ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ὑπὸ κ. ΚΛΕΟΝΟΣ ΑΝΤΩΝΑΡΑ

«Ἐγὼ σοῦ ἔχω ἕτοιμη μία λύση. Τώρα ἐσὺ βρές μου ἕνα πρόβλημα νὰ τῆς ταιριάζη»

Τὸ βασικὸ γνώρισμα κάθε προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ὅτι γιὰ κάθε πρόβλημα ποὺ αἴτημά του ἔχει τὴν μεγιστοποίηση μιᾶς συνάρτησης ἀντιστοιχεῖ ἕνα πρόβλημα ὅπου ἐπιδιώκεται ἡ ἐλαχιστοποίηση μιᾶς ἄλλης συνάρτησης. Κατὰ μετάφραση ἀπ' τὴν Ἀγγλικὴν ἀναφερόμαστε στὸ «πρωτεῦον» καὶ τὸ «δίδυμό» του. Ἡ γενική τους μορφὴ εἶναι :

	$\max c'x$	(1α)	$\min y'b$	(2α)
ἱκανοποιώντας τοὺς			ι.τ.π.	
περιορισμοὺς	$Ax \leqslant b$	(1β)	$y'A \geqslant c$	(2β)
	$x \geqslant 0$	(1γ)	$y \geqslant 0$	(2γ)

ὅπου A εἶναι μήτρα μὲ γενικὸ στοιχεῖο a_{ij} $i = 1, 2, \ldots m$

$j = 1, 2, \ldots n$

c καὶ b εἶναι διανύσματα - στῆλες ἀριθμῶν ποὺ θεωροῦνται σὰν σταθερὲς ἂν καὶ τὶς περισσότερες φορὲς τοὺς χειριζόμαστε μᾶλλον σὰν παραμέτρους x καὶ y διανύσματα μεταβλητῶν.
(Ὁ τόνος δείχνει τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα - σειρές).

Τώρα τὸ δίδυμο πρόβλημα δὲν ἐμφανίζεται αὐθαίρετα. Παρατηροῦμε ὅτι αἴτημά του εἶναι νὰ βρεθῆ ἕνας κατάλληλος γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν περιορισμῶν τοῦ πρωτεύοντος, ποὺ νὰ περιγράφη τὴν συνάρτηση cx ὅταν ἡ τελευταία παίρνει τὴν μέγιστη τιμή της. Γιατὶ ξέρουμε ὅτι αὐτὸ γίνεται σὲ κάποιο σημεῖο, ποὺ οἱ περιορισμοὶ πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦνται. Ἂς πάρουμε ἕν' ἁπλὸ παράδειγμα.

Ζητοῦμε ἕνα ζευγάρι ἀριθμοὺς x_1, x_2 ποὺ νὰ μᾶς δώση

$$\begin{aligned} \max\quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{ὅταν}\quad & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ & x_1 + 4x_2 \leqslant 10 \\ & x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Ἡ μέγιστη τιμὴ μπορεῖ νὰ βρεθῆ πολὺ εὔκολα, γραφικά, ὅτι εἶναι 12,4. Τότε θὰ πρέπει :

$$3x_1 + 4x_2 - 12{,}4 \equiv y_1(3x_1+2x_2-8) + y_2(x_1+4x_2-10) + y_3(-x_1)+y_4(-x_2)$$

Ἂν αὐτὸ εἶναι δυνατό, ἂν δηλαδὴ ὑπάρχουν τὰ κατάλληλα y_2 γιὰ $i = 1, 2, 3, 4$. Τότε

$$3x_1 + 4x_2 - 12{,}4 \equiv x_1(3y_1 + y_2 - y_3) + x_2(2y_1 + 4y_2 - y_4) - (8y_1 + 10y_2)$$

Ὥστε :

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 - y_3 &= 3 \\ 2y_1 + 4y_2 - y_4 &= 4 \\ \\ 8y_1 + 10y_2 &= 12{,}4 \end{aligned} \qquad \text{ἢ} \qquad \begin{aligned} 3y_1 + y_2 &\geqslant 3 \\ 2y_1 + 4y_2 &\geqslant 4 \\ y_1 \geqslant 0 \quad y_2 &\geqslant 0 \\ 8y_1 + 10y_2 &= 12{,}4 \end{aligned}$$

Εἴμαστε λοιπὸν ὑποχρεωμένοι νὰ ἐρευνήσουμε γιὰ τὴν ὕπαρξη τῶν y_i, ποὺ εἶναι οἱ μεταβλητὲς στὸ δίδυμο πρόβλημα, ἂν θέλουμε νὰ πειστοῦμε ὅτι φτάσαμε στὸ μέγιστο τῆς cx ἱκανοποιώντας τὸ πρωτεῦον.

Τὸ σύστημα
$$Ax \leqslant b$$
$$x \geqslant 0$$

δέχεται γενικὰ ἄπειρες λύσεις καὶ τὸ σύνολο τῶν n-διαστάτων ἀνυσμάτων ποὺ τὸ ἱκανοποιοῦν ἀπαρτίζει τὸ σύνολο τῶν ἀποδεκτῶν λύσεων (feasible solutions). Τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ γραμμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχει τέσσερα λήμματα καὶ μπορεῖ νὰ διατυπωθῆ :

Θεώρημα

Γιὰ κάθε πρωτεῦον καὶ δίδυμο πρόβλημα.

1.—Ἂν ὑπάρχουν (1) $x \in X$ καὶ $y \in Y$ (ὅπου X καὶ Y οἱ ἀντίστοιχοι χῶροι τῶν ἀποδεκτῶν λύσεων).

