ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΗΣ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΟΣ

Ὑπὸ τοῦ κ. ΙΩΑΝΝΟΥ Σ. ΚΑΒΑΣΙΛΑ

M.Sc. (Economics) τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Λονδίνου

§ 1. Εἰσαγωγὴ

Σκοπὸς τῆς παρούσης μελέτης εἶναι ἡ παρουσίασις τῶν μαθηματικῶν ὀργάνων, τὰ ὁποῖα συνήθως χρησιμοποιοῦνται εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας τῆς χρησιμότητος. Τὰ παρουσιαζόμενα θέματα, οὔτε ἐξαντλοῦν τὴν σχετικὴν ὕλην, οὔτε ἀποτελοῦν πλήρη θεωρητικὴν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν. Δύνανται ὅμως νὰ χρησιμεύσωσιν ὡς βοηθήματα κυρίως, διὰ τοὺς ἀσχολουμένους μὲ τὴν Οἰκονομικὴν ἀλλὰ μὴ μαθηματικούς. Περαιτέρω, ἡ ἀνάπτυξις τῶν βασικῶν ἐννοιῶν καὶ ἡ παρουσίασις τῶν μεθόδων, τῶν ἀπαραιτήτων διὰ τὴν μαθηματικὴν προσέγγισιν τῆς θεωρίας τῆς χρησιμότητος, ἐνταῦθα, δίδει τὸ πλεονέκτημα τῆς ἐξοικονομήσεως χρόνου εἰς ἐκεῖνον, ὅστις ἤθελεν ἀσχοληθῇ μὲ τὸ ἀντικείμενον τοῦτο.

Εἰς τὴν προσπάθειαν νὰ παραμείνῃ τὸ κείμενον ὅσον εἶναι δυνατὸν περισσότερον συνοπτικόν, δὲν δίδονται ἀποδείξεις δυνάμεναι νὰ ἀναζητηθῶσιν εἰς συνήθη μαθηματικὰ ἐγχειρίδια. Φυσικά, ἡ ἀναγκαία βιβλιογραφία δίδεται εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης, διὰ τοὺς ἐπιθυμοῦντας πληρεστέραν κατατόπισιν εἰς τὸν καθαρῶς μαθηματικὸν χῶρον.

Στοιχεῖα τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας τῆς χρησιμότητος παρέχονται διὰ συνδετικοὺς μόνον λόγους καὶ ἀναφέρονται, καθ' ὁλόκληρον τὴν πορείαν τῆς ἐργασίας, εἰς τὴν τακτικὴν χρησιμότητα (ordinal utility).

Ἡ ὅλη μελέτη διαιρεῖται εἰς τρία μέρη. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος δίδονται σημεῖα σταχυολογηθέντα ἐκ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ. Τὸ δεύτερον μέρος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐξαιρετικῶς συνοπτικὴν παρουσίασιν τῶν ὁριζουσῶν καὶ τῶν τετραγωνικῶν μορφῶν. Τέλος, εἰς τὸ τρίτον μέρος δίδεται ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰσοδυναμίας μεταξὺ τῆς μεθόδου ἀνευρέσεως τῆς μεγίστης χρησιμότητος, διὰ τῆς πορείας τῆς ἀπαλειφῆς (eliminating process) καὶ τῆς μεθόδου τοῦ ἀπροσδιορίστου πολλαπλασιαστοῦ τοῦ Lagrange.

Εὐχαριστίας διὰ ὑποδείξεις καὶ λεπτομερεῖς παρατηρήσεις ὀφείλομεν εἰς τοὺς Καθηγητὰς κ.κ. Κ. Ἀθανασιάδην καὶ Κ. Μπανταλούκαν καὶ εἰς τὸν Ὑφηγητὴν κ. S. A. Ozga τῆς London School of Economics. Ἰδιαιτέρως δέον νὰ εὐχαριστήσωμεν τοὺς καθηγητὰς κ.κ. Ἀ. Σίδεριν καὶ Π. Χριστοδουλόπουλον διὰ τὴν ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν καθοδήγησιν, ἥτις μᾶς παρέσχε τὴν δυνατότητα περαιτέρω ἐμπεδώσεως τῶν σπουδῶν μας.

ΜΕΡΟΣ Α'

ΘΕΜΑΤΑ ΕΚ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

§ 2. Ἡ ἀρχὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ

Ἡ ἀρχὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ παρουσιάζεται δι' ἁπλῶν παραδειγμάτων, εἰς τρόπον ὥστε νὰ καθίσταται εὐκόλως ἀντιληπτὴ ἡ ἐφαρμογὴ αὐτῆς εἰς τὴν θεωρίαν τῆς οἰκονομικῆς χρησιμότητος.

Ὁ ἁπλούστερος μετασχηματισμὸς εἶναι ὁ γνωστὸς λογαριθμικὸς μετασχηματισμός, ὅστις μεταφέρει τὰς μεταβλητὰς ἐκ τοῦ πεδίου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ πεδίον τῶν λογαριθμικῶν ἀριθμῶν καὶ χρησιμεύει εἰς τὴν ἁπλούστευσιν τῶν πράξεων. Ἕτερος μετασχηματισμός, γνωστὸς ἐκ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, εἶναι ὁ τῆς μεταβολῆς τῶν συντεταγμένων διὰ στροφῆς τῶν ἀξόνων περὶ τὴν ἀρχὴν αὐτῶν κατὰ μίαν δεδομένην γωνίαν θ. Ἡ σύνδεσις μεταξὺ τῶν παλαιῶν συντεταγμένων καὶ τῶν νέων δίδεται, διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν δύο διαστάσεων, ὑπὸ τῆς ἀκολούθου γραμμικῆς σχέσεως.

$$\begin{aligned} x &= x' \,\text{συν}\,\theta - y' \,\text{ημ}\,\theta \\ y &= x' \,\text{ημ}\,\theta + y' \,\text{συν}\,\theta \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἡ περίπτωσις τῶν πέραν τῶν δύο διαστάσεων (n) δίδεται κατ' ἀνάλογον τρόπον, ἔνθα συντελεσταὶ τῶν x', y', . . . , z', εἶναι τὰ συνημίτονα διευθύνσεως.

Περαιτέρω, παρουσιάζονται οἱ μετασχηματισμοὶ μιᾶς ἁπλουστέρας μορφῆς, οἱ ὁποῖοι εἶναι εὐρυτάτης χρήσεως εἰς τὴν μαθηματικῶς ἐπεξειργασμένην θεωρίαν τῆς χρησιμότητος. Πρόκειται περὶ τῶν μετασχηματισμῶν, γραμμικῶν ἢ μή, τοὺς ὁποίους δύναται νὰ ὑποστῇ τυχοῦσα συνάρτησις, ἄνευ μεταφορᾶς τῶν μεταβλητῶν ἀπὸ πεδίου εἰς πεδίον, ἢ μεταβολῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$U = f(x) \qquad (2)$$

ἔνθα ἐ.π., U εἶναι ὁ δείκτης χρησιμότητος, x ἡ ποσότης ἑνὸς ἀγαθοῦ καὶ f ὁ συμβολισμὸς τῆς συναρτησιακῆς σχέσεως τῆς ὑφισταμένης μεταξὺ U καὶ x. Ἡ γενικὴ μορφὴ μετασχηματισμοῦ τοῦ τύπου δίδεται ὑπὸ τῆς παραστάσεως

$$F(U) = F[\,f(x)\,] \qquad (3)$$

ἔνθα F μία νέα συνάρτησις ἔχουσα ὡς μεταβλητὴν τὴν $f(x)$.

Εἰς τὴν θεωρίαν τῆς χρησιμότητος ἐνδιαφερόμεθα εἰδικώτερον διὰ μονοτόνους μετασχηματισμούς. Ἡ συνθήκη αὕτη πληροῦται ὅταν ἡ παράγωγος τῆς $F(U)$ εἶναι θετική,

$$F'(U) > 0$$

καὶ $$F(U_0) < F(U_1) < \ldots..$$

ὁποτεδήποτε $$U_0 < U_1 < \ldots..$$

Ἡ συνθήκη $F'(U) > 0$ προκύπτει ὡς συνέπεια τῆς ὑποθέσεως ὅτι ἡ συνάρτησις τῆς χρησιμότητος εἶναι αὔξουσα.

Ὁ λογισμός, τοῦ διδομένου ὑπὸ τῶν σχέσεων (2) καὶ (3) μετασχηματισμοῦ, βασίζεται ἐπὶ τῶν κανόνων τῆς συναρτήσεως μιᾶς συναρτήσεως. Τηρουμένου τοῦ ὅρου τῆς μονοτόνου μεταβολῆς, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ἐπὶ πολυπλόκων συναρτήσεων, διὰ μετασχηματισμοῦ των κατὰ τὰ ἀνωτέρω. Ἐπίσης ἐντὸς τῶν πλαισίων τῶν ἐκτεθέντων κανόνων καὶ συνθηκῶν εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἡ μὴ ὕπαρξις μοναδικοῦ δείκτου τακτικῆς χρησιμότητος.

§ 3. Μερικὴ παραγώγισις — Διαφορικὰ — Παράγωγοι συνθέτων συναρτήσεων

(α) Τὸ πρόβλημα τῆς μερικῆς παραγωγίσεως ἐμφανίζεται εἰς τὰς περιπτώσεις, ὅπου μία συνάρτησις περιλαμβάνει περισσοτέρας τῆς μιᾶς μεταβλητάς. Ἡ μερικὴ παραγώγισις δίδει τὸν ρυθμὸν τῆς μεταβολῆς τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, ὅταν μεταβάλλεται μία μόνον ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ αἱ δὲ λοιπαὶ παραμένουν ἀμετάβλητοι. Ὁ συμβολισμὸς τῶν πράξεων τῆς μερικῆς παραγωγίσεως ἔχει ὡς ἀκολούθως :

Ἡ συνάρτησις $$z = f(x_1, x_2) \tag{4}$$

ἔχει δύο πρώτας μερικὰς παραγώγους :

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} \text{ ἢ } f_{x_1} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \text{ ἢ } f_{x_2} \tag{5}$$

δύο ἀμέσους δευτέρας μερικὰς παραγώγους :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} \text{ ἢ } f_{x_1 x_1} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \text{ ἢ } f_{x_2 x_2} \tag{6}$$

καὶ δύο ἐμμέσους δευτέρας μερικὰς παραγώγους ἴσας μεταξύ των :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ ἢ } f_{x_1 x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 x_1} \text{ ἢ } f_{x_2 x_1} \tag{7}$$

(β) Τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν συναρτήσεως δεικνύει τὴν μεταβολὴν τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς, διὰ ταυτόχρονον μεταβολὴν ὅλων τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Ἐκφράζεται διὰ τοῦ συμβόλου dz. Διὰ τὴν ἁπλουστέραν δυνατὴν μορφὴν – συναρτήσεως δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν – γράφεται ὡς κάτωθι

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} d\, x_1 + \frac{\partial z}{\partial x^2} dx_2 \tag{8}$$

Ἤτοι, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς ἑκάστης μεταβλητῆς, $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, ἐπὶ τὴν μεταβολήν της, dx_i. Εἰς τὴν περίπτωσιν (8) θεωροῦμεν ὅτι αἱ μεταβληταὶ x_1 καὶ x_2 εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των καὶ πρὸς πᾶσαν ἑτέραν μεταβλητήν.

