ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΠΕΙΩΝ ΕΚ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΝΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΑΥΤΟΥ, ΜΕ ΕΙΔΙΚΑΣ ΕΦΑΡΜΟΓΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΔΙΑΤΡΟΦΗΝ ΤΩΝ ΖΩΩΝ

Ὑπὸ Γ. Ε. ΑΝΤΩΝΕΑ καὶ Π. Ν. ΚΑΛΑΪΣΑΚΗ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ [1]

1.1. Γενικὰ

1.1.1. Σκοπὸς τῆς παρούσης μελέτης εἶναι ἡ διερεύνησις τῶν συνεπειῶν ἐπὶ τῆς ἀρίστης λύσεως ὡρισμένων μεταβολῶν εἰς τὰ στοιχεῖα ἑνὸς γραμμικοῦ προβλήματος, εἰδικῶς δὲ εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως ὡς καί τινα τοιαῦτα, ἐκ τῶν ἐξ ὧν ἐξαρτᾶται ἡ περιοχὴ τῶν δυνατῶν λύσεων.

1.1.2. Ἡ πρακτικὴ σημασία τοῦ θέματος δέον ὅπως ἀναζητηθῇ, ἀφ' ἑνὸς μὲν εἰς τὴν ἀποφυγὴν τῆς λύσεως πολλῶν ὁμοίων προβλημάτων, ἅτινα ἀναγκαστικῶς ἤθελον προκύψει, κατὰ τὴν μεταβολὴν τῶν στοιχείων ἑνὸς ἀρχικοῦ προβλήματος, ἀφ' ἑτέρου δέ, καὶ κυρίως, εἰς τήν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν περιθωρίων τῶν ἐπιτρεπτῶν ἑκάστοτε μεταβολῶν, δυνατότητα ἀσκήσεως «πολιτικῆς» ὑπὸ τῶν ἐνδιαφερομένων, πρὸς βελτίωσιν τοῦ ἐπιδιωκομένου ἀποτελέσματος, μὲ περαιτέρω εὐνοϊκὰς ἐπιπτώσεις ἐπὶ τοῦ ὀρθολογικοῦ προσανατολισμοῦ τῆς παραγωγῆς.

Ὄντως, κατὰ τὴν ἄσκησιν, π.χ., πολιτικῆς τιμῶν ἐπὶ τῶν κτηνοτροφῶν ὡς καὶ κατὰ τὴν παρακολούθησιν τῶν συνεπειῶν τῶν τιμολογιακῶν μεταβολῶν ἐπὶ τοῦ κόστους τῶν ἐφαρμοζομένων σιτηρεσίων, χρήσιμος τυγχάνει ἡ γνῶσις τοῦ συνόλου τῶν δυνατῶν μεταβολῶν τῶν τιμῶν, αἵτινες δὲν ἐπηρεάζουσι τὴν σύνθεσιν τῶν σιτηρεσίων. Ὡρισμένη ἐξ ἄλλου πολιτικὴ δύναται νὰ βασίζηται ἐπὶ τῆς δυνατότητος τῆς, ἐντὸς τῶν ὁμοιοστατικῶν ἱκανοτήτων τοῦ ὀργανισμοῦ τοῦ ζώου, μεταβολῆς τῶν ἀπαιτήσεών μας, ὡς πρὸς τὴν σύνθεσιν τῶν σιτηρεσίων. Οὕτω, εἰς τὸν τομέα τῆς κτηνοτροφίας, ἡ ὡς ἄνω δι-

1) Θερμὰς εὐχαριστίας ὀφείλομεν εἰς τὸν Διδάκτορα τῶν Μαθηματικῶν κ. Δημ. Παπαμιχαὴλ διὰ τὴν βοήθειάν του, τὴν ὁποίαν εὐχαρίστως μᾶς παρέσχεν.

ερεύνησις θὰ ἠδύνατο νὰ συμβάλῃ εἰς τὸν καθορισμὸν τοῦ, ὑπὸ τὰς ἑλληνικὰς συνθήκας, ἐνδεδειγμένου τύπου σιτηρεσίου ὡς καὶ τοῦ εἴδους τῶν τροφῶν, αἵτινες ἐνδείκνυνται ἑκάστοτε νὰ χρησιμοποιῶνται εἰς τὴν διατροφὴν τῶν ζώων καὶ νὰ ὑποδείξῃ τὰ μέτρα, ἅτινα θὰ ἔδει ὅπως ληφθῶσιν, ἵνα τὸ ἐκ διατροφῆς κόστος τῶν κτηνοτροφικῶν προϊόντων, ὅπερ τυγχάνει καὶ τὸ μεγαλύτερον συστατικὸν τοῦ κόστους αὐτῶν, μειωθῇ εἰς τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

Ἀλλὰ καὶ εἰς πᾶσαν παραγωγικὴν διαδικασίαν ἡ διερεύνησις αὕτη θὰ ἠδύνατο νὰ ἀποβῇ λίαν χρήσιμος.

1.1.3. Ἡ ἐπὶ τοῦ ὑπὸ μελέτην θέματος διεθνὴς βιβλιογραφία τυγχάνει περιωρισμένη, καθ' ὅσον πρόκειται περὶ πεδίου γνώσεων τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει εἰσέτι διερευνηθῆ. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ὅθεν ταύτης τὸ θέμα παρουσιάζει καὶ θεωρητικὸν ἐνδιαφέρον, ἡ παροῦσα μελέτη δὲ θὰ ἐβοήθει ἴσως εἰς τὴν προώθησίν του, ἐὰν ἐγένετο ἀφορμὴ νὰ δοθῇ συνέχεια καὶ ὑπὸ ἄλλων ἐρευνητῶν.

1.1.4. Ἡ ἐργασία αὕτη ἀποτελεῖ συνέχειαν καὶ συμπλήρωμα προγενεστέρας ἡμῶν τοιαύτης [2]. Ὡς εἰς ἐκείνην, οὕτω καὶ ἐνταῦθα, σημειοῦμεν ὅτι ὁσάκις χρησιμοποιοῦνται συμβολισμοὶ τοῦ λογισμοῦ μητρῶν, οὗτοι παρατίθενται διὰ μικρῶν τυπογραφικῶν στοιχείων, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύνανται νὰ παραλειφθῶσιν, ὑπὸ τῶν μὴ ἐνδιαφερομένων, χωρὶς νὰ παραβλαφθῇ ἡ ἑνότης τοῦ λοιποῦ κειμένου.

2. ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Η ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ [2]

2.1. Τὸ πρόβλημα

2.1.1. Τὸ γραμμικὸν πρόβλημα δύναται νὰ τεθῇ πάντοτε ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον γενικὴν μορφήν.

Εὑρεῖν $x_j \geqslant 0$ $\quad j=1,2,\ldots,n \quad (1)$

ὥστε, συναληθευουσῶν τῶν σχέσεων : $\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j x_j = \alpha_i^0$ $\quad (2) \quad i=1,2,\ldots,m$

ἡ συνάρτησις : $\sum_{j=1}^{n} c^j x_j = \min$ (ἢ $\max$) $\quad (3)$

2.1.2. Διὰ τοῦ συμβολισμοῦ μητρῶν, τὸ πρόβλημα διατυποῦται ὡς ἑξῆς :

Εὑρεῖν διάνυσμα $\underset{(n\times1)}{X} > \underset{(n\times1)}{O}$ $\quad (4)$

οὕτως ὥστε $\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times1)}{X} = \underset{(m\times1)}{A^0}$ $\quad (5)$

καὶ $\underset{(1\times n)}{C'}\ \underset{(n\times1)}{X} = \min(\max)$ $\quad (6)$

2.2. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος

2.2.1. Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου, ἐκκινοῦμεν ἐξ ἑνὸς συνόλου διανυσμάτων $A^1, A^2, \ldots, A^k, \ldots, A^m$ τῆς μήτρας A τῶν συντελεστῶν a_i^j. (Ἕκαστον ἐκ τῶν διανυσμάτων τούτων, π.χ. τὸ A^k, περιλαμβάνει σύνολον συντελεστῶν a_i^k, ὅπου ὁ κατώτερος μόνον δείκτης εἶναι μεταβλητός). Τὰ διανύσματα ταῦτα συνιστοῦν μίαν βάσιν, ἡ ὁποία ἔχει τὰς ἑξῆς ἐνδιαφερούσας ἐν προκειμένῳ ἰδιότητας :

α) Οἱονδήποτε διάνυσμα τῆς μήτρας A, ἐκτὸς τῆς βάσεως, καὶ τὸ διάνυσμα A^0 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ γραμμικῶς, συναρτήσει τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως.

β) Εἰς τὰ διανύσματα τῆς βάσεως ἀντιστοιχοῦν αἱ θετικαὶ τιμαὶ $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_m$, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας μιᾶς κορυφῆς τοῦ πολυέδρου τῶν δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος. Αἱ λοιπαὶ $n-m$ μεταβληταί, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ ἐκτὸς τῆς βάσεως διανύσματα εἶναι μηδενικαί (1).

2.2.2. Ἀλλαγὴ εἰς τὴν βάσιν ταύτην, τὴν ὁποίαν πρὸς διευκόλυνσιν θεωροῦμεν μοναδιαίαν, δι' ἀντικαταστάσεως ἑνὸς διανύσματος αὐτῆς, π.χ., τοῦ A^k ὑπὸ ἄλλου ἐκτὸς αὐτῆς, ἔστω τοῦ A^j, ἰσοδυναμεῖ μὲ μετάβασιν εἰς μίαν νέαν κορυφὴν τοῦ πολυέδρου τῶν δυνατῶν λύσεων, ἡ ὁποία ἔχει ὡς καρτεσιανὰς συντεταγμένας τὰς θετικὰς μεταβλητὰς $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_m$, ἀντιστοιχούσας εἰς τὰ διανύσματα $A^1, A^2, \ldots, A^j, \ldots, A^m$ τῆς νέας βάσεως. Αἱ λοιπαὶ $n-m$ μεταβληταὶ εἶναι μηδενικαί.

2.2.3. Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον ἐλάχιστον (ἢ μέγιστον) τῆς συναρτήσεως (3) πραγματοποιεῖται εἰς μίαν ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου, ἐπιχειροῦμεν ἀλλεπαλλήλους ἀλλαγὰς εἰς τὴν βάσιν ἤ, ἄλλως, ἀλλάσσομεν συνεχῶς κορυφήν, μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς ἐκείνην, ὅπου ἐλαχιστοποιεῖται (ἢ μεγιστοποιεῖται) ἡ συνάρτησις (3).

2.2.4. Τρία προβλήματα τίθενται, κατὰ τὰς ἀλλαγὰς εἰς τὴν βάσιν. α) Ὁ ὁρισμὸς τοῦ διανύσματος, τὸ ὁποῖον, ἀντικαθιστάμενον, θὰ ἐξέλθῃ τῆς βάσεως. β) Ὁ ὁρισμὸς τοῦ διανύσματος, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν νέαν βάσιν καὶ γ) Ὁ μετασχηματισμὸς καὶ προσαρμογὴ τῶν στοιχείων τοῦ προβλήματος εἰς τὴν νέαν βάσιν.

2.2.5. Διὰ δοθέν, νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν βάσιν, διάνυσμα A^j τὸ ἐξερχόμενον αὐτῆς διάνυσμα A^k ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

Ἔστω A^i, $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots, m$, τὰ διανύσματα τῆς βάσεως (2).

---

1) Δὲν ἐξετάζεται ἡ περίπτωσις τῆς ἀπροσδιοριστίας, ὅπου εἶναι δυνατὴ ἡ ὕπαρξις τινῶν $x_i = 0$, ἐκ τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὰ διανύσματα τῆς βάσεως.

2) Γίνεται χρῆσις κατὰ προτίμησιν, μοναδιαίας βάσεως, τὴν ὁποίαν εὐκόλως κατασκευάζομεν, ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ εἰς τὸ πρόβλημα. Λόγῳ τῆς μοναδιαίας βάσεως, x_i ταυτίζον-

Συμφώνως πρὸς τὴν 2.2.1. β, τὸ σημεῖον $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m}$ εἶναι κορυφὴ τοῦ πολυέδρου, ἄρα δυνατὴ λύσις τοῦ προβλήματος. Ὅθεν:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i A^i = A^0 \tag{7}$$

Ἐξ ἄλλου, συμφώνως πρὸς τὴν παρ. 2.2.1. α, τὸ A^j ἐκφράζεται γραμμικῶς συναρτήσει τῆς βάσεως, διὰ συντελεστῶν ἔστω x_{ij}, $i=1,2,\ldots,k,\ldots,m$. Ἤτοι:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} A^i = A^j \tag{8}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν (8) ἐπὶ θ:

$$\sum_{i=1}^{m} \theta\, x_{ij} A^i = \theta A^j \tag{9}$$

καὶ ἐκ τῶν (7) καὶ (9) ἔχομεν:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \theta x_{ij}) A^i + \theta A^j = A^0 \tag{10}$$

Ἤτοι:

$$x_1 - \theta x_{1j},\ x_2 - \theta x_{2j},\ \ldots,\ x_k - \theta x_{kj},\ \ldots,\ x_m - \theta x_{mj},\ \theta \tag{11}$$

εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Συμφώνως ὅμως πρὸς τοὺς περιορισμοὺς (1), πρέπει $x_i - \theta x_{ij} \geqslant 0$, δι' ὅλα τὰ $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots, m$ καὶ $\theta \geqslant 0$. Ἐξ ἄλλου, ἡ νέα βάσις πρέπει νὰ περιλαμβάνῃ, ὅπως καὶ ἡ παλαιά, m διανύσματα ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ νέα λύσις-κορυφὴ νὰ ἔχῃ m θετικὰς συνιστώσας. Ἄρα, πρέπει νὰ ὁρισθῇ τὸ $\theta > 0$ [1], ὥστε νὰ μηδενισθῇ μία ἐκ τῶν συνιστωσῶν $x_i - \theta x_{ij}$ τῆς λύσεως (11). Εὐκόλως προκύπτει ὅτι πρέπει:

$$0 < \theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}}$$

ἤ

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}}, \text{ διὰ } x_{ij} > 0 \text{ [2]} \tag{12}$$

Ἐὰν τὸ $\min_i \dfrac{x_i}{x_{ij}} = \theta_0$ πραγματοποιεῖται, π.χ., διὰ $i = k$, τότε ἡ συν-

---

ται μὲ a_i^0 καὶ x_{ij} (βλέπε κατωτέρω) ταυτίζονται πρὸς αὐτὰ ταῦτα τὰ στοιχεῖα τῶν ἐκτὸς τῆς βάσεως διανυσμάτων.

1) Ἡ τιμὴ $\theta = 0$ ἀποκλείεται, διότι δὲν πραγματοποιεῖται διὰ ταύτης ἀλλαγὴ εἰς τὴν βάσιν, ὡς ἐπιδιώκεται.

2) Φροντίζομεν ὥστε τὰ x_i νὰ εἶναι πάντοτε θετικά.

ιστῶσα $x_\kappa - \theta x_{kj} = 0$ καὶ τὸ διάνυσμα A^k ἀντικαθίσταται, εἰς τὴν νέαν βάσιν, ὑπὸ τοῦ A^j. Ἡ νέα βάσις θὰ εἶναι : $A^1, A^2, \ldots, A^j, \ldots, A^m$ καὶ ἡ νέα λύσις:

$$x_1 - \theta x_{1j},\ x_2 - \theta_{2j},\ \ldots,\ \theta,\ \ldots,\ x_m - \theta x_{mj} \tag{13}$$

2.2.6. Τὰ ἀνωτέρω διατυποῦνται ὡς ἑξῆς, διὰ τοῦ συμβολισμοῦ μητρῶν, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ = σύνολον τῶν δεικτῶν τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως.

$$A^I X_I = A^0 \quad (\text{ἀντίστοιχος τῆς } (7)) \tag{14}$$

$$A^I X_{Ij} = A^{j^*} \quad (\text{» » } (8)) \tag{15}$$

$$\theta A^I X_{Ij} = \theta A^j \quad (\text{» » } (9)) \tag{16}$$

$$A^I (X_I - \theta X_{Ij}) + \theta A^j = A^0 \quad (\text{» » } (10)) \tag{17}$$

Ἡ λύσις (11) παρίσταται, διὰ τοῦ ἐπιμερισμένου διανύσματος $m+1$ συνιστωσῶν :

$$\begin{bmatrix} X_I - \theta X_{Ij} \\ \theta \end{bmatrix}$$

Ἐπειδὴ πρέπει :

α) Τὸ ὡς ἄνω διάνυσμα - νέα λύσις νὰ περιλαμβάνῃ m συνιστώσας καὶ

β) $X_I - \theta X_{Ij} \geqslant 0$ καὶ $\theta > 0$,

ἐπιβάλλεται, διὰ τὸ θ, ἡ τιμὴ ἡ ὁποία ὁρίζεται διὰ τῆς σχέσεως (12).

2.2.7. Τὸ εἰσακτέον ἑκάστοτε εἰς τὴν βάσιν διάνυσμα A^j (τὸ ὁποῖον εἰς τὰ προηγούμενα ὑπετέθη δοθὲν) ὁρίζεται, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ἐκ τῆς ἀλλαγῆς τῆς βάσεως καὶ τῆς κορυφῆς - λύσεως ἐπερχομένη μεταβολὴ τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως (3), νὰ εἶναι, εἰς τὸ στάδιον ὅπου γίνεται ἡ ἀλλαγή, ἡ μεγίστη δυνατή.

Ἡ τιμὴ τῆς πρὸς ἐλαχιστοποίησιν συναρτήσεως εἶναι, διὰ τὴν ἀρχικὴν βασικὴν λύσιν (βλ. (7)) :

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c^i x_i \tag{18}$$

Ἡ νέα τιμή της, ἔστω z, γίνεται διὰ τὴν λύσιν (13) (βλ. καὶ (10)).

$$z = \sum_{i=1}^{m} c^i (x_i - \theta x_{ij}) + \theta c^j$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} c^i x_i}_{z_0} - \theta \, [\underbrace{\sum_{i=1}^{m} c^i x_{ij}}_{z_j} - c^j] \tag{19}$$

$$= z_0 - \theta (z_j - c^j) \tag{20}$$

---

* Διὰ X_{Ij} παρίσταται τὸ διάνυσμα τῶν συντελεστῶν x_{ij}, διὰ τῶν ὁποίων ἐκφράζεται γραμμικῶς τὸ διάνυσμα A^j, συναρτήσει τῆς βάσεως A^I.

	α.ά.	βάσις	C ↓	B ↓	F → A^0	$1+\frac{1}{2}\lambda$ A^1	$-2+\frac{2}{3}\lambda$ A^2	$1-\lambda$ A^3	0 A^4	0 A^5	w A^6	w A^7
α	1	A^4	0		46	8	12	−1	1	0	0	0
	2	A^6	w		4	1	$\boxed{2}$	−1	0	−1	1	0
	3	A^7	w		4	1	1	1	0	0	0	1
	4				0	−1	2	−2	0	0	0	0
	5	$z_j - f^j$			0	0	0	0	0	0	0	0
	6				8	2	3	0	0	−1	0	0
1	1	A^4	0		22	2	0	5	1	6		0
	2	A^2	−2	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$		0
	3	A^7	w		2	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$		1
	4				−4	−2	0	0	0	1		0
	5	$z_j - f^j$			$\frac{4}{3}$	−1/6	0	2/3	0	−1/5		0
	6				2	−1/2	0	3/2	0	1/2		0
2	1	A^4	0		46/3	1/3	0	0	1	$\boxed{13/3}$		
	2	A^2	−2	$\frac{2}{3}$	8/3	2/3	1	0	0	−1/3		
	3	A^3	1	−1	4/3	1/3	0	1	0	1/3		
	4				−4	−2	0	0	0	1		
	5	$z - f^j$			4/9	−7/18	0	0	0	−5/9	$9/5 \leqslant \lambda \leqslant \infty$	
	6				0	0	0	0	0	0		
3												

	α.α.	Βάσις	F		$F \rightarrow$	$\beta^1 + \lambda\gamma^1$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\beta^k + \lambda\gamma^k$
			B	Γ	A^0	A^1	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	A^k
ρ	1	A^1	β^1	γ^1	x_1	x_{11}	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	x_{1k}
	2	A^2	β^2	γ^2	x_2	x_{21}	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	x_{2k}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	k	A^k	β^k	γ^k	x_k	x_{k1}	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	x_{kk}
	k+1	A^{k+1}	w	—	x_{k+1}	$x_{(k+1)1}$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	$x_{(k+1)k}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	m	A^m	w	—	x_m	x_{m1}	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	x_{mk}
	m+1				$\mu_0' = \sum_{i \in I_1} \beta^i x_i$	$\mu_1' = \sum_{i \in I_1} \beta^i x_{i1} - \beta^1$		$\mu_k' = \sum_{i \in I_1} \beta x_{ik} - \beta^k$
	m+2	$z_j - f^j$			$\nu_0 = \sum_{i \in I_1} \gamma^i x_i$	$\nu_1 = \sum_{i \in I_1} \gamma^i x_{i1} - \gamma^1$		$\nu_k = \sum_{i \in I_1} \gamma^i x_{ik} - \gamma^k$
	m+3				$\mu_0'' = w \sum_{i \in I_2} x_i$	$\mu_k'' = w \sum_{i \in I_2} x_{i1}$		$\mu_k'' = w \sum_{i \in I_2} x_{ik}$

Πίναξ 1

$\beta^{k+1} + \lambda\gamma^{k+1}$	$\cdots\cdots$	$\beta^m + \lambda\gamma^m$	$\cdots\cdots$	$\beta^n + \lambda\gamma^n$
A^{k+1}	$\cdots\cdots$	A^m	$\cdots\cdots$	A^n
$x_{1(k+1)}$ $x_{2(k+1)}$ $\vdots$ $x_{k(k+1)}$ $x_{(k+1)(k+1)}$ $\vdots$ $x_{m(k+1)}$	$\cdots\cdots$ $\cdots\cdots$ $\vdots$ $\cdots\cdots$ $\cdots\cdots$ $\vdots$ $\cdots\cdots$	x_{1m} x_{2m} $\vdots$ x_{km} $x_{(k+1)m}$ $\vdots$ x_{mm}	$\cdots\cdots$ $\cdots\cdots$ $\vdots$ $\cdots\cdots$ $\cdots\cdots$ $\vdots$ $\cdots\cdots$	x_{1n} x_{2n} $\vdots$ x_{kn} $x_{(k+1)n}$ $\vdots$ x_{mn}
$\mu'_{k+1} = \sum_{i \in I_1} \beta^i x_{i(k+1)} - \beta^{k+1}$ $\nu_{k+1} = \sum_{i \in I_1} \gamma^i x_{i(k+1)} - \gamma^{k+1}$ $\mu''_{k+1} = w \sum_{i \in I_2} x_{ik}$		$\mu'_m = \sum_{i \in I_2} \beta^i x_{im} - \beta^m$ $\nu_m = \sum_{i \in I_1} \gamma^i x_{im} - \gamma^m$ $\mu''_m = w \sum_{i \in I_2} x_{im}$		$\mu'_n = \sum_{i \in I_1} \beta^i x_{in} - \beta^n$ $\nu_n = \sum_{i \in I_1} \gamma^i x_{in} - \gamma^n$ $\mu''_n = w \sum_{i \in I_2} x_{in}$

Εἶναι φανερὸν ὅτι, τοῦ θ ὄντος θετικοῦ, ἡ μεγαλυτέρα μείωσις τῆς οἰκονομικῆς συναρτήσεως πραγματοποιεῖται, διὰ $z_j - c^j > 0$ μέγιστον. Τὸ εἰσακτέον λοιπὸν εἰς τὴν βάσιν διάνυσμα θὰ ὁρισθῇ, βάσει τοῦ κριτηρίου τούτου. Ἤτοι, θὰ εἶναι τὸ A^j, $j = m+1, m+2, \ldots, n$, διὰ τὸ ὁποῖον $z_j - c^j > 0$ μέγιστον. Τὸ αὐτὸ κριτήριον θὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπιδιώκεται μεγιστοποίησις τῆς συναρτήσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὅμως θὰ ἀναζητήσωμεν τὸ ἐλάχιστον, δι' ἀλλαγῆς τῶν σημείων τῆς συναρτήσεως, ἤτοι ἀντὶ τοῦ $\max \sum_j c^j x_j$, θὰ ἀναζητήσωμεν τὸ $\min \cdot [-\sum_j c^j x_j]$.