Τότε
$$y'b \geqslant c'x \tag{3}$$

Ἀναφερόμαστε στὸ συμμετρικὸ πρόβλημα ὅταν ἰσχύη ἡ σχέση

$$y'b = cx \tag{4}$$

2.—Ἂν ὑπάρχουν x^0 καὶ y^0 ποὺ νὰ ἱκανοποιοῦν τὸ συμμετρικὸ πρόβλημα τότε αὐτὲς εἶναι καὶ οἱ ἄριστες λύσεις τῶν (1) καὶ (2).

3.—Καὶ τὸ ἀντίστροφο ἰσχύει. Ἂν ὑπάρχη λύση γιὰ ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπ' τὰ δυὸ προβλήματα τότε τὸ συμμετρικὸ ἔχει λύση, ***μὲ μιὰ ἐξαίρεση*** :

4.—Ἂν ἡ ἄριστη λύση τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχει φραγμὸ (2) (ἀνώτερο ἢ κατώτερο ἀνάλογα μὲ τὸ πρόβλημα) τότε τὸ δίδυμό του δὲν ἔχει ἀποδεκτὴ λύση.

Τὰ λήμματα 1 καὶ 2 ἀποδεικνύονται εὔκολα. Τὸ 3 εἶναι λογικὴ συνέπεια τοῦ 2. Ἂν ὑπάρχη κάποια λύση γιὰ τὸ συμμετρικὸ αὐτὸ δὲν σημαίνει πάντα λύση καὶ γιὰ τὰ δυὸ προβλήματα. Τὸ 4 εἶναι ἡ περίπτωση. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ 3 βασίζεται πάνω σ' ἕνα θεώρημα ποὺ λύθηκε ἀπ' τὸν J. Fargas τὸ 1902. Ἕνα ἀκόμη παράδειγμα θεωρητικῆς καθαρὰ ἐργασίας, ποὺ χρησίμεψε πολὺ ἀργότερα γιὰ πρακτικοὺς σκοπούς.

Θεώρημα

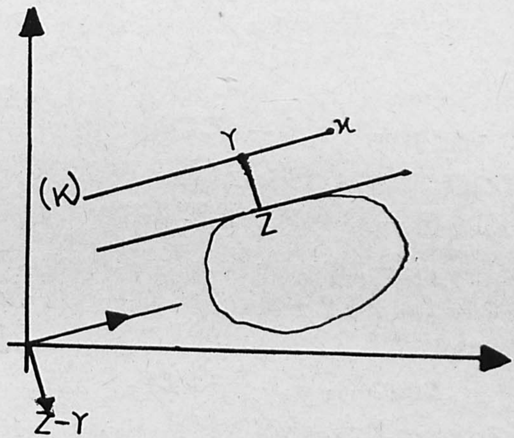
Ἂς θεωρήσουμε τὸ κυρτὸ φραγμένο σύνολο σημείων C στὸν n-διάστατο Εὐκλείδιο χῶρο. Τότε ἕνα διάνυσμα y ἢ θὰ περιέχεται στὸ C ἢ θὰ περιέχεται σ' ἕνα ὑπερεπίπεδο k τέτοιο ποὺ ν' ἀφήνη ὁλόκληρο τὸ C στὸν ἕνα ἀπ' τοὺς δυὸ ἡμιχώρους ποὺ ὁρίζει.

Τὸ y δὲν μπορεῖ ν' ἀνήκη καὶ στὸ C καὶ στὸ ὑπερεπίπεδο. Γιατὶ ἂν περιέχεται στὸ k, τότε δὲν θὰ περιέχεται σὲ κανέναν ἀπ' τοὺς «ἀνοικτοὺς» ἡμιχώρους, ποὺ ὁρίζει τὸ k. Γεωμετρικὴ ἀπόδειξη εἶναι εὔκολη στὸ χῶρο δύο διαστάσεων.

Ἔστω ἕνα σημεῖο z ποὺ ἀνήκει στὸ C, ἐνῶ τὸ y δὲν ἀνήκει, καὶ ἔστω ὅτι τὸ z ἔχει τὴν ἰδιότητα, ἡ ἀπόσταση $|z - y| \neq 0$ νὰ εἶναι ἐλάχιστη, σὲ σύγκριση μὲ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τοῦ C. Ὅτι ὑπάρχει ἕνα τέτοιο z θὰ τὸ θεωρήσουμε σὰν κάτι ποὺ μᾶς δίνεται (Θεώρημα Weierstrass).

Τότε γιὰ κάθε σημεῖο $u \in C$ θὰ εἶναι: *

$$|u - y| \geqslant |z - y| \tag{5}$$



Τώρα ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἀδιαφοροῦμε ἂν τὸ u ἀνήκη ἢ ὄχι στὸ C ἀλλὰ ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση

$$(z - y)'(u - y) = 0 \tag{6}$$

δηλαδὴ τὸ u παίρνει τέτοιες τιμὲς ποὺ ἡ διαφορὰ (u — y) νὰ σχηματιστῆ ἕνα διάνυσμα κάθετο (3) πάνω στὸ (z — y). Ὅλες αὐτὲς οἱ τιμὲς τοῦ u ὁρίζουν ἕνα ὑπερεπίπεδο, ποὺ περιέχει τὸ y καὶ τὸ ὁποῖο κινεῖται κι αὐξάνει πρὸς τὴν διεύθυνση (z — y)

$$(z - y)'u = k = (z - y)'y \tag{6a}$$

* Στὸ σχῆμα ἀντὶ γιