ΣΧΕΣΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΩΝ LASPEYRES ΚΑΙ PAASCHE

Ὑπὸ τοῦ κ. Κ. ΚΩΝΣΤΑ

Σκοπὸς τοῦ παρόντος εἶναι ἡ στατιστικὴ ἐπεξεργασία τῆς σχέσεως ἡ ὁποία συνδέει τοὺς ὡς ἄνω δείκτας, τὸ πρῶτον μελετηθεῖσα ὑπὸ τοῦ A. Bowely (1941). Ἡ ἐπεξεργασία συνίσταται εἰς τὴν παρουσίασιν τῆς συνδυακυμάνσεως (covariance) μεταξὺ τῶν σχετικῶν μεταβολῶν εἰς τὰς τιμὰς καὶ τὰς ποσότητας, αἵτινες περιλαμβάνονται εἰς τοὺς δείκτας Laspeyres καὶ Paasche.

Ἡ διαφορὰ τῶν δεικτῶν τιμῶν Laspeyres καὶ Paasche δίδεται ὡς:

$$(1\alpha) \quad \ldots P_L - P_\rho = \frac{\Sigma \rho_1 q_0}{\Sigma \rho_0 q_0} - \frac{\Sigma \rho_1 q_1}{\Sigma \rho_0 q_1}$$

$$(1\beta) \quad \ldots\ldots\ldots = \frac{\Sigma \rho_1 q_0 \, \Sigma \rho_0 q_1 - \Sigma \rho_1 q_1 \, \Sigma \rho_0 q_0}{\Sigma \rho_0 q_0 \, \Sigma \rho_0 q_1}$$

Ἀπαλείφοντες τὸν παρονομαστὴν τῆς τελευταίας εὑρίσκομεν:

$$(1\gamma) \quad \ldots (P_L - P_\rho)\, \Sigma \rho_0 q_0 \, \Sigma \rho_0 q_1 = \Sigma \rho_1 q_0 \, \Sigma \rho_0 q_1 - \Sigma \rho_0 q_0 \, \Sigma \rho_1 q_1$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$(2\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \rho^i_1 = \rho^i_0 (1+\alpha^i)$$

$$(2\beta) \quad \ldots\ldots\ldots q^i_1 = q^i_0 (1+\beta^i)$$

ὅπου α^i καὶ β^i τὸ ποσοστὸν αὐξήσεως τῆς σχετικῆς τιμῆς καὶ ποσότητος ἀντιστοίχως τοῦ (i) ἀγαθοῦ εἰς τὸν ἀριθμοδείκτην διὰ τὴν περίοδον $t=1$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς ὡς ἄνω σχέσεις εἰς τὴν (1γ) λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned}(2) \quad \ldots (P_L - P_\rho)\, \Sigma \rho_0 q_0 \, \Sigma \rho_0 q_1 &= \Sigma \rho^1_0 q^1_0 (1+\alpha^i)\, \Sigma \rho^i_0 q^i_0 (1+\beta) - \\ &\quad - \Sigma \rho^i_0 q^i_0 (1+\alpha^i)(1+\beta^i) \\ &= \Sigma \rho^i_0 q^i_0 \alpha^i \, \Sigma \rho^i_0 \beta^i - \Sigma \rho^i_0 q^i_0 \, \Sigma \rho^i_0 q^i_0 \alpha^i \beta^i\end{aligned}$$

Ἡ σχέσις $\partial^i_0 = \rho^i_0 q^i_0$ δεικνύει τὴν δαπάνην προμηθείας τοῦ ἀγαθοῦ (i) ὅταν $t=0$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) διὰ $(\Sigma \partial^i_0)^2 = (\Sigma \rho^i_0 q^i_0)^2$ λαμβάνομεν:

$$(3) \quad (P_L - P_\rho)\, Q_L = \frac{\Sigma \vartheta^i_0 \alpha^i}{\Sigma \vartheta^i_0} \cdot \frac{\Sigma \partial^i_0 \beta^i}{\Sigma \partial^i_0} - \frac{\Sigma \vartheta^i \alpha^i \beta^i}{\Sigma \vartheta^i_0}$$

Διερεύνησις

Α΄. $\partial^1_0 = \partial^2_0 = \ldots = \partial^n_0 = \lambda$.