2.2.8. Διὰ τοῦ συμβολισμοῦ μητρῶν θὰ ἔχωμεν τὰ ἀνωτέρω ὡς ἑξῆς, ἐὰν

$I = \{1, 2, \ldots, m\}$ = σύνολον δεικτῶν τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως

$\bar{I} = \{m+1, m+2, \ldots, n\}$ = σύνολον δεικτῶν τῶν διανυσμάτων ἐκτὸς τῆς βάσεως

$$z_0 = C'^I X \qquad \text{(ἀντίστοιχος τῆς (18))} \qquad (21)$$

$$z = [C'^I, c^j] \begin{bmatrix} X_I - \theta X_{Ij} \\ \theta \end{bmatrix} \qquad (22)$$

$$= C'^I (X_I - \theta X_{Ij}) + \theta c^j \qquad \text{(ἀντίστοιχος τῆς (19))} \qquad (23)$$

$$= \underbrace{C'^I X_I}_{z_0} - \theta(\underbrace{C'^I X_{Ij}}_{z_j} - c^j)$$

$$= C'^I (A^I)^{-1} A^0 - \theta\, [\underbrace{C'^I (A^I)^{-1} A^j - c^j}_{\delta^j = z_j - c^j}]\,^* \qquad (24)$$

$$= z_0 - \theta\delta^j \qquad \text{(ἀντίστοιχος τῆς (20))} \qquad (25)$$

Ἀντὶ τοῦ διανύσματος A^j, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἐκτὸς τῆς βάσεως διανυσμάτων. Θὰ ἔχωμεν, δι' ἐπιμερισμοῦ τῶν μητρῶν A, X, C':

$$A X = [A^I, A^{\bar{I}}] \begin{bmatrix} X_I \\ X_{\bar{I}} \end{bmatrix} = A^I X_I + A^{\bar{I}} X_{\bar{I}} = A^0 \qquad (26)$$

$$C'X = [C'^I, C'^{\bar{I}}] \begin{bmatrix} X_I \\ X_{\bar{I}} \end{bmatrix} = C'^I X_I + C'^{\bar{I}} X_{\bar{I}} \qquad (27)$$

Ἐκ τῆς (26) προκύπτει:

$$X_I = (A^I)^{-1} (A^0 - A^I X_{\bar{I}}) \qquad (28)$$

---

* Ἀντικατεστάθησαν τὰ X_I καὶ X_{Ij} διά:

$X_I = (A^I)^{-1} A^0$, τιμὴ προκύπτουσα διὰ λύσεως τῆς $A^I X_I = A^0$

$X_{Ij} = (A^I)^{-1} A^j$, » » » » » $A^I X_{Ij} = A^j$

Ἐκ τῶν (27) καὶ (28) δέ :

$$C'X = [\underbrace{-C'^{I}(A^{I})^{-1}A^{\bar I} + C'^{\bar I}}_{-\Delta^{\bar I}}]\,X_{\bar I} + \underbrace{C'^{I}(A^{I})^{-1}A^{0}}_{z_0} \tag{29}$$

$$= z_0 - \Delta^{\bar I} X_{\bar I} \tag{30}$$

Τὸ διάνυσμα - γραμμὴ $\Delta^{\bar I} = C'^{I}(A^{I})^{-1}A^{\bar I} - C'^{\bar I}$ εἶναι τὸ κριτήριον ἀλλαγῶν εἰς τὴν βάσιν. Τὰ στοιχεῖα του εἶναι $z_j - c^j$, $j \in \bar I$ (βλ. (20) καὶ (25)) καὶ τὸ ἐκ τούτων μέγιστον θετικὸν προσδιορίζει τὸ εἰσακτέον εἰς τὴν βάσιν διάνυσμα, ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ἐκτὸς αὐτῆς διανυσμάτων $A^{\bar I}$. Τούτου ὁριζομένου, ἡ σχέσις (30) ταυτίζεται πρὸς τὴν (25),

2.2.9. Μεθ' ἑκάστην ἀλλαγὴν εἰς τὴν βάσιν, ὅλα τὰ ἐκτὸς αὐτῆς διανύσματα πρέπει νὰ ἐκφρασθῶσι, συναρτήσει τῆς νέας ταύτης βάσεως. Οὕτω, ὅλα τὰ στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων δέον νὰ μετασχηματισθῶσιν, οὕτως ὥστε, τῶν μὲν ἐντὸς τῆς βάσεως νὰ συνιστοῦν μίαν μοναδιαίαν μήτραν, τῶν δὲ ἐκτὸς αὐτῆς νὰ ἀποτελοῦν τοὺς συντελεστάς, διὰ τῶν ὁποίων ἕκαστον διάνυσμα ἐκφράζεται γραμμικῶς, συναρτήσει τῆς νέας μοναδιαίας βάσεως. Αἱ σχετικαὶ ἀριθμητικαὶ πράξεις, ἐφ' ὅσον γίνονται διὰ τῆς χειρός, διευκολύνονται διὰ τῆς διατάξεως τῶν στοιχείων τοῦ προβλήματος εἰς πίνακας καὶ τῆς χρησιμοποιήσεως πρακτικοῦ κανόνος (ἀλγορίθμου). Ὁ ἀλγόριθμος βασίζεται ἐπὶ τῶν κάτωθι μετασχηματισμῶν τῶν στοιχείων τοῦ προβλήματος, εἰς τὸ σημεῖον τῆς διαδικασίας τῆς λύσεως, ὅπου τὸ ἐκτὸς τῆς παλαιᾶς βάσεως διάνυσμα A^j ἀντικαθιστᾶ τὸ ἐντὸς αὐτῆς διάνυσμα A^k.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος A^0 μετασχηματίζονται, διά:

$$x_i - \frac{x_k}{x_{kj}}\, x_{ij}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, (k-1), (k+1), \ldots, m \tag{31}$$

Τὰ στοιχεῖα $x_{i\rho}$, οἱουδήποτε ἄλλου διανύσματος A^{ρ}, μετασχηματίζονται ὁμοίως, διά :

$$x_{i\rho} - \frac{x_{k\rho}}{x_{kj}}\, x_{ij}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, (k-1), (k+1), \ldots, m \tag{32}$$

Οἱ αὐτοὶ μετασχηματισμοὶ γίνονται καὶ εἰς τὸ κριτήριον ἀλλαγῶν.Οὕτω, τὸ $z_\rho - c^\rho$ τῆς στήλης ρ, θὰ μετασχηματισθῆ εἰς $z'_\rho - c^\rho$ διὰ τοῦ τύπου:

$$z'_\rho - c^\rho = (z_\rho - c^\rho) - \frac{x_{k\rho}}{x_{kj}}\,(z - c^j) \tag{33}$$

Τέλος, τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς k, ὅπου πραγματοποιεῖται

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{ij}}, \quad \text{διὰ} \quad x_{ij} > 0 \quad (\text{βλ. } (12))$$

μετασχηματίζονται, ἐφ' ἅπαξ, διὰ τοῦ τύπου :

$$\frac{x_k}{x_{kj}}, \ \frac{x_{k\rho}}{x_{kj}}, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, n \tag{34}$$

Ἡ ἀρίστη λύσις ἐπιτυγχάνεται μετ' ἀλλεπαλλήλους τοιαύτας ἀλλαγὰς εἰς τὴν βάσιν, καὶ δὴ εἰς τὸ σημεῖον ἔνθα, δι' οἱονδήποτε διάνυσμα A^j, κείμενον ἐκτὸς τῆς βάσεως, $z_j - c^j \leqslant 0$ (βλ. (20)).

3. ΜΕΤΑΒΟΛΑΙ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1. Εἰς τὸ κλασσικὸν γραμμικὸν πρόβλημα, ὡς τοῦτο ἐξετέθη προηγουμένως, ἐθεωρήθη ὅτι τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα εἶναι ὡρισμένα καὶ σταθερά, ἐπὶ τῇ βάσει δὲ τῆς ὑποθέσεως ταύτης εὑρέθη ἡ ἀρίστη λύσις. Ἐν τούτοις, εἰς πλείστας περιπτώσεις ἐν τῇ πράξει, ὁ μετ' ἀκριβείας ὁρισμὸς τῶν στοιχείων τούτων εἶναι ἀνέφικτος, εἰς ἄλλας δὲ ταῦτα μεταβάλλονται ἐν τῷ χρόνῳ, εἰς τρόπον ὥστε ἀπαιτεῖται ἐπανάληψις τῆς διαδικασίας ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος, ἵνα διαπιστωθῇ, ἐὰν ἡ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν παλαιῶν δεδομένων ἐπιτευχθεῖσα λύσις ἐξακολουθῇ νὰ εἶναι ἀρίστη καὶ ὑπὸ τὴν νέαν ἀριθμητικὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος. Πόσον ὅμως χρήσιμος θὰ ἦτο, εἰς τὰς περιπτώσεις τούτας, ἡ γνῶσις τοῦ εἴδους καὶ τῆς ἐκτάσεως τῆς ἐξαρτήσεως τῆς ἀρίστης λύσεως ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος! Διότι ἐκτὸς τοῦ ὅτι θὰ ἠδύνατό τις νὰ γνωρίζῃ ἐκ τῶν προτέρων κατὰ πόσον τὸ ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν τεχνολογικῶν καὶ οἰκονομικῶν συντελεστῶν τοῦ προβλήματος, ἐπὶ πλέον, θὰ ἠδύνατο νὰ καθορίσῃ τὴν κριτικὴν ζώνην, πέραν τῆς ὁποίας ὀφείλει νὰ ἐπανατοποθετήσῃ καὶ νὰ λύσῃ, βάσει τῶν νέων δεδομένων, τὸ πρόβλημα, καθ' ὅσον ἡ γνωστὴ προτέρα λύσις τούτου παύει νὰ εἶναι ἀρίστη, ὑπὸ τὰς νέας συνθήκας. Ἐὰν μάλιστα ἡ μεταβολὴ τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος δὲν εἶναι τυχαία ἀλλ' ἐγνωσμένη καὶ ἀποτελῇ τμῆμα ὡρισμένης «πολιτικῆς», ἡ γνῶσις τοῦ ὁρίου ἀντοχῆς τῆς ἀρίστης λύσεως ἢ τῶν δυνατοτήτων ἐπιτεύξεως μιᾶς ἔτι καλλιτέρας λύσεως, δι' ἐνδεχομένης μεταβολῆς ὡρισμένων στοιχείων τοῦ προβλήματος, δύναται νὰ ἀποτελέσῃ τὸ μέτρον, διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς ἀξίας τῆς πολιτικῆς ταύτης, καὶ νὰ ἐπιτρέψῃ τὴν ἐξαντλητικὴν ἐκμετάλλευσιν τῶν διαθεσίμων δυνατοτήτων.

3.2. Τὸ πρόβλημα τῆς ἐπιδράσεως τῆς κυμάνσεως τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων ἐπὶ τῆς λύσεως, τίθεται συνήθως ἐκ τῶν ὑστέρων, ἀφοῦ δηλαδὴ εὑρεθῇ ἡ ἀρίστη λύσις. Ἐν τούτοις, εἶναι δυνατὸν νὰ τεθῇ τοῦτο καὶ ἐκ τῶν προτέρων, μὲ σκοπὸν τὴν διερεύνησιν τοῦ συνόλου τῶν ἀρίστων προγραμμάτων - λύσεων, καὶ δὴ διὰ τῆς ἐξαρτήσεως ἐκ μεταβλητῶν παραμέτρων, ὡρισμένων ἀριθμητικῶν στοιχείων τοῦ προβλήματος. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας, ἐπιδιώκεται ἡ λύσις τοῦ προβλήματος δι' ἁπάσας τὰς δυναμένας νὰ ἐπισυμβῶσι μεταβολὰς εἰς τὰ ἀριθμητικὰ ταῦτα στοιχεῖα. Ἐν τῇ παρούσῃ ἐργασίᾳ προτιθέμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἀντοχὴν τῆς ἀρίστης λύσεως εἰς μεταβολὰς ἀφορώσας :

α) εἰς τοὺς συντελεστὰς τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως ἤ, ἄλλως, εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος - γραμμῆς C' καὶ

β) εἰς τοὺς σταθεροὺς ὅρους α_i^0, $i = 1, 2, \ldots, m$, τῶν περιορισμῶν (2) ἤ, ἄλλως, εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος - στήλης A^0.

4. ΕΠΙΔΡΑΣΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΗΣ ΛΥΣΕΩΣ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΗΣ ΠΡΟΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

4.1. Γενικὰ

4.1.1. Ἡ διαδικασία τῶν ἀλλαγῶν εἰς τὴν βάσιν, μέχρις ἐπιτεύξεως τῆς ἀρίστης λύσεως ἑνὸς γραμμικοῦ προβλήματος, ἥτις περιεγράφη προηγουμένως (βλ. § 2), λαμβάνει χώραν, ὡς ἐλέχθη, σταδιακῶς, ἕκαστον δὲ στάδιον περιλαμβάνεται εἰς ἕνα καταλλήλως διατεταγμένον πίνακα. Διὰ τὴν ἀποφυγὴν ἀσκόπων ἐπαναλήψεων παραπέμπομεν σχετικῶς εἰς τὴν προηγουμένην ἐργασίαν μας [2], ἔνθα δίδονται οἱ πίνακες ἑνὸς γενικοῦ γραμμικοῦ προβλήματος (πίνακες 6 καὶ 7) ὡς καὶ ἑνὸς εἰδικωτέρου, ἀφορῶντος εἰς τὸν καταρτισμὸν ἑνὸς ἐκ συμπεπυκνωμένων τροφῶν μίγματος γαλακτοπαραγωγῆς ἀγελάδων (πίνακες παραρτήματος).

4.1.2. Ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους πινάκων ἑνὸς προβλήματος, ἰδιαιτέρως πλούσιος εἰς πληροφορίας εἶναι ὁ τελευταῖος πίναξ τῆς διαδικασίας, ὅστις περιλαμβάνει καὶ τὴν ἀρίστην λύσιν. Κατωτέρω, θὰ ἐπιχειρήσωμεν νὰ ἐκμεταλλευθῶμεν τὸ περιεχόμενον τοῦ πίνακος τούτου, διὰ τὴν διερεύνησιν τῆς ἀντοχῆς τῆς ἀρίστης λύσεως, συναρτήσει μεμονωμένων μεταβολῶν τῶν στοιχείων τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως.

4.2. Τὸ θέμα καὶ ἡ μέθοδος

4.2.1. Ὁσάκις ἡ πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησις ἔχει οἰκονομικὸν περιεχόμενον (οἰκονομικὴ συνάρτησις), οἱ συντελεσταὶ ταύτης εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγαθῶν ἢ ὑπηρεσιῶν, τῶν ὁποίων ἐπιζητοῦμεν νὰ ὁρίσωμεν τὰς εἰς τὸ πρόγραμμα ποσότητας. Καίτοι εὐρεῖαι τοὐλάχιστον μεταβολαὶ τῶν τιμῶν δὲν εἶναι συνήθεις, εἰς μικρὰ χρονικὰ διαστήματα, προκειμένου περὶ ἀγαθῶν ὑπεισερχομένων εἰς προβλήματα ἐπιλυόμενα διὰ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἐν τούτοις, μόνη ἡ πληροφορία τῆς ἀρίστης λύσεως, βασιζομένης εἰς ὡρισμένον σύστημα τιμῶν, οἷαι αἱ κρατοῦσαι κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος, δὲν εἶναι ἐπαρκής. Θὰ ἦτο λίαν χρήσιμον, ἐάν, συγχρόνως, κατετοπιζώμεθα περὶ τῶν δυνατοτήτων τῆς παραμονῆς τῶν εἰσελθόντων εἰς τὸ πρόγραμμα καὶ τῶν δυνατοτήτων συμμετοχῆς εἰς τοῦτο τῶν μὴ εἰσελθόντων ἀγαθῶν, ὅταν αἱ τιμαὶ τούτων μεταβάλλωνται, καθ' ὅσον, οὕτω, θὰ ἦτο, ἐπὶ πλέον, δυνατὴ ἡ οἰκονομικὴ ἀξιολόγησις τῶν ἀγαθῶν καὶ ἡ ἄσκησις λελογισμένης καὶ ἐπὶ ἀντικειμενικῆς βάσεως στηριζομένης τιμολογιακῆς ἢ ἄλλης πολιτικῆς. Τὸ θέμα δύναται νὰ ἔχῃ περιεχόμενον καὶ εἰς ἃς περιπτώσεις οἱ συντελεσταὶ τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως δὲν ἔχουσιν ἔννοιαν τιμῶν.

Πρὸς καλλιτέραν κατανόησιν, θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν σχετικὴν μέθοδον ἐπὶ τοῦ εἰς τὴν ἐργασίαν μας [2] ἀναφερθέντος καὶ ἐπιλυθέντος προβλήματος τοῦ καταρτισμοῦ μίγματος γαλακτοπαραγωγῆς.

4.2.2. Εἰς τὸ 6ον τμῆμα τοῦ πίνακος τοῦ προβλήματος τούτου, ὅπερ ἀποτελεῖ καὶ τὸν τελευταῖον πίνακα τῆς διαδικασίας, τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων ἔχει διαχωρισθῆ εἰς δύο ὁμάδας. Εἰς τὴν μίαν περιλαμβάνονται τὰ διανύσματα, τῶν ὁποίων αἱ ἀντίστοιχοι μεταβληταὶ εἰσέρχονται εἰς τὸ ἄριστον πρόγραμμα, ἤτοι τὰ διανύσματα τῆς βάσεως, τὰ ὁποῖα ἀναγράφονται καὶ εἰς τὴν στήλην «Βάσις», τά: A^7, A^1, A^{11}, A^8, A^4. Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ διανύσματα ταῦτα μεταβληταὶ ἢ τροφαί, ἤτοι:

x_7 = Φοινικάλευρον

x_1 = Ἀραβόσιτος

x_8 = Λινάλευρον

x_4 = Πίτυρα σίτου

θὰ χρησιμοποιηθῶσιν, ὑπὸ τὰς ἀντιστοίχως ἀναγεγραμμένας εἰς τὴν στήλην A^0 ποσότητας, διὰ τὴν κατάρτισιν μιᾶς μονάδος, ἤτοι 100 γρ. σιτηρεσίου. Ἡ μεταβλητὴ x_{11} ἢ μεταβλητὴ ἀποκλίσεως, μηδενικοῦ κόστους, εἰσερχομένη εἰς τὸ πρόγραμμα, σημαίνει ἁπλῶς ὅτι ἡ ἀνισότης, εἰς τὴν ὁποίαν προσετέθη πρὸς μετατροπήν της εἰς ἰσότητα, ὑπελείφθη τῆς ἰσότητος ταύτης, κατὰ τὸ ἀντίστοιχον ποσὸν τῆς στήλης A^0, δηλαδὴ κατὰ 5,567609.

Εἰς τὴν ἑτέραν ὁμάδα περιλαμβάνονται τὰ ἐκτὸς τῆς βάσεως διανύσματα, τὰ A^2, A^3, A^5, A^6, A^9, A^{10}, A^{12}. Αἱ εἰς ταῦτα ἀντιστοιχοῦσαι τροφαί, ἤτοι:

x_2 = Κριθὴ

x_3 = Βρώμη

x_5 = Στέμφυλα σακχαροποιΐας

x_6 = Βαμβακοπλακοῦς

ἀπεκλείσθησαν ὁλοσχερῶς τοῦ σιτηρεσίου. Ἐξ ἄλλου, ἡ ἐκτὸς προγράμματος θέσις τῶν μεταβλητῶν ἀποκλίσεως x_9, x_{10} καὶ x_{12} σημαίνει, ὅτι αἱ ἀνισότητες, εἰς τὰς ὁποίας προσετέθησαν διὰ τὴν μετατροπήν των εἰς ἰσότητας, ἱκανοποιοῦνται πλήρως, ὡς ἰσότητες.

4.2.3. Ὁ πίναξ περιλαμβάνει, ἐπίσης, εἰς τὴν τελευταίαν γραμμὴν αὐτοῦ, τὰ στοιχεῖα $z_j - c^j$, τὰ ὁποῖα, ὡς γνωστόν, συνιστοῦν τὸ κριτήριον ἀλλαγῶν εἰς τὴν βάσιν. Εἶναι ἅπαντα ἀρνητικά, ὅπερ σημαίνει ὅτι οἱαδήποτε ἀλλαγὴ εἰς τὴν βάσιν, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἑνὸς ἐκτὸς αὐτῆς διανύσματος, θὰ αὐξήσῃ τὴν τιμὴν τῆς οἰκονομικῆς συναρτήσεως ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἡ ἀντικατάστασις μιᾶς ἐκ τῶν τροφῶν x_7, x_1, x_8 καὶ x_4 διὰ μιᾶς ἐκ τῶν x_2, x_3, x_5, x_6, θὰ ηὔξανε τὸ κόστος τοῦ σιτηρεσίου. Δι' ὃ καὶ θεωροῦμεν ἀρίστην τὴν ἐπιτευχθεῖσαν λύσιν $x_7 = 0{,}190436$, $x_1 = 0{,}315625$, $x_8 = 0{,}209565$, $x_4 = 0{,}284375$ καὶ διακόπτομεν τὴν διαδικασίαν. Ἐπὶ τῆς ἰδίας γραμμῆς καὶ τῆς στήλης A^0, ἀναγράφεται ἡ τιμὴ τοῦ διὰ τῶν τροφῶν τούτων συντιθεμένου σιτηρεσίου. Τέλος, τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος, τὰ εὑρισκόμενα εἰς ἑκάστην στήλην τούτου, ἀποτελοῦν τοὺς συντελεστάς, δι' ὧν τὸ ἀντίστοιχον διάνυσμα (περιλαμβανομένου καὶ τοῦ A^0) ἐκφράζεται γραμμικῶς, συναρτήσει τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως.

4.2.4. Τὰ στοιχεῖα τοῦ τελευταίου τούτου πίνακος θὰ ἐπιχειρήσωμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν πρὸς διερεύνησιν τῶν ἐπιδράσεων τῶν τιμῶν, ἐπὶ τῆς ἀρίστης λύσεως.

