πραγματικαὶ ἀξίαι τῶν δύο μεταβλητῶν συναντῶνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς τῆς τάσεως καὶ συνεπῶς δὲν ὑπάρχει διασπορὰ περὶ τὴν γραμμήν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ὁ συντελεστὴς διασπορᾶς εἶναι ἴσος πρὸς τὸ μηδέν. Τοῦτο δὲ διότι ἐὰν τὸ σύνολον τῶν ἀποκλίσεων, δηλαδὴ $\Sigma x^2 = 0$, θὰ ἔχωμεν $Sx_1 = 0$. Ἀντιθέτως, ἐὰν ὁ συντελεστὴς διασπορᾶς Sx_1 τείνει νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν βασικὴν ἀπόκλισιν σ, ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τὸ σύνολον τῶν ἀποκλίσεων, τότε ὁ λόγος $\frac{Sx_1^2}{\sigma_{x_1}^2} = 1.00$. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸν λόγον αὐτὸν ἀπὸ τὸν λόγον τῆς πλήρους συσχετίσεως, δηλαδὴ 1.00, τότε ἡ συσχέτισις γίνεται μηδέν. Ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ συντελεστὴς διασπορᾶς, τόσον μικροτέρα εἶναι ἡ συσχέτισις. Τὰ ὅρια τῆς συσχετίσεως εἶναι 0 (οὐδεμία συσχέτισις) καὶ 1.00 (τελεία συσχέτισις). Ἡ πραγματικότης εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἄκρων.

Τώρα ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία μᾶς δίδει τὸν συντελεστὴν συσχετίσεως ἔχει ὡς ἀκολούθως :

$$r^2 = 1 - \frac{Sx_1^2}{\sigma_{x_1}^2} \qquad \text{καὶ} \qquad r = \sqrt{1 - \frac{Sx_1^2}{\sigma_{x_1}^2}}$$

Ὡς παρετηρήθη ἀνωτέρω, τὰ ὅρια τοῦ Sx_1^2 εἶναι τὸ 0 (ἀπουσία διασπορᾶς, πλήρης συσχέτισις) καὶ $Sx_1^2 = \sigma_{x_1}^2$, ὁπότε $\frac{Sx_1^2}{\sigma_{x_1}^2} = 1.00$ (πλήρης διασπορά, ἀπουσία συσχετίσεως).

Εἰς τὸ πρόβλημά μας ἔχομεν :

$$r = \sqrt{1 - \frac{Sx_1^2}{\sigma_{x_1}^2}} = \sqrt{1 - \frac{308.2}{445.63}} = \sqrt{1 - 0.69} \qquad \text{καὶ} \qquad r = 0{,}56$$

Τὸ συμπέρασμά μας, ὅθεν εἶναι ὅτι ἐνῶ ὑπάρχει συσχέτισις μεταξὺ τῶν δύο ὑπὸ ἐξέτασιν μεταβλητῶν, ἡ συσχέτισις αὕτη δὲν εἶναι στενή. Τὸ φαινόμενον τοῦτο εἶναι ἰδιόρρυθμον μεταξὺ τῶν φοιτητῶν, διότι ἐνῶ τὸ ὕψος των ἀναπτύσσεται φυσιολογικῶς, παρατηρεῖται κάποια καθυστέρησις εἰς τὴν ἀνάλογον ἐξέλιξιν τοῦ βάρους, διὰ λόγους οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦν εἰδικὴν ἀνάλυσιν ἵνα ἀναπτυχθοῦν πλήρως, ἐνῶ σκοπὸς τοῦ παρόντος ἄρθρου εἶναι κυρίως μεθοδολογικός.

Σημείωσις: Ἐξεθέσαμεν ἀνωτέρω πῶς κατασκευάζομεν τὸν πίνακα συσχετίσεως καὶ πῶς τὸν χρησιμοποιοῦμεν διὰ ἑρμηνευτικοὺς σκοπούς. Ἤδη θὰ προχωρήσωμεν εἰς τὸν τρόπον συμπληρώσεως καὶ χρήσεως τοῦ πίνακος, πρὸς ὑπολογισμὸν διαφόρων στατιστικῶν μέτρων. Ὡς παρατηροῦμεν εἰς τὸν πίνακα III, κάτωθι τῆς κατανομῆς συχνότητος (ὁριζοντίως) τοποθετοῦμεν τὰς ἐνδιαμέσους ἀξίας τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, καὶ καθέτως εἰς τὴν στήλην (2) τοποθετοῦμεν τὰς ἐνδιαμέσους ἀξίας τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς.

