# ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΜΠΑΖΙΓΟΥ

## 1. Εἰσαγωγὴ

Συνήθως, σκοπὸς μιᾶς στατιστικῆς ἐρεύνης εἶναι ἡ ἐκτίμησις τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ ὑπὸ ἔρευναν πληθυσμοῦ εἰς δεδομένην χρονικὴν στιγμήν. Κατὰ συνέπειαν, ὁ ὅρος «ἔρευνα» εἶναι συνδεδεμένος μὲ τὴν στατικὴν ἔννοιαν τοῦ ὑπὸ ἔρευναν πληθυσμοῦ. Οὐχ ἧττον ὅμως ἡ στατικὴ ἔννοια τοῦ πληθυσμοῦ δὲν ἀποτελεῖ τὸν κανόνα. Ὑπάρχουν περιπτώσεις καθ' ἅς, ὁ κύριος σκοπὸς τῆς ἐρεύνης εἶναι ἡ παρακολούθησις τῆς πορείας τοῦ πληθυσμοῦ διὰ μέσου τοῦ χρόνου, ἤτοι, παρακολούθησις τῆς πορείας πληθυσμῶν, τῶν ὁποίων τὸ μέγεθος καὶ τὰ χαρακτηριστικὰ μεταβάλλονται διὰ μέσου τοῦ χρόνου.

Ἡ δειγματοληψία τῶν δυναμικῶν πληθυσμῶν προϋποθέτει τὴν χρῆσιν ἰδίων σχημάτων δειγματοληψίας. Τὰ ἐν χρήσει σχήματα δειγαματοληψίας δυναμικῶν πληθυσμῶν εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

(i) Ἀνεξάρτητον δεῖγμα : Ἡ μελέτη τῆς πορείας ἑνὸς πληθυσμοῦ εἶναι δυνατὴ διὰ τῆς ἐπιλογῆς ἀνεξαρτήτων ἀλλήλων δειγμάτων (νέων δειγμάτων), κατὰ τὰς διαδοχικὰς χρονικὰς περιόδους π.χ. μηνιαίας, ἐτησίας κ.λ.π. βάσεως. Ἐπὶ παραδείγματι, ἡ παρακολούθησις τῶν μεταβολῶν τῶν καταναλωτικῶν συνηθειῶν τῶν νοικοκυριῶν δεδομένης πόλεως, δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς διαχρονικῆς συγκρίσεως τῶν ἀποτελεσμάτων δειγματοληπτικῶν ἐρευνῶν βασιζομένων ἐπὶ ἀνεξαρτήτων δειγμάτων.

(ii) Σταθερὸν δεῖγμα : Ἡ μελέτη τῆς πορείας ἑνὸς πληθυσμοῦ εἶναι δυνατή, διὰ τῆς χρήσεως τοῦ αὐτοῦ δείγματος διὰ μέσου τοῦ χρόνου. Ἤτοι, τὸ πρῶτον ἐπιλεγόμενον δεῖγμα διατηρεῖται τὸ αὐτὸ διὰ μέσου τοῦ χρόνου.

(iii) Δειγματοληψία μὲ μερικὴν ἐπανατοποθέτησιν : Ἐνταῦθα, μέρος μόνον τοῦ δείγματος ἀντικαθίσταται, ἑκάστην φοράν, τῶν ὑπολοίπων μονάδων διατηρουμένων ἐκ προηγουμένης ἐπιλογῆς. Οὕτω, τὸ δεῖγμα δεδομένης χρονικῆς περιόδου συνίσταται ἐξ ἑνὸς ἀριθμοῦ μονάδων τῆς προηγουμένης χρονικῆς περιόδου (ἢ τῶν προηγουμένων χρονικῶν περιόδων) καὶ ἐξ ἑνὸς ἀριθμοῦ νέων ἐπιλεγομένων μονάδων.