Τὸ πρῶτον λογικὸν ἐρώτημα εἶναι : Μέχρι ποίων ὁρίων εἶναι δυνατὴ ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς ἑκάστης τῶν εἰς τὸ ἄριστον σιτηρέσιον τροφῶν, ὥστε τοῦτο νὰ ἐξακολουθήσῃ νὰ εἶναι ἄριστον, ἄνευ ποιοτικῆς καὶ ποσοτικῆς μεταβολῆς τῆς συνθέσεως τούτου ; Ἤ, ἄλλως, διὰ ποίας μεταβολὰς τῆς τιμῆς ἑκάστου ἀγαθοῦ, ἐκ τῶν ἐν τῇ βάσει, οὐδεμία ἀλλαγή, συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον ἀλλαγῶν $z_j - c^j$, εἶναι δυνατὴ εἰς τὰ διανύσματα τῆς βάσεως ;

4.2.5. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ I καὶ $\bar{I}$ τὰ σύνολα τῶν δεικτῶν ἀντιστοίχως τῶν ἐν τῇ βάσει καὶ ἐκτὸς ταύτης μεταβλητῶν, τότε μόνον θὰ εἶναι, κατὰ τὰ γνωστὰ (βλ. § 2.2.9), ἀδύνατος οἱαδήποτε περαιτέρω ἀλλαγὴ εἰς τὴν βάσιν, δηλ. ἡ ἐπιτευχθεῖσα λύσις θὰ ἐξακολουθήσῃ ἰσχύουσα, ἐὰν $z_j - c^j \leqslant 0, \ \forall j \in \bar{I}$. Ἀλλὰ

$$z_j - c^j = \sum_{i \in I} c^i x_{ij} - c^j, \qquad \forall i \in I$$

ἤ, δι' ἀποσπάσεως τοῦ ὅρου $c^k x_{kj}$, περιλαμβάνοντος τὴν τιμὴν τῆς εἰσερχομένης εἰς τὸ σιτηρέσιον τροφῆς x_k:

$$z_j - c^j = c^k x_{kj} + \sum_{\substack{i \in I \\ \neq k}} c^i x_{ij} - c^j, \qquad \forall i \in I \tag{35}$$

Θὰ ἔχωμεν ὅθεν, ὡς προϋπόθεσιν τῆς μὴ μεταβολῆς τοῦ προγράμματος :

$$c^k x_{kj} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} c^i x_{ij} - c^j \leqslant 0, \qquad \forall j \in \bar{I} \tag{36}$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν :

$$\underset{x_{kj} < 0}{\frac{1}{x_{kj}}\left[c^j - \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} c^i x_{ij}\right]} \leqslant c^k \leqslant \underset{x_{kj} > 0}{\frac{1}{x_{kj}}\left[c^j - \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} c^i x_{ij}\right]}, \ \forall j \in \bar{I}$$

ἤ :

$$\frac{1}{x_{kj}}\left[c^j-\sum_{i\in I} c^i x_{ij}+c^k x_{kj}\right]\leqslant c^k\leqslant \frac{1}{x_{kj}}\left[c^j-\sum_{i\in I} c^i x_{ij}+c^k x_{kj}\right],\ \forall j\in \bar{I}$$
$$x_{kj}<0 \qquad\qquad x_{kj}>0$$

Τελικῶς, ἡ σχέσις:

$$\max_{j\in \bar{I}} \frac{1}{x_{kj}}\left[c^k x_{kj}-(z_j-c^j)\right]\leqslant c^k\leqslant \min_{j\in \bar{I}} \frac{1}{x_{kj}}\left[c^k x_{kj}-(z_j-c^j)\right] \qquad (37)$$
$$x_{kj}<0 \qquad\qquad x_{kj}>0$$

μᾶς δίδει τὴν περιοχὴν κυμάνσεως τῆς τιμῆς c^k τοῦ περιλαμβανομένου εἰς τὸ πρόγραμμα ἀγαθοῦ x_k, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ εὑρεθὲν ἄριστον πρόγραμμα δὲν ἀλλάσσει.

Ἐλαφρῶς μετασχηματιζομένη ἡ σχέσις (37), ὡς κατωτέρω:

$$e^k+\max_{i\in \bar{I}}\left\{-\frac{z_j-c^j}{x_{kj}}\right\}\leqslant c^k\leqslant c^k+\min_{j\in \bar{I}}\left\{-\frac{z_j-c^j}{x_{kj}}\right\}$$
$$x_{kj}<0 \qquad\qquad x_{kj}>0$$

ἤ, διὰ τὸ εὐχρηστότερον:

$$c^k+\min_{i\in \bar{I}}\left|\frac{z_j-c^j}{x_{kj}}\right|\leqslant c^k\leqslant c^k+\min_{i\in \bar{I}}\left|\frac{z_j-c^j}{x_{kj}}\right| \qquad (38)$$
$$x_{kj}<0 \qquad\qquad x_{kj}>0$$

δίδει τὰς ἐπιτρεπτὰς ἀποκλίσεις, ἑκατέρωθεν τῆς c^k, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἀρίστη λύσις παραμένει ἀμετάβλητος. Ὡς εἶναι φανερόν, ἡ θετικὴ ἐπιτρεπτὴ ἀπόκλισις εἶναι:

$$\min_{j\in \bar{I}}\left|\frac{z_j-c^j}{x_{kj}}\right|, \quad \text{διὰ}\quad x_{kj}>0$$

ἐνῷ ἡ ἀρνητικὴ εἶναι ἡ:

$$\min_{j\in \bar{I}}\left|\frac{z_j-c^j}{x_{kj}}\right|, \quad \text{διὰ}\quad x_{kj}<0$$

4.2.6. Ὁ τελευταῖος πίναξ τοῦ ἀλγορίθμου, εἰς τὸ παράδειγμά μας τοῦ μίγματος γαλακτοπαραγωγῆς ἀγελάδων, περιλαμβάνει ὅλα τὰ στοιχεῖα διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ὡς ἄνω ἀποκλίσεων. Π.χ., διὰ $k=7$ αἱ ἀποκλίσεις τῆς τιμῆς $c^7=1{,}60$* τῆς τροφῆς $x_7=$ Φοινικάλευρον θὰ εἶναι (διὰ $x_{7j}>0,\ j\in \bar{I}$)

Συμβολισμοί: $\forall$ = οἱονδήποτε, $\in$ = ἀνήκει, $\notin$ = δὲν ἀνήκει.

* Εἰς τὸν πίνακα ἀναφέρεται ἡ τιμὴ 0,16, πλὴν ὅμως αὕτη ἀφορᾷ εἰς 100 γρ. τροφῆς.

$$\min \left\{ \left| \frac{-0{,}078858}{0{,}007332} \right|, \ |\infty|, \ \left| \frac{-0{,}033801}{0{,}329828} \right|, \ \left| \frac{-0{,}129301}{1{,}036763} \right| \right.$$

$$\left. \left| \frac{-0{,}003860}{0{,}007353} \right|, \ \left| \frac{-0{,}005884}{0{,}058841} \right|, \ \left| \frac{-0{,}039412}{1{,}294121} \right| \right\}, \text{ δηλ. } \frac{0{,}039412}{1{,}294121} = 0{,}305$$

Ἡ τιμὴ τοῦ φοινικαλεύρου (c^7) δύναται νὰ κατέλθῃ ἀπεριορίστως κάτω τῆς 1,60 δρχ./χιλιαγρ., καθ' ὅσον, δεδομένου ὅτι οὐδὲν $x_{7j} < 0$, τὸ κατώτερον ἐπιτρεπτὸν ὅριον αὐτῆς ἀποκρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅθεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν λοιπῶν τροφῶν δὲν θὰ μεταβληθοῦν, ἡ τιμὴ τοῦ φοινικαλεύρου κατὰ χγρ. δύναται νὰ κυμανθῇ μεταξὺ 0* καὶ 1,60 + 0,305 = 1,905 δρχ., χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ δοθεῖσα ὑπὸ τοῦ ἀλγορίθμου σύνθεσις τοῦ σιτηρεσίου. Ὁμοίως, διὰ τὰς λοιπὰς τροφάς, θὰ ἔχωμεν :

Τροφαὶ (x_i)	Τιμαὶ (c^i)	Ἀποκλίσεις		Ἐπιτρεπόμεναι κυμάνσεις
Ἀραβόσιτος (x_1)	2,20	−0,79	+1,10	ἀπὸ 1,41 ἕως : 3,30
Λινάλευρον (x_8)	2,60	−1,0	**	» 1,60 » +∞
Πίτυρα σίτου (x_4)	1,20	−0,79	+0,37	» 0,41 » 1,57

4.2.7. Πρὸς καλλιτέραν κατανόησιν τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ἀποκλίσεων, πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι οἱονδήποτε ἐκ τῶν στοιχείων $z_j - c^j$, $j \in \bar{I}$, τῆς τελευταίας γραμμῆς τοῦ πίνακος, εἰς τὸ παράδειγμά μας ἔστω τὸ $z_5 - c^5 = -0{,}033801$, προκύπτει (1) ὡς ἄθροισμα τοῦ $-c^5 = 0{,}13$ καὶ τῶν ἐπὶ μέρους γινομένων ἀνὰ δύο τῶν στοιχείων τῶν στηλῶν C καὶ A^5. Ἤτοι

$$z_5 - c^5 = \sum_{i=7,1,11,8,4} c^i x_{i5} - c^5 = -0{,}033801$$

(ὅπου c^i εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν τροφῶν τοῦ σιτηρεσίου ἢ τῆς βάσεως, δηλ. τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης C καὶ x_{i5} τὰ ἀντίστοιχα τῆς στήλης A^5).

Ἀλλ' ἐπειδή, ἐνταῦθα, $c^i \geqslant 0$, $\forall i \in \bar{I}$, ἐὰν μεταβάλωμεν μεμονωμένως μίαν, ἔστω τὴν c^k κατὰ c^k_+ (αὔξησις) ἢ κατὰ c^k_- (μείωσις), ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς μεταβολῆς ταύτης ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ἀλγεβρικοῦ σημείου τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου τῆς στήλης A^5, τοῦ x_{k5}, ἐὰν τὸ $z_5 - c^5$ θὰ παραμείνῃ ἀρνητικόν. Πράγματι, ἐὰν $x_{k5} < 0$, εἶναι φανερὸν ὅτι, δι' οἱανδήποτε αὔξησιν c^k_+, $z_5 - c^5 < 0$. Δηλαδὴ τὸ διάνυσμα A^5 παραμένει ἐκτὸς τῆς βάσεως καὶ ἡ ἀντίστοιχος τροφὴ x_5 ἐκτὸς τοῦ σιτηρεσίου. Ἀντιθέτως, διὰ μείωσιν τῆς c^k εὐρυτέραν τῆς c^{*k}_-, οὕτως ὥστε $|c^{*k}_- x_{k5}| > 0{,}033801 = |z_5 - c^5|$, $z_5 - c^5 > 0$,

* Τὸ κατώτερον ὅριον εἶναι τὸ $-\infty$, πλὴν ὅμως δὲν ἔχουν ἔννοιαν ἐν προκειμένῳ αἱ ἀρνητικαὶ τιμαί.

** Δὲν ὑπάρχει περιορισμὸς πρὸς τὰ ἄνω.

1) Εἰς τὴν πρακτικὴν τῶν ὑπολογισμῶν, προκύπτει διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀλγορίθμου ἐπὶ τῶν στοιχείων τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τοῦ προηγουμένου πίνακος, ὡς καὶ διὰ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα.

δηλαδὴ παύει νὰ εἶναι ὡς ὤφειλεν [1] ἀρνητικόν, ἑπομένως τὸ διάνυσμα A^5 πρέπει νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὴν βάσιν καὶ ἡ ἀντίστοιχος τροφὴ νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὸ σιτηρέσιον, εἰς ἀντικατάστασιν ἑτέρας. Ἐξ ἄλλου, ἐὰν $x_{k5} > 0$, εἶναι φανερόν, ὅτι δι' οἱανδήποτε μείωσιν c^k_-, $z_5 - c^5 < 0$, δηλαδὴ δὲν συμβαίνει μεταβολὴ εἰς τὸ σιτηρέσιον. Ἀντιθέτως, δι' αὔξησιν τῆς c^k εὐρυτέραν τῆς c^{*k}_+, οὕτως ὥστε $|c^{*k}_+ x_{k5}| > 0{,}033801 = |z_5 - c^5|$, $z_5 - c^5 > 0$, δηλαδὴ ὀφείλει νὰ ἀλλάξῃ ἡ σύνθεσις τοῦ σιτηρεσίου, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς τροφῆς x_5 εἰς βάρος ἑτέρας τινος, μέχρι τοῦδε ἐντὸς τοῦ σιτηρεσίου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅθεν ὅτι, διὰ $x_{k5} < 0$, ἡ σχέσις $|c^{*5}_- x_{k5}| = 0{,}033801$ ὁρίζει τὴν ἐπιτρεπτὴν μείωσιν τῆς c^k, ἄνευ ἀλλαγῆς τοῦ ἀρίστου σιτηρεσίου, ἐνῷ διὰ $x_{k5} > 0$ ἡ σχέσις $|c^{*5}_+ x_{k5}| = 0{,}033801$ ὁρίζει τὴν ἐπιτρεπτὴν αὔξησιν τῆς c^k, ἄνευ ὁμοίας ἀλλαγῆς τοῦ σιτηρεσίου. Ἐπειδὴ δὲ αἱ αὐταὶ σκέψεις δέον νὰ γίνωσι καὶ διὰ τὰ λοιπά, πλὴν τοῦ A^5, ἐκτὸς τῆς βάσεως διανύσματα, τὸ ὅριον τῆς ἐπιτρεπτῆς μειώσεως τῆς τιμῆς c^k, τὸ c^{*k}_-, θὰ ὁρισθῇ διά:

$$c^{*k}_- = \min_j \left| \frac{z_j - c^j}{x_{kj}} \right| \quad \text{Δηλ. διὰ } k = 4 \quad c^{*4}_- = \frac{0{,}039412}{0{,}499999} \simeq 0{,}079 \tag{39}$$

διὰ $x_{kj} < 0$, $j \in \overline{I}$

Ὁμοίως, τὸ ὅριον τῆς ἐπιτρεπτῆς αὐξήσεως τῆς c^k, τὸ c^{*k}_+ θὰ ὁρισθῇ διά:

$$c^{*k}_+ = \min_j \left| \frac{z_j - c^j}{x_{kj}} \right| \quad \text{Δηλ. διὰ } k = 4, \quad c^{*4}_+ = \frac{0{,}033801}{0{,}905607} \simeq 0{,}037 \tag{40}$$

διὰ $x_{kj} > 0$, $j \in \overline{I}$.

Διὰ τὰς ἐντὸς τῶν ὁρίων τούτων μεταβολὰς τῆς c^k, οὐδὲν τῶν $z_j - c^j$, $\forall\, j \in \overline{I}$, εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως οὐδεμία περαιτέρω ἀλλαγὴ εἰς τὴν βάσιν εἶναι κατὰ τὸν ἀλγόριθμον δυνατή. Ἡ σύνθεσις λοιπὸν τοῦ σιτηρεσίου παραμένει ἀμετάβλητος ἤ, ἄλλως, ἡ ἀρίστη λύσις παραμένει ἐν ἰσχύϊ.

4.2.8. Παρόμοιον πρὸς τὸ θέμα τῆς ἐπιτρεπτῆς κυμάνσεως τῶν τιμῶν τῶν τροφῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι γίνει δεκταὶ εἰς τὸ σιτηρέσιον, τυγχάνει καὶ τὸ ἀφορῶν εἰς τὰς λοιπὰς τροφάς, αἱ ὁποῖαι ἀπεκλείσθησαν τούτου. Αἰτία τοῦ ἀποκλεισμοῦ εἶναι προφανῶς ἡ ὑψηλὴ τιμὴ αὐτῶν ἐν συνδυασμῷ πρὸ τὴν περιεκτικότητά των εἰς θρεπτικὰ στοιχεῖα. Λογικὸν εἶναι λοιπὸν νὰ διερωτηθῇ τις : ἐφ' ὅσον ἡ θρεπτικὴ ἀξία τῶν τροφῶν εἶναι δεδομένη, πόσον ὀφείλει νὰ ἐλαττωθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης, εἰς τρόπον ὥστε νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ συμμετοχὴ αὐτῆς εἰς τὸ σιτηρέσιον. Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ θέμα τοῦτο εἶναι ἁπλῆ.

1) Εἰς τὰ προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως. Πᾶν γραμμικὸν πρόβλημα ὅμως δύνατα νὰ λυθῇ ὡς πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως (βλ. § 2.2.7).

4.2.9. Ἵνα εἰσέλθῃ εἰς τὴν βάσιν τὸ ἐκτὸς ταύτης διάνυσμα A^ρ, $\rho \in \bar{I}$, δηλ. ἵνα ἡ τροφὴ x_ρ καταστῇ δυνατὸν νὰ περιληφθῇ εἰς τὸ σιτηρέσιον, πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ἡ τιμὴ αὐτῆς c^ρ, κατὰ $c^{*\rho}_{-}$, οὕτως ὥστε:

$$\sum_{i \in I} c^i x_{i\rho} - (c^\rho - c^{*\rho}_{-}) > 0, \quad \rho \in \bar{I}$$

ἐκ τῆς ὁποίας:

$$c^{*\rho}_{-} > -(z_\rho - c^\rho) \tag{41}$$

Οὕτω, τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας γραμμῆς τοῦ τελικοῦ πίνακος τοῦ ἀλγορίθμου, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς στήλας τῶν ἐκτὸς τῆς βάσεως διανυσμάτων, ὑποδηλοῦν, διὰ τὴν ἀντίστοιχον τροφὴν (ἢ γενικώτερον μεταβλητήν), ἓν ὅριον μειώσεως τῆς τιμῆς της, πέραν τοῦ ὁποίου καθίσταται δυνατὴ ἡ συμμετοχὴ αὐτῆς εἰς τὸ σιτηρέσιον (ἢ γενικώτερον εἰς τὸ πρόγραμμα).

Θὰ ἔχωμεν, οὕτω, εἰς τὸ παράδειγμά μας:

Τροφαὶ ἐκτὸς τοῦ σιτηρεσίου (x_ρ)	Τιμαὶ (c^ρ)	Ἀπαιτουμένη ἐλάττωσις τῆς τιμῆς
Κριθὴ (x_2)	2,7	0,78858
Βρώμη (x_3)	2,7	0,99999
Στέμφυλα σακχαρ. (x_5)	1,3	0,33801
Βαμβακοπλακοῦς (x_6)	2,2	1,29301

4.2.10. Ὁσάκις, ὡς εἶναι ἀπαραίτητον διὰ μεγάλης τοὐλάχιστον διαστάσεως προβλήματα, χρησιμοποιεῖται ἠλεκτρονικὸς ὑπολογιστής, οὗτος, ἐκτελῶν τὸ κατάλληλον (1) πρόγραμμα, δίδει, ὁμοῦ μετὰ τῆς ἀρίστης λύσεως, καὶ τὴν περιοχὴν ἐπιτρεπτῆς κυμάνσεως ἑκάστου συντελεστοῦ τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς σταθερότητος τῶν λοιπῶν.

4.2.11. Τὰ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως ἀποτελέσματα δύνανται νὰ ἔχουσι σημαντικὴν πρακτικὴν χρησιμότητα. Ὄντως, ὁσάκις κυρίως πρόκειται περὶ προβλημάτων οἰκονομικοῦ περιεχομένου, ἡ κατοχὴ προσθέτων πληροφοριῶν ἐπὶ τῆς φύσεως καὶ τῆς συμπεριφορᾶς τῆς ἀρίστης λύσεως καὶ τῶν συνιστώντων ταύτην στοιχείων εἶναι ἰδιαιτέρως ἐποικοδομητικὴ τῶν ἐπιχειρηματικῶν ἀποφάσεων. Ἡ οἰκονομικὴ ἐκμετάλλευσις δὲν περιορίζεται ἴσως εἰς τὴν ἐπιδίωξιν ἑνὸς «ξηροῦ» κέρδους, ὡς τοῦτο προκύπτει ἐκ τῆς ἀρίστης λύσεως, ἀλλὰ δύναται νὰ ἀποβλέπῃ εὐρύτερον εἰς ἓν μακροχρόνιον συνολικὸν οἰκονομικὸν ἀποτέλεσμα ἢ νὰ ἐπωφελῆται ἐμμέσων οἰκονομικῶν ἀποτελεσμάτων ἢ νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν καὶ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα, διὰ διαφόρους λόγους, δὲν συμπεριέλαβε κατὰ τὴν διαμόρφωσιν καὶ λύσιν τοῦ προβλήματος, ἐκ τοῦ ὁποίου προέκυψεν ἡ ἀρίστη λύσις.

---

1) Ὑφίστανται ἕτοιμα προγράμματα διὰ τὴν λύσιν γραμμικῶν προβλημάτων.

Διὰ τῶν προσθέτων ὡς ἄνω πληροφοριῶν, ἡ λύσις καθίσταται προφανῶς πλέον ἐλαστική. Ἐὰν δὲ ὁ φορεὺς τῶν ἀποφάσεων θελήσῃ νὰ ἀπομακρυνθῇ τῆς ἀρίστης λύσεως, θὰ εἶναι ἴσως εἰς θέσιν νὰ γνωρίζῃ τὸ ποσὸν τῆς ἐκ τούτου ἐπιγενομένης ζημίας. Εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις δύναται ἴσως νὰ ἐκτιμήσῃ ἐπαρκῶς τὴν δαπάνην, τὴν ὁποίαν θὰ συνεπήγετο, διὰ τὸν ἀνταγωνιστήν του, αὕτη ἢ ἐκείνη ἡ πολιτικὴ καὶ νὰ πιθανολογήσῃ, ἑπομένως, κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἐπακριβῶς τὴν συμπεριφοράν του.

4.2.12. Εἰς τὰ προβλήματα σιτηρεσίων ζώων, αἱ πρόσθετοι πληροφορίαι ἐπὶ τῆς λύσεως δύνανται νὰ ὁδηγήσουν εἰς μίαν πρώτην ἀξιολόγησιν καὶ κατάταξιν τῶν τροφῶν. Πράγματι, ἑκάστη τροφὴ μετέχουσα τοῦ σιτηρεσίου, δὲν ἀντικαθίσταται εἰ μὴ μόνον ἐφ᾽ ὅσον ἡ τιμὴ ταύτης αὐξηθῇ πέραν ὡρισμένου ὁρίου, διαφόρου κατὰ τροφήν. Ἡ κατάταξις αὕτη θὰ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς προτεραιότητος ἀντικαταστάσεώς της εἰς τὸ σιτηρέσιον. Ἀντιθέτως, ἡ κατάταξις τῶν ἐκτὸς τοῦ σιτηρεσίου τροφῶν θὰ εἶναι ἀνάλογος τῆς προτεραιότητος συμμετοχῆς ἑκάστης εἰς τὸ σιτηρέσιον. Θὰ ἔχωμεν, οὕτω, εἰς τὸ παράδειγμά μας, τὴν κάτωθι κατάταξιν, ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς μέτρον τῆς προτεραιότητος τὰς ἀπολύτους αὐξήσεις ἢ μειώσεις τῶν τιμῶν, διὰ τὰς ὁποίας, ἀντιστοίχως, αἱ τροφαὶ ὀφείλουσι νὰ ἐξέλθωσι τοῦ σιτηρεσίου ἤ εὑρισκόμεναι ἐκτὸς τούτου, νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς αὐτό.