Εἰς τὸ κύριον σῶμα τοῦ πίνακος (πλαισιούμενον ἀπὸ διπλὰς γραμμὰς) καὶ εἰς τὸ μέσον ἑκάστου τετραγώνου τοποθετοῦμεν τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα. Προσθέτομεν ὁριζοντίως τὰς συχνότητας καὶ τοποθετοῦμεν τὰ σύνολα εἰς τὰ ἀντίστοιχα τετράγωνα τῆς στήλης (11) (f_{X_1}). Προσθέτομεν κατόπιν καθέτως, ἀρχίζοντες μὲ τὴν στήλην (3) καὶ γράφομεν τὰ σύνολα εἰς τὰ τετράγωνα τῆς γραμμῆς (12) (f_{X_2}). Εἰς τὴν στήλην τῶν ἐνδιαμέσων ἀξιῶν [στήλην (2)] ἐκλέγομεν μίαν ἀξίαν ὡς τὸν ὑποθετικὸν μέσον ὅρον, εἰς τὴν περίπτωσίν μας ἐκλέγομεν τὴν ἀξίαν 170. Ἀπὸ τοῦ ὑποθετικοῦ αὐτοῦ μέσου ὅρου ὑπολογίζομεν τὰς ἀποκλίσεις τῶν ὑπολοίπων ἐνδιαμέσων ἀξιῶν εἰς μονάδας ταξικῶν διαστημάτων. Τὰς ἀποκλίσεις αὐτὰς τὰς γράφομεν εἰς τὴν στήλην (12) καὶ παριστῶμεν συμβολικῶς διὰ d_{X_1}. Ὅπου ὁ d' ἀναφέρεται εἰς ἀποκλίσεις εἰς μονάδας ταξικῶν διαστημάτων καὶ ὁ δείκτης X_1 ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητήν. Συνεπῶς, ἡ στήλη 12 μᾶς δίδει τὰς ἀποκλίσεις τῶν μέσων ἀξιῶν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς ἀπὸ τοῦ ὑποθετικοῦ μέσου ὅρου. Διὰ ἀποκλίσεις τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 170 ἀξιῶν, χρησιμοποιοῦμεν τὸ σημεῖον + καὶ διὰ τὰς ἀποκλίσεις ἀξιῶν μικροτέρων τοῦ 170, χρησιμοποιοῦμεν τὸ σημεῖον —. Ἐξαιρετικὴ προσοχὴ πρέπει νὰ καταβληθῇ εἰς τὴν χρῆσιν τῶν σημείων.

Ἐπίσης εἰς τὴν γραμμὴν τῶν ἐνδιαμέσων ἀξιῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς X_2, ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως ὑποθετικὸν μέσον ὅρον. Εἰς τὴν περίπτωσίν μας ἐκλέγομεν τὴν ἀξίαν 70 καὶ ἀπὸ ἐκεῖ μετροῦμεν τὰς ἀποκλίσεις τῶν ἐνδιαμέσων ἀξιῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀπὸ τοῦ ὑποθετικοῦ μέσου ὅρου εἰς μονάδας ταξικῶν διαστημάτων. Τὰς ἐν λόγῳ ἀποκλίσεις γράφομεν εἰς τὴν γραμμὴν 13 καὶ τὰς παριστῶμεν διὰ d_{X_2} (X_2 εἶναι ὁ δείκτης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς).