(γ) Ἐὰν θεωρήσωμεν, ὅτι τὰ x_1 καὶ x_2 εἶναι συναρτήσεις τρίτης τινὸς μεταβλητῆς, ἃς εἴπωμεν τοῦ χρόνου, (t), τότε ἔχομεν:

$$x_1 = g(t) \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \varphi(t)$$

καὶ ἑπομένως $\quad dx_1 = g'(t)dt \quad$ καὶ $\quad dx_2 = \varphi'(t)dt$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (8) τὰ dx_1 καὶ dx_2 διὰ τῶν ἴσων των καὶ διαιροῦντες διὰ dt λαμβάνομεν

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} \tag{9}$$

δηλαδή, τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τῆς z ἐν σχέσει πρὸς τὸν χρόνον.

(δ) Ἐὰν τὸ x_2 εἶναι συνάρτησις τοῦ x_1, λ.χ. $x_2 = g(x_1)$ τότε ἡ σχέσις (8) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{dx_2}\frac{dx_2}{dx_1} \tag{10}$$

Ἡ τελευταία σχέσις εἶναι χρήσιμος εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν, μέσῳ τῆς συναρτήσεως τοῦ προϋπολογισμοῦ τοῦ καταναλωτοῦ, τὴν ποσότητα ἑνὸς ἀγαθοῦ συναρτήσει τῶν λοιπῶν ποσοτήτων. Εἰς τὴν ἑπομένην παράγραφον δίδεται ἓν παράδειγμα τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κανόνος εἰς τὴν ἁπλουστέραν δυνατὴν μορφὴν συναρτήσεως χρησιμότητος.

(ε) Τὸ δεύτερον διαφορικόν, συναρτήσεως δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν, ἐξάγεται εὐκόλως διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς σχέσεως (8). Οἱ ὑπολογισμοὶ ἔχουσιν οὕτω:

$$d(dz) = d\left(\frac{dz}{dx_1}d\,x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2\right)$$

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)dx_1 + d\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)dx_2$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_1}dx_2dx_1$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2}dx_2^2 \tag{11}$$

(στ) Ὅταν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ εἶναι συναρτήσεις τοῦ (t), ἤτοι $x_1 = g(t)$ καὶ $x_2 = \varphi(t)$, τότε τὰ dx_1 καὶ dx_2 δὲν εἶναι πλέον σταθεραὶ καὶ ἡ διαφόρισις γίνεται ὡς ἀκολούθως:

Ἐκκινοῦντες καὶ πάλιν ἐκ τῆς σχέσεως (8):

$$d(dz) = d\left[\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}d\,x_2\right]$$

ἀλλὰ μὲ δεύτερον στάδιον,

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2\right)$$

ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)d\,x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_1}d(dx_1) + d\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)d\,x_2 + \frac{\partial x}{\partial x_2}d(dx_2)$$

Ἤτοι

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \frac{\partial z}{\partial x_1}d^2x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}d^2x_2 \quad (12)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων $x_1 = y(t)$ καὶ $x_2 = \varphi(t)$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$d\,x_1 = g'(t)dt$		$d\,x_2 = \varphi'(t)dt$
$d^2x_1 = g''(t)dt^2$	καὶ	$d^2x_2 = \varphi''(t)dt^2$
$d\,x_1^2 = [g'(t)]^2dt^2$		$d\,x_2^2 = [\varphi'(t)]^2dt^2$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (12) καὶ διαιροῦντες διὰ dt^2 λαμβάνομεν τελικῶς τὴν παράστασιν

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{d^2x_2}{dt^2}, \quad (13)$$

ζ) Ὁμοίως διὰ τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ x_2 εἶναι συνάρτησις τοῦ x_1, λαμβάνομεν ἀρχικῶς μὲν τὴν σχέσιν

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}dx_1dx_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \frac{\partial z}{\partial x_2}d^2x_2 \quad (14)$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως, ὡς ἀνωτέρω, τὴν μορφὴν

$$\frac{d^2z}{dx_1^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{d^2x_2}{dx_1^2} \quad (15)$$

§ 4. Παρουσίασις ἁπλῆς συναρτήσεως χρησιμότητος

(α) Ἔστω, ὅτι ἔχομεν μίαν συνάρτησιν χρησιμότητος, ἡ ὁποία περιλαμβάνει δύο ἀγαθά, X_1 καὶ X_2

$$U = f(x_1, x_2) \tag{16}$$

ὑποκειμένην εἰς τὸν περιορισμὸν τοῦ προϋπολογισμοῦ τοῦ καταναλωτοῦ

$$I = p_1x_1 + p_2x_2 \tag{17}$$

ὅπου, I τὸ εἰσόδημα τοῦ καταναλωτοῦ, p_1 καὶ p_2 αἱ τιμαὶ τῶν δύο ἀγαθῶν καὶ x_1, x_2 αἱ ἀγοραζόμεναι ποσότητες ἐκ τῶν ἀγαθῶν X_1 καὶ X_2. Ἡ σχέσις (17) σημαίνει ὅτι, δοθέντος τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῶν τιμῶν τῆς ἀγορᾶς, ἡ ἐκλογὴ τοῦ καταναλωτοῦ περιορίζεται εἰς ἐκείνους τοὺς συνδυασμοὺς ποσοτήτων τῶν δύο ἀγαθῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἐπιτευκτοὶ ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας. Θεωρουμένης συνεχοῦς τῆς συναρτήσεως οἱ δυνατοὶ συνδυασμοὶ εἶναι ἄπειροι, ἕνας δὲ μόνον ὁ μεγιστοποιῶν τὴν ἱκανοποίησιν τοῦ καταναλωτοῦ.

Ἐκ τῆς σχέσεως (17) δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ x_2 συναρτήσει τῶν x_1, I καὶ τῶν τιμῶν

$$x_2 = \frac{I - p_1x_1}{p_2} \quad \text{ἢ} \quad x_2 = g(x_1) \tag{18}$$

καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ἀκολούθως διὰ τῶν σχέσεων (14) καὶ (15).

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (16) ἡ συνάρτησις τῆς χρησιμότητος λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$U = f\left(x_1, \frac{I - p_1x_1}{p_2}\right) \quad \text{ἢ} \quad U = f[x_1, g(x_1)] \tag{19}$$

(β) Σκοπὸς τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς ἱκανοποιήσεώς του διὰ τῶν ἀποκτωμένων ἀγαθῶν. Χρησιμοποιοῦντες τὴν σχέσιν (19) καὶ τὰς βασικὰς ἀρχὰς μεγίστων καὶ ἐλαχίστων ἐκ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἔχομεν

$$\frac{dU}{dx_1} = 0 \tag{20}$$

καὶ

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} < 0 \tag{21}$$

Ἡ σχέσις (20) καλεῖται συνθήκη ἰσορροπίας καὶ ἡ (21) συνθήκη σταθερότητος. Χρησιμοποιοῦντες τὴν σχέσιν (10) λαμβάνομεν

$$\frac{dU}{dx_1} = f_{x_1} + f_{x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0 .$$

ἐκ τῆς (18) εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{p_1}{p_2} \qquad (22)$$

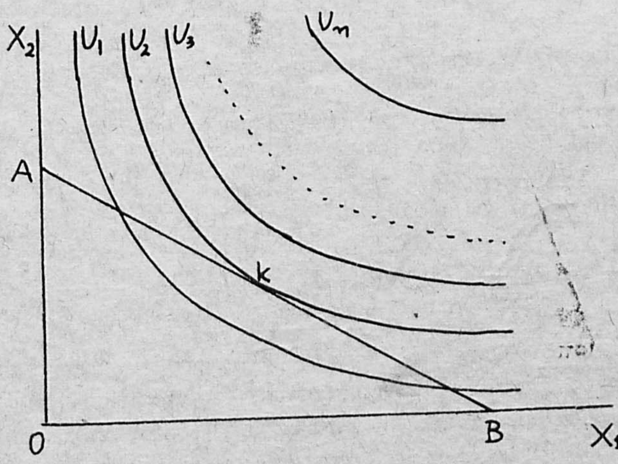
οὕτω

$$\frac{dU}{dx_1} = fx_1 + fx_2 \left(- \frac{p_1}{p_2} \right) = 0$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{fx_1}{fx_2} = \frac{p_1}{p_2} = - \frac{dx_2}{dx_1} \qquad (23)$$

Δηλαδὴ ὁ καταναλωτὴς ἐπιτυγχάνει τὴν μεγίστην ἱκανοποίησιν, δοθέντος τοῦ εἰσοδήματος καὶ τῶν τιμῶν, εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο, ὅπου ὁ λόγος τῶν ρυθμῶν μεταβολῆς τῆς χρησιμότητος διὰ μεταβολὰς τῶν ποσοτήτων x_1 καὶ x_2, ἐξισοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν τιμῶν p_1 καὶ p_2. Ἡ ἀρχὴ αὕτη καθίσταται ἀμέσως ἀντιληπτὴ διὰ τῆς ἁπλῆς γεωμετρικῆς ἀπεικονίσεως ἡ ὁποία δί-



Σχῆμα 1

δεται εἰς τὸ σχῆμα 1. Αἱ ποσότητες τῶν ἀγαθῶν x_1, x_2 παρουσιάζονται ἐπὶ τῶν ἀξόνων X_1, X_2. Αἱ U_1, U_2, U_3, . . . , U_n εἶναι αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας τοῦ καταναλωτοῦ εἰς διάφορα ἐπίπεδα ἱκανοποιήσεως. Τέλος, ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἐκφράζει, ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τῆς κλίσεώς της τὴν μεταξὺ τῶν δύο ἀγαθῶν σχετικὴν τιμήν, ἀφ' ἑτέρου δέ, διὰ τῆς θέσεώς της τὸ ὕψος τοῦ εἰς τὴν διάθεσιν τοῦ καταναλωτοῦ εἰσοδήματος.

Ὁ καταναλωτὴς δύναται νὰ ἀγοράσῃ συνδυασμοὺς ἀγαθῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν συντεταγμένας ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἢ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΟΒ. Ὑποτιθεμένου, ὅτι οὗτος θὰ δαπανήσῃ ὁλόκληρον τὸ εἰς τὴν διάθεσίν του εἰσόδημα, αἱ δυναταὶ ἀγοραί του ἐκφράζονται ὑπὸ τῶν σημείων τῆς ΑΒ.

Ἑκάστη καμπύλη ἀδιαφορίας ἐκφράζει τὸν γεωμετρικὸν τόπον σημείων ἴσης ἱκανοποιήσεως (χρησιμότητος). Σημεῖα κείμενα δεξιὰ τῆς καμπύλης ἀντιστοιχοῦν εἰς συνδυασμοὺς μεγαλυτέρας χρησιμότητος, ἐνῷ σημεῖα κείμενα ἀριστερὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς συνδυασμοὺς μικροτέρας χρησιμότητος.

Ὑπὸ τὰς δεδομένας, διὰ τοῦ σχήματος 1, συνθήκας εἰσοδήματος (θέσις τῆς AB) καὶ σχετικῶν τιμῶν (κλίσις τῆς AB), ὁ συνδυασμὸς μεγίστης χρησιμότητος διὰ τὸν ἀγοραστὴν δίδεται ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τοῦ σημίου k. Διότι πᾶν σημεῖον κείμενον δεξιὰ τῆς U_2 δὲν εἶναι ἐπιτευκτὸν ὡς κείμενον ἔξωθι τοῦ τριγώνου AOB, ἐνῷ πᾶν σημεῖον ἐπὶ τῆς AB, πλὴν τοῦ k, κεῖται ἀριστερὰ τῆς U_2 καὶ ἑπομένως ἐκφράζει συνδυασμὸν μικροτέρας χρησιμότητος.

Δηλαδὴ ἡ AB εἶναι ἐφαπτομένη τῆς U_2 εἰς τὸ σημεῖον k. Ἄρα διὰ τῆς κλίσεώς της ἐκφράζει καὶ τὴν σχετικὴν τιμὴν μεταξὺ τῶν X_1 καὶ X_2 καὶ τὴν κλίσιν τῆς καμπύλης U_2 εἰς τὸ σημεῖον k.

Ἤτοι, ὡς ἀνωτέρω εἰς τὴν (23),

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{dx_2}{dx_1}$$

Ἡ συνθήκη τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας δίδεται διὰ τῆς σχέσεως (15) ὡς αὕτη καθορίζεται ὑπὸ τῆς (21). Ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ $\frac{dx_2}{dx_1}$ διὰ τοῦ ἴσου του $-\frac{p_1}{p_2}$ λαμβάνομεν τελικῶς

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = f_{x_1x_1} + 2f_{x_1x_2}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) + f_{x_2x_2}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)^2 < 0 \qquad (24)$$

(γ) Χρησιμοποιοῦντες τὴν εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ἐκτεθεῖσαν μαθηματικὴν ἀνάλυσιν καὶ τὰς συνθήκας ἰσορροπίας καὶ σταθερότητος, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ καμπύλαι ἀδιαφορίας εἶναι κυρταὶ ὁρώμεναι ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων. Διὰ νὰ ἔχουν τὴν μορφὴν ταύτην πρέπει κατ᾽ ἀρχὴν ἡ κατεύθυνσίς των νὰ εἶναι ἐκ τῶν ἄνω δεξιὰ πρὸς τὰ κάτω ἀριστερὰ (ἀναγκαία συνθήκη). Τοῦτο ἐξασφαλίζεται ἐὰν $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$. Ἐκ τῆς σχέσεως (18), καὶ ἐπειδὴ $p_1, p_2 > 0$ προκύπτει εὐκόλως ὅτι

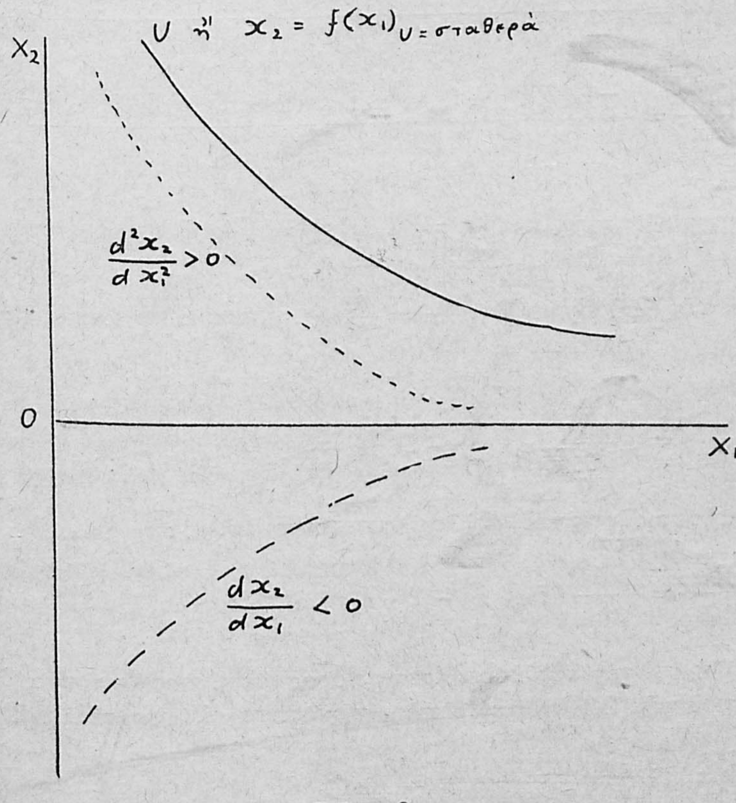
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2} < 0 \qquad (25)$$

Ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἁπλῶς ἀναγκαία διότι ἀρνητικὴν κλίσιν δύναται νὰ ἔχῃ καὶ μία εὐθεῖα γραμμὴ ἢ καμπύλη κυρτὴ ἐκ τῶν ἄνω ὁρωμένη. Διὰ νὰ μὴ ἔχῃ τὴν μορφὴν εὐθείας γραμμῆς πρέπει $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} \neq 0$ καὶ διὰ νὰ εἶναι κυρτὴ ὁρωμένη ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων πρέπει νὰ πληροῦται ἡ ἱκανὴ συνθήκη

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0 \qquad (25\alpha)$$

Εἰς τὸ σχῆμα 2, δίδεται ἡ καμπύλη ἀδιαφορίας U, ἢ $x_2=f(x_1)_{U=\sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{\alpha}}$, ἔχουσα $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$ καὶ $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0$. Εἶναι ἐμφανές, ὅτι πληρουμένων τῶν συνθηκῶν αὐτῶν, ἡ ἀρχικὴ καμπύλη δύναται νὰ εἶναι μόνον κυρτὴ ὁρωμένη ἐκ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων.

Ἀναλυτικῶς πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι πράγματι πληροῦνται αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι.



Σχῆμα 2

τέρω συνθῆκαι. Γνωρίζομεν ἤδη ἐκ τῆς (18) καὶ (25) ὅτι ἡ ἀναγκαία συνθήκη ἰσχύει διὰ τὴν ἐξεταζομένην συνάρτησιν χρησιμότητος. Θὰ ἐρευνήσωμεν τώρα κατὰ πόσον ἰσχύει καὶ ἡ ἱκανὴ (25α). Ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Λαμβάνοντες ἐκ τῆς σχέσεως (23) τὴν

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}}$$

καὶ διαφορίζοντες

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}=\frac{(-f_{x_1})'\,f_{x_2}-f'_{x_2}\,(-f_{x_1})}{f^2_{x_2}}$$

$$=\frac{-f_{x_1}f_{x_1}-f_{x_1x_2}\dfrac{dx_2}{dx_1}-\left[f_{x_2x_2}\dfrac{dx_2}{dx_1}(-f_{x_1})+f_{x_2x_1}(-f_{x_1})\right]}{f^2_{x_2}}$$

$$=\frac{-f_{x_1x_1}f_{x_2}-f_{x_1x_2}\dfrac{-f_{x_1}}{f_{x_2}}f_{x_2}-\left[f_{x_2x_2}\dfrac{-f_{x_1}}{f_{x_2}}(-f_{x_1})+f_{x_2x_1}(-f_{x_1})\right]}{f^2_{x_2}}$$

ἔχομεν $$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}=\frac{-f_{x_1x_1}f^2_{x_2}+f_{x_1x_2}f_{x_1}f_{x_2}-f_{x_2x_2}f^2_{x_1}+f_{x_2x_1}f_{x_1}f_{x_2}}{f^3_{x_2}}$$

ὅθεν $$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}=-\frac{1}{f^3_{x_2}}\left(f_{x_1x_1}f^2_{x_2}-2\,f_{x_1x_2}f_{x_1}f_{x_2}+f_{x_2x_2}f^2_{x_1}\right) \qquad (26)$$

Ἐκ τῆς (23) ἔχομεν ὅτι $f_{x_1}=\frac{p_1}{p_2}f_{x_2}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (26) λαμβάνομεν

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}=-\frac{1}{f^3_{x_2}}\left(f_{x_1x_1}f^2_{x_2}-2f_{x_1x_2}\frac{p_1}{p_2}f^2_{x_2}+f_{x_2x_2}\frac{p_1^2}{p_2^2}f^2_{x_2}\right)$$

Ἁπλοποιοῦντες καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ p_2^2:

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}=-\frac{1}{f_{x_2}}\left(f_{x_1x_1}p_2^2-2f_{x_1x_2}p_1\,p_2+f_{x_1x_2}p_1^2\right) \qquad (27)$$

Ἀλλὰ ἡ ἐντὸς τῆς παρενθέσεως παράστασις, προκύπτουσα διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς (24) ἐπὶ τὴν θετικὴν ποσότητα p_2^2, παραμένει ἀρνητική.

Ὅθεν $$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}>0.$$

§ 5. Ἡ τεχνικὴ τοῦ ἀπροσδιορίστου πολλαπλασιαστοῦ τοῦ LAGRANGE

Τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα, ὡς πρὸς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ μεγίστου τῆς συναρτήσεως χρησιμότητος, ἐπιτυγχάνονται καὶ διὰ τῆς τεχνικῆς τοῦ ἀπροσδιορίστου πολλαπλασιαστοῦ τοῦ Lagrange. Αὕτη ἔχει ὡς ἀκολούθως :

Ἔστω ὅτι ἐπιθυμοῦμεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν συνάρτησιν

$$z = f(x_1, x_2) \tag{28}$$

ὑποκειμένην εἰς τὸν γραμμικὸν περιορισμὸν

$$\alpha x_1 + \beta x_1 + \gamma = 0 \qquad \text{ἤ} \qquad \Phi(x_1, x_2) = 0 \tag{29}$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι

$$\max: \quad V = f(x_1, x_2) + \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma) \tag{30}$$

δίδει ἰσοδύναμον ἀποτέλεσμα μὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον θὰ ἐλαμβάνομεν ἐὰν μεγιστοποιούσαμεν τὴν (28) ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τῆς (29).

Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας ἀπαιτεῖ, ὅπως αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι μηδενίζονται δι' ἀμφότερα, μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, ἤτοι

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= f_{x_1} + \lambda \Phi_{x_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= f_{x_2} + \lambda \Phi_{x_2} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= \Phi(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις ἐξασφαλίζει τὴν ἱκανοποίησιν τοῦ περιορισμοῦ. Ἡ λύσις τοῦ συστήματος δίδει τὸ σημεῖον ἢ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ $f(x_1, x_2)$ ἐπιτυγχάνει μέγιστον (ἢ ἐλάχιστον), ὑπὸ τὸν περιορισμόν, ὅτι $\Phi(x_1, x_2) = 0$.

Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν

$$\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}} = \frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_{x_2}} \tag{32}$$

Ἀνατρέχοντες εἰς τὴν (17) καὶ θέτοντες ταύτην εἰς τὴν θέσιν τῆς (29), δηλαδὴ

$$\Phi = I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

ὁπότε

$$\Phi_{x_1} = -p_1 \qquad \text{καὶ} \qquad \Phi_{x_2} = -p_2$$

εὑρίσκομεν καὶ πάλιν τὰς αὐτὰς συνθήκας ἰσορροπίας ὅπως εἰς τὴν (23)

$$\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Ἡ συνθήκη σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας δίδεται ὑπὸ τῆς ὁριζούσης

$$\begin{vmatrix} V_{x_1x_1} & V_{x_1x_2} & \Phi_{x_1} \\ V_{x_2x_1} & V_{x_2x_2} & \Phi_{x_2} \\ \Phi_{x_1} & \Phi_{x_2} & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{33}$$

Ἐπὶ τοῦ σημείου αὐτοῦ θὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ Β′ μέρος, ὅπου θὰ ἴδωμεν τὸν τρόπον σχηματισμοῦ τῶν ὁριζουσῶν τοῦ τύπου αὐτοῦ καὶ εἰς τὸ Γ′ μέρος διὰ τὴν διερεύνησιν τῶν δύο μεθόδων.

§ 6. Παραγώγισις συναρτήσεως συναρτήσεως μὲ περισσοτέρας τῆς μιᾶς μεταβλητὰς

Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$F(z) = F\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

ἔνθα

$$z = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ πρώτη μερικὴ παράγωγος δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x_1} = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} = F' f_{x_1} \tag{34}$$

καὶ αἱ δύο δεύτεροι παράγωγοι (ἄμεσος καὶ ἔμμεσος) ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x_1^2} = F''\, f_{x_1}^2 + f_{x_1x_2}\, F'$$

καὶ

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x_1\, \partial x_2} = F'' f_{x_2}\, f_{x_1} + f_{x_1x_2}\, F' \tag{35}$$

Παράδειγμα :

$$z = 3x_1^2 + 2x_2^2$$

$$F(z) = 4(3x_1^2 + 2x_2^2)^2$$

Ἡ πρώτη μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς x_1 εἶναι :

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x_1} = F' f_{x_1} = 8(3x_1^1 + 2x_2^2)\,(6x_1) = 144x_1^3 + 96x_1x_3^2$$

Ἡ δευτέρα ἄμεσος μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς x_1 εἶναι :

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial x_1^2} = F''\, f_{x_1}^2 + f_{x_1x_2} F' = (8)\,(6x_1)^2 + (6)\,(24x_1^2 + 16x_2^2)$$

$$= 432\, x_1^2 + 96\, x_2^2$$

Τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα ἐπαληθεύονται θεωρητικῶς, ἐὰν ἀκολουθήσωμεν ὅλα τὰ στάδια, ἐφαρμόζοντες ταυτοχρόνως τοὺς κανόνας παραγωγίσεως συναρτήσεως συναρτήσεως, τοὺς κανόνας παραγωγίσεως γινομένων καὶ τοὺς κανόνας μερικῆς παραγωγίσεως. Δυνάμεθα, ἐπίσης νὰ πραγματοποιήσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὴν $F(z) = 4(3x_1^2 + 2x_2^2)^2$ καὶ νὰ ἐνεργήσωμεν τὴν μερικὴν παραγώγισιν κατὰ τὰ γνωστὰ εἰς τὰς μὴ συνθέτους συναρτήσεις. Ἀκολουθοῦντες τὴν δευτέραν ὁδὸν ἔχομεν

$$\psi = F(z) = 4\,(3x_1^2 + 2x_2^2)^2 = 36x_1^4 + 48x_1^2 x_2^2 + 16x_2^2$$

ὁπότε

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 144\, x_1^3 + 96\, x_1\, x_2^2$$

καὶ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} = 432\, x_1^2 + 96\, x_2^2$$

ὅπως ἀκριβῶς καὶ διὰ τῶν σχέσεων (34) καὶ (35).

§ 7. Αἱ ὁμογενεῖς συναρτήσεις καὶ τὸ θεώρημα τοῦ EULER

(α) Ὅταν, αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν συναρτήσεως εἰς σημεῖόν τι, αὐξάνουν ἢ ἐλαττοῦνται κατά τινα σταθερὸν λόγον, ἡ ἀντίστοιχος αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς συναρτήσεως δύναται νὰ εἶναι μεγαλυτέρου, ἴσου ἢ μικροτέρου λόγου.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ συνάρτησις αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται μονίμως κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον καθ' ὃν καὶ αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, ὁμιλοῦμεν περὶ ὁμογενοῦς συναρτήσεως πρώτου βαθμοῦ (εὐθύγραμμος ὁμογενής).

Γενικῶς μία συνάρτησις $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ καλεῖται ὁμογενὴς r βαθμοῦ ἐὰν

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{36}$$

διὰ οἱονδήποτε σημεῖον $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ καὶ οἱονδήποτε λ.

Ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ συνάρτησις παραμένει ἀμετάβλητος, ἀνεξαρτήτως οἱασδήποτε αὐξήσεως ἢ ἐλαττώσεως τῶν μεταβλητῶν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ τὴν μηδενικοῦ βαθμοῦ ὁμογενῆ συνάρτησιν.

Παραδείγματα:

Ὁμογενεῖς πρώτου βαθμοῦ:

$$z = \alpha x_1 + \beta x_2, \qquad z = \alpha x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \qquad z = \sqrt{\alpha x_1^2 + 2hx_1x_2 + \beta x_2^2}$$

Μηδενικοῦ βαθμοῦ:

$$z = \frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2}{\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2}$$

Δευτέρου βαθμοῦ:

$$z = \alpha x_1^2 + 2hx_1x_2 + \beta x_2^2 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

(β) Ἰδιότητες ὁμογενῶν συναρτήσεων πρώτου βαθμοῦ.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $z = f(x_1, x_2)$ εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ, τότε αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες ἰσχύουν διὰ οἱονδήποτε σημεῖον, (x_1, x_2), τῆς συναρτήσεως.

(i) Ἔστω $z = f(x_1, x_2)$ ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ.

Τότε, $$z = x_1\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad \text{καὶ} \quad z = x_2\psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \tag{37}$$

Ἀπόδειξις : Ἐφ' ὅσον $f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2)$

διὰ $\lambda = \dfrac{1}{x_1}$, ἔχομεν $$f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1}(x_1, x_2)$$

ἀλλὰ $$z = f(x_1, x_2) = x_1 f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)$$

καὶ ἐπειδὴ $f\left(1, \dfrac{x_2}{x_1}\right)$ εἶναι μία συνάρτησις τοῦ $\dfrac{x_2}{x_1}$ μόνον, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$z = x_1\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

ὁμοίως διὰ $\lambda = \dfrac{1}{x_2}$ εὑρίσκομεν

$$z = x_2\psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

(ii) Αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ καὶ $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ λόγου τῶν x_1 καὶ x_2. Εὑρίσκοντες τὴν μερικὴν παράγωγον τῆς $z = x_1\Phi\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$ ὡς πρὸς x_1, ἤτοι

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + x_1\Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + x_1\Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right)$$

λαμβάνομεν τελικῶς

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(-\frac{x_2}{x_1}\right) \tag{38}$$

ὅπου τὸ $\Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ παριστᾷ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως Φ εἰς τὴν ὁποίαν μεταβλητὴ εἶναι ὁ λόγος $u=\frac{x_2}{x_1}$ καὶ ἑπομένως $\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{x_2}{x_1^2}$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς $z=x_1\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=x_1\Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=x_1\Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{x_1}{x_1^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=\Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \tag{38α}$$

(iii) Τὸ θεώρημα τοῦ Euler λέγει, ὅτι ἐὰν $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ εἶναι μία συνάρτησις ὁμογενὴς r βαθμοῦ τότε,

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=rf(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{39}$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμογενοῦς συναρτήσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο μεταβλητὰς ἔχομεν:

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=f(x_1, x_2) \tag{40}$$

Χρησιμοποιοῦντες τὰς σχέσεις (38) καὶ (38α) λαμβάνομεν

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=x_1\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-x_1\frac{x_2}{x_1}\Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+x_2\Phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$=x_1\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=f(x_1, x_2)$$

(iv) Ἡ μερικὴ δευτέρα παραγώγισις τῆς $z=f(x_1, x_2)$, ὅταν αὕτη εἶναι ὁμογενὴς πρώτου βαθμοῦ πραγματοποιεῖται ὡς ἀκολούθως. Ἐκ τῆς σχέσεως (40) ἔχομεν

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial z}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \, \partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = - \frac{x_2}{x_1} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \, \partial x_1} \tag{41}$$

ὁμοίως δὲ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = - \frac{x_1}{x_2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_2} \tag{42}$$

(γ) Γενικεύοντες τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας διὰ ὁμογενεῖς συναρτήσεις οἱουδήποτε βαθμοῦ, (r), ἔχομεν :

(i) $$z = x_1^r \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad \text{καὶ} \quad z = x_2^r \psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \tag{43}$$

(ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$ καὶ $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$ εἶναι ὁμογενεῖς (r—1) βαθμοῦ.

(iii) $$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} = r\, f(x_1, x_2) \quad \text{καὶ} \tag{44}$$

(iv) $$x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^3} = r(r-1)\, f(x_1, x_2) \tag{45}$$

Ἡ τελευταία σχέσις εὑρίσκεται ὡς ἀκολούθως :
Ἐκ τῆς (44)

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = r \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2 \, \partial x_1} = r \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

$$x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \, \partial x_1} = (r-1) \frac{\partial z}{\partial x_1}$$

Ὁμοίως

$$x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \, \partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = (r-1) \frac{\partial z}{\partial x_2}$$

Πολλαπλασιάζοντες μὲ x_1 καὶ x_2 ἀντιστοίχως τὰς δύο τελευταίας σχέσεις καὶ προσθέτοντες λαμβάνομεν

$$x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2 x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2 \, \partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = (r-1)\left[x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}\right]$$

$$= r(r-1)\, f(x_1, x_2)$$

ΜΕΡΟΣ Β'

ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ

§ 8. Βασικαὶ ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν

(α) Ἐάν, αἱ σειραὶ καὶ αἱ στῆλαι μιᾶς ὁριζούσης ἐναλλαχθῶσιν, ἡ ἀξία τῆς ὁριζούσης δὲν μεταβάλλεται.

(β) Ἐὰν οἱαδήποτε σειρὰ ἢ στήλη μετατεθῇ ὑπεράνω k συνεχομένων σειρῶν ἢ στηλῶν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ὁριζούσης παραμένει ἀμετάβλητος. Ἀλλὰ ἐὰν τὸ k εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς ἡ ὁρίζουσα ἀλλάζει σημεῖον.

