ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΜΕΣΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ)

Ὑπὸ τοῦ κ. ΝΙΚ. Δ. ΣΩΤΗΡΑΚΗ

I. Ψυχολογικὲς πλευρὲς

1. *Δράση καὶ ἀντίληψη*

Τὸν Ἀπρίλιο τοῦ 1950, στὸ Debden, κοντὰ στὸ Λονδῖνο, συνερχόταν σὲ πρώτη σύνοδο ἡ «***Διεθνὴς Ἐπιτροπὴ γιὰ τὴ μελέτη καὶ τὴ βελτίωση τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν***», μὲ θέμα πρὸς συζήτηση «σχέσις μεταξὺ τοῦ μαθηματικοῦ προγράμματος τῶν σχολείων Μέσης Ἐκπαιδεύσεως (Μ.Ε.) καὶ τῆς ἀναπτύξεως τῶν διανοητικῶν ἱκανοτήτων τοῦ ἐφήβου».

Τακτικὰ ἀπὸ τότε, κάθε χρόνο, ἡ Ἐπιτροπὴ αὐτὴ συνέρχεται σὲ διάφορες χῶρες καὶ ἐρευνᾶ προβλήματα τῆς ἁρμοδιότητάς της.

Στὴν ἱδρυτικὴ ἐγκύκλιο τῆς Ἐπιτροπῆς διαβάζομε :

> «Ἡ περιοχὴ τῶν μαθηματικῶν εἶναι προνομιοῦχος στὸ ὅτι ὑπάρχουν τώρα ἁρμόδιοι ἐρευνητὲς στὶς βασικὲς περιοχὲς τῆς λογικῆς, τῆς ἐπιστημολογίας, τῆς ἱστορίας, τῆς ψυχολογίας, τῆς σκέψεως καὶ τῆς πειραματικῆς παιδαγωγικῆς. Ἡ λειτουργία τῆς Ἐπιτροπῆς θὰ ἐπιδιώξει νὰ κάμει τὴ σύνθεση τῶν συμβολῶν ὅλων αὐτῶν τῶν κλάδων στὸν κύριο σκοπό της.
>
> » Τὸ πρόβλημα τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν τίθεται σήμερα σὲ ὅρους ποὺ ξεπερνοῦν τὰ ἐθνικὰ σύνορα. Οἱ ὀφειλόμενες στοὺς πολιτισμοὺς διαφορὲς εἶναι λιγότερο σημαντικὲς ἀπὸ τὶς ὁμοιότητες ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴ δομὴ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Γι' αὐτὸ εἶναι δυνατὴ ἡ συγκρότηση διεθνῶν ὁμάδων ἀπὸ ἐρευνητὲς ποὺ ἔχουν κοινὸ συμφέρον, καὶ ἡ ὀργάνωση τακτικῶν συναντήσεων, μὲ σκοπὸ τὸ συντονισμὸ καὶ τὴ μετάδοση τῶν πορισμάτων τῶν ἐρευνῶν . . . ».

Καρπὸς τῶν ἐργασιῶν τῆς Ἐπιτροπῆς αὐτῆς εἶναι, μέχρι σήμερα, δύο τόμοι : Ὁ πρῶτος κυκλοφόρησε ἀγγλικά, γερμανικὰ καὶ γαλλικὰ τὸ 1955 μὲ τὸν τίτλο «***Ἡ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν***» καὶ περιέχει μελέτες τῶν J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowitz, G. Choquet, C.

Gategno. Ὁ δεύτερος κυκλοφόρησε τὸ 1958 μὲ τὸν τίτλο: *«Τὰ ὑλικὰ μέσα γιὰ τὴ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν»* καὶ μὲ μελέτες τῶν C. Gategno, W. Servais, E. Castelnuovo κ.λ.π. (¹).

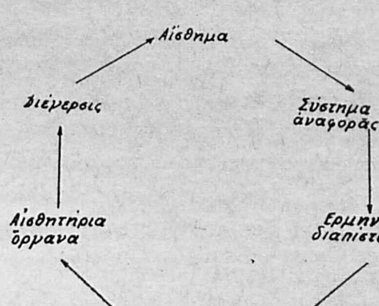
Οἱ δύο αὐτοὶ τόμοι εἶναι οἱ κύριες πηγὲς τῶν διαλέξεων ποὺ θὰ ἔχω τὴν τιμὴ νὰ δώσω στὸ φετεινὸ σεμινάριό μας, σὲ συνέχεια τῶν τριῶν περσινῶν κάτω ἀπὸ τὸν κοινὸ τίτλο *«Γενετικὴ ψυχολογία καὶ διδακτικὴ τῶν μαθηματικῶν»* (²).

Ἡ πρώτη μας διάλεξη θὰ ἔχει γιὰ κέντρο ἐνδιαφέροντος δύο ψυχολογικὰ θέματα: τὸ πρῶτο ἀναφέρεται στὸ ζήτημα τῆς ἀντιλήψεως καὶ τῆς δράσεως κατὰ τὴ λειτουργία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως, τὸ δεύτερο ἔχει γνωσιολογικὴ ὑφὴ καὶ ἀναφέρεται στὶς ἔννοιες τοῦ συγκεκριμένου καὶ τοῦ ἀφηρημένου.

«Ὅταν καταπιανόμαστε σοβαρὰ τὸ πρόβλημα τῆς σκέψεως αἰσθανόμαστε τὴν ἀνάγκη νὰ ξέρουμε ὅλο καὶ περισσότερα γιὰ τὴν ψυχικὴ λειτουργία τῆς ἀντιλήψεως» (Gategno).

Ὅ,τι λέμε στὴν ψυχολογία ἀντίληψη εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνισταμένης τῶν ἀντιδράσεων τοῦ ἐγκεφάλου σὲ ἐξωτερικοὺς ἐρεθισμοὺς ποὺ τοῦ μεταδίδονται μὲ τὰ αἰσθητήρια ὄργανα. Τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ἐγγράφεται στὴ μνήμη τῶν νευρικῶν κυττάρων τοῦ ἐγκεφαλικοῦ φλοιοῦ, σὰν ἐσωτερικευμένη πραγματικὴ δράση, σὲ μορφὴ παραστάσεων ποὺ ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς τῆς σκέψεως στὸν ἐξωτερικὸ κόσμο. Τὰ παραστατικὰ αὐτὰ σχήματα ἢ εἰκόνες βρίσκονται σὲ διαρκῆ ἀνταπόκριση μὲ τὸν ἐξωτερικὸ κόσμο. Μὲ τὴν ἔννοια αὐτὴ οἱ γενικὲς ἰδέες, οἱ ἀναμνήσεις καὶ τὰ διάφορα δημιουργήματα τῆς φαντασίας εἶναι ἀντιλήψεις.

Δίνομε παρακάτω μία σχηματικὴ παράσταση τῆς ψυχικῆς λειτουργίας τῆς ἀντιλήψεως, κατὰ τὸν ψυχολόγο Gustave Morf.



Σχ. 1

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν παραπάνω σχηματικὴ παράσταση ἡ ψυχικὴ

---

1) Καὶ οἱ δύο τόμοι ἔχουν ἐκδοθεῖ ἀπὸ τὸν οἶκο Delachaux et Niestle (Paris).

2) Οἱ τρεῖς αὐτὲς διαλέξεις ἔχουν ἐκδοθεῖ σὲ ἕνα τεῦχος μὲ τὴ φροντίδα τοῦ συγγραφέα.

λειτουργία τῆς ἀντιλήψεως ὁλοκληρώνεται σὲ δύο φάσεις: κατὰ τὴν πρώτη ἡ διέγερση τῶν αἰσθητηρίων ὀργάνων ἀπὸ τοὺς ἐξωτερικοὺς ἐρεθισμοὺς προκαλεῖ τὸ αἴσθημα (ὀπτικό, ἀκουστικό, μυϊκό, κτλ.). Κατὰ τὴ δεύτερη φάση τὸ αἴσθημα βρίσκει ἀπήχηση στὸ ἀντιληπτικὸ σύστημα ἀναφορᾶς, γίνεται σ' αὐτὸ ἡ ἀναγνώριση καὶ ἡ ἑρμηνεία, γιὰ νὰ ἀκολουθήσει ἡ ἐπιστροφὴ στὴν πραγματικότητα μὲ τὸ ἀνακλαστικὸ τόξο τῆς ἀντιδράσεως ποὺ κλείνει τὸν κύκλο τῆς ἀντιληπτικῆς λειτουργίας.

Σήμερα οἱ ψυχολόγοι παραδέχονται ὅτι δὲν ὑπάρχει στὴν περιοχὴ τῶν αἰσθήσεων καμμιὰ καθαρὴ ἐμπειρία, π.χ. ὀπτική, ἀκουστική, γευστικὴ κτλ. Κάτι τέτοιο συναντᾶται μόνο στὸ νήπιο καὶ μόνο γιὰ λίγο καιρὸ ὕστερα ἀπὸ τὴ γέννησή του. Γενικά, στὴν τρέχουσα ζωή, κάθε συνειδητοποίηση ποὺ χρησιμοποιεῖ τὶς αἰσθήσεις ἀλλοιώνει τὸ προσλαμβανόμενο στὰ διάφορα ἄτομα σύμφωνα μὲ τὴν ψυχολογικὴ κατάσταση τοῦ καθενὸς τὴ στιγμὴ τῆς προσλήψεως. Δὲν μποροῦμε λοιπὸν νὰ ἐννοοῦμε τὴν ἀντίληψη σὰν κάτι στατικὸ ποὺ τὴν ἴδια στιγμὴ σὲ διάφορα ἄτομα δημιουργεῖ τὶς ἴδιες ψυχικὲς καταστάσεις καὶ προκαλεῖ τὶς ἴδιες ἀντιδράσεις. Στὴν πραγματικότητα ὑπάρχει μιὰ *ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα* ἐνδογενὴς στὸ κάθε ἄτομο, σὲ τρόπο ποὺ ἡ νοητικὴ εἰκόνα ποὺ εἶναι τὸ ἀποτέλεσμά της τελειώνεται σὲ πολυδιάστατη συνισταμένη περισσοτέρων αἰσθήσεων.

Τὰ ὄργανα τῶν αἰσθήσεων σὲ ὅλα τὰ ἄτομα ἔχουν τὴν ἴδια ἀνατομικὴ δομή. Στὸ καθένα ὅμως ξεχωρίζει μιὰ ἄλλη ἐπίκτητη δομὴ ποὺ ὁ Gategno τὴν ὠνόμασε «*λειτουργικὴ δομή*» ποὺ ἐξαρτᾶται οὐσιαστικὰ ἀπὸ τὴν ἡλικία καὶ μεταβάλλεται στὸ κάθε ἄτομο μὲ τὴν ἄσκηση. Ἔτσι, κάθε νέα ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα προσθέτει στὴν ὑπάρχουσα νοητικὴ εἰκόνα καινούργιες ποιότητες ποὺ ἐκδηλώνονται μὲ τὴν ἱκανότητα νὰ γίνονται ἀντιληπτὰ πράγματα καὶ ποιότητες ποὺ προγενέστερα εἶχαν διαφύγει. Ὁ Gategno θεωρεῖ τὴν κάθε νοητικὴ εἰκόνα σὰν μιὰ ποσότητα δυναμικῆς ἐνέργειας δομημένης στὰ ὄργανα τῶν αἰσθήσεων, στὶς ἀρθρώσεις καὶ στὸ μυϊκὸ σύστημα. Ἡ ἐνέργεια αὐτή, μὲ τὴ σειρά της, εἶναι ἱκανὴ νὰ ἀντιστραφεῖ καὶ νὰ προκαλέσει κινητοποίηση καὶ δράση πραγματικὴ τῶν αἰσθητηρίων ὀργάνων καὶ τοῦ μυϊκοῦ συστήματος μὲ σκοπὸ τὴν ἀποκατάσταση τῆς ἰσορροπίας τοῦ ἀτόμου μὲ τὸν ἐξωτερικὸ κόσμο ἢ τὸ ἀνέβασμά της σὲ ὑψηλότερο ἐπίπεδο, μὲ ἀποτέλεσμα τὸν ἐμπλουτισμὸ τῆς ἴδιας τῆς δομημένης ἐνέργειας, ὥστε σὲ μιὰ νέα ἀντιστροφή, τὸ ἀποτέλεσμα νὰ εἶναι ὑψηλότερης στάθμης καὶ ποιότητας. Ὅλη αὐτὴ ἡ διαλεκτικὴ διαδικασία ἀντιλήψεως καὶ δράσεως γίνεται συνείδηση τοῦ ἀτόμου, καταγράφεται ἀνεξίτηλα στὸ «πνεῦμά του» καὶ μετουσιώνεται σὲ γνώση καὶ ἐπιστήμη. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν ἀντίληψη χωρὶς δράση, οὔτε καὶ δράση χωρὶς ἀντίληψη. Τὸ μόνο ποὺ πρέπει νὰ προσεχθεῖ εἶναι ὅτι κατὰ τὴ δόμηση, στὸ νευρικὸ καὶ μυϊκὸ σύστημα, μιᾶς ἀντιληπτικῆς δραστηριότητας εἶναι δυνατὸ νὰ περιέχεται περισσότερη ἢ λιγότερη ποιότητα ἀπὸ τὴ μιὰ ἢ τὴν ἄλλη αἴσθηση ποὺ συμμετέχει στὴ διαδικασία τοῦ σχηματισμοῦ τῆς ἀντιλήψεως. Σὲ μιὰ ὀπτικὴ ἀντίληψη π.χ. ὑπερέχει ἡ αἴσθηση τῆς ὁράσεως ἐνῶ ἡ συμμετοχὴ τῆς μυϊκῆς δράσεως ποὺ προσανατολίζει καὶ προσαρμόζει τὸν ὀφθαλμὸ μᾶς εἶναι ἀνεπαίσθητη. Γιὰ τὴ συμμετοχὴ διαφόρων αἰσθήσεων στὴ διαδικασία τῆς ἀντιληπτικῆς δραστηριότητας, ὁ Gategno ἀναφέρει τὸ ἀκόλουθο χαρακτηριστικὸ παράδειγμα:

«Ὁ μουσικὸς ποὺ διαβάζει τὴ μουσική, παίζει τὸ ὄργανό του καὶ παράγει ἤχους ποὺ τοὺς ἐλέγχει καὶ τοὺς χρησιμοποιεῖ γιὰ κριτήριο ἀκρίβειας στὴ μουσικὴ ἐκτέλεση, ζεῖ σὲ κάθε στιγμή, μιὰ σύνθεση ἀπὸ αἰσθήματα *ὀπτικά, ἀκουστικὰ* καὶ *κινητικά*. Ἀκόμη καὶ οἱ τρεῖς αὐτὲς λέξεις ἑνωμένες δὲν δίνουν μιὰν ἰδέα τῆς ἀληθινῆς συνθέσεως ποὺ σχηματίζει τὶς περίπλοκες μουσικὲς εἰκόνες ἢ τὰ συναισθήματα, τὰ νοήματα, τὶς ἀναμνήσεις καὶ τὶς ἐλπίδες ἢ φιλοδοξίες, ποὺ συγχωνεύονται γιὰ νὰ προέλθει τὸ ὑψηλὸ ἐκεῖνο σύνολο τῆς δομημένης ἐνέργειας ποὺ θὰ προσλάβει τὸ ἀκροατήριο».

Πειραματικὲς ἔρευνες διαπίστωσαν τὴν ὕπαρξη ψυχοσωματικῶν φαινομένων ποὺ ἐκδηλώνονται καὶ καταγράφονται σὲ εἰδικὲς αὐτογραφικὲς συσκευὲς κατὰ τὴ λειτουργία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Ἀποδείχθηκε ἔτσι ἐργαστηριακά, ὅτι ἡ σκέψη ἔχει προεκτάσεις στὸ σύνολο τοῦ σώματός μας καὶ ἡ λειτουργία της ἀντανακλᾶ ἐσωτερικευμένες αὐτοματώσεις πραγματικῆς δράσεως καὶ ἀντιλήψεως. Ἔτσι καὶ κάθε μαθηματικὴ σκέψη διατηρεῖ τὴν καταγωγή της ἀπὸ τὴν ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα.

Σύγχρονα μὲ τὴν ἐνεργὸ δράση γίνεται «εἰκονικὴ» συνειδητοποίησή της καὶ σχηματισμὸς παραστατικῶν εἰκόνων ποὺ ἐγγράφονται στὴ λειτουργικὴ δομὴ τῶν αἰσθητηρίων ὀργάνων καὶ στὸν ἐγκέφαλο. Ὁ ρόλος τῶν εἰκόνων αὐτῶν εἶναι συμβολικὸς καὶ ἀποβλέπει στὴν ἐξοικονόμηση ψυχικῆς ἐνέργειας κατὰ τοὺς μετασχηματισμοὺς μελλοντικῶν δράσεων. Ἡ ἐσωτερικὴ αὐτὴ ψυχικὴ διαδικασία ἀποτελεῖ μὲ ἕνα λόγο τὴ λειτουργία τῆς σκέψεως. Ἡ μαθηματικὴ σκέψη, ὅπως κάθε σκέψη, εἶναι στὴν οὐσία της ψυχικὴ λειτουργία καὶ ἔχει τὴν ἱκανότητα νὰ συνειδητοποιεῖ *σχέσεις καθ' ἑαυτὲς* καὶ ὄχι ἁπλὲς σχέσεις τοῦ ψυχικοῦ κόσμου μὲ τὸν ἐξωτερικό.

Ἀντίληψη καὶ δράση προσιδιάζουν σὲ ὅλα τὰ ζῶα. Ἐκεῖνο ὅμως ποὺ ξεχωρίζει τὸν ἄνθρωπο εἶναι ὅτι ἔχει συνείδηση ὅλων τῶν δραστηριοτήτων του καὶ τὴν ἱκανότητα νὰ χρησιμοποιεῖ σύμβολα, μὲ τὰ ὁποῖα ἐξοικονομεῖ ἐνέργεια κατὰ τὴ δράση του πρὸς μετασχηματισμὸ τοῦ περιβάλλοντος, ὥστε νὰ ἀποκαταστήσει νέα ἰσορροπία μ' αὐτό. Πάρα πέρα ὅμως ὁ ἄνθρωπος ἔχει τὴν ἱκανότητα νὰ χρησιμοποιεῖ τὰ σύμβολα κατὰ τρόπο συμβατικὸ καὶ τότε ἡ σκέψη γίνεται μαθηματικὴ δραστηριότητα. Ὅταν ἕνα παιδὶ 4 - 5 ἐτῶν ζητᾶ χρήματα γιὰ νὰ ἀγοράσει καραμέλες ἀπὸ τὸ περίπτερο τῆς γειτονιᾶς καὶ τὸ ρωτήσουμε τί προτιμᾶ μία δραχμὴ ἢ τρία πενηντάλεπτα, δὲ θὰ δυσκολευθεῖ νὰ προτιμήσει τὰ τρία πενηντάλεπτα. Τὸ πρόβλημα τὸ ἔλυσε μὲ μαθηματικὴ δραστηριότητα χρησιμοποιώντας τὰ σύμβολα (τὸ πλῆθος τῶν νομισμάτων) κατὰ τρόπο συμβολικό, μὲ νοερὴ σύγκριση τῶν ἀξιῶν τους ἀπὸ τὴν ἀγοραστικὴ τους δύναμη. Μὰ γιὰ νὰ φθάσει τὸ παιδὶ σ' αὐτὴ τὴν ἱκανότητα ἔχει προηγηθεῖ ἐμπειρία ἀπὸ ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα ποὺ ἀποτελεῖ προϋπόθεση γιὰ τὴ λειτουργία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως.