Πολλαπλασιάζομεν πλέον τὰς στήλας (11) $\times$ (12) καὶ εὑρίσκομεν τὴν στήλην (13). Τὸ αὐτὸ πράττομεν εἰς τὰς γραμμὰς (12) $\times$ (13) καὶ εὑρίσκομεν τὴν γραμμὴν (14) μὲ τὰ σύνολα τῆς στήλης (13) δηλαδὴ —47. Διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιπτώσεων 52 καὶ πολλαπλασιάζοντες μὲ τὸ ταξικὸν διάστημα, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς εἶναι 10, ὑπολογίζομεν τὸν διορθωτικὸν παράγοντα, τὸν ὁποῖον προσθέτομεν ἀλγεβρικῶς εἰς τὸν ὑποθετικὸν μέσον ὅρον. Οὕτως εὑρίσκομεν τὸν ἀκριβῆ μέσον ὅρον τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ M_{X_1} τὸν ὑποθετικὸν μέσον ὅρον 170, τότε ἔχομεν:

$$\bar{X}_{X_1} = M_{X_1} \pm \frac{\Sigma f_{X_1} \cdot d_{X_1}}{N} \cdot c \cdot r, \qquad 1\ 0 \pm \frac{-47}{52} \times 10$$

ὅπου $c \cdot r$=ταξικὸν διάστημα ἴσον μὲ 10.

Καὶ διὰ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν:

$$\bar{X}_{X_2} = M_{X_2} \pm \frac{\Sigma f_{X_2} \cdot d_{X_2}}{N} \cdot c \cdot r, \qquad 10 \pm \frac{-3}{52} \times 2$$

III. Πολλαπλῆ συσχέτισις. Ἐτονίσαμεν ἀνωτέρω, ὅτι ἐνῶ εἰς τὴν ἁπλῆν συσχέτισιν ἔχομεν δύο μόνον μεταβλητὰς καὶ ***ἀγνοοῦμεν*** τὴν ὕπαρ-

---

Συνεπῶς ἐκ τοῦ πίνακος συσχετίσεως ἔχομεν τοὺς ἀριθμητικοὺς μέσους ὅρους τῆς ἐξηρτημένης καὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Κατόπιν, ἐκ τοῦ αὐτοῦ πίνακος δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς βασικὰς ἀποκλίσεις σ_{X_1} καὶ σ_{X_2} τῶν δύο κατανομῶν. Πρὸς τοῦτο ὑψώνομεν εἰς τὸ τετράγωνον τὰς ἀντιστοίχους ἀποκλίσεις στήλην (12) καὶ γραμμὴν (13) καὶ ἔχομεν στήλην (14) καὶ γραμμὴν (15).

Πολλαπλασιάζομεν κατόπιν τὴν στήλην (11) ἐπὶ τὴν στήλην (14), ὡς καὶ τὴν γραμμὴν (12) ἐπὶ τὴν γραμμὴν (15) καὶ ἔχομεν τὴν στήλην (15) καὶ τὴν γραμμὴν (16). Ἀθροίζοντες τὴν στήλην (15) καὶ τὴν γραμμὴν (16) καὶ διαιροῦντες διὰ N, ἔχομεν:

$$\frac{\Sigma f_{X_1} \cdot d_{X_1}^2}{N} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\Sigma\, X_2 \cdot d_{X_2}^2}{N}$$

Αἱ ἐκφράσεις αὐταὶ μᾶς δίδουν τὸ σύνολον τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἐνδιαμέσων ἀξιῶν ἀπὸ τοῦ ὑποθετικοῦ μέσου ὅρου ἑκάστης τῶν κατανομῶν συχνότητος. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς ἀποκλίσεις ἀπὸ τοῦ πραγματικοῦ μέσου ὅρου, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἐκφράσεις τὸν διορθωτικὸν παράγοντα, τὸν ὁποῖον ὑπελογίσαμεν ἀνωτέρω κατὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ὅρου, δηλαδὴ $\frac{\Sigma f d_{X_1}}{N}$ καὶ $\frac{\Sigma f d_{X_2}}{N}$. Ὑψοῦμεν ἀμφοτέρας τὰς ἐκφράσεις εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν:

$$\sigma_{X_1}^2 = \frac{\Sigma f_{X_1} d_{X_1}^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_{X_1} d_{X_1}}{N}\right)^2 \qquad \text{καὶ} \qquad \sigma_{X_2}^2 = \frac{\Sigma f_{X_2} d_{X_2}^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_{X_2} d_{X_2}^2}{N}\right)$$

$$\text{καὶ} \qquad \sigma_{X_1} = \sqrt{\frac{\Sigma f_{X_1} d_{X_1}^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_{X_1} d_{X_1}}{N}\right)^2} \qquad \text{καὶ} \qquad \sigma_{X_2} = \sqrt{\frac{\Sigma f_{X_2} d_{X_2}^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_{X_2} d_{X_2}}{N}\right)^2}$$

Ἀντικαθιστῶντες μὲ τὰς ἀξίας τοῦ προβλήματός μας, εὑρίσκομεν τὰς βασικὰς ἀποκλίσεις σ_{X_1} καὶ σ_{X_2} τῶν δύο μεταβλητῶν X_1 καὶ X_2. Ἀφοῦ προηγουμένως πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὰ ταξικὰ διαστήματα.

Ὥστε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος προσδιωρίσαμεν ἐκτὸς τῶν μέσων ὅρων καὶ τὰς βασικὰς ἀποκλίσεις τῶν δύο μεταβλητῶν.

Εἶναι ἤδη χρήσιμοι ὡρισμέναι ἐπεξηγήσεις σχετικῶς πρὸς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς τοὺς ὁποίους παρατηροῦμεν εἰς ἕκαστον τετράγωνον τοῦ κυρίου σώματος τοῦ πίνακος. Προηγουμένως παρετηρήσαμεν, ὅτι ὁ κεντρικὸς ἀριθμὸς ἀναφέρεται εἰς τὰς καθέκαστα συχνότητας. Ὁ ἀριθμὸς ὑπεράνω τοῦ κέντρου ἀντιπροσωπεύει τὸ γινόμενον τῆς ἀποκλίσεως ἀπὸ τοῦ ὑποθετικοῦ μέσου ὅρου τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον ἀπόκλισιν ἀπὸ τοῦ ὑποθετικοῦ μέσου ὅρου τῆς ἀνεξαρτήτου. Ἄς λάβωμεν, ἐπὶ παραδείγματι, τὴν συχνότητα τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν στήλην (8) καὶ τὴν γραμμὴν (2). Ἡ συχνότης αὕτη ἀντιστοιχεῖ ὁριζοντίως εἰς τὴν ἀπόκλισιν τῆς γραμμῆς (2) καὶ τῆς στήλης (12) καὶ καθέτως εἰς τὴν ἀπόκλισιν τῆς γραμμῆς (13) καὶ τῆς στήλης (8), δηλαδὴ $d_{X_1} = 5$ καὶ $d_{X_2} = 1$. Πολλαπλασιάζομεν $d_{X_1} \cdot d_{X_2}$ καὶ τοποθετοῦμεν τὸ γινόμενον εἰς τὸν ἄνω τοῦ κέντρου ἀριθμὸν τοῦ τετραγώνου τῆς γραμμῆς (2) καὶ στήλης (8). Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀποκλίσεις τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς ὅλα τὰ τετράγωνα εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν συχνότητας. Τέλος, πολλαπλασιάζομεν τὰ γινόμενα $d_{X_1} d_{X_2}$ (ἄνω ἀριθμοὶ ἑκάστου τετραγώνου) μὲ τὴν συχνότητα τοῦ τετραγώνου καὶ τὸ γινόμενον, μὲ τὸ κατάλληλον σημεῖον τοποθετοῦμεν εἰς τὸν τρίτον κάτω ἀριθμὸν τοῦ τετραγώνου. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἀντιπροσωπεύει τὸ γινόμενον $f d_{X_1} d_{X_2}$. Προσθέτοντες ἀλγεβρικῶς ὅλα τὰ γινόμενα ὅλων τῶν τετραγώνων, ἔχομεν:

$$\Sigma f d_{X_1} d_{X_2}$$

Τὴν ποσότητα ταύτην χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τρίτου στατιστικοῦ μέτρου p, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς συσχετίσεως δι' ἄλλης μεθόδου.