Τροφαὶ μετέχουσαι τοῦ σιτηρεσίου	Ἐκτὸς τοῦ σιτηρεσίου τροφαὶ
1. Λινάλευρον	1. Στέμφυλα σακχαροποιΐας
2. Ἀραβόσιτος	2. Κριθὴ
3. Πίτυρα σίτου	3. Βρώμη
4. Φοινικάλευρον	4. Βαμβακοπλακοῦς

Ἡ ὑπεροχὴ ὡρισμένων τροφῶν δύναται νὰ εἶναι ἀπεριόριστος ἔναντι τῶν λοιπῶν, ὡς συμβαίνει ἐν προκειμένῳ διὰ τὸ λινάλευρον, τοῦ ὁποίου ἡ περιεκτικότης εἰς θρεπτικὰ στοιχεῖα εἶναι τοιαύτη ὥστε ἐν σχέσει καὶ μὲ τὴν τιμὴν τῶν λοιπῶν τροφῶν, νὰ καθίσταται ἐντελῶς ἀπαραίτητον εἰς τὸ σιτηρέσιον ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς του. Θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ συμβῇ, ἐπίσης, καὶ τὸ ἀντίθετον. Νὰ ὑπάρξῃ τροφὴ ἀποκλειομένη τοῦ σιτηρεσίου, μὴ δυναμένη νὰ περιληφθῇ εἰς τοῦτο, δι᾽ οἱανδήποτε μείωσιν τῆς τιμῆς της. Τοιαῦται τροφαὶ εἶναι, ὑπὸ τὸ ἰσχῦον σύστημα τιμῶν τῶν λοιπῶν, ἐντελῶς ἄχρηστοι, διὰ τὸ σιτηρέσιον, καὶ ἡ χρησιμοποίησίς των θὰ ἔδει νὰ διακοπῇ. Ἀντιθέτως, ἡ παραγωγὴ τροφῶν, ὡς ἐν προκειμένῳ τὸ λινάλευρον, θὰ ὤφειλε νὰ ἐπεκταθῇ, ὑπὸ τὸ ἰσχῦον σύστημα τιμῶν τῶν λοιπῶν τροφῶν, μέχρι τῆς καλύψεως τοῦ συνόλου τῶν ἀναγκῶν καὶ ἀνεξαρτήτως τοῦ κόστους παραγωγῆς των.

Τὴν ἰδίαν κατάταξιν θὰ ἔχωμεν, ἐπίσης, ἐὰν ὡς μέτρον προτεραιότητος λάβωμεν, ἀντὶ τῶν ἀπολύτων, τὰς ἑκατοστιαίας αὐξήσεις ἢ μειώσεις τῶν τιμῶν, διὰ τὰς ὁποίας ἀντιστοίχως τροφαὶ ὀφείλουν νὰ ἐξέλθουν τοῦ σιτηρεσίου ἤ, εὑρισκόμεναι ἐκτὸς τούτου, νὰ συμπεριληφθοῦν εἰς αὐτό.

4.2.13. Ὡρισμέναι διερευνήσεις δύνανται νὰ βασισθῶσιν εἰς τὴν λύσιν τοῦ δυϊκοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ ἐπὶ τοῦ θέματος τοῦ δυϊσμοῦ (dualité, duality) θὰ ἐπανέλθωμεν εἰς προσεχῆ ἐργασίαν, ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον συντόμως ὅτι, κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ ζεύγους τῶν δυϊκῶν προβλημάτων :

Ἀρχικὸν πρόβλημα			Δυϊκὸν πρόβλημα		
Εὑρεῖν	$X \geqslant O$		Εὑρεῖν	$Y \geqslant 0$	
ὥστε	$AX \geqslant A^0$	(α)	ὥστε	$A'Y \leqslant C$	(β)
καὶ	$C'X = \min$		καὶ	$A^{0\prime}Y = \max$	

τὰ διανύσματα C καὶ A^0 ἐναλλάσσονται. Γενικώτερον, μεταξὺ τῶν προβλημάτων τούτων ὑπάρχει στενὴ σχέσις, ἡ ὁποία δύναται νὰ συνοψισθῇ διὰ τοῦ δυϊκοῦ θεωρήματος, καθ' ὃ αἱ τιμαὶ τῶν δύο πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεων ταυτίζονται, διὰ τὰς ἀρίστας λύσεις τῶν προβλημάτων. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπιτρέπει τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως τοῦ ἑνός, συναρτήσει τῆς λύσεως τοῦ ἑτέρου.

Πράγματι, ἐὰν X^I εἶναι ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ (α) καὶ A^I ἡ ἀντιστοιχοῦσα μήτρα, θὰ εἶναι :

$$A^I X = A^0 \qquad \text{καὶ} \qquad X_I = (A^I)^{-1} A^0$$

Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι :

$$C'^I X_I = C'^I (A^I)^{-1} A^0$$

Ἀλλά, συμφώνως πρὸς τὸ δυϊκὸν θεώρημα, θὰ ἔχωμεν, ἐὰν Y^I εἶναι ἡ ἀρίστη λύσις τοῦ δυϊκοῦ προβλήματος (β) :

$$C'^I (A^I)^{-1} A^0 = A'^0 Y^I \qquad \text{ἢ} \qquad A'^0 [C'^I (A^I)^{-1}]' = A'^0 Y^I$$

Ἑπομένως :

$$Y^I = [C'^I (A^I)^{-1}] \tag{42}$$

Διὰ διαφόρους λόγους [1] εἶναι δυνατὸν νὰ προτιμήσωμεν νὰ ἐργασθῶμεν ἐπὶ τοῦ δυϊκοῦ καὶ νὰ ἐπανέλθωμεν, ἐν συνεχείᾳ, εἰς τὸ ἀρχικόν.

5. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡΟΣ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΙΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΝ

5.1. Γενικὰ

5.1.1. Ὅσα ἀνεφέρθησαν προηγουμένως ἀφοροῦν εἰς τὴν ἐκ τῶν ὑστέρων διερεύνησιν τῆς ἀντοχῆς τῆς ἀρίστης λύσεως καὶ εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπισυμβαίνει μεταβολὴ εἰς τὸν σταθερὸν συντελεστὴν μεμονωμένου ὅρου τῆς οἰκονομικῆς συναρτήσεως ἤ, εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ λογισμοῦ μητρῶν, εἰς ὡρισμένην συνιστῶσαν τοῦ διανύσματος - γραμμῆς C'. Οἱ λοιποὶ σταθεροὶ συντελεσταὶ τῆς οἰκονομικῆς συναρτήσεως ἢ αἱ λοιπαὶ

1) Ἐὰν τὸ πρόβλημα (α) εἶναι μεγάλων διαστάσεων, ὥστε νὰ μὴ ἐπαρκοῦν αἱ μνῆμαι τοῦ διατιθεμένου ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ διὰ τὴν λύσιν του, εἶναι δυνατὸν νὰ παρακαμφθῇ τὸ ἀδιέξοδον διὰ τῆς λύσεως τοῦ δυϊκοῦ προβλήματος (β), τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον, λόγῳ τῆς, ἐκ τῆς ἀλλαγῆς τῆς φορᾶς τῶν ἀνισοτήτων, ἐξοικονομήσεως τῶν τεχνητῶν μεταβλητῶν.

συνιστῶσαι τῆς C′ ὑποτίθενται ἀμετάβλητοι. Τοῦτο ὅμως δὲν συμβιβάζεται, εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων, πρὸς τὴν οἰκονομικὴν πραγματικότητα, ὅπου, κατὰ κανόνα, μεταβάλλονται συγχρόνως πλείονες τιμαὶ ἐκ τῶν ὑπεισερχομένων εἰς τὴν οἰκονομικὴν συνάρτησιν. Οὕτω, ἡ προεκτεθεῖσα διερεύνησις τῆς ἀρίστης λύσεως τοῦ προβλήματος παρὰ τὴν ἀναμφισβήτητον χρησιμότητά της, ὅσον ἀφορᾷ εἰς εἰδικὰ θέματα εἶναι, ἐν τούτοις, ἀνεπαρκής. Ἡ ἀνεπάρκεια αὕτη δυνατὸν νὰ ἀμβλύνεται εἰς ἄλλας περιπτώσεις, ὅπου ἡ ἔννοια τῶν συντελεστῶν τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως εἶναι διάφορος τῆς οἰκονομικῆς, καθ' ὅσον μεμονωμέναι μεταβολαὶ δύνανται τότε νὰ εἶναι συνήθεις εἰς τὴν πρᾶξιν καὶ ἱκανοποιητικὴ διερεύνησις νὰ εἶναι δυνατή.

5.1.2. Θὰ ἐπιχειρηθῇ τώρα ἓν περαιτέρω βῆμα, πρὸς βελτίωσιν τῆς προηγουμένης διερευνήσεως, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς μιᾶς παραμέτρου καὶ τῆς ἐξ αὐτῆς ἐξαρτήσεως τῶν συντελεστῶν τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως. Ἕκαστος ἐκ τῶν συντελεστῶν τούτων θεωρεῖται ὡς γραμμικὴ συνάρτησις ὡρισμένης παραμέτρου, τὴν τιμὴν τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν αὐθαιρέτως. Ταυτόχρονοι μεταβολαί, ὡρισμένης σχέσεως, εἰς ὅλον τὸ σύστημα τῶν συντελεστῶν τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως, ἀντιστοιχοῦν εἰς ὡρισμένην μεταβολὴν τῆς παραμέτρου ταύτης. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος δὲν εἶναι μοναδική, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν σταθερῶν συντελεστῶν, ἀλλὰ περιλαμβάνει ἓν *γνωστὸν* σύνολον λύσεων, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἀρίστη δι' ὡρισμένην περιοχὴν μεταβολῶν τῆς παραμέτρου, δηλαδὴ δι' ὡρισμένον σύνολον περιοχῶν ταυτοχρόνου μεταβολῆς τῶν συντελεστῶν. Οὕτω, ἡ ζητουμένη νὰ ἀντληθῇ ἐκ τοῦ προβλήματος πληροφορία ἀποκτᾷ, τρόπον τινά, ἕνα δυναμισμόν, παρακολουθοῦσα τὴν ἐξέλιξιν τῶν στοιχείων τῆς συναρτήσεως, χωρὶς νὰ ἀπαιτῶνται ἑκάστοτε ἰδιαίτεραι ἀριθμητικαὶ πράξεις, διὰ τὴν προσαρμογήν της.

5.1.3. Ἂν καὶ ἡ μέθοδος αὕτη, βασίζεται εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῆς γραμμικῆς (1) μεταβολῆς τῶν συντελεστῶν τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως καὶ δὲν εἶναι πολλάκις ἐφαρμόσιμος, ἐν τούτοις, δύναται νὰ ἀποτελέσῃ χρήσιμον ἐργαλεῖον, διὰ τὴν ἔρευναν τῆς κινήσεως τοῦ σημείου τῆς ἀρίστης λύσεως τοῦ προβλήματος, συναρτήσει τῶν δυνατῶν μεταβολῶν τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα εἰσέρχονται εἰς τὴν πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησιν.

5.2. Ἀλγεβρικὴ μορφὴ τοῦ προβλήματος

5.2.1. Τὸ κλασσικὸν γραμμικὸν πρόβλημα (1) – (3) θὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς, ὑπὸ τὴν νέαν μορφήν:

Δι' οἱανδήποτε πεπερασμένην τιμὴν τῆς παραμέτρου λ, εὑρεῖν:

$$x_j \geqslant 0 \tag{43}$$

1) Ἐπειδὴ εἶναι μία ἡ παράμετρος αἱ γραμμικαὶ αὗται μεταβολαὶ εἶναι, ἐπὶ πλέον, συνδεδεμέναι μεταξύ των καὶ ὀφείλουν ν' ἀκολουθήσουν εὐθείας γραμμάς, τῶν ὁποίων αἱ πρὸς ἀλλήλας θέσεις ἔχουν ὁρισθῆ (βλ. καὶ σχ. 3).

ὥστε, συναληθευουσῶν τῶν σχέσεων

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j x^j = \alpha_i^0 \tag{44}$$

ἡ πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησις

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta^j + \gamma^j \lambda) x_j = \min \text{ (ἢ max)} \tag{45}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

ὅπου β^j, γ^j, α_i^j, α_i^0 εἶναι αἱ δοθεῖσαι σταθεραί.

5.2.2. Διὰ τοῦ συμβολισμοῦ μητρῶν, τὸ νέον πρόβλημα τίθεται ὡς ἑξῆς, ἀντιστοίχως πρὸς τὸ πρόβλημα (4) – (6):

Δι' οἱανδήποτε πεπερασμένην τιμὴν τῆς παραμέτρου λ, εὑρεῖν διάνυσμα, ὥστε:

$$\underset{(n\times 1)}{X} \geqslant \underset{(n\times 1)}{O} \tag{46}$$

$$\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times 1)}{X} = \underset{(m\times 1)}{A^0} \tag{47}$$

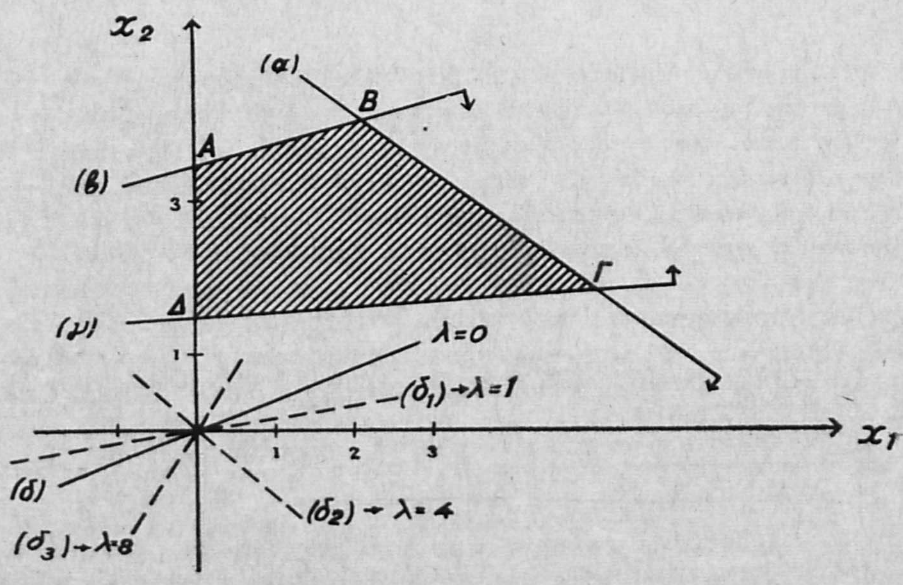
καὶ

$$\underset{(1\times n)}{(B+\lambda\Gamma)'}\ \underset{(n\times 1)}{X} = \min \text{ ἢ (max)} \tag{48}$$

ὅπου B, Γ, A καὶ A^0 εἶναι δοθεῖσαι μῆτραι.

5.3. Γεωμετρικὴ ἔννοια τῆς παραμετρήσεως

5.3.1. Ὡς γνωστόν, ἡ περιοχὴ ἢ ὁ «χῶρος» τῶν δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ τομὴ τῶν χώρων, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν περιορισμῶν



Σχ. 1

τοῦ προβλήματος. Οὕτω, ἐὰν οἱ περιορισμοὶ ἐκφράζωνται ὑπὸ καταλλήλων ἀνισοτήτων καὶ ἐὰν $j=1, 2$ καὶ $i=1, 2, 3$, αἱ δυναταὶ λύσεις δύνανται νὰ συνιστοῦν τὴν κυρτὴν πολυγωνικὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων $x_1, x_2 \geqslant 0$ καὶ τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν (α), (β) καὶ (γ), κινουμένων παραλλήλως πρὸς ἑαυτὰς καὶ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν βελῶν.

Ἀνάλογοι στερεοὶ κυρτοὶ πολυγωνικοὶ χῶροι θὰ περιλαμβάνουν τὰς δυνατὰς λύσεις, εἰς περιπτώσεις περισσοτέρων τῶν δύο διαστάσεων.

5.3.2. Ἡ πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησις, ἐξισουμένη πρός τινα τιμήν, παρίσταται καὶ αὕτη διὰ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς (γραμμὴ (δ)), ἐὰν $j=1, 2$, δι' ἑνὸς δὲ ἐπιπέδου ἢ ὑπερεπιπέδου, ἐπὶ τριῶν ἢ περισσοτέρων, ἀντιστοίχως, διαστάσεων.

Διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου λ, πραγματοποιεῖται περιστροφὴ τῆς εὐθείας, τοῦ ἐπιπέδου ἢ ὑπερεπιπέδου, τοῦ παριστῶντος τὴν πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησιν. Πράγματι, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῆς εὐθείας (δ), τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἶναι $-x_1+3x_2=0$, ἐξαρτηθῶσι γραμμικῶς ἐκ τῆς παραμέτρου λ, θὰ λαμβάνωσιν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(-1+\frac{1}{2}\lambda\right)x_1+\left(3-\frac{1}{2}\lambda\right)x_2=0,$$

τιμὰς διαφόρου μεταξύ των ἀναλογικῆς σχέσεως, διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς λ, καὶ ἡ διεύθυνσις ἑπομένως τῆς εὐθείας (δ) θὰ ἀλλάσσῃ. Εἰς τὸ σχ. 1, δίδονται αἱ διαδοχικαὶ θέσεις τῆς εὐθείας. Αὕτη ἔχει τὴν θέσιν (δ) διὰ $\lambda=0$, (δ_1) διὰ $\lambda=1$, (δ_2) διὰ $\lambda=4$ καὶ (δ_3) διὰ $\lambda=8$.

5.3.3. Ἡ εἰσαγωγὴ λοιπὸν τῆς παραμέτρου λ τροποποιεῖ τὸ πρόβλημα κατὰ τοῦτο, ὅτι καθιστᾷ περιστρεφομένην τὴν πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησιν, ὑπὸ τὴν γεωμετρικήν της ἔννοιαν, εἰς τρόπον ὥστε δύναται νὰ ἐγγίσῃ αὕτη τὸ πολύεδρον τῶν δυνατῶν λύσεων, εἰς περισσοτέρας, καὶ ὄχι εἰς μίαν, κορυφὰς ἀναλόγως τῶν διδομένων εἰς λ τιμῶν. Διὰ τὴν τιμὴν $\lambda=0$, π.χ., ὡς εἶναι προφανὲς ἐκ τοῦ σχήματος, ἡ ἐλαχίστη λύσις δίδεται διὰ τῶν συντεταγμένων τῆς κορυφῆς Γ. Ἡ λύσις ὅμως αὕτη θὰ παύσῃ ἰσχύουσα, ὅταν ἡ (δ), περιστρεφομένη διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς λ, ὑπερβῇ τὴν θέσιν ΔΓ. Τότε, αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς Δ θὰ ἀποτελέσουν τὴν ἐλαχίστην λύσιν. Αὕτη θὰ ἐξακολουθήσῃ ἰσχύουσα, διὰ πάσας τὰς θέσεις τῆς (δ) καὶ ἑπομένως δι' ὅλας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς λ, μέχρι τῆς θέσεως ΔΑ. Ὅταν ἡ συνάρτησις ὑπερβῇ τὴν θέσιν ΔΑ καὶ μέχρις ὅτου καταστῇ αὕτη παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ, ἡ ἐλαχίστη λύσις τῆς κορυφῆς Δ ἀλλάσσει, διὰ τῆς κορυφῆς Γ.

Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ προβλήματος τώρα συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν ὅλων τῶν κορυφῶν - λύσεων καὶ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς λ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις λαμβάνει τὴν ἀρίστην της τιμήν.

5.4. Λύσις τοῦ προβλήματος (βλ. [3], [4], [5], [6], [11]).

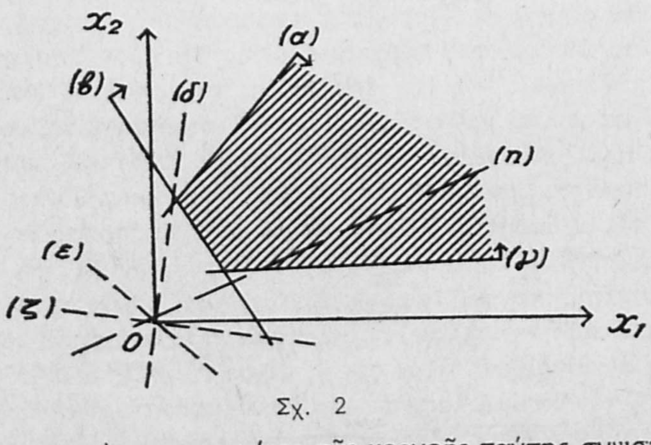
5.4.1. Διὰ νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος (43)–(45), ὑποθέτομεν ἀποκλειομένην τὴν περίπτωσιν τῆς ἀπροσδιοριστίας (βλ. ὑποσημ. σελ. 910), ἐπὶ πλέον δὲ ὅτι τὸ πρόβλημα διετυπώθη, κατὰ τρόπον ὥστε νὰ ὑφίσταται ἓν σύνολον ἐκ τῶν συντελεστῶν a_i^j, ἀπαρτιζόντων μίαν μοναδιαίαν μήτραν [1].

5.4.2. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν παράμετρον λ ὡρισμένην τιμήν, π.χ., $\lambda=\lambda_0$, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ παραμετρηθὲν πρόβλημα (43) – (45) ἐπανέρχεται εἰς τὸ κλασσικὸν πρόβλημα (1) – (3), τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν, διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Dantzig (βλ. § 2.2.). Ἡ μέθοδος αὕτη θὰ μᾶς ὁδηγήσῃ ἀναγκαίως εἰς ἓν ἐκ τῶν κάτωθι ἀποτελεσμάτων :

α) Εἰς τὴν ἀρίστην λύσιν τοῦ προβλήματος, διὰ τὴν τιμὴν $\lambda=\lambda_0$ ἢ

β) Εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει πεπερασμένην ἀρίστην λύσιν, διὰ τὴν τιμὴν $\lambda=\lambda_0$.

5.4.3. Ἡ γεωμετρικὴ ἔννοια τῆς πρώτης περιπτώσεως εἶναι ὅτι, διὰ τὴν τιμὴν $\lambda=\lambda_0$, ἡ πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησις $\sum_j f_0^j x_j = z$, $f_0^j=\beta^j+\lambda_0\gamma^j$, μεταφερομένη, ὑπὸ τὴν γεωμετρικήν της παράστασιν, παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, διὰ τὰς διαφόρους αὐξούσας τιμὰς τοῦ z, ἐὰν πρόκειται περὶ μεγιστοποιήσεως ἢ φθινούσας τιμὰς αὐτοῦ, ἐὰν ἀντιθέτως πρόκειται περὶ ἐλαχιστοποιήσεως, διέρχεται ἐκ μιᾶς κορυφῆς τοῦ πολυεδρικοῦ χώρου τῶν δυνατῶν



Σχ. 2

λύσεων. Αἱ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς ταύτης συνιστοῦν τήν, εἰς ἣν κατέληξεν ὁ ἀλγόριθμος, ἀρίστην λύσιν τοῦ προβλήματος.

Τῆς δευτέρας περιπτώσεως ἡ γεωμετρικὴ ἔννοια εἶναι ὅτι, διὰ τὴν τι-

---

1) Τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατὸν (βλ. [2] § 5.2.2. – 5.2.6.), διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μεταβλητῶν ἀποκλίσεως καὶ τεχνητῶν μεταβλητῶν.

μὴν $\lambda=\lambda_0$, ἡ πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησις, μεταφερομένη, ὡς καὶ ἀνωτέρω ὑπὸ τὴν γεωμετρικήν της παράστασιν, παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, διὰ τὰς φθινούσας ἢ τὰς αὐξούσας τιμὰς τοῦ z, δὲν εὑρίσκει κορυφὴν τοῦ πολυεδρικοῦ χώρου τῶν δυνατῶν λύσεων καὶ ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον. Τοιαύτη περίπτωσις παρίσταται διὰ τοῦ σχ. 2, ὅπου ὁ χῶρος τῶν δυνατῶν λύσεων εἶναι ἀπεριόριστος πρὸς μίαν κατεύθυνσιν. Εἶναι ἐκ τοῦ σχήματος φανερὸν ὅτι, ὅταν ἡ πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησις στρέφηται, διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς λ (βλ. καὶ § 5.3.), λαμβάνουσα διαδοχικῶς κατευθύνσεις παραλλήλους πρὸς τὰς τῶν (α), (δ), (ε), (ζ) καὶ (γ), τὸ πρόβλημα ἔχει πεπερασμένην λύσιν. Διὰ τὰς τιμὰς τῆς λ, αἱ ὁποῖαι ἐκτρέπουσι ταύτην πέραν τῶν ὁριακῶν κατευθύνσεων (α) καὶ (γ), τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει πεπερασμένην λύσιν καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον. Μία τοιαύτη θέσις τῆς συναρτήσεως εἶναι ἡ παριστωμένη διὰ τῆς (η), ὅπου, π.χ. $\lambda=\lambda_0$.