«Οἱ μαθητές, λέγει ὁ Gategno, ποὺ μπῆκαν πολὺ νωρὶς στὴ λεκτικὴ περιγραφὴ καταστάσεων ποὺ δὲν τὶς ἔχουν ἐξερευνήσει στὴ στάθμη τῆς ἀντιληπτικῆς δραστηριότητας δὲν θὰ ἔχουν στὴ διάθεσή τους τὶς διαστάσεις ἐκεῖνες ποὺ κάμνουν δυνατὸ τὸ νοερὸ διάλογο. Θὰ τοὺς λείπει ὁ ρεαλισμὸς ποὺ στηρίζει τὸ σύμβολο καὶ τοῦ παρέχει τὸν ἀναγκαῖο δυναμισμό».

Χωρὶς τὴ σύγχρονη ἄσκηση τῆς δράσεως καὶ τῆς ἀντιλήψεως, μὲ ἕνα λόγο, χωρὶς τὴν ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα, δὲν θὰ ὑπάρξει ποτὲ δυνατότητα νὰ ὡριμάσει καὶ νὰ ἐκδηλωθεῖ ὁ ἐσωτερικὸς ἐκεῖνος διάλογος, ποὺ ἐκφράζει τὴ μαθηματικὴ ψυχικὴ δραστηριότητα — τὴ μαθηματικὴ σκέψη.

Οἱ μαθηματικὲς ἔννοιες καὶ οἱ μαθηματικὲς σχέσεις μὲ τὸν παραστατικὸ συμβολισμό τους εἶναι προϊόντα ἀντιληπτικῆς δραστηριότητας ἐσωτερικευμένα σὲ γονιμοποιὸ δυναμισμό. Δὲν «μαθαίνονται» ἀλλὰ προβάλλουν μὲ βεβαιότητα στὸ πνεῦμα σὰν ἀλήθειες ἄξιες νὰ ἀνακοινωθοῦν.

Ἰδιαίτερα στὴν πρώτη βαθμίδα τῆς Μ.Ε., ὅπου ἔχουμε νὰ κάμουμε μὲ παιδιὰ 13, 14 καὶ 15 ἐτῶν ποὺ ἡ κατάκτηση τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας τοὺς εἶναι δυνατὴ μόνο μὲ τὴν ψυχικὴ λειτουργία τῆς ἐνοράσεως, ἀπαιτεῖται, σὰν ἀπαραίτητη προϋπόθεση, ἡ ἄσκηση τῆς ἀντιληπτικῆς δραστηριότητας, εἴτε ἄμεσα πάνω σὲ πραγματικὲς καταστάσεις, εἴτε σὲ μοντέλα τέτοιων καταστάσεων. Χωρὶς τὸ διάλογο μὲ πραγματικὲς καταστάσεις ἢ μὲ μοντέλα τους (καὶ ἕνα γεωμετρικὸ σχῆμα σχεδιασμένο ἀπὸ τὸ παιδὶ στὸ τετράδιό του εἶναι μοντέλο γεωμετρικῆς καταστάσεως) εἶναι ἀδύνατο νὰ ἀνακαλυφθοῦν καὶ νὰ βεβαιωθοῦν μαθηματικὲς σχέσεις. Ἡ μετάβαση ἀπὸ τὸ συγκεκριμένο στὸ ἀφηρημένο ἱεραρχίζεται ἀπὸ μοντέλα, ἀπὸ σύμβολα καὶ ἀπὸ συμβολισμοὺς τῶν συμβόλων.

Τί εἶναι ὅμως συγκεκριμένο ; τί ἀφηρημένο ; καὶ ποιὰ ἡ γενετικὴ σχέση ἀνάμεσά τους ;

2. *Συγκεκριμένο καὶ ἀφηρημένο*

Ὅταν λέμε «συγκεκριμένο» δὲν ἐννοοῦμε κάτι ποὺ ὑπάρχει στὴν πραγματικότητα ἀλλὰ τὴν παράστασή του, τὴν εἰκόνα ποὺ ἔχομε στὴ συνείδησή μας. Μὲ τὴ σκέψη ἀπομονώνομε ἐκεῖνο ποὺ δὲ μπορεῖ νὰ ἀπομονωθεῖ στὴν παράσταση. Κάμνομε ἀφαίρεση (νοερὰ) ἀπὸ ἕνα μῆλο ποὺ βλέπομε, ὅταν ἀπομονώνουμε καὶ θεωροῦμε ξεχωριστά : τὸ χρῶμα του, τὸ σχῆμα του, τὸ μέγεθός του, τὴ γεύση του. Αὐτὸ γίνεται ἐσωτερικά, στὴ συνείδησή μας, στὴν παράσταση ποὺ ἔχομε σχηματισμένη τοῦ μήλου. Τὸ ***ἀφηρημένο*** λοιπὸν εἶναι ἡ γνώση, ποιότητα ἢ σχέση, ποὺ ἐξάγεται ἀπὸ ὁρισμένη παράσταση. Οἱ παραστάσεις, καθ' ἑαυτές, ἀποτελοῦν τὸ ***συγκεκριμένο***. Χωρὶς ἀφαίρεση δὲ μποροῦμε νὰ ἀπομονώσουμε καμμιὰ ἰδιότητα, οὔτε καμμιὰ σχέση. Οὔτε καὶ νὰ συλλάβουμε κλάσεις ἀντικειμένων (κατηγορίες) χαρακτηρισμένες ἀπὸ κάποια ἰδιότητα ἢ σχέση. Δὲν εἶναι δυνατός, κατὰ συνέπεια, οὔτε ὁ συλλογισμός, οὔτε ἡ κρίση.

Ὁ βέλγος μαθηματικὸς W. Servais ποὺ πραγματεύεται τὸ θέμα «Συγκεκριμένο - ἀφηρημένο» στὸν τόμο «Τὰ ὑλικὰ μέσα γιὰ τὴ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν», κάμνει ἕνα σύντομο ἱστορικὸ ἐξέτασμα τοῦ θέματος, ἀπὸ τὸν

Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη, ὣς τὸν Κάντ καὶ τοὺς σύγχρονους φιλοσόφους καὶ θεωρητικοὺς τῆς λογικῆς.

Σύγχρονοι διαλεκτικοί, ὅπως ὁ F. Gonseth, ὑποστηρίζουν ὅτι «συγκεκριμένο καὶ ἀφηρημένο δὲν εἶναι δύο ὀντότητες προσδιορισμένες, αὐτοτελεῖς, ποὺ ἔχουν μεταξύ τους καλὰ καθορισμένες καὶ ὁριστικὲς σχέσεις. Εἶναι δύο ἀντίθετοι καὶ συμπληρωματικοὶ ὅροι ἑνὸς ζεύγους σὲ διαρκῆ γένεση. Οἱ σημασίες τους ἀλληλοκαθορίζονται ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλη. Ἐμπλουτίζονται ἀπὸ κάθε νέο στοχασμὸ καὶ πείρα, ὅπου συγκεκριμένο καὶ ἀφηρημένο ἀλληλοαντιμετωπίζονται στηριζόμενα, τὸ ἕνα στὸ ἄλλο» (1).

Ὑπάρχει λοιπόν, κατὰ τοὺς διαλεκτικούς, μία σχηματικὴ ἀνταπόκριση στὴ σχέση συγκεκριμένου—ἀφηρημένου, ὅπου μερικὰ σήματα τοῦ σχήματος ἀντιστοιχοῦν ἀντιπροσωπευτικὰ σὲ ἐξωτερικὰ ἀντικείμενα. Σχέσεις μεταξὺ τῶν σημάτων, ἢ ἐνδείξεις φερόμενες πάνω στὸ σχῆμα ἀνταποκρίνονται σὲ σχέσεις μεταξὺ τῶν εἰκονιζομένων ἐξωτερικῶν ἀντικειμένων. Κάτι περίπου ἀνάλογο μὲ ἕνα πρόχειρο σχέδιο ποὺ θέλει νὰ ὑποδείξει ἕνα δρομολόγιο. Ἕνα τέτοιο σχῆμα ἔχει αὐτόνομη ὕπαρξη καὶ προσφέρεται σὲ ἐσωτερικὲς ἐπεξεργασίες, ποὺ εἶναι δυνατὸ νὰ πραγματοποιηθοῦν στὶς εἰκονιζόμενες καταστάσεις. Μπορεῖ δηλαδὴ τὸ σχῆμα νὰ συμπληρωθεῖ μὲ προσθῆκες πραγματοποιήσιμες ἐξωτερικά.

Τὸ πρόβλημα τῆς ἀφαιρέσεως—κατὰ τὸν Servais ἔχει ἰδιαίτερη σημασία γιὰ τὰ μαθηματικὰ ποὺ χρησιμοποιοῦν σύμβολα καὶ μοντέλα. Μὰ τὸ ἀφηρημένο, σὲ διαλεκτικὴ ἀνταπόκριση μὲ τὸ συγκεκριμένο, ἔχει κάποια προοδευτικὴ γένεση, κάποιο ἱστορικὸ στὴν ἀνθρώπινη συνείδηση, ἀπὸ τὴ νηπιακὴ καὶ τὴν παιδική, ὣς τὴ νεανικὴ καὶ τὴν ὥριμη ἡλικία. Ἔτσι, τὸ πρόβλημα τῶν σχέσεων συγκεκριμένου καὶ ἀφηρημένου πρέπει νὰ διερευνηθεῖ στὸ σταυροδρόμι τῆς ψυχολογίας, τῆς λογικῆς καὶ τῶν φυσικομαθηματικῶν ἐπιστημῶν.

«Τὸ παιδὶ ἀνιχνεύει τὸ περιβάλλον του. Τὸ ἀνακαλύπτει καὶ ἀποκτᾶ παραστάσεις του. Ἀναγνωρίζει τὰ πρόσωπα καὶ τὰ ἀντικείμενα ποὺ τὸ περιβάλλουν. Ἀναγνωρίζει ἐπίσης σὲ φωτογραφίες καὶ σὲ σχέδια τὰ ὄντα τοῦ μικροῦ του κόσμου· καὶ ἄν, στὸ πρῶτο ἀντίκρυσμα, θέλει νὰ πιάσει τὰ εἰκονιζόμενα ἀντικείμενα, στὸ τέλος ξεχωρίζει στὶς ἀποκτημένες παραστάσεις του ἕνα ἀντικείμενο ἀπὸ τὴν εἰκόνα του. Σὲ λίγο ἡ γλῶσσα θὰ φέρει σὲ σημασιακὴ ἀνταπόκριση τὴ λέξη μὲ τὸ ἀντικείμενο ἢ μὲ μιὰ ποιότητα ἢ δράση. Τὸ παιδὶ μαθαίνει νὰ ὀνομάζει ὄχι μόνο ἕνα ἀντικείμενο σὲ κάθε ἐμφάνισή του, ἢ μιὰ δράση σὲ κάθε ἄσκησή της, ἀλλὰ καὶ ἄλλα ἀντικείμενα ἢ δράσεις ἀνάλογες. Μεταφέρει ἐπίσης τὸ ὄνομα ἑνὸς προσώπου ἢ ἑνὸς ἀντικειμένου στὴν ἀπεικόνισή του καὶ ὅμοια, μιὰ δράση ἢ τὴ μίμησή της» (W. Servais).

Τέτοιες ἱκανότητες τοῦ παιδιοῦ ποὺ ἐμφανίζονται μὲ τὴν πρώτη χρήση τῆς γλώσσας παρατηροῦνται καὶ στὰ παιδικὰ σχέδια μαζὺ μὲ τὶς πρῶτες τοπολογικὲς σχέσεις, ὅπως ἐγκλεισμὸς τῶν μερῶν στὸ ὅλο, ἐπαφὲς ἢ διαχωρισμοὶ

1) Ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν W. Servais.

μερῶν καὶ συμφυρμοί. Ἀποστάσεις, ἀναλογίες καὶ μορφὴ θὰ ὡριμάσουν ἀργότερα μὲ τὸ δυναμισμὸ ποὺ κλείνεται στὰ πρῶτα σχεδιάσματα. Σὲ ὅλα αὐτὰ τὰ γεγονότα εἶναι ἀναμφισβήτητη ἡ ἀναγνώριση μιᾶς ἐνεργητικῆς ἀφαιρέσεως συνδεμένης μὲ νοερὲς εἰκόνες μὲ πραγματικὲς παρουσίες καὶ μὲ τὴ γλῶσσα. Πρόκειται γιὰ μιὰ αὐθόρμητη ἀφαίρεση, ὅπου συμμετέχουν σύμμικτες παραστάσεις κάθε ποιότητας: ὀπτικές, ἀκουστικές, ἁπτικές, κιναισθητικὲς κλπ.

Στὴν ἀφαίρεση μπορεῖ νὰ ὁδηγήσει κατ' εὐθεῖαν καὶ ἡ ἀντίληψη. Μιὰ μουσικὴ π.χ. ἀντίληψη ἀπὸ τὸ ἄκουσμα μιᾶς ὀρχήστρας μπορεῖ νὰ ξεχωρίσει τὸν ἦχο ἑνὸς ὀργάνου ἀνάμεσα σὲ πολλὰ ποὺ συνηχοῦν.

Τὸ ἀφηρημένο συνδέεται μὲ τὸ συγκεκριμένο μὲ τὴ χρήση συμβόλων καὶ διαλέκτων. Τὸ σύμβολο εἶναι ἕνα συμφωνημένο σημάδι ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὸ συμβολιζόμενο· ἠμπορεῖ νὰ εἶναι μιὰ λέξη, μιὰ χειρονομία, ἕνα χρῶμα, ἕνα σῆμα, μιὰ γραφή. Ἡ σημασία του ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πρόσωπο ποὺ τὸ προτείνει ἢ ἀπὸ τὴν κοινωνικὴ χρήση, ἰδίως ὅταν ἀναφέρεται στὴ γλῶσσα. Τὸ σύμβολο ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ ἀφηρημένη γνώση καὶ συνδέεται μαζύ της μόνιμα μὲ ἀναλλοίωτη σημασία ποὺ ἐκφράζει τὴ λογικὴ ἀρχὴ τῆς ταυτότητας. Ἔτσι, ὁ ρόλος τῆς γλώσσας εἶναι σημαντικὸς στὴν ἀνάπτυξη τῆς ἀφαιρέσεως. Σὲ ὅλες τὶς γλῶσσες οἱ βασικὲς γραμματικὲς κατηγορίες: ὄνομα, ἐπίθετο, ρῆμα, ἀνταποκρίνονται ἀντίστοιχα σὲ ἀντικείμενα, ποιότητες, δράσεις καὶ σχέσεις. Εἶναι μάλιστα τόσο δυνατὸς καὶ ἄμεσος ὁ δεσμός, ὥστε πολλοὶ θεωρητικοὶ τῆς λογικῆς, καὶ μάλιστα ὁ Ἀριστοτέλης, πίστεψαν ὅτι οἱ κατηγορίες τῆς τρέχουσας γλώσσας εἶναι οἱ ἴδιες οἱ κατηγορίες τῆς σκέψεως.

Στὶς ζωντανὲς ὅμως γλῶσσες οἱ λέξεις ἔχουν πολλαπλῆ καὶ ἐλαστικὴ σημασία. Γι' αὐτό, στὸ μέτρο ποὺ πρέπει νὰ ἐκφρασθεῖ μὲ ἀκρίβεια ἡ ἀφηρημένη σκέψη, καταφεύγομε σὲ ἰδεογραφικὲς διαλέκτους, ὅπου σὲ κάθε σύμβολο ἀντιστοιχίζομε μιὰ καθαρὴ ἰδέα. Στὴν ἐπιστημονικὴ διάλεκτο ἀποδίδομε σὲ κάθε λεκτικὴ ἔκφραση μιὰ καθορισμένη σημασία ποὺ ἀποκλείει κάθε ἄλλη. Μποροῦμε ἐπίσης νὰ δημιουργήσουμε μιὰ σχηματικὴ ἀπεικόνιση, ὅπως στὴν περίπτωση τῆς γεωμετρίας, ἢ ἕνα συμβολισμὸ μὲ γράμματα, ὅπως στὴν ἄλγεβρα καὶ στὴ λογική. Ἔτσι φθάνομε σὲ μιὰ μεγαλύτερη ἀκρίβεια καὶ αὐστηρότητα στὶς ἀφηρημένες γνώσεις.

Ἐνῶ ὅμως μιὰ ἐπιστημονικὴ διάλεκτος στηριζόμενη στὶς λέξεις εἶναι κατάλληλη μόνο γιὰ νὰ εὐνοεῖ τὴν ἀκρίβεια στὴν ἔκφραση, ἕνας συμβολισμὸς ποὺ παίρνει τὴ μορφὴ ὑπολογισμοῦ καὶ χρησιμοποιεῖ καθορισμένους ἀλγορίθμους, ἐπιτρέπει τὴν ὑποκατάσταση τῆς σκέψεως, μὲ συγκεκριμένους χειρισμοὺς συμβόλων καὶ σημάτων. Ἐδῶ βρίσκεται ὁ εἰδικὸς χαρακτήρας τῶν μαθηματικῶν διαλέκτων ποὺ σήμερα ἐκδηλώνεται μὲ πλῆθος ἀπὸ διάφορους λογισμούς. Ἀπὸ τὴν ἄποψη αὐτὴ οἱ μαθηματικὲς διάλεκτοι φαίνονται, ὅλο καὶ περισσότερο, καμωμένες γιὰ νὰ σκέπτονται στὴ θέση τοῦ ἀνθρώπου.

Ἕνας ἄλλος θεμελιώδης τρόπος ἀφαιρέσεως εἶναι ἡ θεώρηση πραγμάτων κατὰ κλάσεις ἰσοδυναμίας, ὅπου σύνολα στοιχείων χαρακτηρίζονται ἀπὸ γενικὲς ἰδιότητες. Ἐδῶ κάθε στοιχεῖο τῆς κλάσεως ἀντιπροσωπεύει ὅλα τὰ ἄλλα σὲ ὅτι ἀναφέρεται στὶς χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες τῆς κλάσεως. Ἕνα μαστοφόρο π.χ. ἔχει τὶς χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες τῆς κλάσεώς του καὶ τὴν ἀντιπροσωπεύει, παρ' ὅλο ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχει καὶ ἄλλα ἰδιαίτερα χαρακτηριστικὰ ποὺ νὰ τὸ ξεχωρίζουν ἀπὸ ἄλλα τῆς ἴδιας κλάσεως. Ἀπὸ πλευρὰ ψυχολογικὴ ἡ γνώση τῆς κλάσεως ποὺ ἐξάγεται ἀπὸ χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες τοῦ συνόλου τῶν στοιχείων της εἶναι ἀφηρημένη σὲ σχέση μὲ τὰ συγκεκριμένα στοιχεῖα.

Κάποτε ἡ ἀφαίρεση συνοδεύεται ἀπὸ τὴ συμβατικότητα κάποιας προσεγγίσεως ποὺ ξεπερνᾶ τὸ μοντέλο τοῦ συγκεκριμένου. Αὐτὸ συμβαίνει συχνὰ στὰ μαθηματικά, ὅπως π.χ. στὴν ἔννοια τῆς εὐθείας ποὺ προϋποθέτει δύο φανταστικὲς πράξεις: τὴν ἀπεριόριστη προέκταση μιᾶς εὐθύγραμμης χάραξης σύγχρονα μὲ τὸν ἀπειροστικὸ περιορισμὸ τοῦ πάχους της.