## 2. Τὰ πλεονεκτήματα καὶ μειονεκτήματα τῶν σχημάτων δειγματοληψίας δυναμικῶν πληθυσμῶν

Ἕκαστον τῶν ἀνωτέρων σχημάτων δειγματοληψίας παρουσιάζει πλεονεκτήματα καὶ μειονεκτήματα, κατὰ τὴν ἐφαρμογήν.

Οὕτω, τὰ μειονεκτήματα τοῦ «σταθεροῦ δείγματος» εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

α) Οἱ ἀνταποκριταί, ἤτοι, οἱ τὸ πρῶτον ἐπιλεγόμενοι, παρουσιάζουν ἀπροθυμίαν εἰς τὴν παροχὴν πληροφοριῶν κατὰ τακτὰ χρονικὰ διαστήματα,

β) οὗτοι ἐπηρεάζονται ἐκ τῶν διαδοχικῶν συνεντεύξεων, διαμορφώνουν ἰδίας, ἐπὶ τοῦ ἀντικειμένου τῆς ἐρεύνης, ἀντιλήψεις καὶ οὕτω μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου καθίστανται ὀλιγώτερον ἀντιπροσωπευτικοί,

γ) ἡ σταθερότης τοῦ δείγματος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διατηρηθῇ ἐπὶ πολὺ (ἄρνησις περαιτέρω συνεργασίας, θάνατοι, μετανάστευσις, ἀλλαγὴ κατοικίας) καὶ τοῦτο ἐπηρεάζει τὴν ἀντιπροσωπευτικότητα τοῦ δείγματος.

Τὰ πλεονεκτήματα τοῦ «σταθεροῦ δείγματος» εἶναι :

α) χαμηλὸν κόστος ἐρεύνης,

β) εἰς μερικὰς περιπτώσεις, ἡ συνεργασία τῆς δευτέρας κατὰ σειρὰν καὶ τῶν λοιπῶν συνεντεύξεων ἀποδίδει περισσότερον ἀξιοπίστους πληροφορίας ἐν συγκρίσει μὲ τὴν πρώτην συνέντευξιν. Τοῦτο ἰσχύει ἰδιαιτέρως, ἐπὶ ἐρευνῶν ὅπου ἐπιζητεῖται ἡ συλλογὴ πληροφοριῶν τεχνικῆς φύσεως κ.λ.π.

Πολὺ συχνά, ἡ ἐπιλογὴ τοῦ ἐπιθυμητοῦ σχήματος δειγματοληψίας βασίζεται ἐπὶ τῶν σκοπῶν, τοὺς ὁποίους ἡ ἐπανάληψις τῆς ἐρεύνης ἐξυπηρετεῖ. Οὕτω ἐάν,

1. σκοπὸς τῆς ἐρεύνης εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ ὑπὸ ἔρευναν πληθυσμοῦ διὰ μέσου τοῦ χρόνου, προτείνεται ἡ χρῆσις τοῦ σχήματος τοῦ «σταθεροῦ δείγματος»,

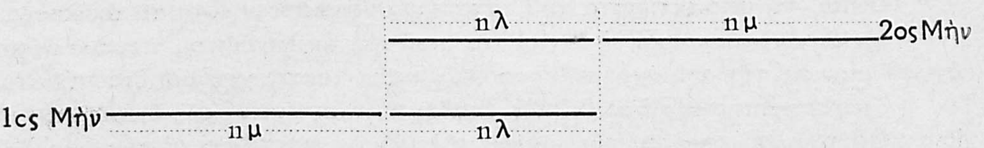
2. σκοπὸς τῆς ἐρεύνης εἶναι ἡ ἐκτίμησις τῆς μέσης, κατὰ περίοδον, τιμῆς δεδομένου χαρακτηριστικοῦ (ἢ χαρακτηριστικῶν) τοῦ ὑπὸ ἔρευναν πληθυσμοῦ, προτείνεται ἡ χρῆσις τοῦ σχήματος τοῦ «ἀνεξαρτήτου δείγματος»,