(γ) Ἑπομένως, ἐάν, οἱαιδήποτε σειραὶ ἢ στῆλαι ἐναλλαχθῶσιν ἡ ὁρίζουσα ἀλλάζει σημεῖον.

(δ) Ἐάν, δύο σειραὶ ἢ στῆλαι εἶναι ὅμοιαι, ἡ ἀξία τῆς ὁριζούσης εἶναι μηδέν.

(ε) Ἐάν, μιὰ νέα σειρὰ ἢ στήλη σχηματισθῇ ὑπὸ μιᾶς ὑπαρχούσης σειρᾶς ἢ στήλης, διὰ προσθέσεως εἰς ταύτην (ἢ ἀφαιρέσεως ἐκ ταύτης) ἑνὸς σταθεροῦ πολλαπλασίου μιᾶς ἄλλης σειρᾶς ἢ στήλης, ἡ ἀξία τῆς ὁριζούσης παραμένει ἀμετάβλητος.

(στ) Ἐάν, οἱαδήποτε σειρὰ ἢ στήλη ἔχῃ ἕνα παράγοντα ρ, κοινὸν εἰς ὅλα τὰ στοιχεῖα της, ὁ παράγων οὗτος δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἐκτὸς τῆς ὁριζούσης.

(ζ) Ἐάν, τὰ στοιχεῖα μιᾶς σειρᾶς ἢ στήλης ἐμφανίζωνται, ἕκαστον ὡς ἄθροισμα δύο μερῶν, τότε ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος προσθετικὸς κανών:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha^1_{11} & \alpha_{12}+\alpha^1_{12} \ldots & \alpha_{1n}+\alpha^1_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha^1_{11} & \alpha^1_{12} \ldots & \alpha^1_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

§ 9. Ἡ λύσις γραμμικῶν ἐξισώσεων διὰ τῶν ὁριζουσῶν

Ἐὰν ἔχωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \ldots + \alpha_{1n} x_n &= b_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \ldots + \alpha_{2n} x_n &= b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \alpha_{n3} x_3 + \ldots + \alpha_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \tag{46}$$

δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_n$, διὰ τὰς ὁποίας τὸ σύστημα ἔχει λύσιν, ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τοῦ Cramer, ὅστις δίδει τὰ x_i συναρτήσει τῶν συντελεστῶν α_{ij} καὶ τῶν b_i ὡς κατωτέρω

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ b_2 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} \tag{47}
$$

Ὁμοίως δὲ διὰ τὰ λοιπὰ x_i δι' ἀντικαταστάσεως ἑκάστην φορὰν εἰς τὴν ὁρίζουσαν τοῦ ἀριθμητοῦ τῶν συντελεστῶν τῶν $\mathbf{x}_i$ διὰ τῶν b_i.

Γράφοντες D διὰ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ παρονομαστοῦ καὶ D_{ij} διὰ τὰς ἐλάσσονας ὁριζούσας, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ b_i ἔχομεν :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1 D_{11} + b_2 D_{21} + \dots + b_n D_{n1}}{D} \\
x_2 &= \frac{b_1 D_{12} + b_2 D_{22} + \dots + b_n D_{n2}}{D}
\end{aligned} \tag{47α}
$$

ὁμοίως δὲ διὰ τὰ λοιπὰ x_i.

Χρησιμοποιοῦντες τὸ παράδειγμα τῆς ἁπλῆς συναρτήσεως χρησιμότητος τῶν προηγουμένων παραγράφων, δυνάμεθα νὰ ἐρευνήσωμεν διὰ τῆς μεθόδου ταύτης τὴν ἐπίδρασιν τῆς μεταβολῆς τῶν τιμῶν καὶ τοῦ εἰσοδήματος ἐπὶ τῶν ἀγορῶν τοῦ καταναλωτοῦ. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται, ἐὰν ἐκκινήσωμεν ἐκ σχέσεώς τινος, καθ' ἣν ὅλαι αἱ μεταβληταὶ μεταβάλλονται ταυτοχρόνως.

Θεωρουμένων ὡς μεταβλητῶν τῶν p_1, p_2, x_1, x_2, I καὶ λ καὶ δεχόμενοι, ὅτι ὁ καταναλωτὴς εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν ὑπὸ τὰς συνθήκας τῶν ἐξισώσεων (31), τὸ ὁλικὸν διαφορικὸν τοῦ συστήματος τούτου δίδει τὴν ἐπίδρασιν τῆς ταυτοχρόνου μεταβολῆς ὅλων τῶν μεταβλητῶν. Τοῦτο παριστᾶται διὰ τοῦ ἀκολούθου συστήματος :

$$
\begin{aligned}
f_{x_1x_1} dx_1 + f_{x_1x_2} dx_2 - p_1 d\lambda &= \lambda dp_1 \\
f_{x_2x_1} dx_1 + f_{x_2x_2} dx_2 - p_2 d\lambda &= \lambda dp_2 \\
-p_1 dx_1 \quad - p_2 dx_2 \qquad\qquad &= -dI + x_1 dp_1 + x_2 dp_2
\end{aligned} \tag{48}
$$

Ἡ μεταβολὴ ἑπομένως τῶν ποσοτήτων τὰς ὁποίας ἀγοράζει ὁ καταναλωτὴς ἐκ τῶν ἀγαθῶν x_1 καὶ $\mathbf{x}_2$, ὅταν μεταβάλλωνται αἱ τιμαὶ καὶ τὸ εἰσόδημα, δίδεται διὰ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου ὡς πρὸς dx_1 καὶ dx_2. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & f_{x_1x_2} & -p_1 \\ \lambda dp_2 & f_{x_2x_2} & -p_2 \\ -dI + x_1dp_1 + x_2dp_2 & -p & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & -p_1 \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}$$

ὁμοίως δὲ διὰ dx_2, ἢ χρησιμοποιοῦντες τὴν μορφὴν (47α)

$$dx_1 = \frac{\lambda D_{11}dp_1 + \lambda D_{21}dp_2 + D_{31}(-dI + x_1dp_1 + x_2dp_2)}{D}$$

διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ dp_1 καὶ θεωροῦντες σταθερὰ τὰ I καὶ p_2 εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\lambda D_{11}}{D} + x_1 \frac{D_{31}}{D} \qquad (49)$$

διὰ τῆς ὁποίας ἐκφράζεται ὁ ρυθμὸς μεταβολῆς τῶν ἀγορῶν τοῦ καταναλωτοῦ διὰ τὸ ἀγαθὸν x_1, ὅταν μεταβάλλεται ἡ τιμή του, p_1, καὶ παραμένουν σταθεραὶ αἱ λοιπαὶ μεταβληταί.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὸν ρυθμὸν μεταβολῆς τοῦ x_1 ὡς πρὸς μεταβολὰς τοῦ εἰσοδήματος

$$\frac{\partial x_1}{\partial I} = -\frac{D_{31}}{D} \qquad (50)$$

§ 10. Αἱ τετραγωνικαὶ μορφαὶ (ἄνευ περιορισμῶν)

(α) Μὲ δύο μεταβλητάς.

Ἂς ἐξετάσωμεν κατ' ἀρχὴν τὴν τετραγωνικὴν μορφὴν

$$F(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + bx_2^2 + 2hx_1x_2 \qquad (51)$$

διαιροῦντες καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ α ἔχομεν

$$\alpha\left(x_1^2 + \frac{b}{\alpha}x_2^2 + 2\frac{h}{\alpha}x_1x_2\right)$$

Διὰ τὴν συμπλήρωσιν τοῦ τετραγώνου τῆς ἐντὸς τῆς παρενθέσεως παραστάσεως λαμβάνομεν ὡς διπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον τὴν ποσότητα $\frac{2hx_1x_2}{\alpha}$ καὶ ὡς δεύτερον ὅρον τὸ λ. Ἔχομεν ἑπομένως

$$2\lambda x_1 = \frac{2h\,x_1 x_2}{\alpha}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου
$$\lambda = \frac{hx_2}{\alpha}$$

ὁπότε γράφομεν τὴν (51) ὡς

$$\alpha\left[\left(x_1 + \frac{hx_2}{\alpha}\right)^2 + \frac{bx_2^2}{\alpha} - \left(\frac{hx_2}{\alpha}\right)^2\right]$$

ἢ
$$\alpha\left(x_1 + \frac{hx_2}{\alpha}\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} \alpha & h \\ h & b \end{vmatrix}}{\alpha} x_2^2 \tag{52}$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν (52) δυνάμεθα πλέον νὰ ἐρευνήσωμεν διὰ τὸ σημεῖον τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς. Τοῦτο ἐξαρτᾶται, ὡς εἶναι ἐμφανές, μόνον ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν x_1 καὶ x_2. Διότι ἡ παράστασις $\left(x_1 + \frac{hx_2}{\alpha}\right)^2$ ὡς τετράγωνον εἶναι θετική. Ὁμοίως τὸ x_2^2. Ἄρα ἡ (52) ἢ ἡ ἴση της (51) εἶναι ὡρισμένως θετική, ἐὰν

$$\alpha > 0 \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} \alpha & h \\ h & b \end{vmatrix} > 0$$

ὡρισμένως δὲ ἀρνητική, ἐὰν

$$\alpha < 0 \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} \alpha & h \\ h & b \end{vmatrix} > 0$$

(β) Τετραγωνικαὶ μορφαὶ μὲ τρεῖς μεταβλητάς.

Ἡ τεχνικὴ τῆς συμπληρώσεως τῶν τετραγώνων καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ἡ ἰδία, ὅπως καὶ ἀνωτέρω, μολονότι ὀλίγον πλέον περίπλοκος. Ἡ ἀρχικὴ μορφὴ γράφεται ὡς ἀκολούθως :

$$F(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2hx_1x_2 + 2gx_1x_3 + 2fx_2x_3 \tag{53}$$

Μετὰ τὴν συμπλήρωσιν τῶν τετραγώνων ὡς πρὸς x_1 καὶ x_2 λαμβάνομεν

$$F(x_1, x_2, x_3) = \alpha\left(x_1 + \frac{hx_2}{\alpha} + \frac{gx_3}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha b - h^2}{\alpha}\left(x_2 + \frac{\alpha f - hg}{\alpha b - h^2}x_3\right)^2 +$$

$$+ \frac{\alpha bc - \alpha f^2 - bg^2 + 2hfg}{\alpha b - h^2} x_3^2 \tag{54}$$

ἢ γράφοντες καὶ πάλιν τοὺς συντελεστὰς τῶν τετραγώνων ὑπὸ μορφὴν ὁριζουσῶν

$$\alpha\left(x_1+\frac{hx_2}{\alpha}+\frac{gx_3}{\alpha}\right)^2+\frac{\begin{vmatrix}\alpha & h\\ h & b\end{vmatrix}}{\alpha}\left(x_2+\frac{\alpha f-hg}{\alpha b-h^2}x_3\right)^2+\frac{\begin{vmatrix}\alpha & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & h\\ h & b\end{vmatrix}}x_3^2 \qquad (55)$$

Ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην δυνάμεθα, ὡς ἀνωτέρω, νὰ προσδιορίσωμεν εὐκόλως τὸ σημεῖον τῆς ἀρχικῆς παραστάσεως (53). Αὕτη εἶναι: ὡρισμένως δὲ θετική, ἐὰν

$$\alpha>0,\quad \begin{vmatrix}\alpha & h\\ h & b\end{vmatrix}>0 \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix}\alpha & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}>0$$

ὡρισμένως δὲ ἀρνητική, ἐὰν

$$\alpha<0,\quad \begin{vmatrix}\alpha & h\\ h & b\end{vmatrix}>0 \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix}\alpha & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{vmatrix}<0$$

(γ) Πρακτικὸς κανὼν διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν ὁριζουσῶν.