5.4.4. Ἐφ' ὅσον $f^j=\beta^j+\lambda\gamma^j$, τὸ γνωστόν μας κριτήριον ἀλλαγῶν τῆς βάσεως $z_j-c^j=\sum_{i\in I} c^i x_{ij}-c^j$ θὰ παρίσταται, διὰ τοῦ νέου συμβολισμοῦ, ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{aligned}
z_j-f^j &= \sum_{i\in I}(\beta^i+\lambda\gamma^i)\,x_{ij}-(\beta^j+\lambda\gamma^j)\\
&= \underbrace{\sum_{i\in I}\beta^i x_{ij}-\beta^j}_{\mu_j=\mu_j'+\mu_j''}+\lambda\,(\underbrace{\sum_{i\in I}\gamma^i x_{ij}-\gamma^j}_{\nu_j})=\mu_j'+\lambda\nu_j+\mu_j'' \qquad (49)
\end{aligned}
$$

ἔνθα $\mu_j'=\sum_{i\in I_1}\beta^i x_{ij}$, $\mu_j''=\sum_{i\in I_2}\beta^i x_{ij}$, $I_2=$ τὸ σύνολον τῶν δεικτῶν τῶν διανυσμάτων τῆς βάσεως, εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν τεχνηταὶ μεταβληταὶ καὶ $I_1=$ τὸ σύνολον τῶν δεικτῶν τῶν ὑπολοίπων διανυσμάτων τῆς βάσεως (εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πραγματικαὶ μεταβληταὶ καὶ μεταβληταὶ ἀποκλίσεως). Εἰς τὸν Πίν. 1, παρίστανται, πρὸς καλλιτέραν κατανόησιν, τὰ μετασχηματισμένα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος εἰς ἓν σημεῖον τῆς ἐξελίξεως τοῦ ἀλγορίθμου, εἰς τὸ στάδιον τῆς ρ-οστῆς ἀλλαγῆς εἰς τὴν βάσιν. Χάριν ἁπλουστεύσεως, τὰ πρῶτα διανύσματα θεωροῦνται ὡς ἀποτελοῦντα τὴν βάσιν. Εἰς τὰ ἐκ τούτων k πρῶτα ἀντιστοιχοῦν πραγματικαὶ μεταβληταὶ καὶ μεταβληταὶ ἀποκλίσεως καὶ οἱ δεῖκται αὐτῶν συνιστοῦν τὸ σύνολον I_1, ἐνῷ εἰς τὰ λοιπὰ $A^{k+1},\dots,A^m$ ἀντιστοιχοῦν τεχνηταὶ μεταβληταὶ καὶ οἱ δεῖκται αὐτῶν συνιστοῦν τὸ σύνολον I_2. Εἰς τὰς στήλας Β καὶ Γ, ἀναγράφονται οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς τὰς μεταβλητὰς τῆς βάσεως συντελεσταὶ τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως $f^j=\beta^j+\gamma^j\lambda$, ἡ ὁποία ἐπίσης παριστᾷ τὸν συντελεστήν, διὰ τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστοιχος μεταβλητὴ εἰσέρχεται εἰς τὴν πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησιν. Ὑπενθυμίζεται ἀκόμη, ὅτι τὰ στοιχεῖα τῆς στήλης A^0 ἀποτελοῦν τήν, εἰς τὸ στάδιον τοῦτο, λύσιν, τὰ στοιχεῖα τῶν στηλῶν $A^1, A^2,\dots,A^m$, συνιστοῦν μοναδιαίαν μήτραν, τὴν βάσιν, καὶ τέλος τὰ στοιχεῖα τῶν ὑπολοίπων στηλῶν $A^{m+1},\dots,A^n$, παριστοῦν τοὺς συντελεστάς, μετὰ τῶν ὁποίων τὸ ἀντίστοιχον διάνυσμα ἐκφράζεται γραμμικῶς, συναρτήσει τῆς βάσεως. Ὅσον ἀφορᾷ τὸ κριτήριον $z_j - f^j$, τοῦτο καταλαμβάνει τὰς τρεῖς τελευταίας γραμμὰς $m+1$, $m+2$, $m+3$. Αἱ γραμμαὶ $m+1$ καὶ $m+3$ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς δύο γραμμάς, αἱ ὁποῖαι, εἰς τὸ κλασσικὸν πρόβλημα (1) – (3), ἔχουν ἀφιερωθῆ διὰ τὸ κριτήριον $z_j - c^j$. Ἡ προστιθεμένη ἐνταῦθα ἐνδιάμεσος γραμμὴ $m+2$ περιλαμβάνει τὸ πρόσθετον τμῆμα τοῦ $z_j - f^j$, $f^j = \beta^j + \gamma^j\lambda$, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει, ὡς παράγοντα, τὴν παράμετρον λ.

5.4.5. Κατὰ τὴν ἐξέλιξιν τοῦ ἀλγορίθμου, θὰ φθάσωμεν εἰς ἓν στάδιον, ὅπου οὐδὲν ἐκ τῶν διανυσμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν τεχνηταὶ μεταβληταί, περιλαμβάνεται εἰς τὴν βάσιν. Ἡ γραμμὴ $m+3$ τοῦ εἰς τὸ στάδιον τοῦτο ἀντιστοιχοῦντος πίνακος, ὁμοίου τοῦ πίνακος 1, θὰ περιλαμβάνῃ τότε μηδενικὰ στοιχεῖα (1) καὶ ἡ διδομένη εἰς τὴν στήλην A^0, λύσις θὰ εἶναι ***δυνατὴ*** λύσις τοῦ προβλήματος. Εἰς τὸ στάδιον τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν τὴν διερεύνησιν τῆς λύσεως, συναρτήσει τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου λ. Δι' ὡρισμένην τιμὴν $\lambda = \lambda_0$, θὰ ἔχωμεν, εἴτε εἰς τὸν πίνακα τοῦτον εἴτε εἰς ἕνα τῶν ἀκολούθων, τὰ ἑξῆς ἐνδεχόμενα:

α) $\mu_j + \lambda_0 \nu_j < 0$, $\forall\, j \notin I$: Τότε, ἡ λύσις x_i, $i \in I$, εἶναι ἡ ζητουμένη ἀρίστη λύσις.

β) Δι' ἓν τουλάχιστον $j \notin I$, ἔστω τὸ $j = h$, εἶναι

$$z_h - f^h = \mu_h + \lambda_0 \nu_h > 0 \tag{50}$$

ἐνῷ $x_{ih} < 0$, $\forall\, i \in I$. Τότε, δὲν ὑπάρχει, κατὰ τὰ γνωστά, πεπερασμένη λύσις, διὰ $\lambda = \lambda_0$, ἀναλόγως δὲ τῆς τιμῆς τοῦ ν_h, θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς ὑποπεριπτώσεις:

βα) $\nu_h = 0$: Ἡ σχέσις (50) ἰσχύει δι' οἱανδήποτε τιμὴν τῆς λ, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημα στερεῖται παντελῶς πεπερασμένης λύσεως.

ββ) $\nu_h > 0$: Ἡ σχέσις (50), ἰσχύουσα διὰ $\lambda = \lambda_0$, ἰσχύει καὶ διὰ πάσας τὰς τιμὰς αὐτοῦ $\lambda > \lambda_0$. Δὲν ἔχει λοιπὸν πεπερασμένην λύσιν τὸ πρόβλημα, δι' οἱανδήποτε τιμὴν $\lambda > \lambda_0$.

βγ) Τέλος, $\nu_h < 0$: Ἡ σχέσις (50) ἰσχύει διὰ λ_0 καὶ διὰ πᾶσαν τιμὴν $\lambda < \lambda_0$ καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει πεπερασμένην λύσιν, εἰς τὴν περιοχὴν ταύτην τῶν τιμῶν τῆς λ.

5.4.6. Ἀντὶ ὅμως νὰ ἀναζητήσωμεν τὴν λύσιν δι' ὡρισμένην τιμήν, εἶναι σκοπιμώτερον νὰ ἐπιδιώξωμεν ταύτην δι' ἓν σύνολον τιμῶν τῆς λ. Ἀπὸ τοῦ σημείου ἤδη, καθ' ὃ ἐξέρχονται τῆς βάσεως ἅπασαι αἱ τεχνηταὶ μεταβληταί, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναζητήσωμεν τὴν περιοχὴν τῶν τιμῶν τῆς λ, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ παρεχομένη, εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, λύσις εἶναι ἀρίστη.

1) Ἑπομένως $\mu = \mu'$.

Ὡς εἶναι γνωστόν, ἡ λύσις θὰ εἶναι ἀρίστη, ἐὰν

$$z_j - f^j = \mu_j + \lambda \nu_j \leqslant 0, \quad \forall j \tag{51}$$

Ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει :

Διὰ $\nu_j < 0$: $\qquad \lambda \geqslant -\dfrac{\mu_j}{\nu_j}$

Διὰ $\nu_j > 0$: $\qquad \lambda \leqslant -\dfrac{\mu_j}{\nu_j}$

ἢ

$$\underset{\forall j\,:\,\nu_j < 0}{-\frac{\mu_j}{\nu_j}} \leqslant \lambda \leqslant \underset{\forall j\,:\,\nu_j > 0}{-\frac{\mu_j}{\nu_j}}$$

ἢ τέλος:

$$\max_{j\,:\,\nu_j < 0} - \frac{\mu_j}{\nu_j} = \underline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \min_{j\,:\,\nu_j > 0} - \frac{\mu_j}{\nu_j} = \overline{\lambda} \tag{52}$$

Ἡ περίπτωσις $\nu_j = 0$ εἶναι ἀδιάφορος, διότι, διὰ ταύτην, ἡ σχέσις (51) ἰσχύει καὶ ἡ λύσις εἶναι ἀρίστη, ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου λ.

Παρατηρεῖται ἀκόμη, σχετικῶς πρὸς τὴν (52), ὅτι ἐὰν $\nu_j > 0$, $\forall j$, δὲν ὑφίσταται κατώτερον ὅριον ἐπιτρεπτῆς κυμάνσεως τῆς λ. Τότε $\underline{\lambda} = -\infty$. Ἀντιθέτως, ἐὰν $\nu_j < 0$, $\forall j$, δὲν ὑφίσταται ἀνώτερον ὅριον καὶ ἑπομένως $\overline{\lambda} = +\infty$.

5.4.7. Ὁ καθορισμὸς τῶν ἀνωτέρω ἐπιτρεπτῶν ὁρίων κυμάνσεως τῆς παραμέτρου διατυποῦται ὡς ἑξῆς, διὰ τοῦ συμβολισμοῦ μητρῶν.

Τὸ κριτήριον δ^j γράφεται (βλ. καὶ 24):

$$\delta^j = (B^I + \Gamma^I \lambda)' \, (A^I)^{-1} A^j - (\beta^j + \gamma^j \lambda) \tag{53}$$

Διὰ τὴν ἀρίστην λύσιν, πρέπει :

$$\delta^j = (B^I + \Gamma^I \lambda)' \, (A^I)^{-1} A^j - (\beta^j + \gamma^j \lambda) \leqslant 0, \quad \forall A^j$$

Ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει :

Διὰ $(\Gamma'^I (A^I)^{-1} A^j - \gamma^j) < 0$:

$$\lambda \geqslant \max_j \frac{\beta^j - B'^I (A^I)^{-1} A^j}{\Gamma'^I (A^I)^{-1} A^j - \gamma} = \underline{\lambda} \tag{54}$$

Διὰ $(\Gamma'^I (A^I)^{-1} A^j - \gamma^j) > 0$:

$$\lambda \leqslant \min_j \frac{\beta^j - B'^I (A^I)^{-1} A^j}{\Gamma'^I (A^I)^{-1} A^j - \gamma^j} = \overline{\lambda} \tag{55}$$

Ἡ περίπτωσις $(\Gamma'^I (A^I)^{-1} A^j - \gamma^j) = 0$ δὲν ἐξετάζεται, ὡς ἐπιτρέπουσα εἰς τὴν παράμετρον λ οἱανδήποτε τιμήν.

5.4.8. Εἰς ἓν σημεῖον λοιπὸν τῆς διαδικασίας τοῦ ἀλγορίθμου, ὅπου ἡ λύσις εἶναι δυνατή, ὁρίζεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἓν διάστημα τιμῶν τῆς λ, τό:

$$\underline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}$$

ὅπου $\underline{\lambda}$ καὶ $\overline{\lambda}$ δύνανται νὰ εἶναι πεπερασμένα ἢ $-\infty$ καὶ $+\infty$ ἀντιστοίχως, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ λύσις παραμένει ἀρίστη. Ἐὰν τὸ διάστημα τοῦτο εἶναι πεπερασμένον, θὰ διερωτηθῶμεν μήπως ὑφίσταται ἕτερον διάστημα, ἐκτὸς τούτου κείμενον, πεπερασμένον ἢ μή, διὰ τὸ ὁποῖον ἄλλη λύσις εἶναι ἐνδεχομένως ἀρίστη. Ἐὰν καὶ τοῦτο εἶναι πεπερασμένον, θὰ διερωτηθῶμεν ὁμοίως, μέχρις ὅτου τὸ ὁλικὸν διάστημα εἶναι ἄπειρον ἢ πεπερασμένον μὲν ἀλλὰ μὴ δυνάμενον νὰ διευρυνθῇ περαιτέρω. Τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἀντιμετωπίσωμεν τώρα, τῇ βοηθείᾳ τοῦ κάτωθι θεωρήματος:

5.4.9. ***Θεώρημα 1.*** ***Ἐὰν μία λύσις εἶναι ἀρίστη, διὰ*** $\underline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}$, ***τότε νέα λύσις, προερχομένη δι' εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάσιν τοῦ διανύσματος*** A^k, ***διὰ τὸ ὁποῖον*** $-\dfrac{\mu_k}{\nu_k} = \min\limits_{j:\,\nu_j > 0} -\dfrac{\mu_j}{\nu_j} = \overline{\lambda}$, ***εἶναι ἀρίστη, διὰ τὸ διάστημα*** $\underline{\lambda}' = \overline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}'$. ***Ὁμοίως, ἐὰν τὸ εἰσαγόμενον διάνυσμα*** A^k ***εἶναι τοιοῦτον ὥστε*** $-\dfrac{\mu_k}{\nu_k} = \max\limits_{j:\,\nu_j < 0} -\dfrac{\mu_j}{\nu_j} = \underline{\lambda}$, ***ἡ νέα λύσις εἶναι ἀρίστη, διὰ τὸ διάστημα*** $\underline{\lambda}' \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}' = \underline{\lambda}$.

Ἀπόδειξις: Ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν νέαν βάσιν λύσις εἶναι δυνατή, ἐφ' ὅσον αὕτη προέκυψε κατὰ τὴν διαδικασίαν τοῦ ἀλγορίθμου καὶ συνιστᾷ κορυφὴν τοῦ πολυέδρου τῶν δυνατῶν λύσεων. Ἐπὶ πλέον, δι' ἕνα σύνολον τιμῶν τῆς λ, τὰς $\underline{\lambda}' \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}'$, ἡ λύσις εἶναι ἀρίστη, οὕτως ὥστε:

$$\mu_j' + \lambda \nu_j' \leqslant 0\,, \quad \forall j \tag{56}$$

Ὅπου μ_j' καὶ ν_j' ἀναφέρονται εἰς τὴν νέαν βάσιν.

Ἀκόμη, ἐὰν A^k εἶναι τὸ εἰσαγόμενον εἰς τὴν βάσιν διάνυσμα, διὰ τὸ ὁποῖον $-\dfrac{\mu_k}{\nu_k} = \min\limits_{j:\,\nu_j > 0} -\dfrac{\mu_j}{\nu_j} = \overline{\lambda}$, θὰ εἶναι, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης,

$$\mu_k + \overline{\lambda}\nu_k = 0$$

Ἀλλά, ἐπειδὴ τὸ A^k μετέχει εἰς τὴν νέαν βάσιν καὶ $z_j - f^j = 0\,, \forall j \in I$, θὰ εἶναι, ἐπίσης:

$$\mu_k' + \overline{\lambda}\nu_k' = 0$$

Δηλ. ἡ τιμὴ $\lambda = \overline{\lambda}$, ἱκανοποιοῦσα τὰς σχέσεις (56), περιλαμβάνεται εἰς τὸ διάστημα $[\lambda', \overline{\lambda}']$. Ἐξ ἄλλου, ἐὰν A^1 εἶναι τὸ ἐξερχόμενον ἐκ τῆς βάσεως διάνυσμα, θὰ ἔχωμεν (βλ. (33)):

$$\mu_1' = 0 - \frac{1}{x_{1k}} \cdot \mu_k$$

καὶ

$$\nu_1' = 0 - \frac{1}{x_{1k}} \cdot \nu_k$$

Ἐκ τούτων καὶ τῶν (56), ἔχομεν, τελικῶς, ἐπειδὴ $x_{1k} > 0$ καὶ $\nu_k > 0$:

$$-\frac{\mu_k}{x_{1k}} - \lambda \frac{\nu_k}{x_{1k}} \leqslant 0 \qquad \text{ἢ} \qquad \lambda \geqslant -\frac{\mu_k}{\nu_k} = \overline{\lambda} \tag{57}$$

Δηλαδὴ τὸ διάστημα $[\underline{\lambda}', \overline{\lambda}']$ τῶν τιμῶν τῆς λ, διὰ τὰς ὁποίας εἶναι ἀρίστη ἡ νέα λύσις, ἡ προκύπτουσα διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάσιν τοῦ διανύσματος A^k, τοιούτου ὥστε $-\frac{\mu_k}{\nu_k} = \min\limits_{j:\nu_j > 0} -\frac{\mu_j}{\nu_j} = \overline{\lambda}$, ἔχει ἀναγκαίως κατώτερον ὅριον ἴσον πρὸς τὸ ἀνώτερον ὅριον τοῦ διαστήματος $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ τῶν τιμῶν τῆς λ, διὰ τὰς ὁποίας ἦτο ἀρίστη ἡ παλαιὰ λύσις.

Κατ' ἀναλογίαν, ἀποδεικνύεται καὶ τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεωρήματος. Ἐπειδὴ $\nu_k < 0$, καταλήγομεν εἰς τὴν σχέσιν:

$$\lambda \leqslant \underline{\lambda}$$

5.4.10. Ἐὰν λοιπόν, εἰς ἓν στάδιον, ἔχομεν προσδιορίσει συμφώνως πρὸς τὴν (52), τὸ διάστημα $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ εἰς τὸ στάδιον τοῦτο λύσις παραμένει ἀρίστη, δυνάμεθα νὰ ἐπιδιώξωμεν τὴν διεύρυνσιν τούτου πρὸς τὰ ἄνω ἢ κάτω, διὰ καταλλήλων ἀλλαγῶν εἰς τὴν βάσιν.

Πράγματι, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα, ἐὰν εἰσάγωμεν εἰς τὴν βάσιν τὸ διάνυσμα, ἔνθα πραγματοποιεῖται τὸ $\min\limits_{j:\nu_j > 0} -\frac{\mu_j}{\nu_j} = \overline{\lambda}$, ἡ προκύπτουσα νέα λύσις θὰ εἶναι ἀρίστη, διὰ τὰς τιμὰς τῆς λ, εἰς τὸ διάστημα $[\underline{\lambda}' = \overline{\lambda}, \overline{\lambda}']$. Ὁμοίως, εἰσάγοντες περαιτέρω τὸ διάνυσμα, ἔνθα πραγματοποιεῖται τὸ $\min\limits_{j:\nu_j > 0} -\frac{\mu_j}{\nu_j} = \overline{\lambda}'$, θὰ προκύψῃ λύσις, ἡ ὁποία διατηρεῖται ἀρίστη, διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς λ, εἰς τὸ διάστημα $[\underline{\lambda}'' = \overline{\lambda}', \overline{\lambda}'']$. Συνεχίζοντες ὁμοίως, ὁρίζομεν, μετά τινας ἐπαναλήψεις ἔστω q, τὸ διάστημα $[\underline{\lambda}^{(q)}, \overline{\lambda}^{(q)}]$. Ἐνταῦθα εἶναι δυνατὸν νὰ συμβῶσιν αἱ ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Τὸ διάνυσμα, ἔστω A^k, διὰ τὸ ὁποῖον $-\frac{\mu_k^{(q)}}{\nu_k^{(q)}} = \min\limits_{j:\nu_j > 0} -\frac{\mu_j^{(q)}}{\nu_j^{(q)}} = \overline{\lambda}^{(q)}$, δὲν δύναται νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν βάσιν, διότι $x_{ik} < 0$, $\forall i \in I$. Τοῦτο σημαίνει (βλ. καὶ § 5.4.2. τῆς [2]) ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ διευρύνωμεν τὸ διάστημα τῆς λ, πέραν τοῦ $\overline{\lambda}^{(q)}$, διότι διὰ τὰς τιμὰς τοῦ $\lambda > \overline{\lambda}^{(q)}$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει πεπερασμένην λύσιν.

β) Τὸ διάνυσμα A^k εἰσέρχεται εἰς τὴν βάσιν, διότι ἓν τουλάχιστον $x_{ik} > 0$, προκύπτουν ὅμως, μετὰ τοὺς κατὰ τὸν ἀλγόριθμον μετασχηματισμούς, $\nu_j < 0$, $\forall j$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀνώτερος περιορισμός, εἰς τὸ διάστημα τῆς λ, καὶ ἡ λύσις εἶναι ἀρίστη, ἐντὸς $[\underline{\lambda}^{(q+1)}, +\infty]$. Οὕτω, ὁλόκληρος ἡ περιοχὴ κυμάνσεως τῆς λ, ἡ $\lambda > \underline{\lambda}$, ἔχει διερευνηθῆ.

5.4.11. Θὰ ἐπαναλάβωμεν, ἀκολούθως, τὴν ἰδίαν διαδικασίαν ἐπανερχόμενοι εἰς τὸν πίνακα, τὸν περιλαμβάνοντα τὴν ἰσχύουσαν διὰ $\underline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}$ λύσιν, καὶ εἰσάγοντες εἰς τὴν βάσιν διαδοχικῶς διανύσματα, εἰς τὰ ὁποῖα πραγματοποιεῖται :

$$\max_{j:\nu_j<0} -\frac{\mu_j}{\nu_j} = \underline{\lambda}, \quad \max_{j:\nu_j<0} -\frac{\mu_j'}{\nu_j'} = \underline{\lambda}', \ldots, \max_{j:\nu_j<0} -\frac{\mu_i^{(s)}}{\nu_j^{(s)}} = \underline{\lambda}^{(s)}$$

προσδιορίζομεν, οὕτω, τὰς λύσεις καὶ τὰ ἀντίστοιχα διαστήματα:

$$[\underline{\lambda}', \overline{\lambda}' = \underline{\lambda}], [\underline{\lambda}'', \overline{\lambda}'' = \underline{\lambda}'], \ldots, [\underline{\lambda}^{(s)}, \overline{\lambda}^{(s)} = \underline{\lambda}^{(s-1)}]$$

Εἰς τὸ στάδιον (s), δυνατὸν νὰ συμβῇ ὡς καὶ προηγουμένως:

α) Τὸ διάνυσμα A^k, διὰ τὸ ὁποῖον $-\dfrac{\mu_k^{(s)}}{\nu_k^{(s)}} = \max\limits_{j:\nu_j<0} -\dfrac{\mu_j^{(s)}}{\nu_j^{(s)}} = \underline{\lambda}^{(s)}$,

δὲν δύναται νὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν βάσιν, διότι $x_{ik} < 0$, $\forall i \in I$. Ἡ διαδικασία περατοῦται. Τὸ διάστημα τῶν τιμῶν τῆς λ δὲν διευρύνεται, περαιτέρω, πρὸς τὰ κάτω.

