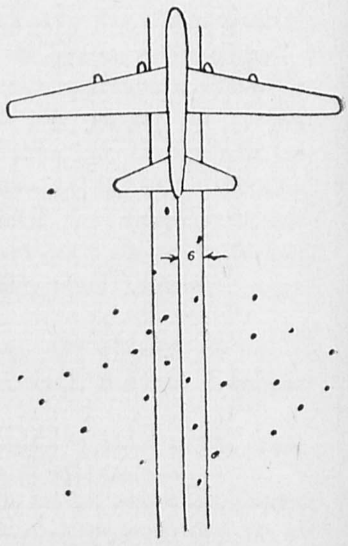
ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΒΛΗΤΙΚΗΣ

Ὑπὸ Ι. Α. ΣΑΚΑΛΗ Σμηνάρχου
Διευθυντοῦ Ἐλεγκτηρίου Δαπανῶν Ἀεροπορίας
καὶ Ἐθνικοῦ Στατιστικοῦ Συντονιστοῦ Ἀεροπορίας

Ἡ χρησιμοποίησις τῶν Ἐμβαδῶν τῆς Κανονικῆς Καμπύλης Πιθανότητος τυγχάνει σήμερον καθολικὴ ἐν τῇ στατιστικῇ πράξει εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν πλείστων ἐκ τῶν προβλημάτων της καὶ δή: α) Ὅταν ἔχωμεν κανονικῶς κατανεμημένον χαρακτηριστικόν τι ἢ ἰδιότητα μὲ Μέσον τὸν $\overline{x}$ καὶ Μέσην Τετραγωνικὴν Ἀπόκλισιν σ εὐκολώτατα εὑρίσκομεν τὴν πιθανότητα ἵνα τιμή τις τῆς ἰδιότητος ἢ τοῦ χαρακτηριστικοῦ Χ εἶναι ἴση ἢ μικροτέρα τῆς Χ, ἔστω τῆς X_1, ἐὰν ὑπολογίσωμεν τὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν $t = x_1 - \overline{x} : \sigma$ καὶ ἀκολούθως ἴδωμεν εἰς τοὺς Πίνακας Ἐμβαδῶν τὴν ζητουμένην τιμήν. β) Ὁμοίως εἰς κανονικῶς κατανεμημένον χαρακτηριστικὸν ἢ ἰδιότητα μὲ μέσην τιμὴν $\overline{x}$ καὶ σ εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν πιθανότητα μιᾶς τιμῆς τοῦ χαρακτηριστικοῦ τούτου ἢ ἰδιότητος περιλαμβανομένην μεταξὺ δύο δεδομένων τοιούτων X_1 καὶ X_2 ὅπου $X_2 > X_1$ καὶ γ) τέλος προσδιορίζομεν αὐτὰς ταύτας τὰς θεωρητικὰς συχνότητας μιᾶς Ἐμπειρικῆς Κατανομῆς, ἀναγνωρισθείσης ὅτι δύναται ν' ἀναπαρασταθῇ ὑπὸ τῆς Κανονικῆς Καμπύλης.



Σχ. 1

Μία ἐφαρμογὴ σημαντικοῦ ἐνδιαφέροντος διὰ τὸ Ὅπλον τῆς Ἀεροπορίας εἶναι νὰ προσδιορισθῇ ἡ πιθανότης μιᾶς ἐπιτυχίας ἐπὶ ἐπιγείου στόχου ὁσάκις αἱ ἀπὸ τοῦ ἀέρος βολαὶ ἔχουσι κανονικὴν κατανομήν. Ἡ προκριθησομένη μέθοδος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σχήματος καὶ τῆς θέσεως τοῦ στόχου. Τὰ ἀκολουθοῦντα παραδείγματα εἶναι τυπικά:

Παράδειγμα 1ον (Μονοδιάστατον)