Ἡ ἐκτεθεῖσα τεχνικὴ τῆς συμπληρώσεως τῶν τετραγώνων διὰ τῆς ὁποίας ὁδηγούμεθα εἰς τὰς μορφὰς (52) καὶ (55) καθίσταται λίαν πολύπλοκος καὶ ἐπίπονος διὰ περιπτώσεις τετραγωνικῶν συναρτήσεων τεσσάρων καὶ ἄνω μεταβλητῶν.

Ὁ πρακτικὸς κανών, ὅστις ἀναπτύσσεται κατωτέρω, μᾶς δίδει ἀρχικῶς μὲν τὴν ὁρίζουσαν μεγίστης τάξεως, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν διακρίνουσαν, ἐκ ταύτης δὲ δι' ἀφαιρέσεως τῆς τελευταίας στήλης καὶ σειρᾶς, διαδοχικῶς, εὑρίσκομεν τὰς λοιπὰς ὁριζούσας.

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν μίαν τετραγωνικὴν μορφὴν μὲ τέσσαρας μεταβλητάς, $F(x_1, x_2, x_3, x_n)$. Ἐὰν σχηματίσωμεν ἕνα γάμα καὶ γράψωμεν ὁριζοντίως καὶ καθέτως τὰς μεταβλητὰς κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν, ὅπως αὕτη δίδεται λ.χ. εἰς τὴν (55), ἐντὸς δὲ τοῦ γάμα καὶ εἰς τὰ σημεῖα διασταυρώσεως τῶν μεταβλητῶν γράψωμεν τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστάς, λαμβάνομεν αὐτομάτως τὴν διακρίνουσαν (τὴν μεγίστης τάξεως ὁρίζουσαν) τῆς ἐρευνωμένης τετραγωνικῆς μορφῆς. Ἡ ὁρίζουσα αὕτη εἶναι τάξεως, ἴσης πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται εἰς τὴν μορφήν.

Ἔστω ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ

$$F(x_1, x_2, x_3, x_n)=\alpha_1^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_4^2+2ex_1x_2+2fx_1x_3$$
$$+2gx_1x_4+2hx_2x_3+2kx_2x_4+2lx_3x_4 \qquad (56)$$

Ὁ προσδιορισμὸς τῆς διακρινούσης

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_n \\ \hline x_1 & \alpha & e & f & g \\ x_2 & e & b & h & k \\ x_3 & f & h & c & l \\ x_n & g & k & l & d \end{array} \qquad (57)$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκονται εὐκόλως αἱ λοιπαὶ ὁρίζουσαι δι' ἀφαιρέσεως διαδοχικῶς τῆς τελευταίας στήλης καὶ σειρᾶς.

$$\begin{vmatrix} \alpha & e & f \\ e & b & h \\ f & h & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & e \\ e & b \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} \alpha \end{vmatrix}$$

(δ) Ὁ γενικὸς κανὼν διὰ τετραγωνικὴν μορφὴν n μεταβλητῶν ἐξάγεται εὐκόλως ἐκ τῶν ἀνωτέρω. Ἡ μορφὴ

$$\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{22}x_2^2+\ldots+\alpha_{nn}x_n^2+2\alpha_{12}x_1x_2+\ldots+2\alpha_{1n}x_1x_n+\ldots+2\alpha_{n-1,\,n}x_{n-1}x_n \qquad (58)$$

δύναται νὰ γραφῇ κατὰ δύο διαφορετικοὺς τρόπους. Ἐξ αὐτῶν ὁ πρῶτος τονίζει τὸν τετραγωνικὸν χαρακτῆρα, ἐνῶ ὁ δεύτερος παρέχει αὐτομάτως τὴν διακρίνουσαν.

Πρῶτος τρόπος :

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{nn}x_n^2 \\ +2(\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{13}x_1x_3 + \alpha_{14}x_1x_4 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}x_1x_n) \\ +2(\alpha_{23}x_2x_3 + \alpha_{24}x_2x_4 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}x_2x_n) \\ +2(\alpha_{34}x_3x_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{3n}x_3x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +2(\alpha_{n-1,\,n}x_{n-1}x_n) \end{array} \qquad (59)$$

Δεύτερος τρόπος (συμμετρικὴ ἐμφάνισις)

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{13}x_1x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_1x_n \\ + \alpha_{21}x_2x_1 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{23}x_2x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_2x_n \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \alpha_{n1}x_nx_1 + \alpha_{n2}x_nx_2 + \alpha_{n3}x_nx_3 + \ldots + \alpha_{nn}x_n^2 \end{array} \qquad (60)$$

ἢ συνοπτικῶς $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$

ἔνθα α_{ij} διὰ $i=j$ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν τετραγώνων τῶν n μεταβλητῶν καὶ α_{ij} διὰ $i \neq j$ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν γινομένων τῶν δύο μεταβλητῶν αἱ ὁποῖαι ὑποδεικνύονται διὰ τῶν i καὶ j. Ἐπίσης $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$.

Ἡ (60) μᾶς δίδει, διὰ τῶν α_{ij}, κατ' εὐθεῖαν τὴν διακρίνουσαν τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς.

§ 11. Τετραγωνικαὶ μορφαὶ ὑποκείμεναι εἰς περιορισμὸν

Αἱ τετραγωνικαὶ μορφαὶ τῆς κατηγορίας ταύτης ὁδηγοῦν εἰς τὰς περατωμένας ὁριζούσας, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται καὶ εἰς τὴν μικροοικονομικὴν ἀνάλυσιν. Διὰ τὸν τρόπον τοῦ σχηματισμοῦ των καὶ διὰ τὴν ἰσοδυναμίαν των πρὸς τὰς κοινὰς ὁριζούσας (ὡς πρὸς τὴν διερεύνησιν τοῦ σημείου τῶν τετραγωνικῶν μορφῶν) παραθέτομεν τὴν ὅλην πορείαν.

Χάριν εὐκολίας θὰ ἐργασθῶμεν ἐπὶ μιᾶς τετραγωνικῆς συναρτήσεως τριῶν μεταβλητῶν. Ἔστω ἡ μορφή :

$$\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + 2\alpha_{23}x_2x_3 \tag{61}$$

ὑποκειμένη εἰς τὸν εὐθύγραμμον περιορισμὸν

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \tag{62}$$

Ἀπαλείφοντες τὸ x_1 εἰς τὴν (61) διὰ τῆς (62), θέτοντες δηλαδὴ

$$x_1 = -\frac{b_2x_2}{b_1} - \frac{b_3x_3}{b_1}$$

ἡ (61) γράφεται ὡς

$$\alpha_{11}\left(-\frac{b_2x_2}{b_1} - \frac{b_3x_3}{b_1}\right)^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2\alpha_{12}x_2\left(-\frac{b_2x_2}{b_1} - \frac{b_3x_3}{b_1}\right)$$

$$+ 2\alpha_{13}x_3\left(-\frac{b_2x_2}{b_1} - \frac{b_3x_3}{b_1}\right) + 2\alpha_{23}x_2x_3 \tag{63}$$

ἀναπτύσσοντες λαμβάνομεν

$$\alpha_{11}\frac{b_2^2x_2^3}{b_1^2} + \frac{\alpha_{11}b_3^2}{b_1^2}x_3^2 + \frac{\alpha_{11}2b_2b_3}{b_1^2}x_2x_3 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 - \frac{2\alpha_{12}b_2}{b_1}x_2^2$$

$$-\frac{2\alpha_{12}b_3}{b_1}x_2x_3 - \frac{2\alpha_{13}b_2}{b_1}x_2x_3 - \frac{2\alpha_{13}b_3}{b_1}x_3^2 + 2\alpha_{23}x_2x_3$$

συλλέγοντες ὅρους

$$\left(\alpha_{11}\frac{b_2^2}{b_1^2}+\alpha_{22}-2\alpha_{12}\frac{b_2}{b_1}\right)x_2^2+\left(\alpha_{11}\frac{b_3^2}{b_1^2}+\alpha_{33}-\frac{2\alpha_{13}b_3}{b_1}\right)x_3^2$$

$$+\left(\frac{2\alpha_{11}b_2b_3}{b_1^2}-\frac{2\alpha_{12}b_3}{b_1}-\frac{2\alpha_{13}b_2}{b_1}+2\alpha_{23}\right)x_2x_3$$

ἢ χάριν συντομίας

$$c_{22}x_2^2+c_{33}x_3^2+2c_{23}x_2x_3 \tag{64}$$

ὅπου $$c_{ij}=\alpha_{ij}-\frac{1}{b_1}(\alpha_{1i}b_j+\alpha_{1j}b_1)+\frac{1}{b_1^2}b_i\,b_j\,\alpha_{11} \qquad (i,\ j=2,\ 3) \tag{65}$$

Τὸ σημεῖον τώρα τῆς (64) ἐξαρτᾶται ὅπως καὶ εἰς τὴν (52) ἐκ τῶν

$$\begin{vmatrix} c_{22} \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \tag{66}$$

Ἡ ἀνεύρεσις ὅμως τῶν συντελεστῶν c_{ij}, ἀπαιτεῖ πολυπλόκους πράξεις, ἀκόμη καὶ εἰς τὴν ἁπλῆν περίπτωσιν τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς τριῶν μεταβλητῶν. Τὴν δυσχέρειαν ταύτην δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν χρησιμοποιοῦντες τὴν συμμετρικότητα τῶν c_{ij}, ὡς αὕτη δίδεται εἰς τὴν σχέσιν (65), καὶ τὰς βασικὰς ἰδιότητας τῶν ὁριζουσῶν.