β) Τὸ διάνυσμα A^k εἰσέρχεται εἰς τὴν βάσιν, διότι ἓν τουλάχιστον $x_{ik} > 0$, προκύπτουν ὅμως, μετὰ τοὺς κατὰ τὸν ἀλγόριθμον μετασχηματισμούς, $\nu_j > 0$, $\forall j$. Ἡ διαδικασία περατοῦται, ἐπίσης, διότι ἡ εἰς τὸ στάδιον τοῦτο λύσις εἶναι ἀρίστη, διὰ τὸ διάστημα τιμῶν $[-\infty, \overline{\lambda}^{(s+1)}]$.

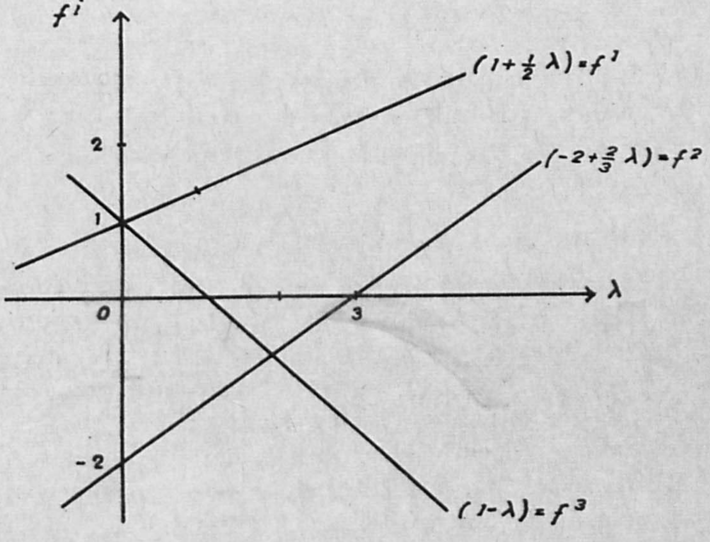
5.4.12. Διὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος 1, ἀποβλέπομεν νὰ διευκολύνωμεν περαιτέρω τὴν κατανόησιν τῶν ὅσων ἐλέχθησαν διὰ συμβόλων.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα 1

Χρησιμοποιοῦμεν ἐνταῦθα τὸ γενικὸν παράδειγμα τῆς [2] (βλ. § 5.6), τοῦ ὁποίου μετασχηματίζομεν τὴν πρὸς ἐλαχιστοποίησιν συνάρτησιν, ὡς κάτωθι, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς παραμέτρου λ :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)x_1 + \left(-2 + \frac{2}{3}\lambda\right)x_2 + (1-\lambda)x_3$$

Ἕκαστος ἐκ τῶν συντελεστῶν ταύτης ἀποτελεῖ γραμμικὴν συνάρτησιν τῆς παραμέτρου, ὡς δεικνύεται καὶ εἰς τὸ κάτωθι σχ. 3.



Σχ. 3

Τὸ πρόβλημα τίθεται, οὕτω, ὡς ἀκολούθως :

Ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῶν $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$, οὕτως ὥστε :

$$\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)x_1+\left(-2+\frac{2}{3}\lambda\right)x_2+(1-\lambda)\,x_3=\min$$

$$\begin{aligned} 8\,x_1 + 12\,x_2 - x_3 &\leqslant 46 \\ x_1 + 2\,x_2 - x_3 &\geqslant 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (58)$$

καὶ μετασχηματίζεται περαιτέρω, κατὰ τὰ γνωστά, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς μεταβλητῶν ἀποκλίσεως (x_4, x_5) καὶ τεχνητῶν μεταβλητῶν (x_6, x_7), ὡς ἑξῆς :

$$\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)x_1+\left(-2+\frac{2}{3}\lambda\right)x_2+(1-\lambda)x_3+0x_4+0x_5+wx_6+wx_7=\min$$

$$\begin{aligned} 8\,x_1 + 12\,x_2 - x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 46 \\ x_1 + 2\,x_2 - x_3 \qquad - x_5 + x_6 \quad &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_7 &= 4 \end{aligned} \qquad (59)$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geqslant 0$$

5.4.13. Εἰς τὸν πίν. 2, περιλαμβάνονται αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις, διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Γίνεται ἔναρξις μὲ τὸν πίνακα 2α, εἰς τὸν ὁποῖον ἀναγράφονται τὰ στοιχεῖα τοῦ προβλήματος, ὑπὸ τὴν μορφὴν (59).

Τὸ κριτήριον ἀλλαγῶν $z_j - f^j$ καταλαμβάνει τὰς γραμμὰς 4, 5 καὶ 6 ἑκάστου πίνακος. Ἡ γραμμὴ 4 περιλαμβάνει τοὺς σταθεροὺς ὅρους αὐτοῦ μ_j', ἡ γραμμὴ 5, τοὺς συντελεστὰς ν_j τῆς παραμέτρου λ. Τέλος, εἰς τὴν γραμμὴν 6 ἀναγράφονται οἱ συντελεσταὶ μ_j'' τοῦ w.

Γενικῶς παρατηρεῖται ὅτι οἱ πίνακες ὑπολογισμῶν μέχρι καὶ 3, εἶναι, σχεδὸν ταυτόσημοι πρὸς ἐκείνους τοῦ πίνακος 7 τῆς [2]. Διαφέρουν μόνον κατὰ τὴν γραμμὴν 5, ἡ ὁποία ἐνταῦθα προστίθεται ἐπὶ πλέον. Ὁ ἐφαρμοζόμενος ἐξ ἄλλου ἀλγόριθμος, διὰ τὸν μετασχηματισμὸν τῶν στοιχείων, περιλαμβανομένων καὶ ἐκείνων τῆς νέας γραμμῆς 5, κατὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ ἑνὸς πίνακος εἰς τὸν ἄλλον, εἶναι ἐπίσης ὁ αὐτός.

5.4.14. Καίτοι ἔχομεν ἤδη παρουσιάσει τὴν πρακτικὴν τοῦ ἀλγορίθμου, ἐπ' εὐκαιρίᾳ τῶν ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων τῆς [2], θὰ ἐπαναλάβωμεν, ἐν τούτοις, τὴν ἐφαρμογὴν τῶν τύπων (31) – (34), οἱ ὁποῖοι συνοψίζουσι τὸν ἀλγόριθμον. Θεωροῦμεν, π.χ., τὸν μερικὸν πίν. 1 καὶ θὰ μετασχηματίσωμεν, ὑπὸ μορφὴν παραδείγματος, τινὰ ἐκ τῶν στοιχείων αὐτοῦ, πρὸς συμπλήρωσιν τῶν ἀντιστοίχων θέσεων τοῦ ἑπομένου μερικοῦ πίν. 2. Κατὰ τὰ γνωστά, ἡ βάσις θὰ μεταβληθῇ, εἰς τὸν νέον πίνακα, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ διανύσματος A^3 (εἶναι τὸ A^j, βλ. § 2.2.9.), εἰς ἀντικατάστασιν τοῦ ἐξερχομένου ταύτης διανύσματος A^7 (εἶναι τὸ A^k, βλ. § 2.2.9.).

Συμφώνως πρὸς τοὺς τύπους (34), τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς 3 τοῦ μερικοῦ πίν. 2, θὰ προκύψουν ἐκ τῶν τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τοῦ μερικοῦ πίν. 1, διαιρουμένων διὰ $\frac{3}{2} = x_{kj} = x_{73}$. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα παρίστανται, εἰς τοὺς τύπους, διὰ $x_k = x_7$, τῆς στήλης A^0, καὶ $x_{k\rho} = x_{7\rho}$, διὰ τὰς λοιπὰς στήλας $\rho = 1, 2, \ldots, 5, 7$.

Τὰ λοιπὰ στοιχεῖα τῆς A^0, ἐκτὸς τοῦ τῆς τελευταίας γραμμῆς (τοῦ $x_k = x_7$), θὰ μετασχηματισθῶσι διὰ τοῦ τύπου (31). Διὰ τὸ στοιχεῖον, π.χ., $22 = x_i = x_4$ θὰ εἶναι : $x_k = x_7 = 2$, $x_{kj} = x_{73} = \frac{3}{2}$ καὶ $x^i = x_{43} = 5$. Ἤτοι, τὸ νέον στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον θὰ καταλάβῃ τὴν ἀντίστοιχον θέσιν τοῦ ἑπομένου πίνακος 2, θὰ εἶναι :

$$22 - \frac{2}{3/2} \cdot 5 = 46/3$$

Διὰ τοῦ τύπου (32), μετασχηματίζονται καὶ τὰ στοιχεῖα οἱασδήποτε στήλης, ἐκτὸς τῆς A^0. Διὰ τὸ στοιχεῖον, π.χ., $-\frac{1}{2}$ τῆς στήλης A^5 θὰ εἶναι :

$x_{i\rho} = x_{25} = -\frac{1}{2}$, $x_{k\rho} = x_{75} = \frac{1}{2}$, $x_{kj} = x_{73} = \frac{3}{2}$ καὶ $x_{ij} = x_{23} = -\frac{1}{2}$. Ἤτοι, τὸ νέον στοιχεῖον, τὸ ὁποῖου θὰ καταλάβῃ τὴν ἀντίστοιχον θέσιν τοῦ ἑπομένου μερικοῦ πίνακος 2, θὰ εἶναι :

$$-\frac{1}{2} - \frac{1/2}{3/2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -1/3$$

Ὁμοίως μετασχηματίζεται ἕκαστον τμῆμα τοῦ κριτηρίου $z_j - f^j$, διὰ τοῦ τύπου (33). Οὕτω, π.χ., ὁ συντελεστὴς τῆς λ (γραμμὴ 5) τῆς στήλης A^1, δηλ. τὸ στοιχεῖον $-1/6$, θὰ μετασχηματισθῇ, διά:

$$-1/6 - \frac{1/2}{3/2} \cdot 2/3 = -7/18$$

Ἐπαλήθευσις τῶν πράξεων, ἐπὶ τῶν στοιχείων τῶν γραμμῶν 4, 5 καὶ 6, δύναται νὰ γίνῃ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τούτων, μέσῳ καὶ τῶν σχέσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸν πίνακα 1 (βλ. γραμμαὶ $m+1, m+2, m+3$). Ἡ ἐπαλήθευσις αὕτη εἶναι ἀπαραίτητος, κατὰ τοὺς διὰ τῆς χειρὸς ὑπολογισμούς, πρὸς ἔγκαιρον ἀποκάλυψιν σφαλμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι συνηθέστατα.

5.4.15. Ὅταν, ἀκολουθοῦντες τοὺς ἀνωτέρω μετασχηματισμούς, φθάσωμεν εἰς τὸν μερικὸν πίνακα 2, ἔνθα μηδενίζονται τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς 6, θὰ ἐξετάσωμεν διὰ ποίας τιμὰς τῆς λ ἡ λύσις παραμένει ἐλαχίστη. Ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς γραμμῆς 5 (συντελεσταὶ ν_j) εἶναι ἀρνητικὰ καὶ ἑπομένως δὲν ἐπιβάλλεται ἀνώτερον ὅριον εἰς τὰς μεταβολὰς τῆς λ (βλ. § 5.4.10 β). Εἶναι λοιπὸν $\bar{\lambda} = +\infty$. Ἐξ ἄλλου,

$$\underline{\lambda} = \max_{j:\,\nu_j < 0} -\frac{\mu_j}{\nu_j} = \max\left\{-\frac{-2}{-7/18}, -\frac{1}{-5/9}\right\} = \frac{9}{5}$$

Ἑπομένως, ἡ διδομένη, διὰ τοῦ μερικοῦ πίνακος 2, λύσις θὰ εἶναι ἐλαχίστη διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς λ, εἰς τὸ διάστημα $\left[\frac{9}{5}, +\infty\right]$.

Ἐν συνεχείᾳ, θὰ θελήσωμεν νὰ διευρύνωμεν τὸ διάστημα τοῦτο, κατὰ τὴν διαδικασίαν τῆς § 5.4.10. Εἰσάγοντες πράγματι εἰς τὴν βάσιν τὸ διάνυσμα A^5, ἔνθα πραγματοποιεῖται $\max\limits_{j:\,\nu_j < 0} -\frac{\mu_j}{\nu_j}$, ἐπιτυγχάνομεν νέαν λύσιν, ἡ ὁποία παραμένει ἐλαχίστη, διά:

$$-\frac{-27/13}{-9/26} = -6 \leqslant \lambda \leqslant \frac{9}{5} = -\frac{-3/13}{5/39}$$

Ὁμοίως, εἰσάγοντες περαιτέρω τὸ διάνυσμα A^1, ἐπιτυγχάνομεν μίαν εἰσέτι λύσιν, ἡ ὁποία, ἐπειδὴ ὅλα τὰ $\nu_j > 0$ (βλ. § 5.4.11), εἶναι ἐλαχίστη διὰ τὰς τιμὰς τῆς λ:

$$-\infty \leqslant \lambda \leqslant -6 = \min\left\{-\frac{351/52}{117/104}, -\frac{-39/52}{169/4056}\right\}$$

5.4.16. Ἐκ τῶν, δι᾽ ἑκάστην λύσιν, διαστημάτων τῆς λ καὶ μέσῳ τῶν ἀντιστοίχων γραμμικῶν συναρτήσεων, ὑπολογίζονται, εἰς τὸν πίνακα 3, τὰ διαστήματα τιμῶν τῶν συντελεστῶν f^i τῆς πρὸς ἐλαχιστοποίησιν συναρτήσεως, διὰ τὰ ὁποῖα δὲν ἀλλάσσει ἡ ἑκάστοτε ἐλαχίστη λύσις.

Λύσις	$\leqslant \lambda \leqslant$		$\leqslant f^i \leqslant$	
$x_4 = 46/3$			0	0
$x_2 = 8/3$	$\frac{9}{5}$	$+\infty$	$-\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x_3 = 4/3$			$-\infty$	$-\frac{4}{5}$
$x_5 = 46/13$			0	0
$x_2 = 50/13$	-6	$\frac{9}{5}$	-6	$-4/5$
$x_3 = 2/13$			-5	$-4/5$
$x_5 = 91/26$			0	0
$x_2 = 91/26$	$-\infty$	-6	$-\infty$	-6
$x_1 = 1/2$			$-\infty$	-2

Πίναξ 3

5.5. Δυναταὶ ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν διατροφὴν τῶν ζώων

5.5.1. Τὸ προαναφερθὲν παράδειγμα διαφωτίζει κατὰ πολὺ τὰς δυνατότητας τῆς παραμετρήσεως, εἰς τὰ γραμμικὰ προβλήματα, πρὸς καταρτισμὸν ὀρθολογικῶν σιτηρεσίων ζώων.

Συμβαίνει ἐνίοτε, αἱ τιμαὶ ὡρισμένων ὑποψηφίων διὰ τὸ σιτηρέσιον τροφῶν νὰ παρουσιάζωσιν ἀστάθειαν μὲ σαφῆ ἀνοδικὴν ἢ πτωτικὴν τάσιν. Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας, θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ προσαρμοσθῶσι, μέσῳ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καὶ βάσει σειρᾶς δεδομένων ἐπὶ τῶν τιμῶν, ἀντίστοιχοι εὐθεῖαι — συναρτήσεις τῆς λ, παρόμοιαι πρὸς τὰς τοῦ σχ. 3. Οὕτω, τὸ πρόβλημα, ὅπου αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ ἀντικαθίστανται διὰ τῶν συναρτήσεων τούτων, δύναται νὰ λυθῇ ὡς παραμετρικόν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ νὰ εὑρεθῶσι, συναρτήσει τῆς παραμέτρου λ, ὅλαι αἱ δυναταὶ ἄριστοι λύσεις του. Τέλος, εἰς πίνακα, ὡς ὁ πίναξ 3, δύνανται νὰ ὑπολογισθῶσι τὰ διαστήματα κυμάνσεως τῶν τιμῶν f^i, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὸ σύνολον τῶν λύσεων.

5.5.2. Τὸ πρόβλημα θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ τεθῇ καὶ νὰ λυθῇ οὕτω, εἰς περιπτώσεις ἐλεγχομένων τιμῶν, ὑπὸ τῶν ἀσκούντων τὸν ἔλεγχον ὀργάνων ἢ ἐπιχειρήσεων. Εἶναι δυνατόν, π.χ., νὰ ἀντικατασταθῶσι σκοπίμως αἱ τιμαὶ ὡρισμένων τροφῶν, δι᾿ ὡρισμένων εὐθειῶν - συναρτήσεων τῆς λ καὶ νὰ ἀναζητηθῶσιν αἱ ἐπιδράσεις μεταβολῶν τῶν τιμῶν των, ἐπὶ τῆς συνθέσεως τῶν σιτηρεσίων καὶ ἑπομένως ἐπὶ τοῦ ὄγκου τῶν δυνατῶν συναλλαγῶν ἢ τῆς παραγωγῆς τῶν λοιπῶν τροφῶν.

Τὰ ἀνωτέρω ἀποτελοῦσιν ἁπλῶς ἐνδείξεις ἐφαρμογῶν. Καίτοι ἡ γραμμικὴ μορφὴ τῆς παραμετρήσεως ὡς καὶ ἡ μοναδικότης τῆς παραμέτρου περιορίζουν κατὰ πολὺ τὰς δυνατότητας χρήσεως τῆς μεθόδου, ἐν τούτοις, θὰ ὑπάρξωσι πολλαὶ περιπτώσεις, εἰς ἃς ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω παραμέτρησις τοῦ προβλήματος καὶ ἡ ὑπὸ τὴν μορφὴν ταύτην λύσις τούτου, δύναται νὰ εἶναι μεγάλου ἴσως πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος.

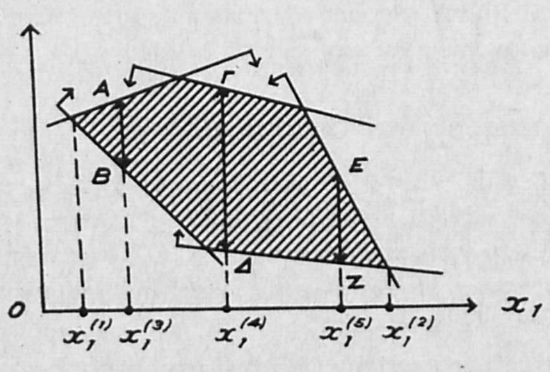
5.6. Ἑτέρα μέθοδος καὶ ἐφαρμογαί της

5.6.1. Χρήσιμος δύναται νὰ εἶναι ἐπίσης, εἴς τινας περιπτώσεις, ἡ κάτωθι μέθοδος (βλ. [9] καὶ [10] σελ. 119), ἡ ὁποία δύναται νὰ ἀποτελέσῃ ἐργαλεῖον διὰ τὴν διερεύνησιν τοῦ συνόλου τῶν δυνατοτήτων ἑνὸς γραμμικοῦ προβλήματος, εἴς τινας δὲ περιπτώσεις καὶ μὴ γραμμικοῦ, ὡς καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀρίστης λύσεως αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην, ἑκάστη τῶν ἀνισοτήτων, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουσι τὸν χῶρον τῶν δυνατῶν λύσεων, ἐπιλύεται ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν μὲ τὸν μεγαλύτερον δείκτην, συναρτήσει τῶν ὑπολοίπων μεταβλητῶν. Αἱ προκύπτουσαι, οὕτω, ἀνισότητες, περιέχουσαι μίαν μεταβλητὴν ὀλιγώτερον, συνδυάζονται ἀκολούθως ἀνὰ δύο, καθ' ὅλα τὰ δυνατὰ ζεύγη, καὶ ἐπιλύονται ὡς πρὸς τὴν ἑπομένην μεταβλητήν, συναρτήσει τῶν ὑπολοίπων κ.ο.κ. Ἡ διαδικασία αὕτη καταλήγει τελικῶς εἰς τὸν ὁρισμὸν ἑνὸς ἀριθμητικοῦ διαστήματος, ἐντὸς τοῦ ὁποίου δύναται νὰ κυμανθῇ ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς μὲ τὸν μικρότερον δείκτην. Προσδίδοντες, οὕτω, ὡρισμένην, ἐντὸς τοῦ διαστήματος τούτου, τιμὴν εἰς τὴν μεταβλητὴν ταύτην, προσδιορίζομεν, μέσῳ τῶν συναρτήσεων τοῦ προηγουμένου σταδίου αἱ ὁποῖαι τὴν περιέχουν ὡς μόνην μεταβλητήν, ἀριθμητικὸν διάστημα διὰ τὴν ἑπομένην μεταβλητήν. Προσδίδοντες καὶ εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην ὡρισμένην τιμήν, ἐντὸς τοῦ διαστήματος κυμάνσεώς της, εὑρίσκομεν διὰ τῶν συναρτήσεων τοῦ προηγουμένου σταδίου τὸ ἀριθμητικὸν διάστημα κυμάνσεως τῆς ἑπομένης μεταβλητῆς κ.ο.κ.

5.6.2. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι εἶναι εὔκολον νὰ προσδώσωμεν εἰς τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν τοῦ προβλήματος ἓν σύστημα τιμῶν, αἱ ὁποῖαι νὰ ἱκανοποιῶσι τὸ σύνολον τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος ἢ ἄλλως, νὰ ὁρίσωμεν ἓν σημεῖον ἀνῆκον εἰς τὸν χῶρον τῶν δυνατῶν λύσεων. Ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ ἀναγνωρίσωμεν, ἐὰν δοθὲν σημεῖον, ἀνήκῃ εἰς τὸν χῶρον τῶν δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος. Πρὸς καλλιτέραν κατανόησιν παραθέτομεν τὸ κάτωθι σχῆμα 4.

Διὰ τῆς λύσεως ὡς πρὸς x_2 τῶν ἀνισοτήτων, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουσι τὸν ἐσκιασμένον χῶρον τῶν δυνατῶν λύσεων, ἐπιτυγχάνομεν ἀνισότητας, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνουσιν ὡς μόνην ἄγνωστον τὴν μεταβλητὴν x_1. Διὰ λύσεως καὶ τούτων, ὡς πρὸς x_1 κατὰ ζεύγη, ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν τὸ διάστημα ἐπιτρεπτῆς κυμάνσεως διὰ τὴν μεταβλητὴν x_1. Εἶναι τὸ $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$. Τὸ διάστημα ἐπιτρεπτῆς κυμάνσεως τῆς x_2 ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς x_1. Διὰ $x_1 = x_1^{(3)}$, π.χ., τὸ x_2 δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμὴν ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ὁμοίως, διὰ τὴν τιμὴν $x_1 = x_1^{(4)}$, ἡ x_2 λαμβάνει τιμὰς ἐπὶ τῆς ΓΔ κ.ο.κ. Τὸ σχῆμα τοῦτο δύναται νὰ ἐπεκταθῆ εἰς περισσοτέρας διαστάσεις.