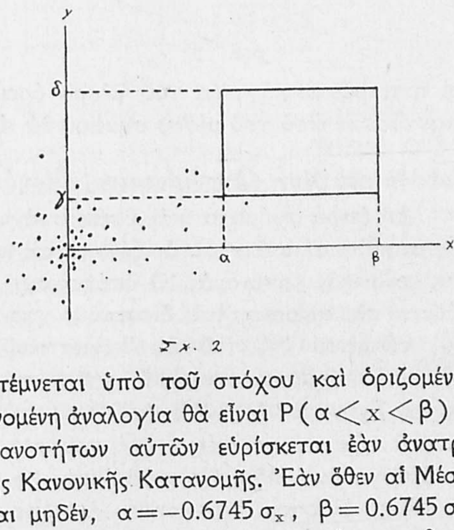
Ἀεροσκάφος ἵπταται εἰς χαμηλὸν ὕψος ὑπεράνω ἑνὸς αὐτοκινητοδρόμου καὶ ρίπτει βόμβας. Ἔστω ἡ κάθετος ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοκινητοδρόμου ἑκάστου σημείου κρούσεως τῆς βόμβας ὅτι εἶναι ἡ Χ ἀπόστασις θετικὴ κατὰ τὴν μίαν πλευρὰν καὶ ἀρνητικὴ κατὰ τὴν ἑτέραν τοῦ αὐτοκινητοδρόμου καὶ ὅτι ἡ Μεταβλητὴ X ἔχει κανονικὴν κατανομὴν μὲ $\overline{x} = 0$ καὶ $\sigma = 20$ ὑάρδας. Ἐρωτᾶται ποία ἀναλογία τῶν ριπτομένων βομβῶν θὰ ἀναμένηται ὅτι θὰ πίπτῃ εἰς τὸ διάστημα τῶν 6 ὑαρδῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοκινητοδρόμου;

$$z_1 = \frac{-6-0}{20} = -0{,}3 \quad \text{καὶ} \quad z_2 = \frac{6-0}{20} = 0{,}3$$

ἀλλὰ ἐκ τοῦ Πίνακος Ἐμβαδῶν τῆς συμβατικῆς Κανονικῆς Καμπύλης κατὰ Sheppard θὰ ἔχωμεν $0.3 = 0.1179$ καὶ $0.1179 \times 2 = 0.2358$ ἢ 23.58 %.

Παράδειγμα 2ον (Δυσδιάστατον, Ὀρθογωνίου στόχου)

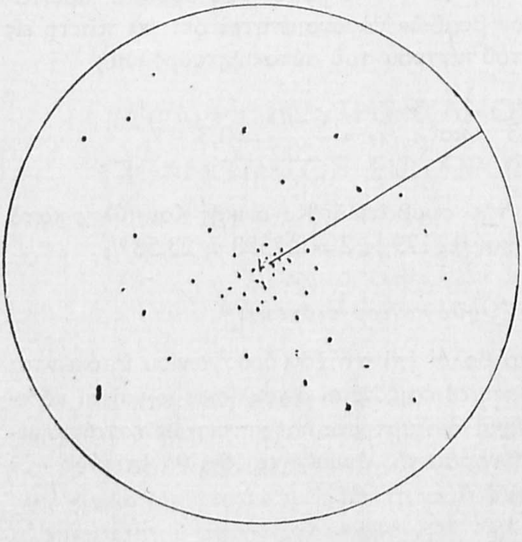
Ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ ριφθεῖσαι βολαὶ ἐπὶ στόχου ὀρθογωνίου ὑπόκεινται εἰς τυχαίας ἐπιδράσεις τοιαύτας ὥστε αἱ ὁριζόντιοι ἀποκλίσεις x καὶ αἱ κάθετοι ἀποκλίσεις y τῶν βολῶν νὰ εἶναι ἀνεξάρτητοι καὶ κανονικῶς κατανεμημέναι ποία ἀναλογία τῶν βολῶν δύναται νὰ ἀναμένηται ὅτι θὰ ἐπιτύχῃ τὸν στόχον; (Σχῆμα 2ον). Δοθέντος ὅτι αἱ ὁριζόντιοι καὶ κάθετοι συντεταγμέναι εἶναι ἀνεξάρτητοι ἡ πιθανότης ὅπως βολή τις ἐπιτύχῃ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ στόχου εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι ἡ ὁριζόντιος συντεταγμένη της θὰ πίπτῃ εἰς τὸ διάστημα (α, β), ὅπερ τέμνεται ὑπὸ τοῦ στόχου καὶ ὁριζομένου ὡς $P(\alpha < x < \beta)$, πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὴν πιθανότητα ὅτι ἡ κάθετος συντεταγμένη της θὰ πίπτῃ εἰς τὸ διάστημα (γ, δ), ὅπερ τέμνεται ὑπὸ τοῦ στόχου καὶ ὁριζομένου ὡς $P(\gamma < y < \delta)$. Οὕτως ἡ ἀναμενομένη ἀναλογία θὰ εἶναι $P(\alpha < x < \beta) \times P(\gamma < y < \delta)$. Ἑκάστη τῶν πιθανοτήτων αὐτῶν εὑρίσκεται ἐὰν ἀνατρέξωμεν εἰς τὸν Πίνακα τῆς Σωρευτικῆς Κανονικῆς Κατανομῆς. Ἐὰν ὅθεν αἱ Μέσαι τιμαὶ τῶν x καὶ y εἶναι ἀμφότεραι μηδέν, $\alpha = -0.6745\,\sigma_x$, $\beta = 0.6745\,\sigma_x$, $\gamma = -0.6745\,\sigma_y$ καὶ $\delta = 0.6745\,\sigma_y$ τότε θὰ ἔχωμεν τὰς συναρτήσεις πιθανότητος $P(\alpha < x < \beta) = 0.5000$ καὶ $P(\gamma < y < \delta) = 0.5000$, ἡ δὲ πιθανότης μιᾶς βολῆς νὰ κεῖται εἰς τὸ ἀντίστοιχον ὀρθογώνιον θὰ εἶναι $0.5000 \times 0.5000 = 0.2500$ ἢ 25 %.