Πολλαπλασιάζοντες τὴν διακρίνουσαν τῆς (64) ἐπὶ $(-b_1^2)$ ἔχομεν

$$-b_1^2\begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = -b_1\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & c_{22} & c_{33} \\ b_3 & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ b_2 & \alpha_{12} & c_{22} & c_{23} \\ b_3 & \alpha_{13} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

γράφοντες τὴν τελευταίαν ὁρίζουσαν πλήρως, δηλαδὴ ἀντικαθιστῶντες τὰ c_{ij} διὰ τῶν ἴσων των, ὡς ταῦτα δίδονται ὑπὸ τῆς (65), λαμβάνομεν,

$$\begin{matrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & \alpha_{11} & 0 & 0 \\ b_2 & \alpha_{12} & \alpha_{22}-\frac{1}{b_1}\alpha_{12}b_2-\frac{1}{b_1}\alpha_{12}b_2+\frac{1}{b_1^2}b_2^2\alpha_{11} & \alpha_{23}-\frac{1}{b_1}\alpha_{12}b_3-\frac{1}{b_1}\alpha_{13}b_2+\frac{1}{b_2^2}b_2b_3\alpha \\ b_3 & \alpha_{13} & \alpha_{23}-\frac{1}{b_1}\alpha_{12}b_3-\frac{1}{b_1}\alpha_{13}b_2+\frac{1}{b_1^2}b_2b_3\alpha_{11} & \alpha_{33}-\frac{1}{b_1}\alpha_{13}b_3-\frac{1}{b_1}\alpha_{13}b_3+\frac{1}{b_1^2}b_3^2\alpha_{11} \end{matrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τώρα τὴν πρώτην στήλην, διαδοχικῶς, ἐπὶ $\frac{2\alpha_{12}}{b_1}$, $-\frac{b_2\alpha_{11}}{b_1^2}$ καὶ $-\frac{\alpha_{12}}{b_1}$ καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα εἰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς τρίτης στήλης. Ἐν συνεχείᾳ, πολλαπλασιάζομεν τὴν δευτέραν στήλην, ἐπὶ $\frac{1}{b_1}b_2$ καὶ προσθέτομεν ἐπίσης εἰς τὴν τρίτην στήλην. Κατόπιν αὐτῶν ἡ στήλη καθίσταται $\{b_2 \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{22} \quad \alpha_{23}\}$. Ἀκολουθοῦντες τὴν αὐτὴν διαδικασίαν διὰ τὴν τετάρτην στήλην, πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην στήλην ἐπὶ $\frac{2\alpha_{13}}{b_1}$, $-\frac{b_3\alpha_{11}}{b_1^2}$, $-\frac{\alpha_{13}}{b_1}$ καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ $\frac{1}{b_1}b_3$. Προσθέτοντες τὰ γινόμενα ταῦτα εἰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς τετάρτης, αὔτη λαμβάνει τὴν μορφὴν $\{b_3 \quad \alpha_{13} \quad \alpha_{23} \quad \alpha_{33}\}$.

Εὑρίσκομεν, οὕτω τελικῶς τὴν περατωμένην ὁρίζουσαν

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ b_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ b_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \tag{67}$$

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος τῆς (66) πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ τὴν ποσότητα $-b_1^2$. Αὕτη περιλαμβάνει ὡς στοιχεῖα της τοὺς συντελεστὰς τῶν μεταβλητῶν τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς καὶ τοὺς συντελεστὰς τῶν μεταβλητῶν τοῦ ὑφισταμένου περιορισμοῦ.

Ἡ (64) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν τῆς (52),

$$c_{22}\left(x_2 + \frac{c_{23}x_3}{c_{22}}\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}}{c_{22}} x_3^2$$

ἢ κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ b_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \left(x_2 + \frac{c_{23}x_3}{c_{22}}\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ b_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ b_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ b_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} x_3^2 \tag{68}$$

Ἡ (68) εἶναι ὡρισμένως θετικὴ ἐὰν αἱ ὁρίζουσαι εἶναι ἅπασαι ἀρνητικαὶ — ἡ (66) ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν ποσότητα ($-b_1^2$) — ἀρνητικὴ δὲ ἐὰν

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ b_3 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ b_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ b_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} < 0$$

ΜΕΡΟΣ Γ'

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΜΕΘΟΔΩΝ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΩΣ

§ 12. Ἡ μέθοδος ἀπαλειφῆς μεταβλητῶν τῇ βοηθείᾳ τῆς συναρτήσεως περιορισμοῦ

(α) Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἤδη γνωστὴ εἰς τὸν ἀναγνώστην ἐκ τῆς ἁπλῆς συναρτήσεως χρησιμότητος, τὴν ὁποίαν παρουσιάσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 4. Ἐνταῦθα θὰ παρουσιάσωμεν μίαν συνάρτησιν τριῶν μεταβλητῶν, ἥτις προβάλλει τὸν ὅλον μηχανισμὸν ἀρτιώτερον, ἐνῶ συγχρόνως δὲν καθιστᾷ ἰδιαιτέρως πολύπλοκον τὴν ἐμφάνισίν του. Ἐπὶ πλέον, ἡ ἀπαιτουμένη ἀπαλειφὴ ἑνὸς ἀγνώστου — περίπτωσις ἑνὸς περιορισμοῦ — ἀντὶ νὰ πραγματοποιηθῇ διὰ τὴν συνάρτησιν χρησιμότητος καὶ τὸν περιορισμόν της, πραγματοποιεῖται διὰ τὰ ὁλικὰ διαφορικά των. Ἡ ἀλλαγὴ δὲν ἀλλοιώνει, φυσικά, τὰ ἀποτελέσματα, παρέχει δὲ ἐν τέλει τὸ πλεονέκτημα τῆς ἐμφανίσεως τῆς συνθήκης σταθερότητος ὑπὸ τετραγωνικὴν μορφήν. Οὕτω, σχηματίζοντες τὰς γνωστὰς ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁριζούσας, προσδιορίζομεν εὐκόλως τὸ σημεῖον τῆς συνθήκης σταθερότητος, καὶ ἑπομένως γνωρίζομεν ἐὰν ἡ συνάρτησις εὑρίσκεται εἰς μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Τὸ πλεονέκτημα τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν διαφορικῶν εἰς τὴν διαμόρφωσιν τοῦ κριτηρίου ἀκραίων τιμῶν εἶναι, ὅτι τὸ κριτήριον τοῦτο ἐφαρμόζεται, ὑπὸ ὡρισμένας προϋποθέσεις, καὶ ὅταν ἀκόμη αἱ μεταβληταὶ δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι.

(β) Τὰ ἀνωτέρω καθίστανται περισσότερον σαφῆ κατὰ τὴν ἐπακολουθοῦσαν παρουσίασιν τῆς ὅλης πορείας. Ἡ χρησιμοποίησις τριῶν μεταβλητῶν διευκολύνει ἁπλῶς τὴν ἀνάπτυξιν. Οἱ κανόνες, ἐν τούτοις, ἰσχύουν διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῶν (n) μεταβλητῶν.

Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$U = f(x_1, x_2, x_3) \tag{69}$$

ὑποκειμένη εἰς τὸν περιορισμὸν

$$\Phi(I - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3) = 0 \tag{70}$$

ἔνθα I, p_1, p_2 καὶ p_3 δεδομένα καὶ σταθερά.

Ἡ ἀναγκαία συνθήκη μεγίστου ἢ ἐλαχίστου (συνθήκης ἰσορροπίας τοῦ καταναλωτοῦ εἶναι :

$$dU = f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2 + f_{x_3}dx_3 = 0 \tag{71}$$

ὑποκειμένη εἰς τὴν

$$\Phi_{x_1}dx_1 + \Phi_{x_2}dx_2 + \Phi_{x_3}dx_3 = 0 \tag{72}$$

Θεωροῦντες τὸ x_1 ὡς ἐξηρτημένην μεταβλητήν, δυναμένην νὰ προσδιορισθῇ ἐκ τῆς περιοριστικῆς σχέσεως (70), δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν τὸ dx_1. Πολλαπλασιάζοντες τὴν (71) ἐπὶ Φ_{x_1} καὶ τὴν (72) ἐπὶ $-f_{x_1}$, ἔχομεν:

$$dU = \Phi_{x_1}f_{x_1}dx_1 + \Phi_{x_1}f_{x_2}dx_2 + \Phi_{x_1}f_{x_3}dx_3 = 0$$

$$-\Phi_{x_1}f_{x_1}dx_1 - \Phi_{x_2}f_{x_1}dx_2 - \Phi_{x_3}f_{x_1}dx_3 = 0$$

Προσθέτοντες καὶ διαιροῦντες τὸ δεύτερον μέλος διὰ Φ_{x_1} λαμβάνομεν

$$dU = \left(f_{x_2} - \frac{\Phi_{x_2}f_{x_1}}{\Phi_{x_1}}\right)dx_2 + \left(f_{x_3} - \frac{f_{x_1}\Phi_{x_3}}{\Phi_{x_1}}\right)dx_3 = 0$$

Ὑποθέτοντες σταθερὰ ἐναλλὰξ τὰ x_2 καὶ x_3 λαμβάνομεν, διὰ μεταβολὰς τοῦ x_2

$$\left(f_{x_2} - \frac{f_{x_1}\Phi_{x_2}}{\Phi_{x_1}}\right)dx_2 = 0 \qquad \text{ἔνθα} \qquad dx_2 \neq 0$$

καὶ διὰ μεταβολὰς τοῦ x_3

$$\left(f_{x_3} - \frac{f_{x_1}\Phi_{x_3}}{\Phi_{x_1}}\right)dx_3 = 0 \qquad \text{ἔνθα} \qquad dx_3 \neq 0.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων εὑρίσκομεν

$$\frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}} = \frac{f_{x_2}}{\Phi_{x_2}} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}} = \frac{f_{x_3}}{\Phi_{x_3}}$$

ἢ

$$\frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}} = \frac{f_{x_2}}{\Phi_{x_2}} = \frac{f_{x_3}}{\Phi_{x_3}} = m \tag{73}$$

ἔνθα

$$\Phi_{x_i} = p_i\,.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν Φ_{x_i} ὑπὸ τῶν ἴσων των, ἡ σχέσις (73) εὐκόλως λαμβάνει τὴν μορφὴν τῆς (23), ἐλεγχομένου οὕτω, ὅτι ἡ χρησιμοποίησις τῶν διαφορικῶν δὲν ἀλλοιώνει τὸ ἀποτέλεσμα. Ἡ μορφὴ (73) εἶναι γενικωτέρα καὶ προσιδιάζει περισσότερον εἰς τὴν ἀνάλυσιν, ὅταν αὕτη καλύπτῃ οἱονδήποτε ἀριθμὸν μεταβλητῶν.