3. σκοπὸς τῆς ἐρεύνης εἶναι ἡ ἐπίτευξις ἀρίστων τρεχουσῶν ἐκτιμήσεων, προτείνεται ἡ χρῆσις τῶν σχήματος τῆς «δειγματοληψίας» μὲ μερικὴν ἐπανατοποθέτησιν. Σήμερον, τὸ ἐν λόγῳ σχῆμα δειγματοληψίας θεωρεῖται ὡς τὸ πλέον ἐπιθυμητὸν σχῆμα δειγματοληψίας δυναμικῶν πληθυσμῶν. Ἡ θεωρητικὴ θεμελίωσις τοῦ σχήματος τούτου ἔχει ὡς ἀκολούθως.

## 3. Ἡ θεωρία τοῦ σχήματος τῆς δειγματοληψίας μὲ μερικὴν ἐπανατοποθέτησιν

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι σκοπὸς τῆς ἐρεύνης εἶναι ἡ ἐκτίμησις τῆς μέσης τιμῆς δεδομένου χαρακτηριστικοῦ κατὰ τὴν τρέχουσαν χρονικὴν περίοδον. Ἂς θεωρήσωμεν ἐν συνεχείᾳ, τὴν ἁπλουστέραν μορφὴν τῆς δειγματοληψίας μὲ μερικὴν ἐπανατοποθέτησιν, ἤτοι τὴν περίπτωσιν τῶν δύο χρονικῶν περιόδων π.χ. δύο διαδοχικῶν μηνῶν.

Κατὰ τὸν πρῶτον μῆνα, ἓν ἁπλοῦν τυχαῖον δεῖγμα μεγέθους $n$ ἐπιλέγεται ἐκ τοῦ ὑπ' ὄψιν πληθυσμοῦ. Κατὰ τὸν δεύτερον μῆνα, τὸ δεῖγμα συνίσταται ἐκ $n\lambda$ μονάδων τοῦ ἀρχικοῦ δείγματος καὶ ἐκ $n\mu$ νέων μονάδων ($\lambda+\mu=1$). Παραστατικῶς ἡ σύνθεσις τοῦ δείγματος, κατὰ τοὺς δύο διαδοχικοὺς μῆνας δύναται νὰ δοθῇ ὡς ἀκολούθως,




Ἐν συνεχείᾳ, συμβολίζομεν διὰ x καὶ ψ τὰς τιμὰς τοῦ χαρακτηριστικοῦ κατὰ τὰς δύο διαδοχικὰς χρονικὰς περιόδους. Ἐὰν ἡ ἐπιλογὴ τῶν μονάδων τῶν δειγμάτων, κατὰ τὰς δύο περιόδους, εἶχε γίνει μὲ ἐπανατοποθέτησιν τότε, ὁ μέσος ἑκάστου ὑπο-δείγματος nμ, nλ, τοῦ πρώτου δείγματος παρέχει μίαν ἀμερόληπτον ἐκτίμησιν τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ $\overline{X}$. Ὡσαύτως ὁ μέσος ἑκάστου ὑπο-δείγματος nμ, nλ, τοῦ δευτέρου μηνὸς παρέχει μίαν ἐκτίμησιν τοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ $\overline{Y}$, ἤτοι ἐὰν

$$\overline{x}' = \frac{1}{n\lambda}\sum_{j=i}^{n\lambda} x_j\,, \qquad \overline{x}'' = \frac{1}{n\mu}\sum_{j=i}^{n\mu} x_j$$

$$\overline{\psi}' = \frac{1}{n\lambda}\sum_{j=i}^{n\lambda} \psi_j\,, \qquad \overline{\psi}'' = \frac{1}{n\mu}\sum_{j=i}^{n\mu} \psi_j$$

τότε,

$$E(\overline{x}') = E(\overline{x}'') = \overline{X} \quad \text{καὶ} \quad E(\overline{\psi}') = E(\overline{\psi}'') = \overline{Y}\,.$$