Σχ. 4

5.6.3. Ἡ πρακτικὴ τῆς μεθόδου σχηματοποιεῖται εἰς τὸ κάτωθι ἀριθμητικὸν παράδειγμα, ὅπου γίνεται χρῆσις τοῦ ἰδίου προβλήματος τῆς § 5.6. τῆς [2]. Εἰς τὸν πίνακα 4, περιλαμβάνονται οἱ συντελεσταὶ τῶν περιορισμῶν τοῦ προβλήματος, τεθημένων ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\sum_j \alpha_i^j x_j - \alpha_i^0 \geqslant 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

φ_i α.ά. περιορισμοῦ	1	x_1	x_2	x_3
1		1		
2			1	
3				1
4	46	− 8	− 12	1
5	− 4	1	2	− 1
6	− 4	1	1	1
7	4	− 1	− 1	− 1

Πίναξ 4

Αἱ τυχὸν ὑπάρχουσαι ἰσότητες ἀντικαθίστανται δι' ἑνὸς ζεύγους ἀνισοτήτων, ἤτοι ἡ :

$$\sum_j \alpha_\rho^j x_j - \alpha_\rho^0 = 0$$

διά :

$$\sum_j \alpha_\rho^j x_j - \alpha_\rho^0 \geqslant 0 \quad \text{καὶ} \quad \sum_j \alpha_\rho^j x_j - \alpha_\rho^0 \leqslant 0 \quad \text{ἢ} \quad -\sum_j \alpha_\rho^j x_j + \alpha_\rho^0 \geqslant 0$$

᾿Εκ τοῦ πίνακος 4, εἶναι εὔκολον νὰ προσδιορίσωμεν, διὰ τὴν μεταβλητὴν x_2, τὰ ὅρια κυμάνσεώς της, συναρτήσει τῶν λοιπῶν δύο μεταβλητῶν x_1 καὶ x_2. Θὰ ἔχωμεν, οὕτω, δύο κατηγορίας γραμμικῶν συναρτήσεων τῶν x_1 καὶ x_2, τάς :

$$x_3 \geqslant \varphi_r (x_1, x_2), \qquad r \in R \tag{60}$$

καὶ

$$x_3 \leqslant \varphi_s (x_1, x_2), \qquad s \in S \tag{61}$$

ὅπου τὸ σύνολον R περιλαμβάνει τοὺς δείκτας τῶν ἀνισοτήτων, διὰ τὰς ὁποίας ὁ συντελεστὴς τοῦ x_3 εἶναι θετικός, ἐνῷ τὸ σύνολον S περιλαμβάνει τοὺς δείκτας τῶν ἀνισοτήτων, διὰ τὰς ὁποίας ὁ συντελεστὴς τοῦ x_3 εἶναι ἀρνητικός.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν συναρτήσεων τῆς κατηγορίας (60) περιλαμβάνονται εἰς τὸ ἀριστερὸν τμῆμα τοῦ πίν. 5 ($k = 3$), ἐνῷ οἱ τῶν συναρτήσεων τῆς κατηγορίας (61) εἰς τὸ δεξιὸν τοῦ ἰδίου πίνακος. Οὕτω, μεταξὺ τῶν συναρτήσεων τοῦ ἀριστεροῦ καὶ τοῦ δεξιοῦ τμήματος τοῦ πίνακος, νοεῖται παρεμβαλλομένη ἡ μεταβλητή, τῆς ὁποίας ὁ δείκτης συμπίπτει πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ k, τὴν ἀναφερομένην εἰς τὸ ἄνω ἀριστερὸν ἄκρον τοῦ ἰδίου πίνακος, μὲ τὰ σημεῖα ἀνισοτήτων : $\leqslant x_k \leqslant$, ἤτοι :

$$\varphi_r (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) \leqslant x_k \leqslant \varphi_s (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) \tag{62}$$

Οἱ δεῖκται r καὶ s, διὰ τοὺς ὁποίους προβλέπονται εἰδικαὶ στῆλαι, παριστοῦν τοὺς αὔξοντας ἀριθμοὺς τῶν συναρτήσεων - ὁρίων κυμάνσεως ἑκάστης μεταβλητῆς, ἐνῷ εἰς τὰς στήλας φ, k, rs, παρέχονται τὰ στοιχεῖα προελεύσεως ἑκάστης τούτων, πρὸς διευκόλυνσιν διὰ τὰς περιπτώσεις ἀναδρομῆς, κατὰ τὰ σφάλματα τῶν ὑπολογισμῶν.

῾Η συμπλήρωσις ἑκάστου μερικοῦ πίνακος τοῦ 5 βασίζεται, ἀφ᾿ ἑνὸς εἰς τὸν πίν. 4 καὶ ἀφ᾿ ἑτέρου εἰς τὸν προηγούμενον μερικὸν πίνακα.

᾿Εκ τοῦ πίν. 4, χρησιμοποιοῦνται ἑκάστοτε οἱ περιορισμοί, οἱ ὁποῖοι περιέχουν μεταβλητὰς μὲ δείκτην ἴσον πρὸν δείκτην k τοῦ ὑπὸ κατασκευὴν πίνακος, ὄχι δὲ ἄλλοι μὲ μεγαλύτερον δείκτην. Διὰ διασταυρώσεως, ἐξ ἄλλου, τῶν συναρτήσεων τοῦ προηγουμένου μερικοῦ πίνακος, καθ᾿ ὅλα τὰ δυνατὰ ζεύγη καὶ κατὰ τὸ σχῆμα :

$$\varphi_r (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) \leqslant \varphi_s (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) \tag{63}$$

προκύπτουν αἱ λοιπαὶ συναρτήσεις, διὰ τῶν στοιχείων τῶν ὁποίων πληροῦται ὁ ὑπὸ κατασκευὴν πίναξ. Αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις τυποποιοῦνται καὶ διευκολύνονται κατὰ πολύ, βάσει ὀλίγων προφανῶν πρακτικῶν κανόνων.

5.6.4. ῾Ο πίν. 5 περιλαμβάνει, ὡς εἶναι φανερόν, πᾶσαν λύσιν τοῦ συνόλου τῶν περιοριστικῶν ἀνισοτήτων περιλαμβανομένων καὶ τῶν $x_j \geqslant 0$, $\forall j$. Πράγματι, ἐὰν προσδώσωμεν εἰς x_1 μίαν τιμήν, ἔστω τὴν $x_1 = 3$, εἰς τὸ διάστημα [0,4], ἐντὸς τοῦ ὁποίου, ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ μερικοῦ πιν. $k = 1$, δύναται αὕτη νὰ λάβῃ τιμάς, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν x_2 (βλ. πιν. $k = 2$), τὸ διά-

	r	φ, k, rs	1	x_1	x_2	s	φ, k, rs	1	x_1	x_2
k=3	1	3, —, —	0			1	5, —, —	− 4	1	2
	2	4, —, —	− 46	8	12	2	7, —, —	4	− 1	− 1
	3	6, —, —	4	− 1	− 1					
k=2	1	2, —, —	0			1	—, 3, 12	4	− 1	
	2	—, 3, 11	2	− 1/2		2	—, 3, 21	21/5	−7/10	
	3	—, 3, 31	8/3	− 2/3		3	—, 3, 22	50/13	−9/13	
k=1	1	1, —, —	0			1	—, 2, 11	4		
						2	—, 2, 12	6		
						3	—, 2, 13	50/9		
						4	—, 2, 21	4		
						5	—, 2, 22	11		
						6	—, 2, 23	48/5		
						7	—, 2, 41	4		
						8	—, 2, 42	26		
						9	—, 2, 43	46		

Πίναξ 5

στημα δυνατῶν τιμῶν ἀπὸ $\frac{2}{3}$ (μέγιστον τῶν τιμῶν 0, 1/2, 2/3 τῶν συναρτήσεων τοῦ ἀριστεροῦ τμήματος) ἕως 1 (ἐλάχιστον τῶν τιμῶν 1, 21/10, 23 13 τῶν συναρτήσεων τοῦ δεξιοῦ τμήματος). Ἐὰν καὶ εἰς x_2 προσδώσωμεν μίαν τιμήν, ἐντὸς τοῦ ὡς ἄνω διαστήματος, θὰ προκύψῃ (βλ. πίν. $k = 3$) ἓν διάστημα τιμῶν, διὰ τὴν x_3. Τὸ διάστημα τοῦτο, διὰ $x_2 = 1$ (καὶ $x_1 = 3$) περιλαμβάνει τὴν μοναδικὴν τιμὴν $x_3 = 0$.

Οὕτω, τὸ σημεῖον τοῦ τρισδιαστάτου χώρου :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

περιλαμβάνεται εἰς τὸν χῶρον τῶν δυνατῶν λύσεων τοῦ προβλήματος. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ οἱονδήποτε ἕτερον σημεῖον τοῦ χώρου τούτου. Ἀντιστρόφως, δοθέντος ἑνὸς σημείου, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναγνωρισθῇ ἐὰν τοῦτο ἀνήκῃ εἰς τὸν χῶρον τῶν δυνατῶν λύσεων. Ἀρκεῖ νὰ δοκιμασθῇ ἐὰν αἱ συντεταγμέναι του, διαδοχικῶς ἐφαρμοζόμεναι εἰς τὰς συναρτήσεις φ_r καὶ φ_s τῶν μερικῶν πινάκων, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, δὲν ὁδηγοῦν εἰς ἀντιφατικὰ ὅρια.

5.6.5. Ἡ, μέσῳ τοῦ πίν. γνῶσις τοῦ συνόλου τῶν δυνατῶν λύσεων ἔχει, εἰς πλείστας περιπτώσεις, σημαντικὴν σπουδαιότητα. Ἡ διαδικασία τοῦ ἀλγορίθμου τοῦ Dantzig δίδει, διὰ τῶν διαδοχικῶν πινάκων, μόνον ὡρισμένα ὡς ἴδομεν σημεῖα - κορυφὰς τοῦ πολυέδρου ἢ τοῦ χώρου τῶν δυνατῶν λύσεων καὶ εἶναι ἑπομένως ἀτελής, ὡς πρὸς τὴν γνῶσιν τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ χώρου τούτου. Πολλάκις ὅμως, εἰς τὴν πρᾶξιν, ἡ ἐπιλογὴ ἐξαρτᾶται ἐκ ποιοτικοῦ μᾶλλον παρὰ ποσοτικοῦ κριτηρίου καὶ εἶναι χρήσιμος ἡ διερεύνησις τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ χώρου τῶν δυνατῶν λύσεων καὶ ἡ εὕρεσις ὑποσυνόλου ἢ ὑποσυνόλων λύσεων, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ καλλίτερον τὰς προβαλλομένας ποιοτικὰς ἀπόψεις.

Ἰδιαιτέρως χρήσιμος δύναται νὰ εἶναι ἡ μέθοδος, ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης, κατὰ τὴν κατάρτισιν σιτηρεσίων, διὰ τὴν διατροφὴν ζώων, ὡς καὶ διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν πολλαπλῶν προβλημάτων τῆς ἀγροτικῆς πράξεως.

Δυνατὴ εἶναι ἐπίσης ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου, μέχρις ἑνὸς σημείου, διὰ τὴν εἰσαγωγὴν περισσοτέρων τῆς μιᾶς παραμέτρου εἰς τὴν οἰκονομικὴν συνάρτησιν. Τὸ σύνολον τῶν ἀνισοτήτων, μὲ μεταβλητὰς τὰς παραμέτρους λ_j, (βλ. § 5.4.4.):

$$z_j - f^j = \sum_{i \in I} (\beta^i + \gamma^i \lambda_i)\, x_{ij} - (\beta^j + \gamma^j \lambda_j) \leqslant 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

θὰ ἠδύνατο νὰ λυθῇ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ ὁριζόμενος ὑπ' αὐτῶν χῶρος. Ἕνα τοιοῦτον ἀποτέλεσμα θὰ εἶχε τεραστίαν χρησιμότητα, διότι θὰ παρεῖχε πλήρη διευρεύνησιν τῶν ἐπὶ τῆς ἀρίστης λύσεως συγχρόνων καὶ μὴ συνδεδεμένων καθ' ὡρισμένον τρόπον (ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς μόνης παραμέτρου) μεταβολῶν ὅλων ἢ μερικῶν ἐκ τῶν τιμῶν.

Ἐν τούτοις, ἡ πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον χρῆσις τῆς μεθόδου, ὡς ἄλλως τε συμβαίνει γενικώτερον, προσκρούει εἰς σοβαρὰς πρακτικὰς δυσκολίας. Πράγματι, ἐπὶ μεγάλου ἀριθμοῦ ἀνισοτήτων καὶ μεταβλητῶν, ὁ ἀριθμὸς τῶν συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τὰ ὅρια κυμάνσεων τῶν ἑκάστοτε μεταβλητῶν (βλ. ἀριστερὸν καὶ δεξιὸν τμῆμα τοῦ πίν. 5), αὐξάνει ταχύτατα, εἰς τρόπον ὥστε οἱ ὑπολογισμοὶ δυσκολεύονται σημαντικῶς. Δι' ὀλίγας, ἐν τούτοις, παραμέτρους, ἡ χρησιμοποίησις τῆς μεθόδου δὲν θὰ ἦτο ἀκατόρθωτος. Θὰ ἦσαν ὅμως, πρὸς τοῦτο, ἀπαραίτητα τὰ στοιχεῖα τοῦ τελευταίου πίνακος τοῦ ἀλγορίθμου τοῦ Dantzig, ἡ γνῶσις τῶν ὁποίων ἄλλως τε παρέχει καὶ ἄλλας δυνατότητας διερευνήσεων, καὶ θὰ ἀπῃτεῖτο σχετικῶς ποιά τις τροποποίησις τοῦ προγράμματος τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ.

5.6.6. Ὁπωσδήποτε ἡ μέθοδος αὕτη, ὡς λίαν χρήσιμος, θὰ ἔδει νὰ ἀποτελέσῃ ἀντικείμενον περαιτέρω ἐρεύνης πρὸς βελτίωσιν. Ἡ ταχεῖα αὔξησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συναρτήσεων, εἰς ἕκαστον στάδιον τῆς διαδικασίας, ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι τινὲς ἐκ τῶν ἀνισοτήτων [βλ. (63)] εἶναι περιτταί, διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ εἰς τὸ στάδιον τοῦτο χώρου καὶ θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ παραλειφθοῦν.

Ἡ ἐξεύρεσις λοιπὸν μιᾶς μεθόδου ἀναγνωρίσεως τῶν περιττῶν ἀνισοτήτων εἰς ἕκαστον στάδιον θὰ ἀπετέλει σημαντικὴν συμβολὴν εἰς τὴν ἁπλούστευσιν τῆς μεθόδου καὶ θὰ διηύρυνε σημαντικῶς τὰς ἐφαρμογάς της.

Τὸ θέμα ἀξίζει νὰ ἐρευνηθῇ καὶ ὑπὸ τῶν προγραμματιστῶν τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, παρὰ τὰς προφανεῖς δυσκολίας τῆς μεθόδου, λόγῳ σπατάλης μνημῶν τὴν ὁποίαν συνεπάγεται.

5.6.7. Ἡ προαναφερθεῖσα μέθοδος δύναται νὰ χρησιμεύσῃ καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν ἑνὸς σημείου τοῦ χώρου τῶν δυνατῶν λύσεων, ὅπου ἀριστοποιεῖται ἡ συνάρτησις ἐπιλογῆς (ἢ οἰκονομικὴ συνάρτησις). Ἀρκεῖ πράγματι, εἰς τὸ παράδειγμά μας, ὅπου ζητεῖται τὸ ἐλάχιστον τῆς $x_1 - 2x_2 + x_3 = x_0$, νὰ προστεθῇ ὁ περιορισμός:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant x_0 \quad \text{ἢ} \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_0 \geqslant 0$$

Θὰ ἔχωμεν τότε τὸν πίν. 6, ἀντὶ τοῦ πίν. 4:

Ὡς δύναται νὰ ἐπαληθευθῇ, ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω λύσις ὁδηγεῖ διὰ x_0

φ_i (α.α. περιορ.)	1	x_0	x_1	x_2	x_3
1			1		
2				1	
3					1
4	46		8	−12	1
5	−4		1	2	−1
6	−4		1	1	1
7	4		−1	−1	−1
8		1	−1	2	−1

Πίναξ 6

(μερικὸς πίν. $k = 0$), εἰς τὸ διάστημα $-98/13 \leqslant x_0 \leqslant +\infty$. Προσδίδοντες εἰς x_0 τὴν ἐλαχίστην τιμὴν (ἐφ' ὅσον ἀναζητοῦμεν τὸ ἐλάχιστον) $x_0 = -\dfrac{98}{13}$, εὑρίσκομεν, διὰ τὸ x_1 (μερικὸς πίν, $k = 1$), τὸ διάστημα $0 \leqslant x_1 \leqslant 0$, δηλαδὴ $x_1 = 0$. Προχωροῦντες περαιτέρω, κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν (μερικοὶ πίν. $k = 2$ καὶ $k = 3$ ἀντιστοίχως):

$$\frac{50}{13} \leqslant x_2 \leqslant \frac{50}{13} \quad \text{δηλ.} \quad x_2 = \frac{50}{13}$$

καὶ

$$\frac{2}{13} \leqslant x_3 \leqslant \frac{2}{13} \quad \text{δηλ.} \quad x_3 = \frac{2}{13}$$

Ἤτοι, εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν λύσιν, πρὸς τὴν διὰ τοῦ ἀλγορίθμου τοῦ Dantzig (βλ. πίν. 7 τῆς [2]).

Τέλος, σημειοῦται ὅτι ἡ μέθοδος προσφέρεται, ἐπίσης, εἰς εἰδικὰς περιπτώσεις, ὡς παραμετρηθέντα προβλήματα, προσθήκη ἢ ἀφαίρεσις περιορισμοῦ κ.λ.π.

6. ΕΞΑΡΤΗΣΙΣ ΕΚ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΟΡΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

6.1. Γενικὰ

6.1.1. Ὁμοίαν πρὸς τὴν παραμέτρησιν τῶν στοιχείων τῆς οἰκονομικῆς συναρτήσεως, δυνάμεθα νὰ διενεργήσωμεν καὶ διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος A^0 τῶν σταθερῶν συντελεστῶν α_i^0, μία δὲ τοιαύτη λύσις τοῦ προβλήματος δύναται νὰ ἔχῃ ἀνάλογον πρακτικὴν χρησιμότητα, πρὸς ἐκείνην τῆς παραμετρήσεως τῶν συντελεστῶν τῆς πρὸς ἀριστοποίησιν συναρτήσεως. Εἰδικῶς κατὰ τὸν καταρτισμὸν ὀρθολογικῶν σιτηρεσίων ζώων, καθίσταται, διὰ ταύτης, εἰς πλείστας περιπτώσεις, ἐπιτρεπτὴ ἡ διερεύνησις τῶν ἐντὸς τῶν ὁμοιοστατικῶν ἱκανοτήτων τοῦ ὀργανισμοῦ τοῦ ζώου, δυνατῶν μεταβολῶν τῶν ἀπαιτήσεών μας, ὡς πρὸς τὴν σύνθεσιν τοῦ σιτηρεσίου.

Ὄντως, αἱ εἰς θρεπτικὰ στοιχεῖα ἀνάγκαι τοῦ ὀργανισμοῦ, καίτοι σταθεραί, δύνανται νὰ καλύπτωνται διὰ διαφόρου πυκνότητος σιτηρεσίων, ὑπὸ σύγχρονον μεταβολὴν τῆς χορηγουμένης ποσότητος τροφῆς. Δεδομένου ὅμως, ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς πυκνότητος τοῦ σιτηρεσίου, οὖσα ταυτόσημος πρὸς τὴν μεταβολὴν τῶν συντελεστῶν α_i^0 τοῦ διανύσματος - στήλης A^0 ἑνὸς γραμμικοῦ προβλήματος, συνεπάγεται τὴν ἀλλαγὴν τῆς συνθέσεως αὐτοῦ, εἴτε ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ ποσοστὸν συμμετοχῆς τῶν διαφόρων τροφῶν, εἴτε ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ εἶδος τῶν μετεχουσῶν τροφῶν, καὶ ἔχει συνεπῶς ἀντίκτυπον ἐπὶ τοῦ κόστους αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι ἡ, μὲ γνώμονα τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τοῦ σιτηρεσίου, διενεργουμένη ἀναζήτησις τῆς πλέον καταλλήλου ἑκάστοτε περιεκτικότητος αὐτοῦ, εἰς θρεπτικὰ στοιχεῖα, δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς αὔξησιν τῆς ἀποτελεσματικότητος τῆς διατροφῆς.

6.2. Ἀλγεβρικὴ μορφὴ τοῦ προβλήματος

6.2.1. Τὸ κλασσικὸν γραμμικὸν πρόβλημα (1) – (3) θὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς, ὑπὸ παραμετρικὴν μορφήν:

Δι' οἱανδήποτε πεπερασμένην τιμὴν τῆς παραμέτρου ξ, εὑρεῖν:

$$x_j \geqslant 0 \tag{64}$$

ὥστε, συναληθευουσῶν τῶν σχέσεων:

$$\sum_{l=i}^{n} \alpha_i^j x_j = q_i + d_i \xi \tag{65}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c^j x_j = \min (\max) \tag{66}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

ὅπου a_i^j, c^j, q_i, d_i εἶναι δοθεῖσαι σταθεραί.

6.2.2. Διὰ τοῦ συμβολισμοῦ μητρῶν, τὸ νέον πρόβλημα τίθεται ὡς ἑξῆς, κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸ πρόβλημα (46) – (48) :

Δι' οἱανδήποτε πεπερασμένην τιμὴν τῆς παραμέτρου ξ, εὑρεῖν διάνυσμα :

$$\underset{(n\times 1)}{X} \geqslant \underset{(n\times 1)}{O} \tag{67}$$

ὥστε

$$\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times 1)}{X} = \underset{(1\times m)}{[Q + \xi D]} \tag{68}$$

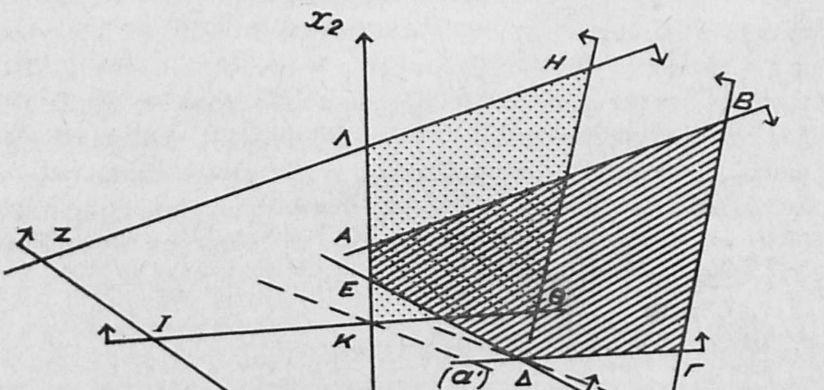
καὶ

$$\underset{(1\times n)}{C'}\ \underset{(n\times 1)}{X} = \min (\max) \tag{69}$$

ὅπου A, C', Q, D εἶναι αἱ δοθεῖσαι μῆτραι.

6.3. Γεωμετρικὴ ἔννοια τῆς παραμετρήσεως

6.3.1. Ὁ χῶρος τῶν δυνατῶν λύσεων καὶ ὄχι ἡ πρὸς ἀριστοποίησιν συνάρτησις ὑφίσταται τώρα τὰς ἐπιδράσεις τῶν μεταβολῶν τῆς παραμέτρου ξ. Αἱ περιοριστικαὶ γραμμικαὶ ἀνισότητες τοῦ προβλήματος, θεωρούμεναι ὡς ἰσότητες, παριστοῦν ὑπερεπίπεδα, τὰ ὁποῖα μεταφέρονται παραλλήλως πρὸς



Σχ. 5

ἑαυτά, διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου ξ. Οὕτω, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν περιοριστικῶν ἀνισοτήτων τοῦ προβλήματος κλειστὸν στερεὸν πολύεδρον, διευρύνεται ἢ σμικρύνεται ἢ καὶ μεταφέρεται (βλ. σχ. 5), διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου ξ, διὰ παραλλήλων μεταθέσεων τῶν πλευρῶν του. Ἡ ἀρίστη λύσις ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς ξ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἀντιστοιχοῦσα κορυφὴ τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν (65) πολυέδρου ἐξακολουθεῖ νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ θετικὸν τμῆμα τοῦ πολυδιαστάτου χώρου, τὸ ὁριζόμενον διὰ $x_j \geqslant 0$, $\forall j$.