Π Ι Ν Α Ξ

Πίναξ συσχετίσεως βάρους καὶ ὕψους φοι

Ταξικὰ Διαστήματα	ἀρ. γραμμῆς	Ἐνδιάμεσος ἀξία βάρους	61— 62.9	63— 64.9	65— 66.9	67— 68 9
Ἐνδιάμεσος ἀξία ὕψους →			62	64	66	68
ἀριθμὸς στήλης →	1	2	3	4	5	6
215—224.9	2	220				
205—214.9	3	210				
195—204 9	4	200			—6 1 —6	—3 1 —3
185—194.9	5	190				—2 1 —2
175—184.9	6	180				
165—174.9	7	170				
155 - 164 9	8	160				1 3 3
145—154 9	9	150			4 2 8	2 3 6
135—144.9	10	140			6 3 18	3 2 6
125—134.9	11	130	16 1 16		8 3 24	
Σ ύ ν ο λ α	12	f_{X_2}	1	0	9	10
$\Sigma f_{X_1} = 52$ $\Sigma f_{X_1} d_{X_1} = -47$	13	d_{X_2}	—4	—3	— 2	— 1
$\Sigma f_{X_2} d_{X_2} = -3$	14	$f_{X_2} d_{X_2}$	—4	0	—18	—10
$\Sigma f_{X_1} d_{X_1}^2 = 275$ $\Sigma f_{X_2} d_{X_2}^2 = 113$	15	$d_{X_2}^2$	16	9	4	1
$\Sigma f d_{X_1} d_{X_2} = 87$	16	$f_{X_2} d_{X_2}^2$	16	0	36	10

III

τητῶν τοῦ Πανεπιστημίου Howard

69— 70.9	71— 72.9	73— 74.9	75— 76.9	fx_1	dx_1	$fx_1 \cdot dx_1$	dx_1^2	$fx_1 \cdot dx_1^2$	
70	72	74	76						
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	5 1 5			1	5	5	25	25	
				0	4	0	16	0	
		6 1 6		3	3	9	9	27	
	2 1 2	4 2 8	6 1 6	5	2	10	4	20	
0 2 0	1 1 1			3	1	3	1	3	
0 1 0	0 3 0	0 2 0		6	0	0	0	0	
0 2 0	—1 3 —3	—2 3 —6		11	—1	—11		11	
0 6 0	—2 1 —2			12	—2	—24	4	48	
				5	—3	—15	9	45	
0 2 0				6	—4	—24	16	96	
13	10	8	1	52		—47		275	
0	1	2	3						
0	10	16	3	—3					
0	1	4	9						
0	10	32	9	113					

ξιν οἱασδήποτε ἄλλης, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πολλαπλῆς συσχετίσεως λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὅλας τὰς γνωστὰς μεταβλητὰς καὶ ἐπιχειροῦμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν συνδυασμένην ἐπίδρασίν των ἐπὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς. Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος I εἰς τὴν μεθοδολογικὴν ἀνάλυσιν τοῦ προβλήματός μας. Εἰς τὸ ἐν λόγῳ πρόβλημα θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν συνδυασμένην ἐπίδρασιν τοῦ ὕψους (X_2), ἡλικίας (X_3) καὶ εἰσοδήματος πατρὸς (X_4), 52 φοιτητῶν, ἐπὶ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, δηλαδὴ τοῦ βάρους των (X_1). Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ σχέσις εἶναι γραμμική, διὰ τοὺς αὐτοὺς λόγους καὶ μὲ τὰς αὐτὰς ἐπιφυλάξεις, τὰς ὁποίας ὑπεδείξαμεν εἰς τὸ τμῆμα περὶ ἁπλῆς συσχετίσεως.

1. Δι' ἑκάστην σειρὰν στοιχείων ἀναφερομένων εἰς ἕκαστον φοιτητήν, ἔχομεν καὶ μίαν γραμμικὴν ἐξίσωσιν τοῦ τύπου :

$$X_1 = \alpha + bX_2 + CX_3 + dX_4 \tag{1}$$

ὅπου α, b, c καὶ d ἀντιπροσωπεύουν ἀγνώστους. Δεδομένου ὅτι ἔχομεν 52 φοιτητάς, θὰ ἔχωμεν 52 παρομοίας ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας ἀθροίζοντες εὑρίσκομεν τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν δι' ὅλους τοὺς φοιτητάς. Δηλαδή :