Στὴν ἀφαίρεση ἀπὸ φυσικὰ δεδομένα, ἡ νόηση δὲν ἀντιγράφει τὸ συγκεκριμένο μοντέλο. Ἁπλοποιεῖ, παραλείπει λεπτομέρειες, σχηματοποιεῖ καὶ δημιουργεῖ τὸ ἀφηρημένο μοντέλο. Οἱ φυσικὲς ἐπιστῆμες δὲν ἐρευνοῦν ἀκατέργαστα γεγονότα, ὅπως τὰ ἀντιλαμβάνεται ἄμεσα ὁ παρατηρητής, ἀλλὰ φυσικὰ γεγονότα κατασκευασμένα ἀπὸ τὴ νόηση μὲ τὴ βοήθεια ἀφηρημένων γνώσεων (στερεὸ σῶμα, ὁμαλὴ κίνηση, ἠλεκτρικὸ φορτίο, θερμοκρασία, βαρύτητα κ.λ.π.).

Ἡ νόηση ἐπεξεργάζεται τὶς κλάσεις καὶ τὶς σχέσεις σύμφωνα μὲ γνωστοὺς τρόπους. Θεωρεῖ ὑπο-κλάσεις μιᾶς κλάσεως (ἢ εἴδη ἑνὸς γένους κατὰ τὴν κλασσικὴ λογική). Ὁ μαθηματικὸς θὰ θεωρήσει συστηματικὰ τὸ σύνολο ὅλων τῶν μερῶν ἑνὸς διαμερισμένου συνόλου. Στὸν ἐγκλεισμὸ μιᾶς κλάσεως σὲ μιὰ ἄλλη ἀντιστοιχίζει τὴ συνεπαγωγὴ μιᾶς ἰδιότητας τῆς δεύτερης ἀπὸ κάθε ἰδιότητα τῆς πρώτης. Ἀνάλογες ἰδιότητες παρατηροῦμε στὴν τομὴ καὶ στὴν ἕνωση περισσοτέρων κλάσεων ποὺ εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα δύο λογικῶν πράξεων πάνω σὲ κλάσεις ἢ πράξεων στὴν ἄλγεβρα τῶν συνόλων.

Ὅταν ὁρισθεῖ σὲ ἕνα σύνολο μιὰ σχέση ἰσοδυναμίας, διαμερίζομε τὰ στοιχεῖα του σὲ κλάσεις ἰσοδυναμίας τοποθετώντας στὴν ἴδια κλάση ὅλα τὰ ἰσοδύναμά του στοιχεῖα. «Στὸ διαμερισμὸ αὐτὸ τοῦ συνόλου σὲ κλάσεις ἰσοδυναμίας ἀντιστοιχεῖ, μὲ ἀφαίρεση, ὁ ὁρισμὸς μιᾶς μαθηματικῆς ἢ λογικῆς συναρτήσεως ποὺ παίρνει τὴν ἴδια τιμὴ γιὰ ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς ἴδιας κλάσεως. Ἕνας τέτοιος ὁρισμὸς λέγεται «ὁρισμὸς μὲ ἀφαίρεση» καὶ προσαρμόζεται σὲ γνώσεις, ὅπως ἡ ἰσότητα μάζας, θερμοκρασίας, ποσότητας θερμότητος, δυναμικοῦ, πληθικοῦ ἀριθμοῦ, σχήματος, μήκους, ἐμβαδοῦ κ.τ.λ.» (Servais).

Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας μεταξὺ σχέσεων ὁδηγεῖ στὴ γνώση τῆς δομῆς ποὺ εἶναι τόσο σημαντικὴ ἀπὸ πλευρὰ ἀφαιρέσεως. Πρόκειται γιὰ ὁμοιότητα σχέσεων ποὺ συναντᾶται συχνὰ σὲ κοινές, μεταφορικὲς ἢ ἀλληγορικὲς ἐκφράσεις. Λέμε π.χ.: αὐτὸ βρίσκεται στὸν κύκλο τῶν ἐνδιαφερόντων μου, ἡ σκέψη μου εἶναι σκοτεινή, παίζω μὲ ἀνοικτὰ χαρτιὰ κ.λ.π.

Χρησιμοποιεῖται ἐπίσης ἡ ὁμοιότητα σχέσεων σὲ ἀναλογικὲς συγκρίσεις καὶ παίζει σπουδαῖο ἀφαιρετικὸ ρόλο στὶς ἐπιστῆμες. Κλασσικὸ παράδειγμα οἱ ἀναλογίες μεταξὺ ὑδραυλικῶν καὶ ἠλεκτρικῶν φαινομένων. Τέτοιες ἀναλογικὲς συγκρίσεις εἶναι χρήσιμες στὴν ἔρευνα φυσικῶν φαινομένων.

Ἡ μαθηματικὴ ἀφαίρεση φθάνει στὶς πιὸ ἀκραῖες συνέπειές της μὲ τὴν *ἀξιωματικὴ ἀφαίρεση*. Ἡ λέξη ἀξίωμα στὰ σύγχρονα μαθηματικὰ δὲν ἔχει τὴν παλιὰ σημασία τῆς «ἀφ' ἑαυτῆς φανερᾶς» ἀλήθειας μιᾶς μαθηματικῆς προτάσεως, ὅπως π.χ. στὴ γεωμετρία. Σήμερα εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴ λέξη αἴτημα (postulat). Τὰ αἰτήματα προτάσσονται σὲ κάθε ὑποθετικὸ - παραγωγικὸ σύστημα, γιὰ νὰ χρησιμέψουν σὰν βάση στὴν παραγωγή [1]. Ἕνα αἴτημα δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην πρόταση ἀληθοφανής. Τὸ σύστημα ἀξιωμάτων σὲ μιὰ μαθηματικὴ ἀξιωμάτιση πρέπει ἀπαραίτητα νὰ μὴ ὁδηγεῖ σὲ ἀντιφάσεις. Μὲ μιὰ τέτοια ἀξιωμάτιση, ἡ μαθηματικὴ σκέψη ἀπελευθερώνεται περισσότερο ἀπὸ τὸ ἐνορατικὸ μοντέλο καὶ ἀποκτᾶ μεγαλύτερη ἀφαιρετικὴ αὐτονομία.

Ἡ νεότερη ἄλγεβρα, ἰδιαίτερα, ἔφθασε στὸν ὑψηλότερο βαθμὸ ἀφαιρέσεως. «Ἐνῶ ἀρχικὰ εἶχε νοηθεῖ σὰν σύστημα πράξεων σὲ προσδιορισμένους ἀριθμούς, ἀργότερα, μὲ προοδευτικὴ ἀποδέσμευση, παρουσιάσθηκε, ὅλο καὶ καθαρότερα, σὰν ἕνα πραξιακὸ σύστημα, δυνάμενο νὰ ἐπενεργήσει σὲ ὄντα ποικίλης φύσεως (σύνολα, προτάσεις, ἀντικαταστάσεις, μετασχηματισμούς, μῆτρες, κλάσεις ὑπολοίπων κ.τ.λ.) (Servais).

»Σὲ συμπέρασμα ἡ ἀφαίρεση δὲν προέρχεται ἁπλῶς ἀπὸ πράγματα παρόντα στὸ γνωστικό μας πεδίο. Προκύπτει ἀπὸ τὴ δραστηριότητά μας πάνω σὲ ἀντικείμενα γνώσεων, σὲ ὅποια στάθμη καὶ ἂν ἀνήκουν. Εἶναι, τελικά, συνειδητοποιήσεις μερικῶν ἀναλλοιώτων, ἀνεξάρτητα ἀπὸ λεπτομέρειες, ποὺ ἔγιναν ἀδιάφορες, ἐπειδὴ παραλείφθηκαν, εἴτε θεληματικά, εἴτε αὐτόματα.

»Ἡ γλῶσσα καί, κατὰ γενικὸ τρόπο, τὰ συμβολικὰ συστήματα, χρειάζονται γιὰ νὰ σημειώνουμε καὶ νὰ θυμόμαστε τὶς ἀφαιρέσεις. Τὸ σύμβολο, σῆμα συγκεκριμένο, ὁδηγεῖ στὴν πραγμάτωση τῆς ἀφαιρέσεως καὶ ἔτσι ἐπιτρέπει νὰ ἐνεργήσουμε ξανὰ πάνω σ' αὐτὴ (τὴν ἀφαίρεση) σὰν σὲ ἀντικείμενο συγκεκριμένο. Ἡ δραστηριότητα αὐτὴ δίνει νέες ἀφαιρέσεις ποὺ θὰ σταθεροποιηθοῦν κι' αὐτὲς μὲ συγκεκριμένες σημάνσεις.

»Ἔτσι ἡ σκέψη προχωρεῖ κλιμακωτὰ ἀπὸ τὴν ἀφαιροῦσα πραγματικότητα στὴν ἀφηρημένη γνώση, ἡ ὁποία, μὲ τὴ σειρά της γίνεται συγκεκριμένη.

»Ἡ μαθηματικὴ ἀφαίρεση πραγματοποιεῖται μὲ τὴν κατασκευὴ συμβολικῶν μοντέλων κάθε τάξεως καὶ μὲ τὸ εὑρετήριο σχεσιακῶν καὶ πραξιακῶν ἰδιοτήτων τῶν μοντέλων αὐτῶν . . . » (Servais).

3. Μερικὰ γιὰ τὴν μαθηματικὴ ἐνόραση

Στὴν τρίτη περσινὴ διάλεξή μας «Γενετικὴ διδακτικὴ τῶν μαθηματικῶν» ἔγινε ἀρκετὸς λόγος γιὰ τὴν ἐνόραση σὰν ψυχικὴ λειτουργία κατὰ τὴ διαδικασία τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν. Τὴν εἴχαμε ξεχωρίσει σὲ περιγραφικὴ ἐνόραση (παλαιὰ διδακτικὴ) καὶ σὲ κατασκευαστικὴ ἐνόραση, ὅπου

---

1) Παραγωγὴ (παλαιότερα ἀπαγωγὴ) ἐννοοῦμε τὴ μετάβαση μὲ χρήση συλλογισμῶν ἀπὸ τὸ γενικὸ στὸ μερικό. Μὲ τὸν παραγωγικὸ συλλογισμὸ ἡ ἀλήθεια μιᾶς προτάσεως συνάγεται ἀπὸ τὴν ἀναγκαιότητα τοῦ συμπεράσματος.

τὸ μαθηματικὸ μοντέλο μετασχηματίζεται συνοδευόμενο ἀπὸ κίνηση.

Ἡ μαθηματικὴ ἐνόραση δίνει τὴ βεβαιότητα μιᾶς μαθηματικῆς ἀλήθειας, ὅπως ἀνακαλύπτεται ἀπὸ τὸ πρόσωπο ποὺ «ἐνορᾶ», κατὰ τρόπο ὅμως ἐνεργητικό, πάνω στὴν ἔρευνα.

Ἂς παρακολουθήσουμε τὴ λειτουργία τῆς μαθηματικῆς ἐνοράσεως σὲ ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα: Θέτομε σὲ μαθητές, ἂς ποῦμε τῆς Γ' τάξεως, τὸ πρόβλημα: Πόσοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν μὲ 35 ψηφία ὁ καθένας; Ὁ ἑλβετὸς μαθηματικὸς J. L. Nicolet, κατασκευαστὴς μαθηματικῶν κινηματογραφικῶν μοντέλων, παρατηρεῖ ὅτι οἱ πρῶτες ἀπαντήσεις τῶν μαθητῶν εἶναι ἐπιπόλαιες καὶ ἀπογοητευτικές. Ἄλλοι θὰ ἀπαντήσουν ὅτι δὲν ὑπάρχουν τέτοιοι ἀριθμοί, ἄλλοι ὅτι ὑπάρχουν 35, ἄλλοι ὅτι ὑπάρχουν ὅσοι θέλουμε ἢ καὶ ἀκόμη μόνο 2.

Ψυχολογικὰ ἐκεῖνοι ποὺ ἀπαντοῦν 2 κάμνουν σύγχυση νομίζοντας ὅτι ἡ ἐρώτηση ζητᾶ «πόσα ψηφία ὑπάρχουν στὸν ἀριθμὸ 35», ἐνῶ ἐκεῖνοι ποὺ ἀπαντοῦν 35 συγχέουν τὴ λέξη ψηφία μὲ τὴ μονάδα. Ὅσοι πάλι ἀπαντοῦν ὅτι δὲν ὑπάρχουν τέτοιοι ἀριθμοὶ συγχέουν συλλογὲς ἀντικειμένων μὲ τὸν πληθικὸ ἀριθμό τους.

Ὅλες αὐτὲς οἱ ἐπιπόλαιες ἀπαντήσεις μόλις φέρουν ἀόριστα ἴχνη συλλογισμῶν: «ἡ φαντασία δὲν ἔχει ξυπνήσει». Ἐὰν ὅμως ὕστερα ἀπὸ λίγο τὸ ζήτημα τεθεῖ βασικότερα καὶ ὑποδειχθεῖ ἕνας κλιμακωτὸς τρόπος ἔρευνας, οἱ καλοὶ μαθητὲς θὰ κάμουν τὶς ἀκόλουθες διαπιστώσεις:

1ον Ὑπάρχουν 9 ἀριθμοὶ μὲ ἕνα ψηφίο (τὸ μηδὲν παραλείπεται).

2ον Ὑπάρχουν 90 ἀριθμοὶ μὲ δύο ψηφία $(99-9=90)$.

3ον Ὑπάρχουν 900 ἀριθμοὶ μὲ τρία ψηφία $(999-99=900)$.

Ὁ δρόμος τώρα εἶναι ἀνοιχτὸς καὶ ὁδηγεῖ τὴ σκέψη σὲ μιὰ φυσικὴ σειρὰ ἀπὸ εἰκόνες.

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ βλέπομε καθαρὰ τὸ ξύπνημα τῆς φαντασίας καὶ τὴ λειτουργία τῆς ἐνοράσεως στὶς ἀκόλουθες φάσεις:

1ον Θεώρηση διατεταγμένων εἰκόνων.

2ον Διαπίστωση μιᾶς ἁπλῆς ἀλήθειας.

3ον Ἐπαγωγὴ ποὺ ὁδηγεῖ στὴ γενικὴ ἔκφραση τοῦ νόμου.

4ον Γενικὴ ἐπαλήθευση, δηλαδὴ ἀπόδειξη, μὲ τὴν ὁποία οἱ παρατηρήσεις ποὺ ἔγιναν πάνω σὲ ἄτομα ἢ στοιχεῖα κλάσεως, ξαναγίνονται σὲ ἀφηρημένη μορφὴ πάνω στὴν ἔννοια κλάσεως. Δὲν σκεπτόμαστε πιὰ σὲ ἀριθμοὺς μὲ 1, μὲ 2, μὲ 3 ψηφία, ἀλλὰ σὲ ἀριθμοὺς μὲ ν ψηφία.

Ὁ συμβολισμὸς $9 \cdot 10^{\nu-1}$ (ν, φυσικὸς) εἶναι γεμάτος ἀπὸ μαθηματικὴ οὐσία γιὰ τοὺς μαθητὲς ποὺ ἔλυσαν τὸ πρόβλημα.

Πρέπει ἐδῶ νὰ κάμουμε τὴ διαπίστωση ὅτι ἡ ἄμεση λύση ἑνὸς τέτοιου προβλήματος μὲ μόνη τὴ λογικὴ εἶναι ἀδύνατη γιὰ τὸ μαθητή. Αὐτὸ συμβαίνει, γιατὶ ἕνα τέτοιο ζήτημα δὲν ἐκίνησε ποτὲ τὴ σκέψη του, δὲν ἐρέθισε ποτὲ τὴ φαντασία του, δὲν ὑπάρχει στὴ συνείδησή του καμιὰ συγγενική του παράσταση, ὥστε νὰ ἀνακληθεῖ καί, μὲ τὴ λειτουργία τῆς λογικῆς, νὰ ἀκολουθήσει ἔρευνα, ἀπὸ τὴν ὁποία νὰ προκύψη ἡ νέα μαθηματικὴ ἀλήθεια.

'Από τὸ παραπάνω παράδειγμα καὶ ἀπὸ ἄλλα παρόμοια ἀναφερόμενα σὲ ἀκολουθίες φαίνεται καθαρὰ ὅτι ἡ ἐνόραση διεγείρεται καὶ λειτουργεῖ γρηγορότερα ἀπὸ τὴ λογική· κι' αὐτὸ εἶναι φυσικό, γιατί, ὅπως εἴδαμε, ἡ λογικὴ πηγάζει ἀπὸ τὴν ἐνόραση. Κατὰ κάποιο τρόπο ἡ λογικὴ στηρίζει, ἐξωτερικεύει, κάμνει μὲ τὸ λόγο κοινωνικὴ τὴ μαθηματικὴ ἀλήθεια ποὺ ἀνακαλύφθηκε ἀτομικὰ μὲ τὴν ἐνόραση.

Κάθε διανοητικὴ καὶ εἰδικότερα μαθηματικὴ δραστηριότητα ἀνάγεται στὴ θεώρηση μιᾶς διαδικασίας νοερῶν εἰκόνων. Μὲ τὴν ἐνόραση συνειδητοποιοῦμε καὶ τὴ διαδικασία καὶ τὸν τρόπο θεωρήσεως τῶν εἰκόνων. Ἡ διαδικασία ὑποβάλλεται στὸ δημιουργικὸ πνεῦμα ἀπὸ τὸ ξύπνιο ὑποσυνείδητό του καὶ στὸ μαθητὴ ἀπὸ τὸ δάσκαλο. Ὑποβάλλεται δὲν σημαίνει ὅτι ὑποδεικνύεται καὶ πολὺ λιγότερο ὅτι διδάσκεται. Μέσο γιὰ τὴν ὑποβολὴ στὸ μαθητὴ εἶναι τὸ μαθηματικὸ μοντέλο: ἀπὸ τὸ στατικὸ σχῆμα τοῦ πίνακα, ὡς τὸ μετασχηματιζόμενο μηχανικὸ καὶ τὸ κινηματογραφικὸ σκίτσο ποὺ εἶναι τὸ ζωντανότερο ἀπ' ὅλα.

«Οἱ σταθμοὶ τῆς μαθηματικῆς κατανοήσεως εἶναι τώρα καλὰ καθωρισμένοι: σκοπός μας εἶναι νὰ φθάσουμε στὸ λογικὸ πνεῦμα, ἀλλὰ αὐτὸ θὰ κατορθωθεῖ μόνο ξεκινώντας ἀπὸ τὴν ἐνόραση. 'Εὰν σὲ ἕνα μαθητὴ δὲν ξυπνήσει ἡ ἐνόραση στὴν ἀρχὴ τῆς διανοητικῆς ζωῆς, παθαίνει μὲ τὸν καιρὸ ἀτροφία καὶ γίνεται ἀνίκανη νὰ ἐκπληρώσει τὸν προορισμό της.

»Ἡ ἴδια τότε ἡ λογικὴ θὰ ἀναπτυχθεῖ ἀνώμαλα, ὁ μαθητὴς δὲν θὰ ἀποκτήσει ποτὲ μαθηματικὴ συνείδηση. Γι' αὐτὸν ὁ ἀριθμὸς θὰ διατηρήσει γιὰ πάντα ἐχθρικὸ χαρακτήρα καὶ θὰ τοῦ δημιουργηθεῖ ἕνα σύμπλεγμα κατωτερότητας. Μιὰ πηγὴ χαρᾶς θὰ στερέψει γι' αὐτόν...» (1).