6.3.2. Οὕτω, διὰ $j = 1, 2$, ὁ ὁριζόμενος ὑπὸ τῶν (65) χῶρος θὰ εἶναι, διὰ τὴν τιμὴν ἔστω $\xi = \xi_0$, ἡ πολυγωνικὴ ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ. Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θὰ γίνῃ ἡ ΖΗΘΙ, δι' ἄλλην τιμὴν τῆς παραμέτρου, λαμβανομένων δὲ ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν περιορισμῶν $x_j \geqslant 0$, $\forall j$, ὁ χῶρος τῶν δυνατῶν λύσεων θὰ λάβῃ τὴν μορφὴν ΛΗΘΚ, διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τῆς παραμέτρου, ἔναντι τοῦ ΑΒΓΔΕ τῆς τιμῆς $\xi = \xi_0$, καὶ ἡ ἐλαχίστη λύσις θὰ δίδεται διὰ τῶν συντεταγμένων τῆς κορυφῆς Κ, ἀντὶ τῶν τῆς κορυφῆς Δ, αἱ ὁποῖαι ἀπετέλουν τὴν ἐλαχίστην λύσιν, διὰ $\xi = \xi_0$.

6.4. Λύσις τοῦ προβλήματος

6.4.1. Καὶ διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος (64) – (66) κάμνομεν τὰς ἰδίας ὑποθέσεις τῆς § 5.4.1., ἤτοι τὴν ὑπόθεσιν τοῦ ἀποκλεισμοῦ τῆς ἀπροσδιοριστίας καὶ τῆς ὑπάρξεως εἰς τὸ πρόβλημα μοναδιαίας μήτρας.

Τὸ κριτήριον $z_j - c^j$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς παραμέτρου ξ καὶ ὁ ἀλγόριθμος δύναται νὰ λειτουργήσῃ, κατὰ τὰ γνωστά, μέχρι τῆς ἐξευρέσεως τῆς ἐλαχίστης λύσεως, ὅπου $z_j - c^j \leqslant 0$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$. Κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς διαδικασίας τοῦ ἀλγορίθμου, ἐκτὸς τοῦ κατὰ τὰ γνωστὰ μετασχηματισμοῦ τῶν στοιχείων τῶν στηλῶν A^j, θὰ μετασχηματίζωνται καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ διανύσματος A^0, τὰ ὁποῖα καταλαμβάνουν τώρα δύο στήλας (βλ. πίν. 7). Ἡ ἐξ αὐτῶν πρώτη περιλαμβάνει τὰ στοιχεῖα q_i (συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος Q) καὶ ἡ δευτέρα τοὺς συντελεστὰς d_i τῆς παραμέτρου ξ (συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος D).

Ἐὰν $x_i = q_i + d_i \xi$, $i = 1, 2, \ldots, m$, εἶναι ἡ ἐλαχίστη λύσις, ὅπου $z_j - c^j \leqslant 0$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$, αὕτη ὀφείλει νὰ εἶναι δυνατή, δηλαδή:

$$x_i = q_i + d_i \xi \geqslant 0, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m \tag{70}$$

Ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει:

Διὰ $d_i < 0$: $\qquad \xi \leqslant -\dfrac{q_i}{d_i}$,

Διὰ $d_i > 0$: $\qquad \xi \geqslant -\dfrac{q_i}{d_i}$,

ἢ

$$-\frac{q_i}{d_i} \leqslant \xi \leqslant -\frac{q_i}{d_i}$$

$$\forall i : d_i > 0 \quad \forall i : d_i < 0$$

ἤ, τέλος $\max\limits_{i\,:\,d_i > 0} \; -\frac{q_i}{d_i} = \underline{\xi} \leqslant \xi \leqslant \min\limits_{i\,:\,d_i < 0} \; -\frac{q_i}{d_i} = \overline{\xi}$ (71)

Ἡ περίπτωσις $d_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, εἶναι ἀδιάφορος, διότι, διὰ ταύτην, ἡ σχέσις (70) ἰσχύει καὶ ἡ λύσις εἶναι δυνατή, ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου ξ.

Παρατηρεῖται ἀκόμη, σχετικῶς πρὸς τὴν (71), ὅτι ἐὰν $d_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, δὲν ὑφίσταται ἀνώτερον ὅριον ἐπιτρεπτῆς κυμάνσεως τῆς ξ. Ἀντιθέτως, ἐὰν $d_i < 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, δὲν ὑφίσταται κατώτερον ὅριον καὶ ἐπομένως $\overline{\xi} = +\infty$.

6.4.2. Εἰς τὸ σημεῖον λοιπὸν τῆς διαδικασίας τοῦ ἀλγορίθμου, εἰς τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται ἡ ἐλαχίστη λύσις ὁρίζεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἓν διάστημα τιμῶν τῆς παραμέτρου ξ, τό :

$$\underline{\xi} \leqslant \xi \leqslant \overline{\xi}$$

διὰ τὸ ὁποῖον ἡ λύσις ἐκτὸς τοῦ ὅτι εἶναι ἐλαχίστη, εἶναι καὶ δυνατή, δηλ. $x_i \geqslant 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$. Ἐὰν τὸ διάστημα τοῦτο εἶναι πεπερασμένον, θὰ διερωτηθῶμεν μήπως ὑφίσταται ἕτερον διάστημα, ἐκτὸς τούτου κείμενον, πεπερασμένον ἢ μή, διὰ τὸ ὁποῖον ἄλλη λύσις εἶναι ἐνδεχομένως ἐλαχίστη καὶ δυνατή. Ἐὰν καὶ τοῦτο εἶναι πεπερασμένον, θὰ διερωτηθῶμεν ὁμοίως, μέχρις ὅτου τὸ ὁλικὸν διάστημα εἶναι ἄπειρον ἢ πεπερασμένον μέν, ἀλλὰ μὴ δυνάμενον νὰ διευρυνθῇ περαιτέρω. Θὰ ἀντιμετωπίσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο διὰ τοῦ κάτωθι θεωρήματος.

6.4.3. *Θεώρημα 2. Ἐὰν μία λύσις εἶναι ἀρίστη καὶ δυνατὴ διὰ* $\underline{\xi} \leqslant \xi \leqslant \overline{\xi}$, *τότε ἡ νέα λύσις, ἡ προερχομένη δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ διανύσματος* A^l, *εἰς τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται :* $\overline{\xi} = \min\limits_{i\,:\,d_i < 0} \; -\frac{q_i}{d_i} = -\frac{q_l}{d_l}$

ὑπὸ τοῦ διανύσματος A^k, *οὕτως ὥστε :*

$$\frac{z_k - c^k}{x_{lk}} = \min_{j\,:\,x_{lj} < 0} \frac{z_j - c^j}{x_{lj}}$$

εἶναι ἀρίστη καὶ δυνατή, εἰς τὸ διάστημα $\underline{\xi}' = \overline{\xi} \leqslant \xi \leqslant \overline{\xi}'$.

Ὁμοίως ἡ νέα λύσις, ἡ προερχομένη δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ διανύσματος A^v, *εἰς τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται* $\underline{\xi} = \max\limits_{i\,:\,d_i > 0} \; -\frac{q_i}{d_i} = -\frac{q_v}{d_v}$,

ὑπὸ τοῦ διανύσματος A^p, *οὕτως ὥστε :*

$$\frac{z_p - c^p}{x_{vp}} = \min_{j\,:\,x_{vj} < 0} \frac{z_j - c^j}{x_{vj}}$$

εἶναι ἀρίστη καὶ δυνατή, εἰς τὸ διάστημα $\underline{\xi}' \leqslant \xi \leqslant \bar{\xi}' = \underline{\xi}$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $x_i = q_i + d_i \xi$, $i = 1, 2, \ldots, m$, εἶναι ἡ ἀρίστη λύσις, δυνατὴ εἰς τὸ διάστημα:

$$\underline{\xi} \leqslant \xi \leqslant \bar{\xi}$$

ὁριζόμενον κατὰ τὰ ἀνωτέρω (βλ. (71)). Ἡ προκύπτουσα νέα λύσις, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὴν βάσιν τοῦ διανύσματος A^k εἰς ἀντικατάστασιν τοῦ A^l, εἰς τρόπον ὥστε:

$$\min_{i : d_i < 0} - \frac{q_i}{d_i} = \bar{\xi} = - \frac{q_l}{d_l} \tag{72}$$

θὰ εἶναι [βλ. (31), (34)]:

$$x_i = q_i' + d_i' \xi = q_i + d_i \xi - \frac{q_l + d_l \xi}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i \neq l \tag{73}$$

καὶ

$$x_l' = q_l' + d_l' \xi = \frac{q_l + d_l \xi}{x_{lk}} \tag{74}$$

Ἡ λύσις αὕτη εἶναι δυνατὴ διὰ $\xi = \bar{\xi} = - \dfrac{q_l}{d_l}$. Πράγματι, ὡς εὐκόλως προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (72) – (74), διὰ τὴν τιμὴν ταύτην:

$$x_l' = \frac{q_l + d_l \bar{\xi}}{x_{lk}} = 0 \quad \text{καὶ} \quad x_i' = q_i + d_i \bar{\xi} > 0, \quad \forall i \neq l$$

Ἐὰν ὑφίστανται καὶ ἄλλαι τιμαὶ τῆς ξ, διὰ τὰς ὁποίας $x_i' \geqslant 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, διὰ τὰς ὁποίας δηλαδὴ ἡ νέα λύσις x_i' εἶναι δυνατή, αἱ τιμαὶ αὗται δέον νὰ εὑρίσκονται εἰς τὴν περιοχὴν $\xi > \bar{\xi}$. Λαμβανομένου πράγματι ὑπ' ὄψιν ὅτι $x_{lk} < 0$ καὶ $d_l < 0$, ἡ σχέσις:

$$\frac{q_l + d_l \xi}{x_{lk}} \geqslant 0$$

δίδει:

$$\xi \geqslant - \frac{q_l}{d_l} = \bar{\xi} \tag{75}$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν τὰ ἐναλλαχθέντα διανύσματα A^k (εἰσερχόμενον εἰς τὴν βάσιν) καὶ A^l (ἐξερχόμενον ἐξ αὐτῆς) ἐπιλεγῶσι, κατὰ τρόπον ὥστε:

$$\frac{z_j - c^j}{x_{lj}} \geqslant \frac{z_k - c^k}{x_{lk}}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{καὶ} \quad x_{lj} < 0 \tag{76}$$

θὰ εἶναι, ἐπειδὴ $x_{lj} < 0$:

$$(z_j - c^j) - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (z_k - c^k) \leqslant 0 \tag{77}$$

σχέσις ἰσχύουσα ἐάν:

$$\frac{z_k - c^k}{x_{lk}} = \min_{j : x_{lj} < 0} \frac{z_j - c^j}{x_{li}}$$

Διὰ $x_{lj} > 0$, ἡ σχέσις (77) ἰσχύει ὁπωσδήποτε, ἐφ' ὅσον:

$$z_j - c^j \leqslant 0, \quad z_k - c^k \leqslant 0 \quad \text{καὶ} \quad x_{lk} < 0$$

Τὸ πρῶτον μέρος τῆς σχέσεως (77) παριστᾷ [βλ. (33)] τὸ μετασχηματισθὲν κριτήριον, μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν εἰς τὴν βάσιν, τοῦ διανύσματος A^l διὰ τοῦ διανύσματος A^k. Ἑπομένως, συμφώνως πρὸς τὴν (77), ἡ νέα λύσις εἶναι ἀρίστη λύσις τοῦ προβλήματος.

Ἀνάλογος εἶναι καὶ ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι, ἐὰν ὅλα τὰ $x_{lj} > 0$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει δυνατὴν λύσιν, διὰ $\xi > \bar{\xi}$. Ὁμοίως, ἐὰν ὅλα τὰ $x_{\nu j} > 0$, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει δυνατὴν λύσιν, διὰ $\xi < \underline{\xi}$.

6.4.4. Ἐὰν λοιπὸν εἰς ἓν στάδιον ἔχωμεν προσδιορίσει, συμφώνως πρὸς τὴν (71), τὸ διάστημα $[\underline{\xi}, \bar{\xi}]$, διὰ τὸ ὁποῖον ἡ λύσις εἶναι ἀρίστη καὶ δυνατή, δυνάμεθα νὰ διευρύνωμεν τοῦτο πρὸς τὰ ἄνω ἢ κάτω διὰ καταλλήλων, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα 2, ἀλλαγῶν εἰς τὴν βάσιν.

Ἡ πρὸς τὰ ἄνω διεύρυνσις, π.χ., θὰ ἐπιδιωχθῇ διὰ διαδοχικῆς ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν βάσιν διανυσμάτων, ὡς τὸ A^l, εἰς τὰ ὁποῖα πραγματοποιεῖται ἑκάστοτε $\min\limits_{i : d_i < 0} - \frac{q_i}{d_i} = - \frac{q_l}{d_l}$, ὑπὸ διανυσμάτων ὡς τὸ A^k, οὕτως ὥστε νὰ ἐξασφαλίζεται ἡ σχέσις:

$$\frac{z_k - c^k}{x_{lk}} = \min_{j : x_{lj} < 0} \frac{z_j - c^j}{x_{lj}}$$

Ἡ πρὸς τὰ κάτω διεύρυνσις τοῦ διαστήματος $[\underline{\xi}, \bar{\xi}]$, ἐξ ἄλλου, θὰ ἐπιδιωχθῇ διὰ διαδοχικῆς ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν βάσιν διανυσμάτων, ὡς τὸ A^ν, εἰς τὰ ὁποῖα πραγματοποιεῖται ἑκάστοτε $\max\limits_{i : d_i > 0} - \frac{q_i}{d_i} = - \frac{q_\nu}{d_\nu}$, ὑπὸ διανυσμάτων, ὡς τὸ A^ρ, οὕτως ὥστε νὰ ἐξασφαλίζεται ἡ σχέσις:

$$\frac{z_\rho - c^\rho}{x_{\nu\rho}} = \min_{j : x_{\nu j} < 0} \frac{z_j - c^j}{x_{\nu j}}$$

Ἐὰν εἰς ἓν ἐκ τῶν σταδίων τῆς διαδικασίας πρὸς διεύρυνσιν τοῦ διαστήματος $[\underline{\xi}, \bar{\xi}]$, ὅλα τὰ $x_{lj} > 0$ ἢ ὅλα τὰ $x_{\nu j} > 0$, τότε τὸ διάστημα τῶν τιμῶν τῆς ξ δὲν διευρύνεται περαιτέρω πρὸς τὰ ἄνω ἢ κάτω, ἀντιστοίχως.

6.4.5. Εἰς τὸ κάτωθι ἀριθμητικὸν παράδειγμα, γίνεται χρῆσις τοῦ ἰδίου προβλήματος τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων, καταλλήλως παραμετρηθέντος.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα 3

Τὸ πρόβλημα τίθεται ὡς ἑξῆς :

Ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῶν x_1, x_2, x_3, οὕτως ὥστε, διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου ξ :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = \min$$

ὑπὸ τοὺς περιορισμούς :

$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 - x_3 &\leqslant 46 - 2\xi \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geqslant 4 + \xi \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4 - \frac{1}{2}\xi \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{78}$$

Τὸ πρόβλημα μετασχηματίζεται περαιτέρω, κατὰ τὰ γνωστά, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς μεταβλητῶν ἀποκλίσεως (x_4, x_5) καὶ τεχνητῶν μεταβλητῶν (x_6, x_7), ὡς ἑξῆς :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + wx_6 + wx_7 &= \min \\ 8x_1 + 12x_2 - x_3 + x_4 &= 46 - 2\xi \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + x_6 &= 4 + \xi \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 4 - \frac{1}{2}\xi \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

6.4.6. Εἰς τὸν πίν. 7, περιλαμβάνονται αἱ ἀριθμητικαὶ πράξεις, διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος. Ἡ διὰ τοῦ ἀλγορίθμου τοῦ Dantzig διαδικασία, πρὸς κατάρτισιν τῶν διαδοχικῶν ἐπὶ μέρους πινάκων, μέχρις τῆς τελικῆς λύσεως, εἶναι πλέον γνωστὴ καὶ δὲν θὰ περιγραφῇ. Παρατηρεῖται μόνον ὅτι οἱ ἐπὶ μέρους πίνακες διαφέρουσι τῶν ἀντιστοίχων τῆς λύσεως ἑνὸς κλασσικοῦ προβλήματος, κατὰ τὸ ὅτι ἡ στήλη A^0 εἶναι ἐνταῦθα διπλῆ, περιλαμβάνουσα κεχωρισμένως τὰ στοιχεῖα τῶν γραμμικῶν συναρτήσεων τῆς παραμέτρου ξ. Παρατηρεῖται, ἐπίσης, ὅτι, εἰς τὸ στάδιον τοῦ μερικοῦ πίνακος 3, ἐπιτυγχάνεται ἡ ἐλαχίστη λύσις, ἡ ὁποία εἶναι, ὡς προκύπτει [βλ. (71)], δυνατή, εἰς τὸ διάστημα $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$ τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου ξ. Ἐπιδιώκοντες τὴν διεύρυνσιν τοῦ διαστήματος τούτου, εἰσάγομεν εἰς τὴν βάσιν τὸ διάνυσμα A^4, εἰς ἀντικατάστασιν τοῦ διανύσματος A^3 (βλ. § 6.4.4.) καὶ ἐπιτυγχάνομεν νέαν λύσιν, ἥτις εἶναι δυνατὴ εἰς τὸ διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου ξ. Τὸ διάστημα τοῦτο δὲν δύναται νὰ διευρυνθῇ περαιτέρω, διότι ὅλα τὰ στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων $A^1, \ldots, A^5$, τῆς γραμμῆς 1, ὅπου πραγματοποιεῖται : $\min\limits_{i : d_i < 0} - \frac{q_i}{d_i} = - \frac{q_5}{d_5} = 2$, εἶναι θετικὰ (βλ. τέλος τῆς § 6.4.3.).

	α.ά	Βάσις	C	$C \rightarrow$		1	−2	1	0	0	w	w	
				A^0		A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	
				Q	D								
α	1	A^4	0	46	−2	8	12	−1	1	0	0	0	
	2	A^6	w	4	1	1	$\boxed{2}$	−1	0	−1	1	0	
	3	A^7	w	4	$-\frac{1}{2}$	1	1	1	0	0	0	1	
	4	$z_j - c^j$		0	0	−1	2	−2	0	0	0	0	
	5			8	$\frac{1}{2}$	2	3	0	0	−1	0	0	
1	1	A^4	0	22	−8	2	0	5	1	6		0	
	2	A^2	−2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$		0	
	3	A^7	w	2	−1	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$		1	
	4	$z_j - c$		−4	−1	−2	0	0	0	1		0	
	5			2	−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		0	
2	1	A^4	0	46/3	−14/3	1/3	0	0	1	$\boxed{13/3}$			
	2	A^2	−2	8/3	1,6	2/3	1	0	0	−1/3			
	3	A^3	1	4/3	−2/3	1/3	0	1	0	1/3			
	4	$z_j - c$		−4	−1	−2	0	0	0	1			
	5			0	0	0	0	0	0	0			
3	1	A^5	0	46/13	−14/13	1/13	0	0	3/13	1			
	2	A^2	−2	50/13	−5/26	9/13	1	0	1/13	0			$-\infty \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}$
	3	A^3	1	2/13	−4/13	4/13	0	1	$\boxed{-1/13}$	0			
	4	$z_j - c^j$		−98/13	1/13	−27/13	0	0	−3/13	0			
4	1	A^5	0	52/13	−2	1	0	3	0	1			
	2	A^2	−2	52/13	−1/2	1	1	1	0	0			$\frac{1}{2} \leqslant \xi \leqslant 2$
	3	A^4	0	−2	4	−4	0	−13	1	0			
	4	$z - c^j$		−104/13	1	−3	0	−3	0	0			

Πίναξ 7

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΑΙ

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὴν κατάρτισιν ὀρθολογικῶν σιτηρεσίων διὰ τὴν διατροφὴν τῶν ζώων καὶ εἰδικώτερον ἡ ἐναρμόνισις τῆς πολιτικῆς τῶν ἐνδιαφερομένων πρὸς συμπεράσματα, οἷα τὰ προκύπτονα ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλύσεως, δύναται, νομίζομεν, νὰ ἀποβῇ ἐπ' ἀγαθῷ τόσον τῆς κτηνοτροφικῆς ἐπιχειρήσεως καὶ γενικώτερον τῆς κτηνοτροφίας, ὅσον καὶ τῆς καθ' ὅλου Ἐθνικῆς Οἰκονομίας. Ὁ κύκλος τῶν ἐπωφελουμένων ἐκ τῶν μεθόδων τούτων καὶ τῶν λοιπῶν, τὰς ὁποίας προσφέρει ἡ «ἐπιχειρησιακὴ ἔρευνα», θὰ διευρύνεται μετὰ τῆς σταδιακῆς διαδόσεως τῆς ἐφαρμογῆς των, δυνάμενος νὰ ὑπερβῇ τὰ ἐθνικὰ ὅρια, ἐντὸς χώρων εὐρυτέρας οἰκονομικῆς κοινοπραξίας ἢ καὶ πέραν τούτων.

Οὕτω, θὰ ἠδύνατο ἴσως νὰ πραγματοποιηθῇ, βαθμιαίως καὶ κατὰ τὸ μέτρον διαδόσεως τῶν μεθόδων ἐρεύνης, σημαντικὴ μείωσις τοῦ κόστους παραγωγῆς καὶ βελτίωσις τῆς ὑγιοῦς ἀνταγωνιστικότητος τῶν σχετικῶν ἐπιχειρήσεων ἢ εὐρυτέρων γεωγραφικῶν παραγωγικῶν περιοχῶν ἢ τῶν κρατῶν, νὰ προσανατολισθῇ δὲ ἡ παραγωγὴ ἐπὶ τὸ ὀρθολογικώτερον καὶ νὰ ἐπιτευχθῇ, οὕτω, χάριν τῆς καταναλώσεως, ἀποτελεσματικωτέρα ἐκμετάλλευσις τῶν διαθεσίμων οἰκονομικῶν πόρων.

Δι' ὡρισμένης τοὐλάχιστον κατηγορίας κτηνοτροφικὰς ἐπιχειρήσεις, αἱ ὁποῖαι προσομοιάζουν κατὰ πολύ, ἐξ ἀπόψεως οἰκονομικῆς καὶ παραγωγικῆς ὀργανώσεως, πρὸς βιομηχανικὰς τοιαύτας, νομίζομεν ὅτι ὄχι μόνον εἶναι δυνατὴ ἀλλὰ καὶ ἐπιβάλλεται ἡ μελέτη τῶν προβλημάτων, διὰ τῶν συγχρόνων ἐπιστημονικῶν μεθόδων ἐρεύνης.

Πλέον ὅμως τούτων, νομίζομεν, ὅτι καὶ ἕτεροι γεωργικοὶ κλάδοι ἢ θέματα, ἁπτόμενα τῆς γεωργικῆς παραγωγῆς καὶ ὀργανώσεως, δὲν εἶναι ἀνεπίδεκτα τῶν μεθόδων τῆς ἐπιχειρησιακῆς ἐρεύνης. Ἤδη δὲ μία ἰσχυρὰ κίνησις διαγράφεται, εἰς τὰς πλέον προηγμένας χώρας, διὰ τὴν συστηματικὴν χρησιμοποίησιν τῶν μεθόδων τούτων εἰς τὴν γεωργίαν.