$$\Sigma X_1 = N\alpha + b\Sigma X_2 + C\Sigma X_3 + d\Sigma X_4 \tag{2}$$

Ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις ἔχει τέσσαρας ἀγνώστους α, b, c καὶ d καὶ συνεπῶς διὰ νὰ ἐπιλυθῇ χρειαζόμεθα τέσσερας κανονικὰς ἐξισώσεις. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἑκάστης κανονικῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιάζομεν ὅλα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) μὲ τὸν συντελεστὴν τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως (1). Οὕτω, διὰ τὴν πρώτην κανονικὴν πολλαπλασιάζομεν μὲ 1 (συντελεστὴς τοῦ α), διὰ τὴν δευτέραν μὲ X_2 (συντελεστὴς τοῦ β), διὰ τὴν τρίτην μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ C, X_3, καὶ διὰ τὴν τετάρτην μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ d δηλαδὴ X_4.Τοιουτοτρόπως ἔχομεν :

$$\Sigma X_1 = N\alpha + b\Sigma X_2 + C\Sigma X_3 + d\Sigma X_4 \qquad (2) \text{ ἢ } (3)$$

$$\Sigma X_1X_2 = \alpha\Sigma X_2 + b\Sigma X_2^2 + C\Sigma X_2X_3 + d\Sigma X_2X_4 \tag{4}$$

$$\Sigma X_1X_3 = \alpha\Sigma X_3 + b\Sigma X_2X_3 + C\Sigma X_3^2 + d\Sigma X_3X_4 \tag{5}$$

$$\Sigma X_1X_4 = \alpha\Sigma X_4 + b\Sigma X_2X_4 + C\Sigma X_3X_4 + d\Sigma X_4^2 \tag{6}$$

2. Ἐσχηματήσαμεν ἤδη τὰς τέσσαρας κανονικὰς ἐξισώσεις. Δεδομένου πλέον, ὅτι εἶναι μέγας κόπος νὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν συνηθισμένην μέθοδον ἐπιλύσεως τῶν ἐν λόγῳ ἐξισώσεων, λαμβάνοντες τὴν πρώτην καὶ δευτέραν, πρώτην καὶ τρίτην κλπ., θὰ ὑποδείξωμεν δύο ἄλλας μεθόδους, αἱ ὁποῖαι εἶναι περισσότερον ἐξυπηρετικαί.

α'. Διαιροῦμεν τὴν πρώτην κανονικὴν ἐξίσωσιν, 2 ἢ 3 ἀνωτέρω, μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν περιπτώσεων καὶ ἔχομεν :

$$\frac{\Sigma X_1}{N} = \frac{N\alpha}{N} + \frac{b\Sigma X_2}{N} + \frac{c\Sigma X_3}{N} + \frac{d\Sigma X_4}{N} \tag{7}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ἐκφράσεις τῆς ἐξισώσεως (7) διὰ τῶν ἰσοδυνάμων μέσων ὅρων, ἔχομεν :

$$\bar{X}_1 = \alpha + b\bar{X}_2 + c\bar{X}_3 + d\bar{X}_4 \tag{8}$$

Ἔνθα $\bar{X}$ εἶναι οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμητικοὶ μέσοι ὅροι.

Ἀφαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν (8) ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (7), μὲ ἀποτέλεσμα ἴσον μὲ μηδέν. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων ἠλαττώθη ἀπὸ τέσσαρας εἰς τρεῖς.

β'. Λαμβάνομεν κατόπιν τὴν δευτέραν κανονικὴν ἐξίσωσιν (4), τὴν ὁποίαν διαιροῦμεν διὰ N.

$$\frac{\Sigma X_1 X_2}{N} = \alpha \frac{\Sigma X_2}{N} + b \frac{\Sigma X_2^2}{N} + c \frac{\Sigma X_2 X_3}{N} + d \frac{\Sigma X_2 X_4}{N} \tag{9}$$

Ἡ ἐξίσωσις (9) εἶναι ἰσοδύναμος πρός :

$$\bar{X}_1 \bar{X}_2 = \alpha\bar{X}_2 + b\bar{X}_2^2 + c\bar{X}_2\bar{X}_3 + d\bar{X}_2\bar{X}_4 \tag{10}$$

Ἀφαιροῦμεν (10) ἀπὸ (9) :

$$\left(\frac{\Sigma X_1 X_2}{N} - \bar{X}_1\bar{X}_2\right) = b\left(\frac{\Sigma X_2^2}{N} - \bar{X}_2^2\right) + c\left(\frac{\Sigma X_2 X_3}{N} - \bar{X}_2\bar{X}_3\right) + d\left(\frac{\Sigma X_2 X_4}{N} - \bar{X}_2\bar{X}_4\right) \tag{11}$$