Ἐπιδιωκόμενος σκοπὸς εἰς τὸ σχῆμα τῆς δειγματοληψίας μὲ μερικὴν ἐπανατοποθέτησιν, εἶναι ἡ χρῆσις τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς προηγουμένης περιόδου διὰ τὴν ἐπίτευξιν ἀρίστων ἐκτιμήσεων κατὰ τὴν τρέχουσαν περίοδον. Ἐν προκειμένῳ, τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον ἀναφύεται εἶναι τὸ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν $\overline{x}'$, $\overline{x}''$, $\overline{\psi}'$, $\overline{\psi}''$, οὕτως ὥστε νὰ ἐπιτύχωμεν μίαν ἀρίστην ἐκτίμησιν τοῦ $\overline{Y}$.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς ἐκτιμήσεις $\overline{x}'$, $\overline{x}''$, $\overline{\psi}'$, $\overline{\psi}''$, ὑπὸ γραμμικὴν μορφήν,

$$\widehat{\overline{Y}} = \alpha\overline{x}' + \beta\overline{x}'' + \gamma\overline{\psi}' + \delta\overline{\psi}'' \tag{1}$$

τότε, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται λύσιν ἐάν, αἱ ἀκόλουθοι δύο συνθῆκαι πληρωθῶσι:

(i) $E(\widehat{\overline{Y}}) = \overline{Y}$

(ii) $V(\widehat{\overline{Y}}) \rightarrow$ ἡ ἐλαχίστη δυνατή.

***Θεμελίωσις τῆς συνθήκης*** (i)

$$\widehat{\overline{Y}} = \alpha\overline{x}' + \beta\overline{x}'' + \gamma\overline{\psi}' + \delta\overline{\psi}'' \quad (1)$$

καὶ $$E(\widehat{\overline{Y}}) = \alpha E(\overline{x}') + \beta E(\overline{x}'') + \gamma E(\overline{\psi}') + \delta E(\overline{\psi}'')$$

ἢ $$E(\hat{\bar{Y}}) = \alpha\bar{X} + \beta\bar{X} + \gamma\bar{Y} + \delta\bar{Y}$$

ἢ $$E(\hat{\bar{Y}}) = (\alpha + \beta)\bar{X} + (\gamma + \delta)\bar{Y}.$$

Τὸ ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα μᾶς λέγει ὅτι, ἡ συνθήκη (i) πληροῦται ἐάν, $\alpha + \beta = 0$ καὶ $\gamma + \delta = 1$, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐὰν $\beta = -\alpha$ καὶ $\delta = 1 - \gamma$. Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ β καὶ γ διὰ τῶν ἴσων των εἰς τὴν ἰσότητα (1) λαμβάνομεν,

$$\hat{\bar{Y}} = \alpha(\bar{x}' - \bar{x}'') + \gamma\bar{\psi}' + (1 - \gamma)\bar{\psi}'' \tag{2}$$

*Θεμελίωσις τῆς συνθήκης* (ii)

Ἐὰν συμβολίσωμεν διὰ $\sigma_x^2$ καὶ $\sigma_\psi^2$ τὰς διακυμάνσεις κατὰ μονάδα – εἰς τὸν πληθυσμὸν – τοῦ ὑπὸ ἔρευναν χαρακτηριστικοῦ, κατὰ τὰς δύο χρονικὰς περιόδους, τότε,

$$V(\hat{\bar{Y}}) = \alpha^2 V(\bar{x}' - \bar{x}'') + \gamma^2 V(\bar{\psi}') + (1-\gamma)^2 V(\bar{\psi}'') + 2\alpha\gamma Cov.(\bar{x}', \bar{\psi}')$$

$$= \alpha^2 \left[ \frac{\sigma_x^2}{n\lambda} + \frac{\sigma_x^2}{n\mu} \right] + \gamma^2 \frac{\sigma_\psi^2}{n\lambda} + (1-\gamma)^2 \frac{\sigma_\psi^2}{n\mu} + 2\alpha\gamma \frac{\rho\sigma_x \sigma_\psi}{n\lambda}$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι,

$$\sigma_x^2 = \sigma_\psi^2 = \sigma^2$$

τότε,

$$V(\hat{\bar{Y}}) = \frac{\sigma^2}{n} \left[ \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\lambda\mu} + \frac{1 - 2\gamma}{\mu} + \frac{2\alpha\gamma\rho}{\lambda} \right] \tag{3}$$