Σχ. 2

Παράδειγμα 3ον (Δυσδιάστατον, Κυκλικοῦ Στόχου)

Ὑποτεθείσθω ὅτι αἱ ριπτόμεναι βολαὶ ἐπὶ κυκλικοῦ στόχου, ὡς τὸ Σχῆμα 3ον, ὑπόκεινται εἰς τυχαίας ἐπιδράσεις ὥστε αἱ ὁριζόντιοι καὶ κάθετοι θέσεις νὰ εἶναι ἀνεξάρτητοι καὶ κανονικῶς κατανεμημέναι μὲ $\overline{x}$ εἰς τὸ κέντρον τοῦ στόχου καὶ κοινὴν σ. Ποία ἀναλογία βολῶν δύναται νὰ ἀναμένηται ὅτι θὰ πίπτῃ ἐντὸς τ μονάδων ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ στόχου;

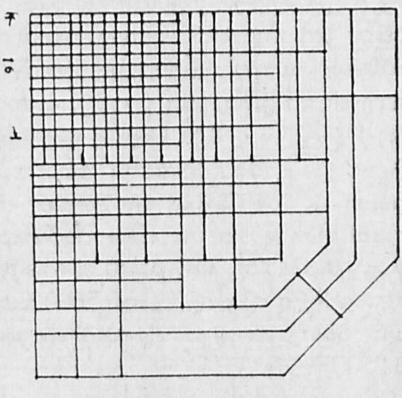


Σχ. 3

Διὰ Λογισμοῦ (Ὁλοκλήρωμα εἰς Πολικὰς Συντεταγμένας) εἶναι δυνατὸς ὁ προσδιορισμὸς τῆς πιθανότητος ὡς $1 - e^{-t^2 : 2\sigma^2}$ ἔνθα e ἡ βάσις τῶν φυσικῶν λογαρίθμων. Κατὰ συνέπειαν ἐὰν τ εἶναι διπλάσιον τῆς σ θὰ ἔχωμεν $1 - e^{-2\sigma^2 : 2\sigma^2} = 1 - e^2 = 1 - 0{,}135 = 0{,}865$ ἀναμενομένη ἀναλογία ἐπιτυχίας τοῦ στόχου. Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἥτις συγκεντροῦται εἰς τὸν Μέσον καὶ ἡ ὁποία περιέχει 50 % τῶν βολῶν, ὀνομαζομένη Κυκλικὸν Πιθανὸν Σφάλμα, εἶναι ἡ $\sigma \sqrt{2 \log e^2} = 1.1774\,\sigma$ καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ μέσου ὅρου τῶν τετραγωνισμένων ἀκτινωτῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τοῦ μέσου σημείου θὰ εἶναι ἡ $\sigma \sqrt{2} = 1.4142\,\sigma$.

Παράδειγμα 4ον (Δυσδιάστατον, Οἱουδήποτε Στόχου)

Δι' ἕτερα σχήματα καὶ θέσεις στόχων ἀπαιτεῖται εἰδικὸς Χάρτης. Ὑποτίθεται καὶ πάλιν ὅτι αἱ ὁριζόντιοι καὶ κάθετοι ἀποκλίσεις ἔχουσιν ἀνεξαρτήτους κανονικὰς κατανομάς. Ὁ στόχος σχεδιάζεται εἰς κλίμακα ἐπὶ διαφανοῦς χάρτου, τιθεμένου ἐπὶ τοῦ ὑποδειγματικοῦ ὀρθογωνίου χάρτου κανονικῆς πιθανότητος τοῦ Σχήματος 4ου. Μία ἀρίθμησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν καλυπτομένων ὑπὸ τοῦ στόχου ὀρθογωνίων δίδει τὴν πιθανότητα βολῆς τινος, ἑκάστου ὀρθογωνίου ἀντιπροσωπεύοντος πιθανότητα 0.001. Αἱ κλίμακες πρὸς σχεδίασιν τοῦ στόχου πιθανῶς διάφοροι δι' ἑκάστην ἐκ τῶν δύο καθέτων διευθύνσεων, προσδιορίζονται βάσει τῆς προϋποθέσεως ὅτι ἡ σ τῶν βολῶν εἰς ἑκάστην διεύθυνσιν δέον νὰ ἀντιστοιχῇ πρὸς τὸ σημειούμενον ἐπὶ τοῦ Χάρτου μῆκος. Δοθέντος ὅτι ὁ Χάρτης δεικνύει μόνον ἓν τεταρτοκύκλιον θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῇ τέσσαρας φορὰς διὰ νὰ ἔχωμεν πλήρη ἀπαρίθμησιν.