Εἶναι στ' ἀλήθεια θλιβερὸ τὸ κατάντημα μιᾶς μαθηματικῆς ἀγωγῆς, ὅπου ἕνας ἔφηβος 17 καὶ 18 ἐτῶν «ἀπομνημονεύει» ἀποδείξεις θεωρημάτων τῆς στερεομετρίας χωρὶς νὰ κατανοεῖ τὴ λογικὴ ἀλληλουχία τῶν συλλογισμῶν ποὺ τὶς στηρίζουν· ὅπου νέοι 15 καὶ 16 ἐτῶν λύουν μηχανικὰ ἐξισώσεις καὶ ἐκτελοῦν πράξεις ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ, χωρὶς νὰ ἔχουν συνείδηση τοῦ τί κάμνουν· ὅπου παιδιὰ 6 καὶ 7 ἐτῶν ὑποβάλλονται στὸν καταναγκασμὸ νὰ ἀπομνημονέψουν μηχανικὰ τὸν πυθαγόρειο πίνακα καὶ νὰ λύσουν ἀργότερα προβλήματα κατὰ τρόπο ἐντελῶς σχηματικό, πάνω σὲ τύπους, ὅπως ἡ μέθοδος τῶν τριῶν, τὰ προβλήματα τοῦ τόκου κ.τ.λ.

Λίγα παιδιά, πολὺ λίγα, τὸ ξέρομε ὅλοι ἀπὸ τὴν πεῖρα μας, κατορθώνουν, εἴτε ἀπὸ ἰδιοφυΐα, εἴτε ἀπὸ εὐτυχεῖς συμπτώσεις, εἴτε καὶ ἀπὸ τὰ δύο — κατορθώνουν νὰ σπάσουν τὸ φράγμα τοῦ βερμπαλισμοῦ ποὺ πνίγει ἀσφυκτικὰ τὴ διδακτική μας γιὰ νὰ βγοῦν στὸν ἐλεύθερο ἀέρα τῆς δημιουργικῆς φαντασίας, στοὺς ἀνοικτοὺς ὁρίζοντες τῆς γόνιμης ἐνοράσεως καὶ τῆς μαθηματικῆς παραγωγῆς.

Ποιός θὰ ἐνδιαφερθεῖ, ποιός θὰ βοηθήσει τὰ ἄλλα, τὰ πολλὰ παιδιά;

---

1) J. Nicolet : Στὸν τόμο «Le matériel pour l' enseignement des mathématiques», σ. 80.

ποιός θὰ διαλύσει τὴν ἀχλὺ ποὺ θολώνει τὴ σκέψη τους, ὅταν ἀντικρύζουν τὰ μαθηματικά ; Ποιός θὰ τοὺς δώσει τὴ χαρὰ ποὺ γεννᾶ στὴν ψυχὴ ἡ ἀνακάλυψη, ἡ ἐξοικείωση μὲ τὴ μαθηματικὴ ἀλήθεια ;

II. Τὰ μαθηματικὰ μοντέλα. Εἴδη καὶ χρήση

«Θέλησα νὰ σοῦ ἐκθέσω κάποια μέθοδο ποὺ θὰ σοῦ ἐπιτρέπει νὰ μπορεῖς νὰ ἐξετάζεις μερικὰ ἀπὸ τὰ μαθηματικὰ ζητήματα μὲ μηχανικὸ τρόπο. Καὶ ἔχω πεισθεῖ ὅτι αὐτὸ δὲν εἶναι λιγότερο χρήσιμο καὶ στὴν ἴδια τὴν ἀπόδειξη τῶν θεωρημάτων. Διότι μερικὰ ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ ἀρχικὰ ἀνακάλυψα κατὰ τρόπο μηχανικό, ὕστερα τὰ ἀπόδειξα καὶ μὲ τὴ γεωμετρία, ἐπειδὴ ὁ μηχανικὸς τρόπος θεωρήσεως δὲν συνοδεύεται μὲ ἀπόδειξη. Ἔτσι εἶναι πιὸ εὔκολο, μιὰ καὶ προαποκτήσαμε μὲ τὴ μέθοδο αὐτὴ κάποια γνώση τῶν ζητημάτων νὰ ὁδηγηθοῦμε ὕστερα στὴν ἀπόδειξη, ἀντὶ νὰ τὴν ἀναζητοῦμε χωρὶς νὰ ἔχουμε ἀπὸ πρὶν καμιὰ γνώση τοῦ ἀποδεικτέου . . .

». . . Θέλησα νὰ δημοσιεύσω αὐτὴ τὴ μέθοδο, καὶ γιὰ ὅσα εἶπα παραπάνω γι' αὐτήν, γιὰ νὰ μὴ νομίζουν μερικοὶ ὅτι λέμε ἄδεια λόγια, καὶ γιατὶ ἔχω πεισθεῖ ὅτι δὲν θὰ εἶναι μικρὴ ἡ συμβολή της στὰ μαθηματικά. Γιατὶ ὑποθέτω ὅτι μερικοί, εἴτε ἀπὸ τοὺς σύγχρονούς μας, εἴτε ἀπὸ τοὺς μεταγενέστερους θὰ μπορέσουν νὰ βροῦν μὲ τὸν τρόπο ποὺ ὑποδεικνύομε καὶ ἄλλα θεωρήματα ποὺ ἀκόμη δὲν ἔτυχε κατὰ σύμπτωση νὰ μᾶς ἀπασχολήσουν».

(Περικοπὴ ἀπὸ τὴν ἐπιστολὴ τοῦ Ἀρχιμήδη στὸν Ἐρατοσθένη)

Ἀπὸ ὅσα ἐκτέθηκαν σχετικὰ μὲ ὅ,τι ὀνομάσαμε ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴ διαλεκτικὴ ἀλληλουχία συγκεκριμένου καὶ ἀφηρημένου καὶ μὲ τὴν ἐνόραση, προβάλλει αὐτόματα ἡ ἀνάγκη τοῦ μαθηματικοῦ μοντέλου σὰν προϋπόθεση τῆς λειτουργίας τῆς μαθηματικῆς σκέψεως στὴ στάθμη τῆς ἐνοράσεως.

Ὅταν λέμε μαθηματικὸ μοντέλο, ἐννοοῦμε κάθε ὑλικὸ μέσο ἱκανό, εἴτε νὰ ὑποβάλει νέες μαθηματικὲς ἰδέες, εἴτε νὰ ἐκφράσει σχηματισμένες μαθηματικὲς ἔννοιες. Γενικὰ ἕνα μαθηματικὸ μοντέλο στηρίζει τὴ μαθηματικὴ σκέψη στὴν ἐνορατικὴ λειτουργία της (πέρασμα ἀπὸ τὸ συγκεκριμένο στὸ ἀφηρημένο), ἢ ὑλοποιεῖ μιὰ ἀφηρημένη μαθηματικὴ ἔννοια (ἐπιστροφὴ ἀπὸ τὸ ἀφηρημένο στὸ συγκεκριμένο). Καὶ οἱ δύο φάσεις συντελοῦνται μὲ τὴν ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα, στὴν ὁποία, ἀπαραίτητα, συνεργοῦν οἱ αἰσθήσεις.

Μοντέλα μαθηματικὰ χρησιμοποιοῦμε κυρίως στὴ γεωμετρία καὶ γι' αὐτὰ θὰ γίνει εὐρύτερα λόγος στὰ παρακάτω. Ἀλλὰ καὶ στὴν ἀριθμητικὴ καὶ στὴν ἄλγεβρα γίνεται χρήση μαθηματικῶν μοντέλων κατὰ τὴ λύση κυρίως προβλημάτων.

Νά ἕνα παράδειγμα ἀπὸ τὴν ἀριθμητική.

Πρόβλημα : Ἕνα ποσὸ α εἶναι τριπλάσιο ἀπὸ ἄλλο ποσὸ β. Ἐὰν ἀπὸ τὸ α ἀφαιρέσουμε τὸ μισὸ καὶ τὸ προσθέσουμε στὸ β, ποιὰ σχέση θὰ ὑπάρχει ἀνάμεσα στὰ νέα ποσά ;

Ἡ λύση τοῦ προβλήματος μπορεῖ νὰ γίνει μὲ προσφυγὴ σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τέσσερα στάδια τῆς γενετικῆς ἀναπτύξεως τῆς μαθηματικῆς σκέψεως τοῦ ἐφήβου (πραγματικό, γραφικῆς παραστάσεως, ἀριθμητικό, ἀλγεβρικὸ) [1]. Ἡ προσφυγὴ στὸ πραγματικὸ στάδιο, ποὺ εἶναι τὸ πιὸ στοιχειῶδες, μπορεῖ νὰ χρησιμοποιήσει γιὰ μοντέλο δύο πραγματικὰ σύνολα Α καὶ Β μὲ πληθυκοὺς ἀριθμούς, α καὶ β, ὅπου $\alpha = 3\beta$ (μὲ $\beta = 2\nu$). Ἡ λύση τοῦ προβλήματος καὶ ἡ γενίκευσή του θὰ προβάλουν μὲ ἐκτέλεση πράξεων πάνω σὲ πραγματικὰ στοιχεῖα τῶν Α καὶ Β (σπίρτα, κέρματα κ.λ.π.). Ἡ λύση στὸ πεδίο τῆς γραφικῆς παραστάσεως θὰ πραγματοποιηθῆ μὲ πράξεις πάνω σὲ σχηματικὰ μοντέλα, ὅπως π.χ.

Σχ. α

Στὸ στάδιο τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς ἀλγεβρικῆς λύσεως οἱ πράξεις ἐκφράζονται σὲ μαθηματικοὺς συμβολισμούς. Στὸ ἀριθμητικὸ π.χ. σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

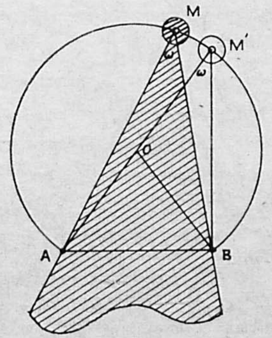
Στὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ποσοῦ α (δηλ. στὸ ποσὸ β) προσθέτομε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ α καὶ ἔχουμε $\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \frac{5}{6}$ τοῦ α, ἐνῶ ἀπὸ τὸ α θὰ ἀπομείνει $\frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{6}\alpha$ (τοῦ ἀρχικοῦ). Τὰ νέα λοιπὸν ποσὰ α' καὶ β' θὰ εἶναι μεταξύ τους ὅπως οἱ ἀριθμοὶ $\frac{3}{6}$ καὶ $\frac{5}{6}$ ἢ 3 καὶ 5, ἤτοι: $\alpha' = \frac{3}{5}\beta'$.

Πλατιὰ χρήση τῶν σχηματικῶν μοντέλων γίνεται — καὶ πρέπει νὰ γίνεται — στὸν κατώτερο κύκλο κατὰ τὴ λύση ἀριθμητικῶν προβλημάτων, ὅπως καὶ κατὰ τὴ διδασκαλία νέων ἀριθμητικῶν ἐννοιῶν καὶ σχέσεων. Τὰ βένια διαγράμματα στὶς στοιχειώδεις πράξεις τῶν συνόλων ἀποτελοῦν ἀξιόλογα σχηματικὰ μοντέλα ποὺ ἐκπληρώνουν τὸ διπλὸ διδακτικὸ προορισμὸ νὰ ὁδηγοῦν ἀπὸ τὸ συγκεκριμένο στὸ ἀφηρημένο δίνοντας αἰσθητὰ στηρίγματα στὴ μαθηματικὴ ἐνόραση κατὰ τὴ λειτουργία της καὶ συνάμα νὰ ὑλοποιοῦν, κάμνοντας συγκεκριμένη, μιὰ ἀφηρημένη μαθηματικὴ ἔννοια, ὅπως π.χ. τὴν τομὴ συνόλων κ.τ.λ.

Μὰ ἐκεῖ ποὺ τὰ μοντέλα εἶναι ἀπολύτως ἀπαραίτητα, εἶναι στὴ στοιχειώδη γεωμετρία. Δὲν ὑπάρχει βιβλίο γεωμετρίας στὴν κατώτερη καὶ τὴ μέση ἐκπαίδευση ποὺ νὰ μὴ χρησιμοποιεῖ σχήματα, στὰ ὁποῖα παραπέμπει

1) Βλ. Ν. Σωτηράκη: Γενετικὴ Ψυχολογία καὶ Διδακτικὴ τῶν Μαθηματικῶν, σ. 30 κ.ἑ.

τὸ κείμενο γιὰ νὰ στηρίξει τοὺς ἀναπτυσσόμενους συλλογισμούς. Τὰ σχήματα ὅμως τοῦ βιβλίου, ὅπως καὶ τὰ σχήματα ποὺ σχεδιάζομε στὸ μαυροπίνακα, εἶναι στατικὰ καί, σὰν τέτοια, δὲν προσελκύουν ἀρκετὰ τὴν προσοχὴ τοῦ μαθητῆ. Ἀποτελοῦν μοντέλα ποὺ δὲν διεγείρουν τὴ δημιουργικὴ φαντασία, δὲν παροτρύνουν στὴν ἔρευνα. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ ἴδιο καὶ μὲ μοντέλα μετασχηματιζόμενα. Ἐδῶ ὁ μαθητὴς (πρόκειται πάντα γιὰ ἐνορατικὴ διδασκαλία στὸν κατώτερο κύκλο) παρακολουθεῖ τὸ μετασχηματισμὸ καὶ εὔκολα διακρίνει τί μεταβάλλεται καὶ τί μένει σταθερὸ στὴ γεωμετρικὴ κατάσταση ποὺ τοῦ ὑποβάλλει τὸ ἐμψυχωμένο, τὸ ζωντανὸ μοντέλο. Ἐδῶ λειτουργεῖ



Σχ. 2

ἄνετα ἡ κατασκευαστικὴ ἐνόραση [1]. Ἂς πάρουμε γιὰ παράδειγμα τὴ σύγκριση ἐγγεγραμμένων γωνιῶν στὸ ἴδιο τόξο $\overset{\frown}{AMB}$, μεταξύ τους καὶ μὲ τὴν ἀντίστοιχή τους ἐπίκεντρη $A\hat{O}B$.

Ὑλοποιοῦμε τὴν ἐγγεγραμμένη γωνία $\hat{\omega}$ σὲ ἕνα καρτόνι, ὅπως φαίνεται στὸ παραπάνω σχῆμα. Στὴν κορυφὴ M τῆς γωνίας $\hat{\omega}$ ὑπάρχει μιὰ μικρὴ ὀπή, ὅσο ποὺ νὰ περνᾶ ἡ μύτη τοῦ μολυβιοῦ. Στὰ σημεῖα A καὶ B μιᾶς πινακίδας μπαίνουν δυὸ καρφιά, σὲ τρόπο ποὺ ὑποχρεώνουν τὶς πλευρὲς MA καὶ MB τῆς γωνίας $\hat{\omega}$ νὰ ὀλισθαίνουν σὲ συνεχῆ ἐπαφὴ μ' αὐτά, ἐνῶ τὸ μολύβι παρασύρει τὴν ὑλοποιημένη γωνία γιὰ νὰ γράψει τὸ τόξο $\overset{\frown}{AMB}$ (ἢ τὸ συμμετρικό του ὡς πρὸς τὴν AB) ποὺ ἀπὸ τὰ σημεῖα του τὸ τμῆμα AB φαίνεται σὲ γωνία $\hat{\omega}$. Ὅλες λοιπὸν οἱ ἐγγεγραμμένες στὸ τόξο $\overset{\frown}{AMB}$ γωνίες εἶναι ἴσες.

Τὸ ἴδιο μοντέλο μᾶς δίδει καὶ τὴ σχέση $\hat{\omega} = \frac{1}{2} A\hat{O}B$, ἀρκεῖ νὰ σταματήσουμε τὴν κίνηση, ὅταν μία ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς ὑλοποιημένης γωνίας περνᾶ ἀπὸ τὸ κέντρο O τῆς περιφέρειας. (Τὸ τόξο $\overset{\frown}{AMB}$ ἔχει χαραχθεῖ προηγουμένως καὶ ἡ ὑλοποιημένη στὸ καρτόνι γωνία $\hat{\omega}$ εἶναι κομμένη στὰ μέτρα

1) Ν. Σωτηράκη : Ὅπου καὶ ἀνωτέρω (ὅ.ἀ.) σ. 66 κ.ἑ.

του). Γίνεται λοιπὸν ἀμέσως φανερὸ ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία $\widehat{AOB}$ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΒΜ' εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιο τῆς $\widehat{\omega}$ κ.τ.λ.

Δὲν χρειάζεται, νομίζω, νὰ ἐπιμείνουμε στὴ διδακτικὴ σημασία τοῦ μετασχηματιζόμενου μοντέλου. Τὸ παραπάνω μοντέλο μπορεῖ νὰ κατασκευασθεῖ ἀπὸ τὸν κάθε μαθητὴ σὲ ἕνα φύλλο χονδρὸ χαρτί, ὅπου στὴ θέση τῆς χορδῆς ΑΒ νὰ ὑπάρχει σχισμὴ ποὺ νὰ δέχεται ἀπὸ τὰ κάτω τὴν ὑλοποιημένη γωνία $\widehat{\omega}$ καὶ νὰ τῆς ἐπιτρέπει νὰ στρέφεται, ὥστε ἡ κορυφή της Μ νὰ βρίσκεται συνεχῶς πάνω στὴν περιφέρεια.

Ὅταν ὁ μαθητὴς παρακολουθήσει ἕνα τέτοιο πείραμα καὶ πολὺ περισσότερο, ὅταν κατασκευάσει ὁ ἴδιος τὸ μοντέλο καὶ αὐτοπειραματισθεῖ, δὲν πρόκειται νὰ ξεχάσει ποτὲ τὴ μαθηματικὴ ἀλήθεια, ποὺ τοῦ ἀποκάλυψε ἡ ἐνόραση, γιατὶ τὴ νοερὴ παράσταση τοῦ ζωντανεμένου μοντέλου ἐπεξεργάσθηκαν σὲ ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα περισσότερες ἀπὸ μία αἰσθήσεις. Τώρα πιὰ οἱ μελλοντικοὶ δρόμοι τῆς μεταβάσεως ἀπὸ τὸ συγκεκριμένο στὸ ἀφηρημένο, ἀνοιχτοὶ καὶ φωτισμένοι ἀπὸ τὴν ἐνόραση, θὰ ἐπιτρέψουν στὴ λογικὴ νὰ κινεῖται ἐλεύθερα καὶ σίγουρα στὶς περιοχὲς τῆς «μαθηματικῆς παραγωγῆς».