Τὸ ἑπόμενον βῆμα εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῶν α καὶ γ, οὕτως ὥστε ἡ $V(\hat{\bar{Y}})$ νὰ καθίσταται ἐλαχίστη. Τοῦτο δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ παραγωγίσεως τῆς $V(\hat{\bar{Y}})$ ὡς πρὸς α καὶ γ καὶ ἐξισώσεως τῶν παραγώγων πρὸς τὸ μηδέν :

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}})}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial V(\hat{\bar{Y}})}{\partial \gamma}$$

Ἤτοι,

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}})}{\partial \alpha} = \frac{\sigma^2}{n} \left[ \frac{2\alpha}{\lambda\mu} + \frac{2\rho\gamma}{\lambda} \right] = 0$$

ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι

$$\alpha = -\gamma \rho \mu \tag{4}$$

Ὡσαύτως,

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}})}{\partial \gamma} = \frac{\sigma^2}{n}\left[\frac{2\gamma}{\lambda\mu} - \frac{2}{\mu} + \frac{2\alpha\rho}{\lambda}\right] = 0$$

ἢ
$$\frac{2\gamma}{\lambda\mu} - \frac{2}{\mu} + \frac{2\alpha\rho}{\lambda} = 0\,.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ α διὰ τοῦ ἴσου του εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα, λαμβάνομεν,

$$\frac{2\gamma}{\lambda\mu} - \frac{2}{\mu} - \frac{2\rho^2\gamma\mu}{\lambda} = 0$$

ἢ
$$\gamma(1-\rho^2\mu^2) = \lambda$$

καὶ
$$\gamma_{\text{ἄρ.}} = \frac{\lambda}{1-\rho^2\mu^2}\,.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς $\gamma$ εἰς τὴν ἰσότητα (4) λαμβάνομεν,

$$\alpha_{\text{ἄρ.}} = -\frac{\rho\lambda\mu}{1-\rho^2\mu^2}$$

Τέλος, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν $\alpha_{\text{ἄρ.}}$ καὶ $\gamma_{\text{ἄρ.}}$ εἰς τὸν τύπον (3), λαμβάνομεν,

$$V(\hat{\bar{Y}}_{\text{ἄρ.}}) = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{1-\rho^2\mu}{1-\rho^2\mu^2} \tag{5}$$

Μία διερεύνησις τοῦ τύπου (5) μᾶς λέγει ὅτι, ἡ $V(\hat{\bar{Y}}_{\text{ἄρ.}})$ εἶναι πάντοτε μικροτέρα τῆς $V(\bar{\psi}) = \frac{\sigma^2}{n}$, διακυμάνσεως τοῦ $\bar{\psi}$ ἐπὶ σχήματος ἁπλῆς τυχαίας δειγματοληψίας, διὰ τὸν λόγον ὅτι ὁ ὅρος $\frac{1-\rho^2\mu}{1-\rho^2\mu^2}$, εἶναι πάντοτε μικρότερος τῆς μονάδος. Ἡ $V(\hat{\bar{Y}}_{\text{ἄρ.}})$ καθίσταται ἴση πρὸς τὴν $V(\bar{\psi})$ διὰ $\mu = 1$.