ὅπου

$$\alpha \frac{\Sigma X_2}{N} - \alpha\bar{X}_2 = 0$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς ἐκφράσεις $\left(\frac{\Sigma X_1 X_2}{N} - \bar{X}_1\bar{X}_2\right)$ κλπ. μὲ τὰς ἐκφράσεις P_{12}, P_{23}, P_{24} καὶ τὰς ἐκφράσεις $\left(\frac{\Sigma X_2^2}{N} - \bar{X}_2^2\right)$ μὲ $\sigma_{X_2}^{\;2}$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (11) σχηματίζεται ὡς ἑξῆς :

$$P_{12} = b\sigma_{X_2}^{\;2} + cP_{23} + dP_{24} \tag{12}$$

Οὕτως ἡ δευτέρα κανονικὴ ἐξίσωσις (4) μὲ τέσσαρας ἀγνώστους, ἀντικατεστάθη μὲ τὴν ἐξίσωσιν (12) μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

γ'. Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν πορείαν διὰ τὰς κανονικὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (6), καταλήγομεν εἰς τὰς ἀντιστοίχους ἐξισώσεις. Ἀντὶ τῆς (5) ἔχομεν:

$$P_{13} = bP_{23} + c\sigma_{X_3}{}^2 + dP_{24} \tag{13}$$

καὶ ἀντὶ τῆς (6) ἔχομεν:

$$P_{14} = bP_{24} + CP_{34} + d\sigma_{X_4}{}^2 \tag{14}$$

Τὰ μεγέθη $\sigma_{X_2}{}^2$, $\sigma_{X_3}{}^2$ καὶ $\sigma_{X_4}{}^2$ εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν βασικῶν ἀποκλίσεων τῶν μεταβλητῶν X_2, X_3 καὶ X_4 (ὕψος), ἡλικίας καὶ εἰσοδήματος πατρός, τὰ ὁποῖα εἶναι εὔκολον νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τοῦ πίνακος συσχετίσεως.

Ἔχομεν τώρα ἀντὶ τεσσάρων ἐξισώσεων (2), (3), (4) καὶ (5) μὲ τέσσαρας ἀγνώστους, τρεῖς ἐξισώσεις (12), (13) καὶ (14) μὲ τρεῖς ἀγνώστους. Ἡ ἐπίλυσίς των, εἴτε διὰ τῆς συνηθισμένης μεθόδου ἀντικαταστάσεως, εἴτε διὰ τῆς μεθόδου Doolittle [1] εἶναι εὔκολος.

δ'. Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀξιῶν τῶν ἀγνώστων α, β, c καὶ d, ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$X_{c_1} = \alpha + bX_2 + CX_3 + dX_4 \tag{15}$$

τὰς ὑπολογισθείσας ἀξίας τῶν ἀγνώστων καὶ δι' ἕκαστον φοιτητὴν τὰ ἀντίστοιχα μέτρα του, X_{c_1} ἀντιπροσωπεύει τὴν ἀξίαν τῆς τάσεως, ἡ ὁποία προκύπτει μετὰ τὴν ἐπίδρασιν ὅλων τῶν μεταβλητῶν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προσδιορίζομεν τὰς ἀξίας τῆς τάσεως.

3. Μετὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς τάσεως προχωροῦμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἑνὸς ἄλλου στατιστικοῦ μέτρου, τοῦ συντελεστοῦ πολλαπλῆς διασπορᾶς. Παριστῶμεν συμβολικῶς τὸν ἐν λόγῳ συντελεστὴν $\sigma_{1.234}$. Ὅπου ὁ δείκτης 1. ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐξηρτημένην μεταβλητὴν καὶ οἱ δεῖκται .234 εἰς τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς. Ὁ συντελεστὴς διασπορᾶς πολλαπλῆς συσχετίσεως μᾶς παρέχει τὸ σύνολον τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ἀπὸ τῆς ὑπολογισθείσης τάσεως.

Δηλαδή, δι' ἑκάστην ἀξίαν τῆς τάσεως, τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ ἡ πραγματική ἀξία της.