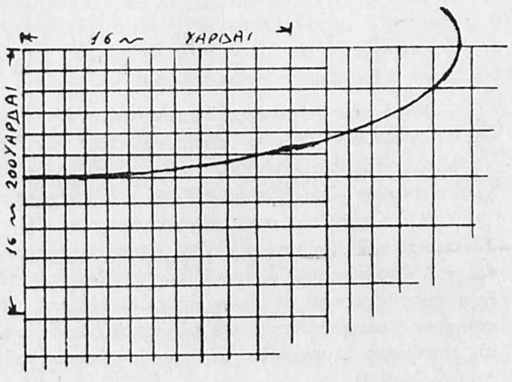


Σχ. 4

Ὀρθογώνιος Χάρτης Κανονικῆς Πιθανότητος (P = 0,001 κατ' ὀρθογώνιον. Μόνον ἓν ὀρθογώνιον δεικνύεται). 0,002 (2 ὀρθογώνια) πέραν τοῦ Χάρτου κατὰ Τεταρτοκύκλιον.

Ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα κρούσεως τύπου τινὸς βλήματος ἔχουσι μίαν δυσδιάστατον κανονικὴν κατανομὴν πέριξ τοῦ σημείου τοῦ στόχου μὲ σ 200 ὑαρδῶν κατὰ τὸ εὖρος καὶ 60 ὑαρδῶν εἰς πλαγίαν παρέκκλισιν. Ποία θὰ εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι τὸ βλῆμα θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 100 ὑαρδῶν ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ στόχου;

Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν Χάρτην τοῦ Σχήματος 4ου πρὸς εὕρεσιν τῆς πιθανότητος θὰ πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ σχεδιάσωμεν τὸν στόχον ὑπὸ κλίμακα τοιαύτην οὕτως ὥστε τὰ ἐπὶ τοῦ Χάρτου σημειούμενα μήκη ὡς « 1 σ » ν' ἀντιστοιχῶσιν εἰς τὴν διεύθυνσιν εὔρους 200 ὑαρδῶν καὶ εἰς τὴν πλαγίαν διεύθυνσιν τῶν 60 ὑαρδῶν. Ὁ κύκλος καθίσταται Ἔλλειψις, τὸ ἓν τεταρτοκύκλιον τοῦ ὁποίου ὑπερτιθέμενον ἐπὶ τοῦ Σχήματος 4ου, δεικνύεται εἰς τὸ παρατιθέμενον Σχῆμα 5ον. Ὑπολογισμὸς τῶν ἐν τῷ Χάρτῃ ὀρθογωνίων τοῦ παρὰ τῆς Ἐλλείψεως καλυπτομένου τεταρτοκυκλίου τούτου δίδει 73.3, ὅπερ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 4 διὰ νὰ λάβωμεν καὶ τὰ ἕτερα συμμετρικὰ τεταρτοκύκλια, μᾶς δίδει 293.2 καὶ ἐφ' ὅσον ἕκαστον ὀρθογώνιον ἀνταποκρίνεται εἰς πιθανότητα 0.001 ἡ πιθανότης βολῆς εἰς ἀπόστασιν 100 ὑαρδῶν ἀπὸ τοῦ στόχου θὰ εἶναι περίπου 0.293. Ὁ Ὀρθογώνιος Χάρτης τοῦ Σχήματος 4ου ἐπενοήθη κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ II Παγκοσμίου Πολέμου ὑπὸ τοῦ Ἀμερικανοῦ A. D. Sprague τοῦ Bureau of Ordnance τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Ἀμύνης (U.S. Naval Ordnance Test Station), ἐλήφθη δὲ ὑπ' ὄψιν παρ' ἡμῶν ἐκ τοῦ βαθυστοχάστου ἔργου τῶν Στατιστικῶν E. Crow — F. Davis — M. Maxfield «Statistics Manual» (1960) ὁμοῦ μετὰ τῶν τεσσάρων παραδειγμάτων τοῦ ἀνὰ χεῖρας ἄρθρου.



Σχ. 5