Περαιτέρω ἐλαχιστοποίησις τῆς $V(\hat{\bar{Y}}_{\text{ἄρ.}})$ δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ προσδιορισμοῦ τῆς ἀρίστης τιμῆς τοῦ μ. Τοῦτο δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ παραγωγίσεως τῆς $V(\hat{\bar{Y}}_{\text{ἄρ}})$ ὡς πρὸς μ καὶ ἐξισώσεως τῆς παραγώγου πρὸς τὸ μηδέν,

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}}_{\text{ἄρ.}})}{\partial \mu} = 0$$

ἐξ ἧς προκύπτει,

$$\mu_{\text{ἄρ.}} = \frac{1-\sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\rho^2}} > \frac{1}{2}.$$

Ὁ τύπος (5) διὰ $\mu_{\text{ἄρ.}}$ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως,

$$V(\hat{\bar{Y}}_{\text{ἄρ.}}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{2} \qquad (6)$$

Τέλος, ἡ ἀρίστη τιμὴ τοῦ $\hat{\bar{Y}}$ δίδεται δι' ἀντικαταστάσεως τῶν $\alpha_{\text{ἄρ.}}$ καὶ $\gamma_{\text{ἄρ.}}$ εἰς τὸν τύπον (2), ἤτοι,

$$\hat{\bar{Y}}_{\text{ἄρ.}} = \frac{1}{1-\rho^2\mu^2}\left[\rho\lambda\mu(\bar{x}''-\bar{x}') + \lambda\bar{\psi}' + \mu(1-\mu\rho^2)\bar{\psi}''\right]$$

## 3α. Ἡ σχετικὴ ἀκρίβεια τοῦ σχήματος τῆς δειγματοληψίας μὲ μερικὴν ἐπανατοποθέτησιν

Ἡ σχετικὴ ἀκρίβεια τοῦ σχήματος τῆς δειγματοληψίας μὲ μερικὴν ἐπανατοποθέτησιν ἐν συγκρίσει πρὸς τὸ σχῆμα τῆς ἁπλῆς τυχαίας δειγματοληψίας δίδεται ὑπὸ τοῦ λόγου τοῦ ἀντιστρόφου τῶν διακυμάνσεων αὐτῶν, ἤτοι,

$$\Sigma \cdot A = \frac{1/V(\hat{\bar{Y}})}{1/V(\bar{\psi})} = \frac{V(\bar{\psi})}{V(\hat{\bar{Y}})}$$

ἤ

$$\Sigma \cdot A = \sigma^2/n \Big/ \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{1-\rho^2\mu}{1-\rho^2\mu^2} = \frac{1-p^2\mu^2}{1-p^2\mu} \qquad (8)$$

Εἰς περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχει προσδιορισθῆ καὶ ἡ ἀρίστη τιμὴ τοῦ μ, $\mu_{\text{ἄρ.}}$, ἔχομεν

$$\Sigma \cdot A = \sigma^2/n \Big/ \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2}} \qquad (9)$$

Μία διερεύνησις τῶν ἀνωτέρω τύπων μᾶς λέγει ὅτι, εἰς τὸν τύπον (8) ἡ Σ.Α. εἶναι συνάρτησις τοῦ ρ καὶ μ, ἐνῷ εἰς τὸν τύπον (9) ἡ Σ.Α. εἶναι συνάρτησις τοῦ ρ μόνον.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

*Cochram, W. G. (1953)*: Sampling techniques. John Wiley and Sons, New York.

*Yates, F (1960)*: Sampling methods for censuses and surveys. Charles Griffin and Co, London.

*Hansen - Horwitz - Madow (1953)* : Sample methods and theory. Vol. I, Methods and applications. Vol. II, Theory. John Wiley and Sons, New York.

*Bose - Chameli (1963)* : Note on the sampling error in the method of double sampling. Sankhya, pp. 330.

*Patterson, H. D. (1950)* : Sampling on successive occasions with partial replacement of units. J.R.S.S., B 12, 241 - 255.

*Gray, P. G. and Corlett, T. (1950)* : Sampling for the Social Survey. J.R.S.S., A, 113, 150 - 206.