Τότε ἡ (3) γίνεται:

$$\begin{aligned}(4) \quad \ldots (P_L - P_\rho)\, Q_L &= \frac{\Sigma \lambda \alpha^i}{\Sigma \lambda} \cdot \frac{\Sigma \lambda \beta^i}{\Sigma \lambda} - \frac{\Sigma \lambda \alpha^i \beta^i}{\Sigma \lambda} \\ &= \frac{\lambda \Sigma \alpha^i}{\eta \lambda} \cdot \frac{\lambda \Sigma \beta^i}{\eta \lambda} - \frac{\lambda \Sigma \alpha^i \beta^i}{\eta \lambda}\end{aligned}$$

$$= \frac{\Sigma\alpha^i}{\eta} \cdot \frac{\Sigma\beta^i}{\eta} - \frac{\Sigma\alpha^i\beta^i}{\eta}$$

$$= -\frac{1}{\eta} \cdot \Sigma(\alpha^i - \bar{\alpha}) \cdot (\beta^i - \bar{\beta}) = -C_1$$

ὅπου $\bar{\alpha} = \frac{\Sigma\alpha^i}{\eta}$, $\bar{\beta} = \frac{\Sigma\beta^i}{\eta}$ καὶ C_1 ἡ ἀστάθμητος συνδιακύμανσις τῶν σχετικῶν τιμῶν καὶ ποσοτήτων. Διαιροῦντες διὰ τοῦ δείκτου ποσοτήτων Laspeyeis εὑρίσκομεν :

(4α) $\ldots P_L - P_\rho = -\frac{C_1}{Q_L}$

Ὁ δείκτης τῶν τιμῶν Laspeyres εἰς ὅρους Paasche, συνεπῶς γράφεται :

(4β) $\ldots \frac{P_L}{P_\rho} = 1 - \frac{C_1}{Q_L P_\rho}$

Ἐκ τῆς (4β) προκύπτει ὅτι ὁ λόγος τοῦ δείκτου Laspeyres πρὸς τὸν δείκτην Paasche θὰ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ἂν ἡ ἀστάθμητος συνδιακύμανσις (C_1) εἶναι ἀρνητική, δεδομένου ὅτι πάντοτε $Q_L > 0$. Ἂν συμβῇ ἡ συνδιακύμανσις νὰ εἶναι θετική, τότε ὁ λόγος τῶν δεικτῶν λαμβάνει τιμὴν μικροτέραν τῆς μονάδος.

Β΄. $\partial_0^1 \neq \partial_0^2 \neq \ldots \neq \partial_0^n$ καὶ $W_i = \frac{\partial_0^i}{\Sigma\partial_0^i} = \frac{\rho_0^i\, p_0^i}{\Sigma\rho_0^i\, q_0^i}$

ἡ δαπάνη τοῦ ἀγαθοῦ (i) ὑπὸ τὸν περιορισμὸν $\Sigma W_i = 1$. Τότε ἡ (3) γράφεται

(5) $\ldots (P_L - P_\rho)\, Q_L = (\Sigma W_i^i \alpha^i) - \Sigma W_i^i \beta^i - \Sigma W_i \alpha^i \beta^i$

$$= -\Sigma W_i^i (\alpha^i - \bar{\alpha})(\beta^i - \bar{\beta}) = -C_2$$

ὅπου $\bar{\alpha} = \Sigma W_i^i \alpha^i$ καὶ $\bar{\beta} = \Sigma W_i^i \beta^i$. Διαιροῦντες διὰ Q_L λαμβάνομεν :

(5α) $\ldots P_L - P_\rho = -\frac{C_2}{Q_L}$

(5β) $\ldots \frac{P_L}{P_\rho} = 1 - \frac{Q_2}{Q_L P_\rho}$

Αἱ σχέσεις (4β) καὶ (5β), συνεπῶς, δίδουν συμμετρικὰ ἀποτελέσματα διὰ συνδιακύμανσιν σταθμισμένην καὶ μή. Ἡ (Α΄), στηρίζεται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αἱ δαπάναι ἀγορᾶς ἀγαθῶν, περιλαμβανομένων εἰς τὸν ἀριθμοδείκτην, εἶναι αἱ αὐταὶ δι' ὅλα τὰ ἀγαθά, ἐνῷ εἰς τὴν (Β΄) ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ τροποποιεῖται, χωρὶς τοῦτο νὰ ὁδηγῇ εἰς διαφορετικὸν ἀποτέλεσμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

A. L. *Bolwey* : «Earnings and prices 1905, 1914, 1937 - 8», Review of Economic Studies, 1941.

R. G. D. *Allen* : Statistics for Economists, 1960.

Κ. Γ. *Δρακάτου* : «Ἡ Οἰκονομικὴ Ἑρμηνεία τῶν Τιμαρίθμων», Ἐπιθεώρησις Οἰκονομικῶν καὶ Πολιτικῶν Ἐπιστημῶν, Ἀθῆναι 1963.