Μιὰ καὶ συμφωνήσουμε γιὰ τὴ διδακτικὴ σημασία τοῦ μαθηματικοῦ μοντέλου θὰ ἐξαρτηθεῖ ἀπὸ τὴν ἴδια μας τὴ θέληση νὰ ἐφεύρουμε, νὰ κατασκευάσουμε καὶ νὰ καθοδηγήσουμε τὸ μαθητὴ στὴν κατασκευὴ τοῦ κατάλληλου μοντέλου γιὰ τὴν ἐνορατικὴ κατανόηση τῶν βασικῶν μαθηματικῶν γνώσεων. Ἰδιαίτερη διδακτικὴ ἀξία ἔχουν τὰ μετασχηματιζόμενα μοντέλα, χωρὶς βέβαια νὰ ἀποκλείονται καὶ τὰ στατικά, τόσο στὴν ἐπιπεδομετρία ὅσο καὶ στὴ στερεομετρία. Στὸ μετασχηματιζόμενο μοντέλο ὑπάρχει ἕνας ἰδεογόνος δυναμισμὸς τῶν πράξεων καὶ τῶν σχέσεων ποὺ ἐκφράζει. Στὴν κατασκευαστικὴ ἐνόραση ποὺ γεννᾶ ἡ λειτουργία του ἔρχονται νὰ προστεθοῦν προϋπάρχουσες στὴ συνείδηση συγγενικὲς ἐσωτερικὲς εἰκόνες, ἀναμνήσεις καὶ παραστάσεις. Κινητοποιεῖται ἔτσι ἡ νοημοσύνη καὶ ἡ λογικὴ βρίσκει τὴν εὐκαιρία καὶ τὴ δυνατότητα νὰ σχηματίσει ἔννοιες καὶ νὰ συμπεράνει σχέσεις, νὰ ἀνακαλύψει δεσμοὺς ἀνάμεσα στὶς ἴδιες τὶς λογικὲς πράξεις. Ἡ ἀπόκτηση, μὲ τὸν καιρό, καὶ ἡ συνειδητοποίηση ἑνὸς τέτοιου ποικίλου καὶ πλούσιου ὑλικοῦ ἀπὸ μαθηματικὲς ἰδέες θὰ βοηθήσει τὴν ὡρίμανση καὶ τὴν ὀργάνωση τῆς μαθηματικῆς παραγωγῆς μὲ ὁρισμούς, ἀξιώματα καὶ ἀποδείξεις, θὰ ἀνοίξει μὲ ἕνα λόγο τὸ πέρασμα στὴν ἀφηρημένη μαθηματική. «Οὐδὲν ἐν τῷ νῷ, ὃ μὴ πρότερον ἐν τῇ αἰσθήσει». Διαφορετικά, ἂν δὲν προηγηθεῖ, δηλαδή, ἡ ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα στὸ ψυχολογικὸ πεδίο τῶν αἰσθήσεων καὶ τῆς ἐνοράσεως, τὸ πέρασμα ἀργότερα στὸν παραγωγικὸ στοχασμὸ κινδυνεύει νὰ καταντήσει κούφιος βερμπαλισμὸς — λογοκαπάνισμα — καὶ ἡ πείρα μας πάνω σ' αὐτὸ εἶναι πικρή.

Ἕνα γεωμετρικὸ μοντέλο ἐκφράζει μιὰ γεωμετρικὴ κατάσταση. Πάνω σ' αὐτό, σταθερὸ ἢ μεταβαλλόμενο, δὲν ἀρκεῖ νὰ βλέπουμε ὑλοποιημένο ἐκεῖνο ποὺ ἐπιδιώξαμε νὰ πραγματοποιήσουμε. Πρέπει νὰ τὸ ἐξετάσουμε, νὰ τὸ ἐρευνήσουμε μὲ ἀληθινὴ μαθηματικὴ ἀνεξαρτησία. Ἡ φαντασία μὲ δικιά της πρωτοβουλία, θὰ τροποποιήσει κατασκευές, θὰ ἀφαιρέσει μέρη γιὰ νὰ προσθέσει ἄλλα, θὰ κινήσει σταθερὰ μέρη καὶ θὰ σταθεροποιήσει κινητά, ὥς ποὺ νὰ φθάσει στὴ ζητούμενη μαθηματικὴ ἀλήθεια, στὴν ἐπανεύρεσή της.

Μιὰ ἐρευνητικὴ δραστηριότητα σὲ τέτοια πληρότητα καθορίζει σὲ κάθε στιγμὴ τὴ σχέση τοῦ πειραματικοῦ μὲ τὸ θεωρητικὸ καὶ παρέχει ὑλικὸ γιὰ τὴν ἔκφραση μαθηματικῶν σχέσεων μὲ ὅλα τὰ ἐκφραστικὰ μέσα, λεκτικά, παραστατικὰ καὶ συμβολικά.

Ἀνάμεσα στὰ μαθηματικὰ μοντέλα, τὰ πιὸ ὑποβλητικὰ εἶναι, χωρὶς ἀμφιβολία, τὰ κινηματογραφικά. Σ' ἕνα κόσμο, ὅπως ὁ σημερινός, ὅπου τὸ πᾶν εἶναι κίνηση, ὅπου ἡ ὀπτικοκινητικὴ ἀντιληπτικὴ δραστηριότητα τοῦ ἀνθρώπου πάει νὰ γίνει, μὲ τὸν κινηματογράφο, νέα αἴσθηση, ἡ μαγεία τῶν μεταβαλλόμενων μαθηματικῶν καταστάσεων στὸ παιγνίδι τοῦ φωτὸς καὶ τῆς σκιᾶς συναρπάζει τὸ μαθητὴ - θεατὴ φθάνοντας ὥς τὸ ὑποσυνείδητό του. Σχολεῖα ποὺ διαθέτουν κινηματογραφικὴ συσκευὴ μποροῦν (ἂν δὲν τὸ ἔχουν κάμει μέχρι σήμερα) νὰ προμηθευθοῦν μαθηματικὲς κινηματογραφικὲς ταινίες (1).

Δίνομε παρακάτω τὴν περιγραφὴ μιᾶς διδασκαλίας μὲ μιὰ κινηματογραφικὴ ταινία τοῦ Ἑλβετοῦ J. M. Nicolet, σχετικὴ μὲ τρία ὁμοκυκλικὰ σημεῖα. Ἡ ταινία εἶναι βωβή, ἔχει διάρκεια δύο λεπτὰ καὶ προβάλλει φωτογραφίες ἀλλεπάλληλων σχεδίων κατὰ τρόπο ποὺ νὰ ὑποβάλλεται ἕνας συνεχὴς μετασχηματισμὸς ἀπὸ κινούμενα σχέδια. Σὲ ὁρισμένες στιγμὲς ἡ προβολὴ διακόπτεται γιὰ νὰ γίνει συζήτηση καὶ νὰ χρησιμοποιηθεῖ, ἂν χρειασθῆ, ὁ μαυροπίνακας.

Τὸ μάθημα ποὺ περιγράφουμε ἔγινε ἀπὸ τὸν Ἄγγλο μαθηματικὸ καὶ παιδαγωγὸ C. Gategno (2):

Ἀρχικὰ προβάλλονται στὴν ὀθόνη τρία μὴ συνευθειακὰ σταθερὰ σημεῖα. Σὲ λίγο παρουσιάζεται μιὰ μικρὴ μετακινούμενη περιφέρεια, ὥς ποὺ νὰ συναντηθεῖ μὲ ἕνα σημεῖο. Ἀρχίζει ἀμέσως μιὰ αἰώρηση γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτό, ἐνῶ τὸ κέντρο τῆς αἰωρούμενης περιφέρειας φαίνεται καθαρὰ νὰ γράφει δεύτερη περιφέρεια γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο ποὺ τὴ δεσμεύει. Ἐδῶ σταματᾶ ἡ προβολὴ γιὰ νὰ γίνει συζήτηση σχετικὰ μὲ ὅτι παρετηρήθη. Δὲν εἶναι δύσκολο νὰ καταλήξουν οἱ μαθητὲς στὴν ἐπανεύρεση τοῦ συνόλου (Γ.Τ.) τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν ποὺ ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτίνα καὶ διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖο.

Στὴ συνέχεια τῆς προβολῆς ἡ αἰωρούμενη περιφέρεια ἀρχίζει νὰ διευρύνεται ὥς ποὺ νὰ ἐμπλακεῖ σὲ ἕνα δεύτερο σημεῖο, ὁπότε σταματᾶ ἡ αἰώρηση καὶ ἡ περιφέρεια ἀκινητεῖ γιὰ λίγο. Τὸ μόνο ποὺ τῆς εἶναι δυνατὸ εἶναι νὰ διερύνεται περνώντας σταθερὰ ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα ποὺ τὴν κρατοῦν. Ἡ προβολὴ διακόπτεται καὶ ἐπαναρχίζει ἡ συζήτηση. Εἶναι τώρα ἁπλούστατο

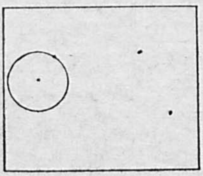
---

1) Στὸ τέλος παραθέτουμε ἕνα πίνακα ποὺ ἐπιτρέπει μιὰ κατατόπιση γιὰ τὴν προμήθεια μαθηματικῶν ταινιῶν.

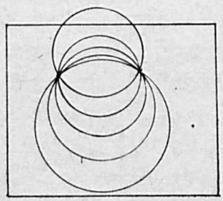
2) Βλ. «Le matériel pour l' enseignement des mathématiques», ed. Délachaux et Niestlé, Paris.

νὰ καταλήξουν οἱ μαθητές, κατάλληλα παρορμούμενοι ἀπὸ τὸν καθηγητή, στὴν ἐπανεύρεση τοῦ συνόλου (Γ.Τ.) τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν ποὺ διέρχονται ἀπὸ δύο σημεῖα ταυτίζοντάς το μὲ τὴ μεσοκάθετο τμήματος. Μπορεῖ μάλιστα νὰ ἀκολουθήσει ἡ ἀντίστοιχη κατασκευὴ στὸν πίνακα μὲ διαβήτη καὶ κανόνα.

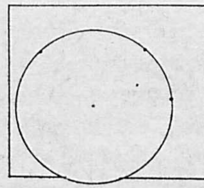
Ἡ προβολὴ συνεχίζεται. Ὁ μόνος δυνατὸς μετασχηματισμὸς ποὺ τῆς ἀπομένει, καθὼς δεσμεύεται ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα (ἀπὸ τὰ ὁποῖα διέρχονται ἄπειρες περιφέρειες) εἶναι νὰ διευρύνεται, αὐξάνοντας τὴν ἀκτίνα της, ὥς ποὺ νὰ περάσει ἀπὸ τὸ τρίτο σημεῖο. Ἀπὸ τὴ στιγμὴ αὐτὴ ἔχει τελείως δεσμευθεῖ. Δὲν ἠμπορεῖ πιὰ νὰ κινηθεῖ εἴτε αἰωρούμενη εἴτε διευρυνόμενη. Σὲ συνέχεια ἐμφανίζεται μιὰ δεύτερη περιφέρεια ποὺ ἀκολουθεῖ τὴν περιπέτεια τῆς πρώ-



Σχ. 3



Σχ. 4



Σχ. 5

της, ὥς ποὺ νὰ δεσμευθεῖ κι' αὐτὴ ὁριστικὰ ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα. Ἀκολουθεῖ γύρισμα τοῦ φίλμ ἀναδρομικά, ἀπὸ τὸ τέλος πρὸς τὴν ἀρχή. Ἡ δεύτερη αὐτὴ προβολὴ ἑδραιώνει τὰ συμπεράσματα ἀπὸ τὴν πρώτη. Τελικὸ συμπέρασμα : Ἀπὸ τρία σημεῖα μὴ συνευθειακὰ διέρχεται μία καὶ μόνη περιφέρεια.

Οἱ μαθηματικὲς ταινίες τοῦ J. M. Nicolet (1) εἶναι τελείως βωβὲς καὶ δὲν χρησιμοποιοῦν οὔτε γράμματα γιὰ νὰ ὑποδείξουν σημεῖα. Ἀποτελοῦν στ' ἀλήθεια μιὰ ἁπλῆ καὶ καθαρὴ διεθνῆ γλῶσσα ποὺ κάμνει τὴν ἀνθρώπινη σκέψη νὰ λειτουργεῖ πανανθρώπινα μὲ τὸν ἴδιο τρόπο. Πόσος οὑμανισμὸς δὲν κλείνεται, ἀλήθεια, χωρὶς ἰδεολογικὰ κηρύγματα καὶ φιλολογίες, μέσα στὴ μαγικὴ ὀμορφιὰ μιᾶς μαθηματικῆς κινηματογραφικῆς ταινίας!

Μετὰ ἀπὸ τὴν προβολὴ τῆς ταινίας καὶ τὴ συζήτηση εἶναι ἀνοικτὸς ὁ δρόμος στὸν καθηγητὴ γιὰ μιὰ διδασκαλία εὐχάριστη καὶ γόνιμη. Ἀρχίζει τὸ ἔργο τοῦ πίνακα, τοῦ τετραδίου, τοῦ διαβήτη, τοῦ κανόνα. Ἡ ἀπόδειξη θὰ ἀκολουθήσει τὴ βεβαιότητα ποὺ γέννησε ἡ ἐνόραση (γιὰ μεγαλύτερους μαθητές, ὥριμους γιὰ συλλογισμοὺς μαθηματικῆς παραγωγῆς).

«Ἔτσι», γράφει ὁ Nicolet στὴ σχετικὴ μελέτη του, (ἡ μαθηματικὴ διδασκαλία) «δὲν θᾶναι πιὰ ἕνα κομμένο λουλούδι ποὺ μαραίνεται, ἀλλὰ ἕνα φυτὸ ποὺ μεγαλώνει σὲ κατάλληλο κλῖμα καὶ σὲ εὐνοϊκὸ ἔδαφος.

» Ὁ παιδαγωγὸς ποὺ διαπιστώνει ὅτι ἡ λογικὴ σκέψη ἀναπτύσσεται στὸ μαθητὴ νοιώθει τὴ χαρὰ τοῦ κηπουροῦ ποὺ διαπιστώνει ὅτι ἕνα ἀδύνατο

---

1) Βλ. σχετικὴ μελέτη τοῦ Nicolet ὅ.π., σελ. 63.

φυτό, γιὰ τὸ ὁποῖο κατάβαλε πολλὲς φροντίδες, ἑτοιμάζεται νὰ ἀνθίσει καί, ἴσως, νὰ κάμει καρπούς».

***

Ἕνα μεταβαλλόμενο μοντέλο, κινηματογραφικὸ ἢ ὑλικό, μὲ κινητὰ καὶ σταθερὰ μέρη εἶναι πολύτιμο μέσο διδασκαλίας ὄχι μόνο σὲ μιὰ ἐνορατικὴ μύηση στὸν κατώτερο γυμνασιακὸ κύκλο. Εἶναι ἐπίσης πολύτιμος ὁδηγὸς ἱκανὸς νὰ ὑποβάλει καθαρὲς μαθηματικὲς ἀποδείξεις στὸν ἀνώτερο κύκλο, ἀκόμα καὶ στὴν πανεπιστημιακὴ στάθμη, ἢ νὰ κάμει συγκεκριμένες τὶς μαθηματικὲς ἀλήθειες, ποὺ ἔχουν προκύψει ἀπὸ θεωρητικὲς ἔρευνες καὶ ἀποδείξεις. Ἡ ἐφαρμοσμένη μηχανικὴ στὴν κατασκευὴ μηχανῶν εἶναι ὁ ἀψευδέστερος μάρτυρας.

Ἕνας ἄλλος διαπρεπὴς μαθηματικὸς καὶ παιδαγωγός, ὁ Βέλγος W. Servais γράφει :

«Τὰ νέα μοντέλα προσφέρονται στὶς ἀποδείξεις μὲ περισσότερη ἄνεση ἀπὸ τὰ συνηθισμένα σχήματα, ἐὰν συνδυάζουν κατάλληλα τὰ χρώματα, τὶς κινήσεις, τὴ σκιερότητα καὶ τὴ διαφάνεια, τὰ ἐπίπεδα σχήματα καὶ τὰ στερεά. Στὸ ἴδιο ζήτημα, ἡ σύγχρονη χρήση μοντέλων στατικῶν καὶ μοντέλων δυναμικῶν (ποὺ μεταβάλλονται) θὰ ἐπιτρέψει νὰ συμπληρώσουμε τὴν καθολικὴ θεώρηση τοῦ σταθεροῦ σχήματος μὲ τὴν ὑλοποίηση κινήσεων, τροχιῶν, μετασχηματισμῶν...».

Ἀκόμη καὶ τὰ πιὸ ἀφηρημένα, τὰ πιὸ καθαρὰ μαθηματικά, χρησιμοποιοῦν στὴν ἀνάπτυξή τους μοντέλα. Παράδειγμα, ἡ ἀξιωματικὴ γεωμετρία τοῦ Hilbert χρησιμοποιεῖ γιὰ μοντέλο τὴ γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδη καὶ ἀντίστροφα ἡ ἴδια ἡ ἀξιωματικὴ γεωμετρία τοῦ Hilbert βρίσκει μιὰ ἀπεικόνιση, μιὰ πραγματοποίησή της στὴ στοιχειώδη γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδη.

Τὸ ἴδιο τὸ παιγνίδι τῶν σημάτων καὶ τῶν συμβόλων (1) ἀποτελεῖ ἕνα πραξιακὸ μοντέλο πολυσήμαντο. Μπορεῖ σὲ διάφορες περιπτώσεις νὰ ἀναφέρεται σὲ ζητήματα ἄλγεβρας, σὲ ζητήματα λογικῆς, γεωμετρίας, φυσικῆς. Στὴ μοντέρνα ἄλγεβρα π.χ. ἡ ἀφηρημένη σκέψη στηρίζεται σὲ συγκεκριμένα σήματα καὶ σύμβολα (μοντέλα) καὶ προχωρεῖ στὴ μαθηματικὴ ἔρευνα ἀδιαφορώντας γιὰ τὴν ἀρχικὴ σημασία τους.

Μὲ τὸ μοντέλο ἐπιδιώκομε τὴν παρακίνηση τῆς ἀντιληπτικῆς δραστηριότητας τοῦ μαθητῆ στὸ μέγιστο τῆς ἀποδοτικότητάς της. Ἀπὸ τὴ σκοπιὰ αὐτὴ τὸ μοντέλο δὲν εἶναι σπατάλη χρόνου.

Ὑπάρχουν μοντέλα ποὺ ἡ κατασκευή τους ἀπαιτεῖ τεχνικὴ ἀνώτερη ἀπὸ τὰ μέσα ποὺ μπορεῖ νὰ διαθέσει ὁ μαθητὴς ἢ ὁ καθηγητὴς (κινηματογραφικὰ φίλμ κτλ.). Ὑπάρχουν ὅμως καὶ μοντέλα ποὺ μπορεῖ νὰ κατασκευάσει ὁ μαθητής. Τὰ τελευταῖα αὐτὰ μοντέλα, ἰδίως τὰ μετασχηματιζόμενα, δί-

1) Συνήθως δὲν γίνεται διάκριση μεταξὺ σημάτων καὶ συμβόλων. Ὅμως στὸ βάθος ὑπάρχει διαφορά. Τὸ σῆμα εἶναι κάτι τὸ αὐθαίρετο ποὺ καθιερώθηκε μὲ συμφωνία, π.χ. τὸ σῆμα τῆς προσθέσεως, καὶ δὲν ἔχει καμιὰ μορφικὴ συγγένεια μὲ τὸ σημαινόμενο, μπορεῖ μάλιστα μὲ συμφωνία νὰ ἀντικατασταθεῖ μὲ ἄλλο σῆμα. Τὸ σύμβολο ἀπεναντίας ἔχει μορφικὴ σχέση μὲ τὸ συμβολιζόμενο, π.χ. τὰ σύμβολα τῆς ὁδικῆς κυκλοφορίας κλπ.

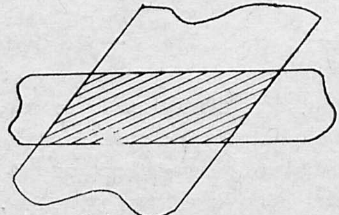
νουν στὸ μαθητὴ «τὴ χαρὰ τοῦ homo faber ποὺ γεννᾶ τὴν προσπάθεια καὶ τὴν ἐργασία, ἡ ὁποία ὁδηγεῖ στὸν homo sapiens» (Servais).

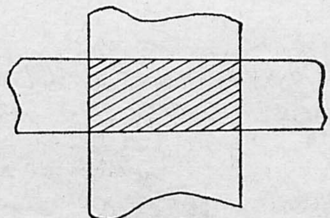
Στὰ παρακάτω ὑποδεικνύομε τὴν κατασκευὴ καὶ τὴ χρήση μερικῶν μοντέλων ἀπὸ τὰ πιὸ χρήσιμα.

***

1. ***Μοντέλα χαρτοκοπτικά.*** Τὰ μοντέλα τοῦ εἴδους αὐτοῦ εἶναι τὰ ἁπλούστερα καὶ προχειρότερα.

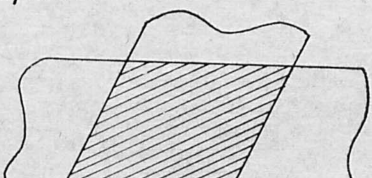
α) Δύο χάρτινες ταινίες μὲ διαφορετικὸ πλάτος διασταυρώνονται. Μιὰ θεώρηση τῆς διασταυρώσεως ἀντίκρυ στὸ φῶς δίνει ἕνα ὑλοποιημένο σκιερὸ παραλληλόγραμμο ἐὰν ἡ διασταύρωση εἶναι πλάγια, ἕνα ὑλοποιημένο ὀρθο-

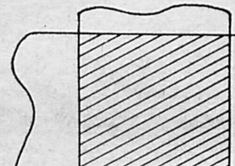

Σχ. 6


Σχ. 7

γώνιο, ἐὰν ἡ διασταύρωση εἶναι κάθετη.

Παρόμοιο μοντέλο μὲ ταινίες ἴσου πλάτους ὑλοποιεῖ τὸ ρόμβο καὶ τὸ τετράγωνο :


Σχ. 8


Σχ. 9

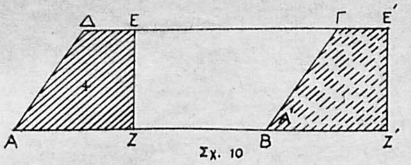
Στὸ ρόμβο καὶ στὸ παραλληλόγραμμο τὸ μοντέλο μετασχηματίζεται μὲ τὴ μεταβολὴ τῆς γωνίας τομῆς τῶν ταινιῶν.

Τὰ παραπάνω μοντέλα ὑλοποιοῦν παραστατικότατα τὸν ὁρισμὸ τῶν παραλληλογράμμων ὡς τομῆς δύο ταινιῶν (μὲ τὴν ἔννοια τῶν ταινιῶν ὡς σημειοσυνόλων).

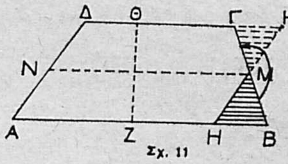
β) ***Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.*** Μὲ ἕνα ψαλίδισμα ΕΖ κάθετο πρὸς τὴν ταινία (ΑΒ, ΔΓ) (σχ.10) χωρίζομε τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ σὲ δύο ὀρθογώνια τραπέζια ΑΖΕΔ καὶ ΖΒΓΔ. Ὑποβάλλομε τὸ ΑΖΕΔ σὲ παράλληλη μετατόπιση κατὰ $\overrightarrow{AB}$. Ἔτσι τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται στὸ ὀρθογώνιο ΖΖ΄Ε΄Ε ποὺ εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ τὸ ΑΒΓΔ. Ἔχομε λοιπόν :

$$(ΑΒΓΔ) = (ΖΖ'Ε'Ε) = (ΖΖ')\ (ΖΕ) = (ΑΒ) \cdot (ΖΕ)$$

γ) *Ἐμβαδὸν τραπεζίου.* Μετασχηματίζεται σὲ παραλληλόγραμμο, ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσο Μ μιᾶς πλάγιας πλευρᾶς του φέρουμε τὴν ΜΗ // πρὸς τὴν ἄλλη πλάγια πλευρά του ΑΔ. Μὲ ἕνα ψαλίδισμα κατὰ τὴ ΜΗ ἀποτέμνομε τὸ τρίγωνο ΜΗΒ καὶ τὸ ὑποβάλλομε σὲ στροφὴ 180° κατὰ τὴν ὑποδεικνυόμενη στὸ



Σχ. 10



Σχ. 11

σχῆμα φορά. Ἔτσι τὸ τραπέζιο ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται στὸ ἰσεμβαδικό του παραλληλόγραμμο ΑΗΗ'Δ. Ἔχομε λοιπόν :

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΗΗ'Δ) = (ΑΗ)\ (ΖΘ) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ἀλλὰ}\ ΑΗ = ΑΒ - ΗΒ \\ ΔΗ' = ΑΗ = ΔΓ + ΓΗ'\end{array}\right\} \Longrightarrow 2\,ΑΗ = ΑΒ + ΔΓ \ (\text{διότι } ΓΗ' = ΗΒ)$$

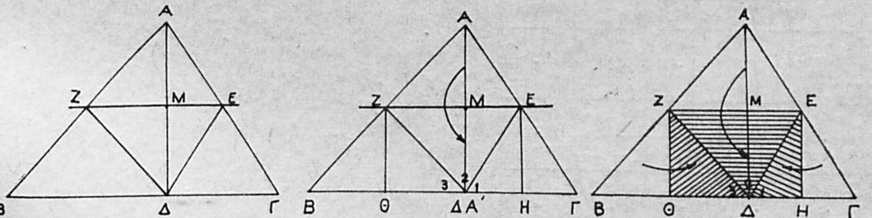
καὶ συνεπῶς $ΑΗ = \frac{1}{2}\ (ΑΒ + ΔΓ)$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}\ (ΑΒ + ΔΓ)\cdot(ΖΘ)$$

Ἀπὸ τὸν ἴδιο μετασχηματισμὸ προκύπτει καὶ ἡ ἰδιότης τῆς διαμέσου ΝΜ τοῦ τραπεζίου :

$$ΝΜ = ΑΗ = \frac{1}{2}\ (ΑΒ + ΔΓ)$$

δ) ***Χρήση συμμετριῶν στὸ τρίγωνο.*** Στὸ σκαληνὸ ὀξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, (σχ. Ι) ἀποκομμένο μὲ ψαλίδι, χαράσσομε τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐκτελοῦμε



Ι ΙΙ ΙΙΙ

μιὰ πρώτη δίπλωση ἐπάνω στὸν ἄξονα συμμετρίας του (μεσοκάθετο) ΖΕ. Τὸ τρίγωνο ΑΖΕ θὰ μετασχηματισθεῖ στὸ Α'ΖΕ (σχ. ΙΙ).

Στὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΖΒΔ καὶ ΕΔΓ ἐκτελοῦμε διπλώσεις ἐπάνω στοὺς ἄξονες συμμετρίας (ὕψη) τῶν βάσεών τους ΒΔ καὶ ΔΓ, ὁπότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΘΒΖ καὶ ΗΓΕ συμπίπτουν ἀντιστοίχως μὲ τὰ ἴσα τους ΘΔΖ καὶ ΗΔΕ (σχ. ΙΙΙ). Ἡ μελέτη τῶν γεωμετρικῶν καταστάσεων ποὺ παρουσιάζονται στοὺς μετασχηματισμοὺς αὐτοὺς ὁδηγεῖ στὰ ἀκόλουθα συμπεράσματα:

1ο Τὸ τμῆμα ΖΕ τοῦ ἄξονος συμμετρίας τοῦ ὕψους ΑΔ περνᾶ ἀπὸ τὰ μέσα Ζ καὶ Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι παράλληλο πρὸς τὴ βάση καὶ ἴσο μὲ τὸ μισό της (τὰ τρίγωνα ΖΒΔ καὶ ΕΔΓ εἶναι ἰσοσκελῆ).

2ο. Ἀπὸ τὶς τρεῖς διπλώσεις (σχ. ΙΙΙ) συμπεραίνεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιο ΘΗΕΖ ἔχει ἐμβαδὸ ἴσο μὲ τὸ μισὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ:

$$(\text{ΑΒΓ}) = 2\,(\text{ΘΗ})\cdot(\text{ΗΕ}) = 2\cdot\frac{1}{2}\,(\text{ΒΓ})\cdot\frac{1}{2}\,(\text{ΑΔ}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΒΓ})\,(\text{ΑΔ})$$ (ἐμβαδὸ τριγώνου).

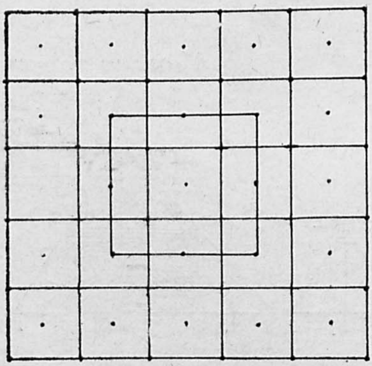
3ο Οἱ τρεῖς γωνίες τοῦ τριγώνου μετασχηματίζονται στὶς διαδοχικὲς παραπληρωματικές:

$$\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 + \widehat{\Delta}_3 = 2 \text{ ὀρθ.} \quad (\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Gamma},\ \widehat{\Delta}_2 = \widehat{\text{Α}},\ \widehat{\Delta}_3 = \widehat{\text{Β}})$$

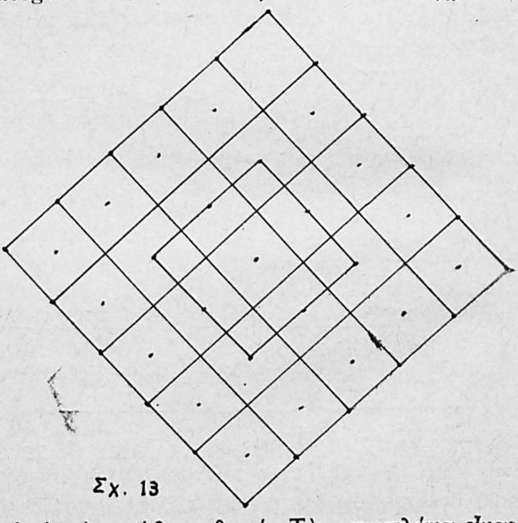
Τὸ ἴδιο πείραμα μπορεῖ νὰ γίνει καὶ σὲ ἀμβλυγώνιο τρίγωνο μὲ ἀνάλογες διπλώσεις.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω παραδείγματα φαίνεται ἡ χρησιμότητα τῶν χαρτοκοπτικῶν μοντέλων. Ἡ ἐφευρετικότητα τῶν μαθητῶν ὑποκινημένη κατάλληλα ἀπὸ τὸν καθηγητὴ μπορεῖ νὰ φθάσει σὲ πολύτιμα διδακτικὰ ἀποτελέσματα κατὰ τὴ διδασκαλία τῆς ἐνορατικῆς γεωμετρίας.

2. Τὰ γεωπλάνα (Géoplanes). Ἡ ἐπινόησή τους ὀφείλεται στὸ ἄγγλο μαθηματικὸ καὶ παιδαγωγὸ C. Gategno. Εἶναι μοντέλα γιὰ πολλαπλὴ χρήση



Σχ. 12



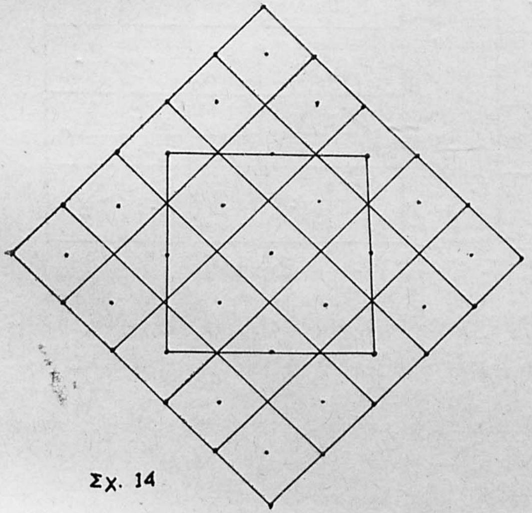
Σχ. 13

καὶ μποροῦν νὰ κατασκευασθοῦν ἀπὸ τὸν κάθε μαθητή. Τὰ γεωπλάνα εἶναι δύο εἰδῶν: τετραγωνικὰ καὶ κυκλικά.

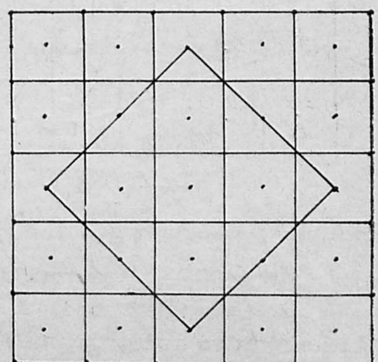
α) Τὰ τετραγωνικά: Σὲ ἕνα τετράγωνο τεμάχιο σανίδι (νοβοπὰν) $30 \times 30\ \text{cm}^2$ χαράσσομε $5 + 5 = 10$ ταινίες, διασταυρούμενες κάθετα, σὲ τρόπο ποὺ νὰ σχηματισθοῦν 25 τετράγωνα μὲ πλευρὰ 4–5 cm τὸ καθένα.

Στὸ κέντρο κάθε τετραγώνου μπαίνει ἕνα μικρὸ καρφί, ὥστε νὰ προεξέχει μερικὰ χιλιοστά.

Γιὰ τὴ χρησιμοποίηση τοῦ γεωπλάνου διαθέτομε ἐλαστικὰ νήματα κομμένα σὲ θηλιὲς (τὰ χρησιμοποιοῦν στὰ καταστήματα γιὰ τὰ δέματα). Ἂν μάλιστα εἶναι ἔγχρωμα, τόσο τὸ καλύτερο. Περιζώνοντας μὲ τὰ ἐλαστικὰ αὐτὰ ἕναν ἀριθμὸ καρφιὰ σχηματίζομε διάφορα εὐθύγραμμα σχήματα ποὺ μποροῦν νὰ μελετηθοῦν ἀκόμη καὶ ἀπὸ παιδιὰ τοῦ δημοτικοῦ. Νά γιὰ παράδειγμα μερικὲς στοιχειώδεις περιπτώσεις: Στὸ σχῆμα 12 τὸ ἐλαστικὸ περικλείνει ἕνα τετράγωνο. Σ' αὐτὸ συμφωνοῦν ὅλοι οἱ μαθητές. Ἐὰν ὅμως στρέψουμε τὸ γεωπλάνο κατὰ 45^0, σὲ τρόπο ποὺ μιὰ διαγώνιός του νὰ πάρει κατακόρυφη θέση, ὅπως στὸ παραπάνω σχῆμα 13, τὰ περισσότερα παιδιά, ἂν ὄχι ὅλα, θὰ δοῦν ρόμβο. Στὴν ἴδια πλάνη θὰ πέσουν τὰ παιδιά, ἂν τοὺς παρουσιάσομε τὸ τετράγωνο πρῶτα μὲ ὁριζόντιες καὶ κατακόρυφες πλευρὲς καὶ κατόπι μὲ μιὰ διαγώνιο κατακόρυφη. Ἀρχικὰ βλέπουν τετράγωνο (ἀριστερά), ὕστερα ὅμως ἀπὸ στροφὴ 45^0 βλέπουν ρόμβο (δεξιά) (σχ. 14 καὶ 15).



Σχ. 14



Σχ. 15

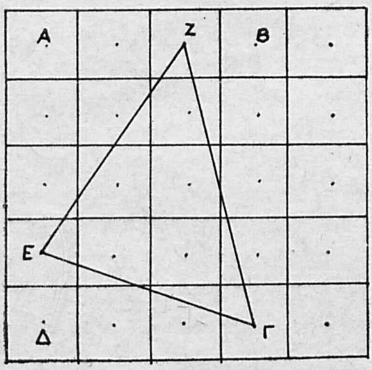
Ὁ καθηγητὴς παρουσιάζει στὰ παιδιὰ καὶ ἄλλα τετράγωνα σὲ διάφορες θέσεις τοῦ γεωπλάνου, ὥς ποὺ νὰ προσέξουν ὅτι ἡ ἀλλαγὴ τῆς θέσεως ἑνὸς σχήματος δὲν μεταβάλλει τὶς ἰδιότητές του. Αὐτὸ θὰ βοηθήσει τοὺς μαθητὲς νὰ δώσουν τοὺς σωστοὺς ὁρισμοὺς γιὰ τὸ κάθε σχῆμα. Εἶναι αὐτονόητο ὅτι οἱ τέτοιου εἴδους πλάνες τῶν μαθητῶν ὀφείλονται σὲ προγενέστερες ἀτελεῖς γνώσεις ὀφειλόμενες στὸ παρουσίασμα τῶν σχημάτων στατικὰ καὶ σὲ μόνιμο προσανατολισμὸ ὡς πρὸς τὸ ὀρθογώνιο τοῦ φύλλου σχεδιάσεως, τοῦ φύλλου τοῦ βιβλίου ἢ τοῦ μαυροπίνακα. Παρόμοιες ἀσκήσεις μποροῦν νὰ γίνουν καὶ σὲ τρίγωνα κάθε εἴδους (ἐκτὸς ἀπὸ τὰ ἰσόπλευρα).

Τὰ τετραγωνικὰ γεωπλάνα προσφέρονται γόνιμα στὴ σπουδὴ τῶν ἐμβαδῶν τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων καὶ μάλιστα σὲ ἀσκήσεις ποὺ καλλιεργοῦν τὴν παρατηρητικότητα καὶ τὴν ὀξύνοια τῶν μαθητῶν. Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἐμβαδοῦ π.χ. τοῦ τριγώνου ΕΓΖ, σχῆμα 16, ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ (ἐμβαδοῦ $3 \times 4 = 12\,\mathrm{cm}^2$) τὰ τρίγωνα ΕΔΓ, ΖΓΒ καὶ ΑΕΖ, ἤτοι : $\frac{1}{2} \times 3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 6{,}5\ \mathrm{cm}^2$. Ἑπομένως :

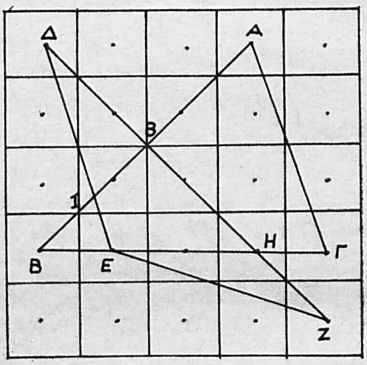
$$(\Gamma E Z) = (AB\Gamma\Delta) - [\,(E\Delta\Gamma) + (ZB\Gamma) + (AZE)\,]$$
$$= 12 - 6{,}5 = 5{,}5\ \mathrm{cm}^2$$

Ἄς ὑπολογίσουμε ἀκόμη τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΕΗΘΙ ποὺ εἶναι τομὴ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, σχ. 17.

Ἐπειδὴ ΔΕ // ΑΓ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΕΙ ποὺ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ



Σχ. 16



Σχ. 17

ΒΓΑ μὲ λόγο ὁμοιότητος 1 : 4 θὰ ἔχει λόγο πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ΑΒΓ 1 : 16· καὶ ἐπειδὴ $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6\ \mathrm{cm}^2$, θὰ εἶναι $(BEI) = \frac{1}{16} \times 6 = \frac{3}{8}\ \mathrm{cm}^2$.

Ἀφαιρώντας το ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο $(\Theta B H) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}\ \mathrm{cm}^2$, εὑρίσκομε :

$$(EH\Theta I) = (\Theta BH) - (BEI) = \frac{9}{4} - \frac{3}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}\ \mathrm{cm}^2.$$

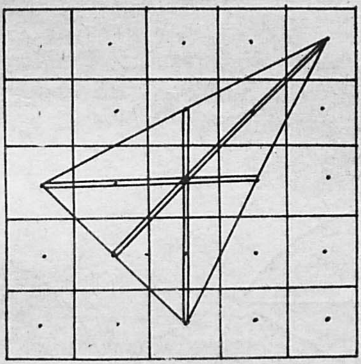
Μὲ τὸ ἴδιο γεωπλάνο μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε τὶς ταυτότητες :

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 \quad \text{καὶ} \quad (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Στὸ ἴδιο γεωπλάνο μὲ τὰ 25 καρφιὰ μποροῦμε νὰ δείξουμε τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου τμήματος, ἰδιότητες ὁμοθέτων καὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων κ.λ.π.

Ἐκεῖνο ὅμως ποὺ ἔχει σπουδαία διδακτικὴ σημασία στὴ χρήση τῶν γεωπλάνων εἶναι ἡ αὐτοσχέδια μελέτη τους ἀπὸ τὸ μικρὸ μαθητὴ καὶ ἡ προσπάθειά του νὰ δώσει μαθηματικὴ ἔκφραση στὶς παρουσιαζόμενες κάθε φορὰ γεωμετρικὲς καταστάσεις ἀπὸ τὴν τέτοια ἢ τέτοια τοποθέτηση τῶν ἐλαστικῶν γύρω στὰ καρφιὰ τοῦ γεωπλάνου (τετραγωνικοῦ ἢ κυκλικοῦ).

Ἀλλὰ καὶ στὶς μεγαλύτερες τάξεις μποροῦμε, γιὰ ἄσκηση, νὰ πραγματοποιήσουμε πάνω στὸ γεωπλάνο διάφορα γνωστὰ θεωρήματα σχετικὰ μὲ



Σχ. 18

τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ τρίγωνα κ.τ.λ. Νά, π.χ., στὸ παραπάνω σχῆμα ἡ ἰδιότητα τῶν τριῶν διαμέσων τριγώνου. Ὁ Gategno, σὲ μιὰ μελέτη του σχετικὰ μὲ τὰ γεωπλάνα, ἀναφέρει ὅτι ὑπάρχουν περισσότερες ἀπὸ ἑκατὸ ἐνδιαφέρουσες γεωμετρικὲς προτάσεις ποὺ μποροῦν νὰ μελετηθοῦν σὲ ἕνα γεωπλάνο μὲ 25 καρφιά [1]. Φυσικὰ μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε καὶ γεωπλάνα μὲ $6^2 = 36$ ἢ $7^2 = 49$ κτλ. καρφιά.

Στὴ γραφικὴ παράσταση τῶν ἀριθμητικῶν συναρτήσεων τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x + \beta$ μποροῦμε μὲ ἕνα γεωπλάνο 25 ἢ 36 καρφιῶν νὰ κάμουμε συγκεκριμένες τὶς εὐθεῖες $x = \alpha$, $\psi = \beta$, $\psi = x$, $\psi = \alpha x$, $\psi = \alpha x + \beta$ ἐκλέγοντας κατάλληλα τοὺς ὀρθογώνιους ἄξονες.

Σὲ μικρότερες τάξεις, ἀκόμη καὶ τοῦ δημοτικοῦ, μποροῦμε νὰ διδάξουμε τὰ κλάσματα περικλείοντας μὲ ἕνα ἐλαστικὸ ἕνα ὁποιοδήποτε ὀρθογώνιο καὶ πέρνοντας γιὰ κλασματικὴ μονάδα 1 cm^2.

Μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω δὲν ἐξαντλοῦνται βέβαια ὅλες οἱ δυνατότητες χρήσεως τοῦ τετραγωνικοῦ γεωπλάνου. Τὸ ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν, ὑποκινούμενο κατάλληλα ἀπὸ τὸν καθηγητή, μπορεῖ νὰ ὁδηγήσει καὶ σὲ ἄλλες γόνιμες περιπτώσεις χρήσεως τοῦ τετραγωνικοῦ γεωπλάνου.

Ἐξ ἴσου χρήσιμα γιὰ τὴ διδασκαλία τῆς γεωμετρίας τοῦ κύκλου εἶναι τὰ κυκλικὰ γεωπλάνα:

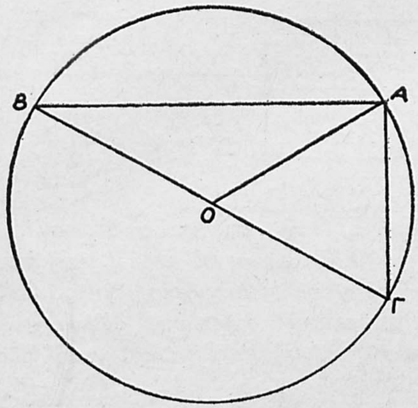
Χαράσσομε σὲ ἕνα τετραγωνικὸ τεμάχιο σανίδι (νοβοπὰν) μιὰ περιφέρεια, τὴ χωρίζομε σὲ 8 καὶ 16, ἢ 6 καὶ 12, ἢ 5 καὶ 10 κτλ. ἴσα μέρη, τοποθετοῦμε καρφιὰ στὰ σημεῖα διαιρέσεως καὶ ἔτσι ἔχομε στὴ διάθεσή μας διάφορα κυκλικὰ γεωπλάνα: γεωπλάνο μὲ 16 καρφιά, μὲ 12, μὲ 10 κ.λ.π.

1) C. Gategno : «L' emploi du géoplane individuel dans l' enseignement de la géométrie. Περιοδικὸ «Mathématica et Pedagogia» Revue de la Societé Belge de professeurs, de mathématiques, N. 19, 1960.

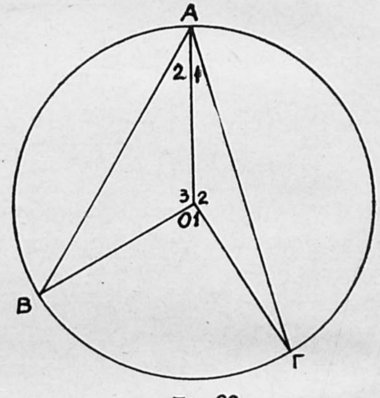
Μὲ ἕνα τέτοιο γεωπλάνο μποροῦμε νὰ μελετήσουμε τὶς κυριώτερες ἰδιότητες τοῦ κύκλου, π.χ. :

1ο. Χορδὲς κάθετες πρὸς διάμετρο διχοτομοῦνται ἀπὸ τὴ διάμετρο καὶ ἀποτέμνουν ἴσα τόξα.

2ο. Γωνία ἐγγεγραμμένη σὲ ἡμικύκλιο εἶναι ὀρθή ; (Συνδέοντας μὲ ἕνα ἐλαστικὸ τὴν κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου, χωρίζομε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ σὲ δύο ἰσοσκελῆ, στὰ ὁποῖα οἱ γωνίες τῶν δύο βάσεων ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθές. Ἑπομένως $\widehat{A} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 1$ ὀρθ.). Μεταθέτοντας τὴν



Σχ. 19



Σχ. 20

κορυφὴ Α στὰ διάφορα καρφιά, ἔχομε πάντα νὰ κάμουμε τοὺς ἴδιους συλλογισμούς, ἑπομένως . . .

Γιὰ τὶς ἐγγεγραμμένες γωνίες ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὸ ἴδιο τόξο ἢ σὲ ἴσα τόξα τροποποιοῦμε κατάλληλα τὴν παραπάνω γεωμετρικὴ κατάσταση, ὅπως φαίνεται στὸ παραπάνω σχ. 20.

Ἀπὸ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΓΑ καὶ ΟΓΒ ἔχουμε :

$$2\widehat{A}_1 + 2\widehat{A}_2 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 4 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐπίσης :

$$\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 4 \text{ ὀρθ.}$$

Ἑπομένως :

$$2(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2) + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 \Longrightarrow 2\widehat{A} = \widehat{O}_1 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{O}_1$$

Μετατοπίζοντας τὴν κορυφὴ Α στὰ διάφορα καρφιὰ θὰ ἔχουμε πάντα τὴν ἴδια σχέση ἐγγεγραμμένης καὶ ἐπίκεντρης ποὺ ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν ἐγγεγραμμένη σὲ ἡμικύκλιο (μισὴ ἀποπλατυσμένη).

Σὲ ἕνα γεωπλάνο κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι εὔκολο νὰ δείξουμε τὴ σχέση χρυσῆς τομῆς ἀνάμεσα στὴν πλευρὰ καὶ τὴ διαγώνιο τοῦ πενταγώνου (πλευρὰ τοῦ ἀστεροειδοῦς πενταγώνου) τοποθετώντας κατάλληλα τὰ ἐλαστικά, ὅπως φαίνεται στὸ παρακάτω σχ. 21. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΖΔ καὶ ΖΑΕ εἶναι εὔκολο νὰ βγεῖ ἡ ἀναλογία :

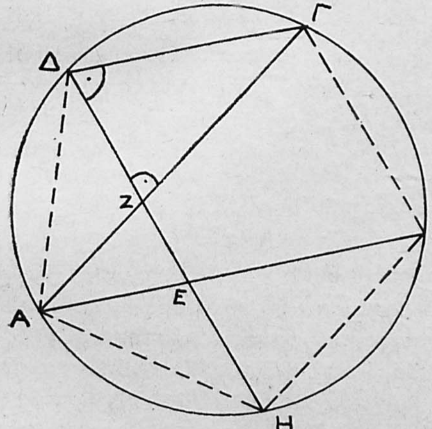
$$\frac{Z\Gamma}{ZA}=\frac{Z\Delta}{ZE}$$

καὶ ἀπὸ αὐτὴ (προσθέτοντας εἰς τοὺς ἑπομένους τοὺς ἡγουμένους) ἡ :

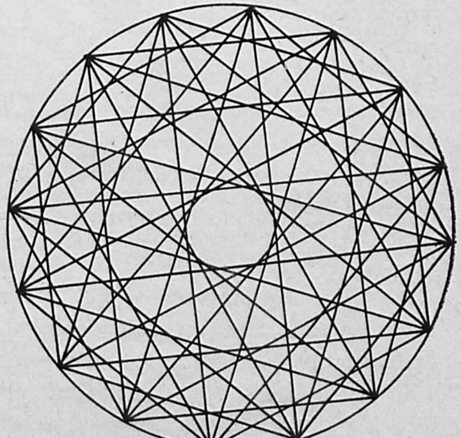
$$\frac{Z\Gamma}{A\Gamma}=\frac{Z\Delta}{\Delta E} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\lambda_5}{\delta_5}=\frac{\delta_5-\lambda_5}{\lambda_5}$$

(ὅπου λ_5 πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου καὶ δ_5 διαγώνιός του).

Στὸ ἴδιο πενταγωνικὸ γεωπλάνο ἂς ὀνομάσουμε A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 τὶς διαδοχικὲς κορυφές του καὶ ἂς τὶς συνδέσουμε μὲ νῆμα κατὰ τὴ σειρὰ A_1, A_3, A_5, A_2, A_4, A_1. Ἐπιτυγχάνουμε τὸ ἀστεροειδὲς κανονικὸ πεντάγωνο.



Σχ. 21



Σχ. 22

«Σὲ ἕνα κανονικὸ δεκαεξάγωνο μποροῦμε νὰ ἐγγράψουμε τρία κανονικὰ ἀστεροειδῆ δεκαεξάγωνα συνδέοντας κάθε κορυφὴ μὲ τὴν 3η ἑπομένη της, ἢ τὴν 5η ἢ τὴν 7η, ὅπως φαίνεται στὸ παραπάνω σχ. 22. Ἂν μάλιστα τὰ διάφορα νήματα εἶναι χρωματιστά, τὸ παρουσιαζόμενο σχῆμα εἶναι ἰδιαίτερα ἐνδιαφέρον γιὰ τὸν μαθητή. Τὸ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 3, 5, 7 εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν 16 δίνει τὸν κανόνα κατασκευῆς ἀστεροειδῶν κανονικῶν δεκαεξαγώνων μὲ συνεχῆ μὴ κυρτὴ πολυγωνικὴ γραμμή. Πάνω σ' αὐτὸ εἶναι εὔκολο πιὰ γιὰ τὸ μαθητὴ νὰ βρεῖ ὅτι στὸ κανονικὸ ὀκτάγωνο ἐγγράφεται ἕνα μόνο ἀστεροειδές, στὸ δεκάγωνο, ἐπίσης ἕνα, στὸ δωδεκάγωνο ἕνα κτλ. Στὸ κανονικὸ ἑξάγωνο δὲν ἐγγράφεται κανονικὸ ἀστεροειδές.

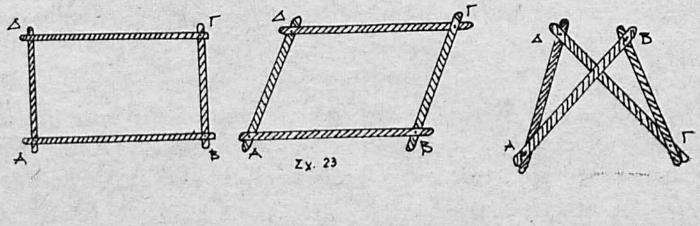
Ἐγγράφοντας σὲ ἕνα κυκλικὸ γεωπλάνο ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο εἶναι εὔκολο νὰ βροῦμε ὅτι δύο ἀπέναντι γωνίες του εἶναι παραπληρωματικές. Αὐτὸ συμβαίνει σὲ κάθε ἐγγεγραμμένο κυρτὸ τετράπλευρο. Οἱ ἐλαστικοὶ δεσμοὶ γύρω ἀπὸ τέσσαρα τυχόντα καρφιὰ τοῦ γεωπλάνου, μὲ πολλὲς ἀλλαγές, ὁδηγοῦν στὴ βεβαιότητα γιὰ τὴν ἀλήθεια τῆς προτάσεως, φθάνει κάθε φορὰ νὰ περνᾶμε ἕνα ἐλαστικὸ δεσμὸ γύρω ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφὲς τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου καὶ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ γεωπλάνου. Ἂν τὸ ἐγγεγραμμένο στὸ γεωπλάνο τετράπλευρο εἶναι διασταυρούμενο μὴ κυρτό, οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἴσες.

Τὴ χρήση τοῦ γεωπλάνου γιὰ τὴν ἐπανεύρεση μιᾶς μαθηματικῆς ἀλήθειας εἶναι ἀπαραίτητο νὰ ἀκολουθεῖ ἡ σχεδίαση, στὸν πίνακα (καὶ στὰ τετράδια) τῆς σχετικῆς γεωμετρικῆς καταστάσεως καὶ ἡ μελέτη της κατὰ τρόπο ποὺ νὰ ἀνοίγει τοὺς δρόμους γιὰ τὴν εἴσοδο τῆς λογικῆς στὴν ἐπεξεργασία τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας καὶ τὴν ἐκκόλαψη τῆς τυπικῆς μαθηματικῆς παραγωγῆς ποὺ εἶναι ὁ ἀπώτερος σκοπός μας. Ἔτσι στὸ παραπάνω παράδειγμα τοῦ τετραπλεύρου (κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ) θὰ πρέπει, κατὰ τὴν ἐπεξεργασία στὸν πίνακα καὶ στὸ τετράδιο, νὰ τεθεῖ καὶ τὸ ἐρώτημα, ἂν ἡ σχετικὴ ἰδιότητα ποὺ ἀνακαλύφθηκε στὸ γεωπλάνο καὶ μελετήθηκε στὸν πίνακα εἶναι χαρακτηριστική, καὶ γιατί· ἂν δηλαδὴ ἰσχύει καὶ ἡ ἀντιστροφὴ τῆς προτάσεως. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ ἡ ἀντιληπτικὴ ἐνέργεια μετουσιώνεται σὲ πνευματικὴ ἐνέργεια, ἡ παρατήρηση καὶ ἡ ἐμπειρία γίνεται γόνιμη γνώση, ἱκανὴ νὰ δημιουργήσει καὶ νὰ μελετήσει νέες γεωμετρικὲς καταστάσεις καὶ ἀκόμη νὰ μαθηματικοποιήσει καταστάσεις ποὺ ὑπάρχουν στὴν πραγματικότητα στατικὰ ἢ δυναμικά.

3. *Ἀρθρωτὰ μοντέλα*

Τὰ μοντέλα τοῦ εἴδους αὐτοῦ ἀποτελοῦνται ἀπὸ μεταλλικὲς λάμες (στὶς ἀγορὲς τῶν παιδικῶν παιγνιδιῶν ἔχουν τὸ ξενικὸ ὄνομα μεκανὸ) ποὺ ἀρθρώνονται κατὰ διάφορα μεγέθη καὶ διάφορους τρόπους, ὥστε νὰ συγκροτοῦνται διάφορα σχήματα (στὸ ἐπίπεδο ἢ στὸ χῶρο). Μὲ τὶς λάμες αὐτὲς μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ἀρθρωτὰ τρίγωνα καὶ πολύγωνα κάθε εἴδους καὶ νὰ μελετήσουμε τὶς ἰδιότητές τους μὲ κατάλληλους μετασχηματισμούς. Γιὰ τὰ γνωρίσματα π.χ ἰσότητος τριγώνων, ἡ πρώτη παρατήρηση τῶν μαθητῶν εἶναι ὅτι τὸ τρίγωνο δὲν κατασκευάζεται μὲ τρεῖς ὁποιεσδήποτε λάμες. Ὑπάρχουν περιπτώσεις ποὺ ἡ κατασκευή του εἶναι ἀδύνατη. Ἔπειτα τὸ ἀρθρωτὸ τρίγωνο εἶναι σταθερό, ἀμετάβλητο, ἀντίθετα μὲ τὸ ἀρθρωτὸ τετράπλευρο. Γιὰ πρῶτο γνώρισμα ἰσότητας δύο τριγώνων θὰ βροῦν τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν τους μία πρὸς μία. Ἂν ἐπιστήσουμε τὴν προσοχή τους καὶ στὶς γωνίες, δὲν θἆναι δύσκολο νὰ βροῦν καὶ τὰ ἄλλα δύο γνωρίσματα.

Μὲ δύο ζεύγη ἀπὸ ἴσες τὸ καθένα λάμες μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ἕνα ὀρθογώνιο μετασχηματιζόμενο σὲ παραλληλόγραμμο κυρτὸ ἢ μὴ κυρτὸ



Σχ. 23

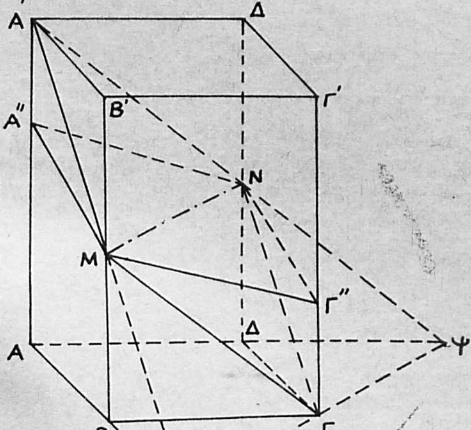
(διασταυρούμενο ἢ μή) καὶ νὰ μελετήσουμε τὶς ἰδιότητές του. Ὅμοια μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ἀρθρωτὸ τετράγωνο μετασχηματιζόμενο σὲ ρόμβο. Γιὰ νὰ μελετήσουμε τὶς ἰδιότητες τῶν διαγωνίων χρησιμοποιοῦμε ἐλαστικοὺς δεσμοὺς μὲ σημειωμένα τὰ μέσα τους (π.χ. μὲ δύο χρωματιστὰ τεμάχια νῆμα σημαδεμένα στὸ μέσον κάθε διαγωνίου. Κατὰ τὸ μετασχηματισμὸ τὰ δύο σημάδια συμπίπτουν). Μποροῦμε ἐπίσης νὰ κατασκευάσουμε ρομβοειδῆ κυρτὰ καὶ μὴ κυρτὰ καὶ νὰ μελετήσουμε τὶς ἰδιότητες τῶν διαγωνίων τους.

Τὰ ἴδια πειράματα μποροῦμε νὰ ἐκτελέσουμε μὲ ἐλαφρὲς βελόνες ἀπὸ ἀλουμίνο ἢ πλαστικὸ (τέτοιες χρησιμοποιοῦνται στὸ πλέξιμο) συνδέοντάς τες κατάλληλα μὲ πλαστισίνη.

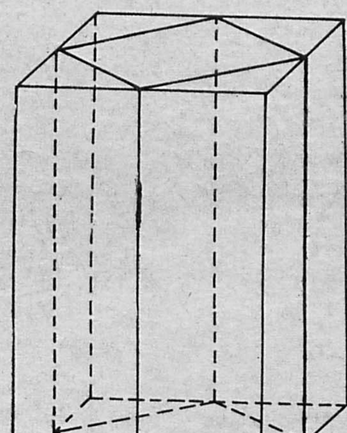
4. *Μοντέλα στερεομετρίας*

Μοντέλα στερεομετρίας ὑπάρχουν στὴν ἀγορὰ σὲ συλλογές, συνήθως ξύλινα. Κατασκευάζουν ἐπίσης οἱ μαθητὲς ἀπὸ καρτόνι. Τὸ μειονέκτημα ὅμως τῶν μοντέλων αὐτῶν εἶναι ὅτι δὲν φαίνεται τὸ ἐσωτερικό τους καὶ ἔτσι εἶναι ἀδύνατο νὰ φανοῦν οἱ διαγώνιες καὶ οἱ διάφορες τομές τους ἀπὸ ἐπίπεδα. Γι' αὐτὸ εἶναι προτιμότερα τὰ μεταλλικὰ μοντέλα μὲ ὑλοποιημένες μόνο τὶς ἀκμές τους (ὄχι βέβαια στερεὰ μὲ κυρτὲς ἐπιφάνειες).

Τὸ μεγαλύτερο ὄφελος ἀπὸ τὴ χρήση τέτοιων μοντέλων ἔγκειται στὸ ὅτι τὰ παιδιὰ συνηθίζουν νὰ «βλέπουν» τὰ ἐπίπεδα σχήματα καὶ στὸ χῶρο, ὅπου οἱ ἰδιότητές τους ἔχουν εἰδικὴ σημασία στὶς τεχνικὲς κατασκευὲς (π.χ. ἡ σταθερότητα τοῦ τριγώνου στὸ σκελετὸ μιᾶς στέγης κτλ.).



Σχ. 24



Σχ. 25

Στὰ παρακάτω θὰ περιγράψουμε μερικὰ μοντέλα τοῦ εἴδους αὐτοῦ ποὺ μποροῦν νὰ κατασκευασθοῦν ἀπὸ εἰδικὰ τεχνικὰ συνεργεῖα.

1. *Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ βάση τετράγωνο* (σχ. 24)

Στὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΒΒ′ καὶ ΔΔ′ ὑπάρχουν ἐγκοπὲς καθὼς καὶ στὰ σημεῖα Α″ καὶ Γ″ (ΑΑ″ = ΓΓ″) τῶν ΑΑ′ καὶ ΓΓ′. Μὲ νήματα ὑλοποιοῦμε μιὰ οἰκογένεια ἀπὸ ρόμβους στὸ χῶρο μὲ κοινὴ διαγώνιο τὴ ΜΝ. Δὲν πρέπει νὰ λησμονηθεῖ ἡ κάθετη τομὴ εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ἀκμῆς ΒΒ′. Ἀρχικὰ πρέπει νὰ προσεχθεῖ ὁ ρόμβος Α′ΜΓΝ. Εἶναι εὔκολο νὰ διαπιστωθεῖ ὅτι οἱ διαγώνιες ὅλων τῶν ρόμβων τέμνονται κάθετα καὶ νὰ εὑρεθεῖ ὁ ρόμβος τοῦ μεγίστου καὶ ὁ ρόμβος τοῦ ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ. Μετὰ τὴ μελέτη στὸ μοντέλο πρέπει νὰ ἀκολουθήσει ἡ σχεδίαση καὶ ἡ μελέτη στὸ ἐπίπεδο.

Ἡ εὐθεῖα ΧΨ εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ρόμβου Α′ΜΓΝ. Ἠμπορεῖ καὶ αὐτὴ νὰ ὑλοποιηθεῖ μὲ νήματα, ἂν τὸ παραλληλεπίπεδο στερεωθεῖ σὲ μιὰ πινακίδα.

2. *Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ βάση ὀρθογώνιο* (σχ. 25)

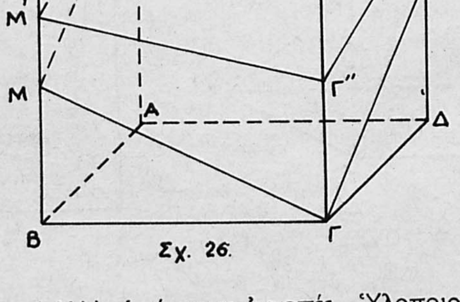
Στὸ ὀρθογώνιο αὐτὸ παραλληλεπίπεδο εἶναι ἐγγεγραμμένο ἕνα ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο μὲ βάση ρόμβο.

Στὸ δεύτερο αὐτὸ ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο ἐγγράφεται ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ νήματα, ὅμοιο μὲ τὸ πρῶτο κτλ.

Ἂν ἀρχικὰ εἴχαμε ὀρθὸ πρῖσμα μὲ βάση τυχὸν τετράπλευρο, θὰ μπορούσαμε νὰ τοῦ ἐγγράψουμε ὀρθὸ παραλληλεπίπεδο μὲ βάση παραλληλόγραμμο καὶ κορυφὲς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῶν δύο βάσεων τοῦ ἀρχικοῦ στερεοῦ.

3. *Κύβος* (σχ. 26)

Εἰς τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν ἀκμῶν ΒΒ′ καὶ ΔΔ′, καθὼς καὶ εἰς τὰ μέσα

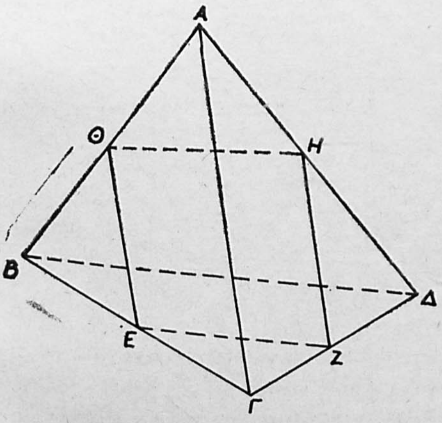


Σχ. 26.

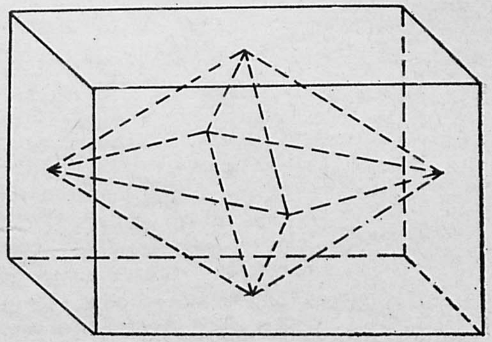
Μ′ καὶ Ν′ τῶν ΜΒ′ καὶ ΝΔ′, ὑπάρχουν ἐγκοπές. Ὑλοποιοῦμε μὲ νήματα τὰ τετράπλευρα Α′ΜΓΝ, Α′Μ′Γ″Ν′ καὶ προτείνομε στοὺς μαθητὲς νὰ τὰ μελετήσουν καὶ νὰ καθορίσουν τὸ εἶδος τους. Ἠμποροῦμε ἐπίσης νὰ ἐπεκτείνουμε τὶς κατασκευὲς στὸ ἴδιο στερεό.

4. *Τετράεδρο* (σχ. 27)

Σὲ ἕνα τετράεδρο μὲ δύο ἀπέναντι ἀκμὲς ἴσες (ΑΓ = ΒΔ) αἰσθητοποιοῦμε μὲ νῆμα τὸ τετράπλευρο ποὺ ἔχει κορυφὲς τὰ μέσα τῶν ἄλλων τεσσάρων ἀκμῶν, σημειωμένα μὲ ἐγκοπές. Τί εἴδους τετράπλερο εἶναι τὸ ΕΖΗΘ; Τί εἴδους τετράπλευρο εἶναι τὸ τετράπλευρο ποὺ ἔχει κορυφὲς τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΔ, ΑΓ, ΒΓ καὶ ΒΔ;



Σχ. 27


Σχ. 28

5. *Ὀκτάεδρο ἐγγεγραμμένο σὲ ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο μὲ βάσεις τετράγωνα* (σχ. 28)

Κορυφὲς τοῦ ἐγγεγραμμένου ὀκταέδρου εἶναι τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Περίπτωση ὀκταέδρου ἐγγεγραμμένου σὲ κύβο.

6. *Διάφορες οἰκογένειες ἐπιπέδων σχημάτων ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τομὲς κύβου*

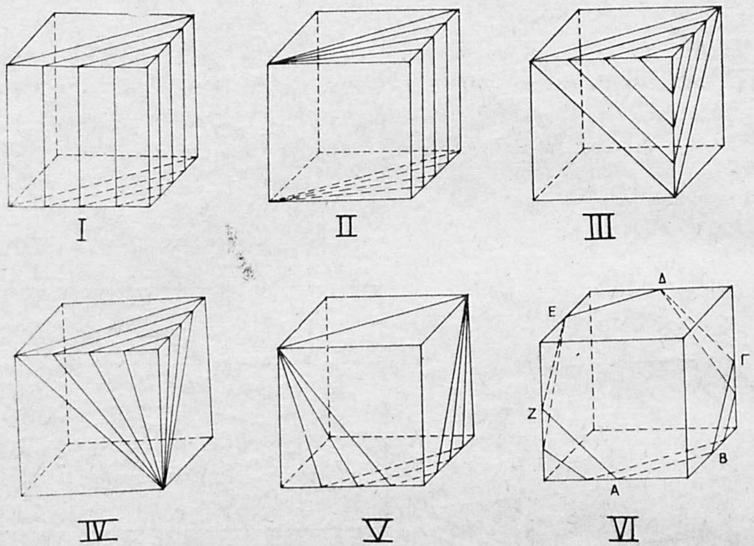
Σὲ ὅλους τοὺς παρακάτω κύβους ὑπάρχουν ἐγκοπὲς γιὰ νὰ ὑλοποιοῦνται μὲ νήματα οἱ σημειούμενες τομές:

α) Στὸν κύβο I ὑλοποιοῦνται ὀρθογώνια μὲ ἐμβαδὰ διπλασιαζόμενα πρὸς τὸ ἐσωτερικό.

β) Στὸν κύβο II ὑλοποιοῦμε μὲ νήματα μιὰ οἰκογένεια ἀπὸ ὀρθογώνια μὲ μιὰ πλευρὰ κοινή.

γ) Στὸν κύβο III ὑλοποιοῦμε μὲ νήματα μιὰ οἰκογένεια ὁμοθέτων ἰσοπλεύρων τριγώνων. Πῶς μεταβάλλονται τὰ ἐμβαδά των;

δ) Στὸν κύβο IV ὑλοποιοῦμε μιὰ οἰκογένεια ἰσοσκελῶν τριγώνων μὲ κοινὴ κορυφή. Ἐπίσης μιὰ οἰκογένεια πυραμίδων μὲ κοινὴ κορυφὴ καὶ κοινὸ ὕψος. Πῶς μεταβάλλονται τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών των, οἱ ὄγκοι των;



ε) Στὸν κύβο V ὑλοποιοῦμε μὲ νήματα μιὰ οἰκογένεια ἰσοσκελῆ - τραπέζια μὲ μιὰ κοινὴ βάση. Πῶς μεταβάλλονται οἱ μὴ κοινὲς βάσεις τους;

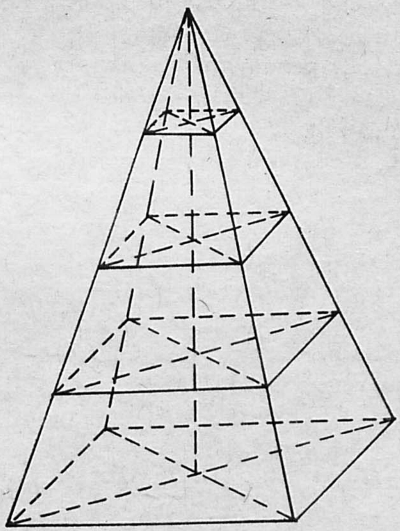
ϛ) Στὸν κύβο VI ὑλοποιοῦμε μὲ νήματα μιὰ τομὴ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ μιὰ ἄλλη μὴ κανονικοῦ.

7. ***Κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμίδα*** (σχ. 29)

Οἱ τομὲς ὑλοποιοῦνται μὲ νήματα ποὺ κρατοῦνται ἀπὸ τὶς ἀκμὲς μὲ ἐγκοπὲς στὰ σημεῖα ποὺ ὑποδεικνύονται στὸ σχῆμα. Μὲ νήματα ἐπίσης ὑλοποιοῦμε τὶς διαγώνιες τῶν τετραγώνων τομῶν. Στὶς παράπλευρες ἕδρες διακρίνονται ὁμόθετα ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Σύγκριση τῶν ἐπιφανειῶν τους, ἂν οἱ ἐγκοπὲς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν εἶναι σὲ ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις.

Ὅλα τὰ παραπάνω στερεὰ πρέπει, ἀπαραίτητα, νὰ σχεδιασθοῦν στὸ ἐπίπεδο καὶ νὰ ἀναγνωρισθοῦν στὸ σχῆμα οἱ ἰδιότητες ποὺ μελετήθηκαν στὸ μοντέλο.

Δυστυχῶς στὴν ἐκπαίδευσή μας δὲν ἔχει δοθεῖ ἡ πρέπουσα προσοχὴ στὴ διδασκαλία τοῦ σχεδίου, γραμμικοῦ καὶ ἐλεύθερου, οὔτε καὶ ὑπάρχει στὰ περισσότερα σχολεῖα μας εἰδικευμένος καθηγητής. Γι' αὐτὸ ὅλο τὸ βάρος καὶ ἡ εὐθύνη, ἰδίως γιὰ τὸ γραμμικὸ σχέδιο, πέφτει στὸν καθηγητὴ τῶν μαθηματικῶν. Αὐτὸς πρέπει νὰ διδάξει στὸ μαθητὴ πὼς νὰ ξύσει καὶ πῶς νὰ πιάσει τὸ μολύβι, πῶς νὰ χρησιμοποιήσει τὴ ρίγα, τὸ γνώμονα, τὸ διαβήτη, πῶς νὰ χαράξει γραμμές, νὰ ὁρίσει σημεῖα, τομὲς κ.λ.π. Καὶ εἶναι μιὰ δουλειὰ ποὺ πρέπει νὰ τὴν προσέξουμε πολύ. Κατὰ τὴ χάραξη π.χ. μιᾶς εὐθείας πρέπει τὸ μολύβι νὰ κρατιέται σὲ ὅλη τὴ διαδρομὴ τῆς χαράξεως σὲ σταθερὴ κλίση πρὸς τὸ ἐπίπεδο σχεδιάσεως καὶ τὸ ἐπίπεδο ποὺ σχηματίζει ὁ ἄξονάς του μὲ τὴ χαρασσόμενη γραμμή, νὰ εἶναι κάθετο πρὸς τὸ ἐπίπεδο σχεδιάσεως. Ἡ γραμμὴ νὰ χαράσσεται πρὸ τὸ δεξιὸ μέρος τῆς ρίγας (ἢ πρὸς τὸ ἐπάνω) καὶ



Σχ. 29

ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιὰ (ἢ ἀπὸ τὰ πάνω πρὸς τὰ κάτω) χωρὶς παλινδρομικὴ ἐπανάληψη. Ἔτσι, μὲ τὸ μολύβι καλὰ ξυσμένο, οἱ γραμμὲς χαράσσονται ἰσοπαχεῖς σὲ ὅλο τὸ μῆκος τους. Στὴν Α' κυρίως τάξη πρέπει νὰ ἐπιμένουμε πολὺ στὴ σχεδίαση σχημάτων. Ἀκόμη καὶ στὸν πίνακα νὰ χρησιμοποιοῦμε *πάντοτε* τὰ γεωμετρικὰ ὄργανα καί, τὰ διάφορα σχήματα, νὰ ἐπιμένομε νὰ σχεδιάζονται σὲ διάφορες σχετικὲς θέσεις ὡς πρὸς τὸ ὀρθογώνιο τοῦ πίνακα. Ἡ βάση π.χ. ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου νὰ μὴν εἶναι πάντοτε ὁριζόντια κτλ.

Μαθηματικὲς κινηματογραφικὲς ταινίες

I. Τοῦ J. L. Nicolet. (Ἡ παραγγελία πρέπει νὰ γίνει στὴν Ἀγγλία: The Mathematics Film Co, 225 High Street, Hampton Hill (Middlesex) Angleterre).

1. Cercle passant par 3 points.
2. Lieu des centres de cercles tangents à 2 cercles concentriques.
3. Lieu des centres de cercles tangents à un cercle donné et passant par son centre.
4. Le cercle comme lieu du sommet d'un angle de grandeur fixe et dont les côtés passent pas deux points fixes.
5. Arc capable d'un agle donné.
6. Propriété des bissectrices intérieurs d'un triangle.

7. Propriété des bissectrices extérieurs d' un triangle.
8. Proprieté des angles inscrits dans une circonférence.
9. Lieu des points de contact de tangentes de direction donné à des cercles égaux passant par un point fixe.
10. Construction du pentagone régulier.
11. La sexion d'or et le pendagon régulier.
12. Théorème d'Eudoxe (Triangles dont les côtés appartient à trois polygones régulier).
13. Lieu des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous un même angle.
14. Mouvement hypocycloïdal (cercles de rayon 1/2).
15. La section d'or et la strophoïde.
16. Pôles et polaires dans le cercle.
17. Génération de l'ellipse point par point, I.
18. Génération de l'ellipse point par point, II.
19. Génération d'une branche de l'hyperbole.
20. Génération de la parabole, I.
21. Génération de la parabole, II.
22. Génération commune des trois coniques.

Ὅλα τὰ παραπάνω φὶλμ διαρκοῦν ἀπὸ 2 ὣς 7 min.

II. Γαλλικὰ φὶλμς τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας :

1. Familles de droites et de paraboles (20 min.).
2. Polygones réguliers (20 min.).
3. Lieux géométriques (15 min.).

Τὰ δύο πρῶτα εἶναι βωβά, τὸ τρίτο σχολιασμένο ἀγγλικὰ καὶ γαλλικά.

III. Ἀμερικανικὰ φίλμ. Μποροῦν νὰ παραγγελθοῦν στὴ διεύθυνση : Office of Education, Washington D. C. Ἡν. Πολιτεῖαι.

1. The Stile Rule I (λογαριθμικὸς κανόνας, γιὰ πολ)σμὸ καὶ διαίρεση).
2. The Stile Rule II (λογαριθμικὸς κανόνας γιὰ ποσοστά, ἀναλογίες, τετραγωνικὲς ρίζες), διάρκεια 21 min., καὶ τὰ δύο μὲ σχόλια ἀγγλικά).

Ὅλα τὰ παραπάνω φὶλμ εἶναι τῶν 16 m.m.