Ἡ σχέσις (73) λέγει, ὅτι ὁ καταναλωτὴς εὑρίσκεται εἰς ἰσορροπίαν εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο, ὅπου ἡ ὁριακὴ χρησιμότης τῆς τελευταίας μονάδος τοῦ εἰσοδήματός του, εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς πᾶσαν κατεύθυνσιν καταναλώσεως. Ἡ χρησιμοποίησις τῶν p_i – ἀμελουμένου τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου – καθιστᾷ πλέον ἐμφανῆ τὴν ἀρχὴν ταύτην

$$\frac{f_{x_1}}{p_1} = \frac{f_{x_2}}{p_2} = \frac{f_{x_3}}{p_3} = m \tag{73α}$$

(γ) Ἡ ἱκανὴ συνθήκη: Θεωροῦντες καὶ πάλιν τὴν x_1 ἐξηρτημένην μεταβλητήν, τὸ δεύτερον ὁλικὸν διαφορικόν της (69) εἶναι

$$\begin{aligned} d^2V = f_{x_1}d^2x_1 + f_{x_1x_1}dx_1^2 + f_{x_2x_2}dx_2^2 + f_{x_3x_3}dx_3^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 \\ 2f_{x_1x_3}dx_1dx_3 + 2f_{x_2x_3}dx_2dx_3 \end{aligned} \tag{74}$$

Λαμβάνομεν ἐπίσης τὸ δεύτερον διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως (70),

$$\begin{aligned} \Phi_{x_1}d^2x_1 + \Phi_{x_1x_1}dx_1^2 + \Phi_{x_2x_2}dx_2^2 + \Phi_{x_3x_3}dx_3^2 + 2\Phi_{x_1x_2}dx_1dx_2 \\ + 2\Phi_{x_1x_3}dx_1dx_3 + 2\Phi_{x_2x_3}dx_2dx_3 \end{aligned} \tag{75}$$

Ἀπαλείφοντες τώρα τὸν ὅρον $f_{x_1}d^2x_1$, τῇ βοηθείᾳ τῆς (75), εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} d^2V = \left(f_{x_1x_1} - \frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}}\Phi_{x_1x_1}\right)dx_1^2 + \left(f_{x_1x_2} - \frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}}\Phi_{x_1x_2}\right)dx_1dx_2 + \dots \\ + \left(f_{x_2x_1} - \frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}}\Phi_{x_2x_1}\right)dx_2dx_1 + \left(f_{x_2x_2} - \frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}}\Phi_{x_2x_2}\right)dx_2^2 + \dots \\ + \left(f_{x_3x_1} - \frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}}\Phi_{x_3x_1}\right)dx_3dx_1 + \left(f_{x_3x_3} - \frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}}\Phi_{x_3x_2}\right)dx_3dx_2 + \dots \end{aligned} \tag{76}$$

ὑποκείμενον εἰς τὸν περιορισμὸν

$$\Phi_{x_1}dx_1 + \Phi_{x_2}dx_2 + \Phi_{x_3} = 0$$

Ἀλλά, ἐπειδὴ εἰς τὴν ἐξεταζομένην περίπτωσιν, ὁ περιορισμὸς εἶναι πρώτου βαθμοῦ σχέσις, τὰ $\Phi_{x_ix_j}$ ἰσοῦνται μὲ μηδέν. Ὡς ἐκ τούτου ἡ (76) γράφεται ἁπλούστερον ὡς κάτωθι:

$$\begin{aligned} d^2U = f_{x_1x_1}dx_1^2 + f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_1x_3}dx_1dx_3 \\ + f_{x_2x_1}dx_2dx_1 + f_{x_2x_2}dx_2^2 + f_{x_2x_3}dx_2dx_3 \\ + f_{x_3x_1}dx_3dx_1 + f_{x_3x_2}dx_3dx_2 + f_{x_3x_3}dx_3^2 \end{aligned} \tag{77}$$

ὑποκειμένη εἰς τὴν

$$\Phi_{x_1}dx_1 + \Phi_{x_2}dx_2 + \Phi_{x_3}dx_3 = 0$$

Ἀκολουθοῦντες πλέον τὴν τεχνικὴν τῆς παραγράφου 11, διὰ τὴν ἀπάλειψιν τοῦ dx_1, εὑρίσκομεν μίαν τετραγωνικὴν μορφὴν ἔχουσαν μεταβλητὰς τὰ dx_2 καὶ dx_3 καὶ συντελεστὰς c_{22}, c_{33} καὶ c_{23}, ἔνθα ὡς ἀνωτέρω (65)

$$c_{ij} = f_{x_i x_j} - \frac{1}{\Phi_{x_1}} (f_{x_1 x_i} \Phi_{x_j} + f_{x_1 x_j} \Phi_{x_i}) + \frac{1}{\Phi^2_{x_1}} \Phi_{x_i} \Phi_{x_j} \Phi_{x_1 x_i} \qquad (i, j = 2, 3)$$

Αὕτη εἶναι ἡ

$$c_{22} dx_2^2 + c_{32} dx_3^2 + 2 c_{23} dx_2 dx_3$$

ἔχουσα διακρίνουσαν, ὡς καὶ ἡ τετραγωνικὴ μορφὴ (64), τὴν

$$\begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

Ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀκολουθεῖται ἡ τεχνικὴ ἡ ἑπομένη τῆς παραστάσεως (66), (§ 11). Πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $-\Phi^2_{x_1}$, γράφοντες πλήρως τὴν προκύπτουσαν ὁρίζουσαν καὶ ἐφαρμόζοντες τοὺς κανόνας τῶν ὁριζουσῶν διὰ τὴν ἁπλούστευσιν τῆς παραστάσεως καταλήγομεν καὶ πάλιν εἰς μίαν περατωμένην ὁρίζουσαν — τὴν διακρίνουσαν τῆς (77) — ἥτις περιλαμβάνει ὡς στοιχεῖα τοὺς συντελεστὰς ταύτης. Αὕτη γράφεται ὡς ἀκολούθως :

$$\begin{vmatrix} f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_2} & \Phi_{x_1} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} & \Phi_{x_2} \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} & \Phi_{x_3} \\ \Phi_{x_1} & \Phi_{x_2} & \Phi_{x_3} & 0 \end{vmatrix} \qquad (78)$$

Ὁ καταναλωτὴς εὑρίσκεται εἰς σταθερὸν σημεῖον ἰσορροπίας — μεγιστοποίησις τῆς (69) — ἐφ' ὅσον ἡ (77) εἶναι ὡρισμένως ἀρνητική. Ἤτοι ἐφ' ὅσον

$$\begin{vmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \Phi_{x_1} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \Phi_{x_2} \\ \Phi_{x_1} & \Phi_{x_2} & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{καὶ} \quad |(78)| < 0 \qquad (79)$$

§ 13. Ἡ μέθοδος τῶν ἀπροσδιορίστων πολλαπλασιαστῶν τοῦ LAGRANGE

Χρησιμοποιοῦντες τὴν συνάρτησιν χρησιμότητος τῆς προηγουμένης παραγράφου δηλαδὴ τὰς σχέσεις (69) καὶ (70), διατυποῦμεν τὸ πρόβλημα ὡς ἀκολούθως :

$$\max : \quad U = f(x_1, x_2, x_3)$$

ὑπὸ τὸν περιορισμὸν

$$\Phi(I - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3) = 0$$

'Επανερχόμενοι εἰς τὰ ἐκτεθέντα ἐν παραγράφῳ 5, γράφομεν

$$\max: \quad V = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3) \tag{80}$$

ἐξ ἧς:

(α) Ἡ συνθήκη ἰσορροπίας: Ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= f_{x_1} + \lambda\Phi_{x_1} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= f_{x_2} + \lambda\Phi_{x_2} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} &= f_{x_3} + \lambda\Phi_{x_3} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= \Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{aligned} \tag{81}$$

εὑρίσκομεν, λαμβάνοντες ἀνὰ δύο τὰς ἐξισώσεις, τὴν σχέσιν

$$\frac{f_{x_1}}{\Phi_{x_1}} = \frac{f_{x_2}}{\Phi_{x_2}} = \frac{f_{x_3}}{\Phi_{x_3}} = m$$

ὅπως ἀκριβῶς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον – παράστασις (73).

(β) Συνθήκη σταθερότητος: Αὕτη ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ δευτέρου ὁλικοῦ διαφορικοῦ τῆς (80). Ἡ συνάρτησις χρησιμότητος εὑρίσκεται εἰς μέγιστον διὰ $d^2V < 0$. Γράφοντες πλήρως τὴν d^2V ἔχομεν

$$\begin{aligned} d^2V = {} & V_{x_1x_1}dx_1^2 + V_{x_2x_2}dx_2 + V_{x_3x_3}dx_3 + V_{\lambda\lambda} \\ & + 2(V_{x_1x_2}dx_1dx_2 + V_{x_1x_3}dx_1dx_3 + V_{x_1\lambda}dx_1d\lambda) \\ & + 2(V_{x_2x_3}dx_2dx_3 + 2f_{x_2\lambda}dx_2d\lambda) \\ & + 2(V_{x_3\lambda}dx_3d\lambda) \end{aligned} \tag{82}$$

'Αλλά, ἐπειδὴ ἡ περιοριστικὴ σχέσις $\Phi(I - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3) = 0$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ἔχομεν

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i x_j} = V_{x_i x_j} = f_{x_i x_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \lambda} = V_{x_i\lambda} = \Phi_{x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

καὶ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = V_{\lambda\lambda} = 0$$

Ἡ (81) δύναται μετὰ ταῦτα νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$
\begin{aligned}
d^2V = {} & f_{x_1x_1}dx_1^2 + f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_1x_3}dx_1dx_3 + \Phi_{x_1}dx_1d\lambda \\
& + f_{x_2x_1}dx_2dx_1 + f_{x_2x_2}dx_2^2 + f_{x_2x_3}dx_2dx_3 + \Phi_{x_2}dx_2d\lambda \\
& + f_{x_3x_1}dx_3dx_1 + f_{x_3x_2}dx_3dx_2 + f_{x_3x_3}dx_3^2 + \Phi_{x_3}dx_3d\lambda \\
& + \Phi_{x_1}d\lambda dx_1 + \Phi_{x_2}d\lambda dx_2 + \Phi_{x_3}d\lambda dx_3 + 0
\end{aligned}
\qquad (83)
$$

Ἐκ ταύτης εὐκόλως ἐξάγεται ἡ σχετικὴ διακρίνουσα, ὁμοία πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν διὰ τῆς προηγουμένης μεθόδου, ἀποδεικνυομένης οὕτω τῆς ἰσοδυναμίας μεταξὺ τῶν δύο μεθόδων.

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

Α.

Allen D.G.R. : Mathematical Analysis for Economists.

Allen D.G.R. : Mathematical Economics.

Handerson J. — Quandt : Microeconomic Theory. A mathematical Approach.

Hicks R. J. : Value and Capital.

Marshall A. : Principles of Economics.

Ozga S. A. : Measurable Utility and Probability.

Pareto V. : Manuel d' économie politique.

Samuelson P. A. : Foundation of Economic Analysis.

Slutsky E.E. : «Sulla Teoria del Bilancio del Consumatore». Giornale degli Economisti» Τόμος 51, 1915.

Β.

Abbot P. : Calculus.

Aitken C. A. : Determinants and Matrices.

Courant R. : Differential and Integral Calculus.

Ferrar. L. W. : Higher Algebra for Schools.

Ferrar L. W. : Algebra, A text-book of Determinants Matrices and Algebraic Forms.

Lewis P. J. : An Introduction to Mathematics for Students of Economics.