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν (15) καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς φοιτητοῦ, ὅπως φαίνονται εἰς τὸν πίνακα I, θὰ ἔχωμεν:

$$X_{1c} = \alpha + 67\beta + 26c + 36d$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ἀξίας τῶν ἀγνώστων α, β, c καὶ d, εὑρίσκομεν τὴν

1) Διὰ ἀναλυτικὴν ἔκθεσιν τῆς Μεθόδου Doolittle, ἴδε σχετικὸν ἄρθρον μας εἰς ἀναμνηστικὸν τόμον πρὸς τιμὴν Δ. Καλιτσουνάκι. Ἀθῆναι, 1961.

πρώτην ἀξίαν τῆς τάσεως, δηλαδὴ τὴν X_{1c}, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πρώτην ἀξίαν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, δηλαδὴ 145 τοῦ πίνακος Ι.

Ἀφαιροῦμεν τώρα τὰς ἀξίας $X_1 - X_{1C} = x_1$. Ἐὰν προχωρήσωμεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, θὰ ἔχωμεν ὅλας τὰς ἀποκλίσεις, μίαν δι' ἕκαστον φοιτητήν.

Ἐὰν ἀθροίσωμεν τὰς ἀποκλίσεις, τὸ ἀλγεβρικὸν σύνολον περὶ τὴν γραμμὴν τῆς τάσεως πρέπει νὰ εἶναι μηδέν. Διὰ ν' ἀποφύγωμεν τὴν δυσκολίαν αὐτήν, ὑψώνομεν τὰς ἀποκλίσεις εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιπτώσεων Ν. Οὕτως ἔχομεν :

$$\frac{(X_1 - X_{1c})^2}{N} = \sigma^2_{1.234}$$

καὶ $$\sigma_{1.234} = \sqrt{\frac{\Sigma x_1^2}{N}}, \quad \text{δεδομένου ὅτι} \quad X_1 - X_{1c} = x$$

Σημειωτέον, ὅτι ἡ διαφορὰ x εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ἐπιδράσεων ὅλων τῶν ἐξηρτημένων μεταβλητῶν.

4. Τέλος, εἴμεθα ἕτοιμοι νὰ προσδιορίσωμεν τὸν συντελεστὴν τῆς πολλαπλῆς συσχετίσεως, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ $R_{1.234}$. Ὅπως δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἁπλῆς συσχετίσεως :

$$R_{1.234} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{1.234}}{\sigma_{X_1}^2}}$$

Τὸ μέγεθος τῆς συσχετίσεως ἐξαρτᾶται καὶ ἐνταῦθα ἐκ τῆς σχέσεως μεταξὺ $\sigma_{X_1}^2$ = ὁλικῆς διασπορᾶς καὶ $\sigma^2_{1.234}$ διασπορᾶς περὶ τὴν τάσιν. Ἐὰν αἱ δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι, δὲν ὑπάρχει συσχέτισις, διότι :

$$\frac{\sigma^2_{1.234}}{\sigma_{X_1}^2} = 1 \qquad \text{Ὁπότε} \qquad R_{1.234} = \sqrt{1-1} = 0$$

Ἐὰν $\sigma^2_{1.234} = 0$, τότε ὑπάρχει ἀπόλυτος συσχέτισις. Εἰς τὴν πραγματικότητα εὑρισκόμεθα κάπου μεταξὺ 0, μὴ ὑπάρξεως συσχετίσεως καὶ 1 ἀπολύτου συσχετίσεως.

Εἰς ἑπόμενον ἄρθρον μας θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ πρόβλημα τῆς μερικῆς συσχετίσεως καὶ μὲ τοὺς ἐλέγχους εἰς τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ ὑποβάλωμεν τὴν ἐργασίαν μας. Ἀντικειμενικός μας σκοπὸς ὑπῆρξεν ἐνταῦθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν φοιτητὴν καὶ τὸν στατιστικόν, ἓν μεθοδολογικὸν ὄργανον ἀπηλλαγμένον τῶν περιπλοκῶν, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν χρησιμοποίησίν του ἀκατανόητον. Προσεπαθήσαμεν νὰ ἐπιστήσωμεν τὴν προσοχὴν τοῦ ἀναγνώστου εἰς τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα πιθανὸν νὰ ὁδηγήσουν εἰς εἰρωνικὰ συμπεράσματα ἐὰν δὲν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν.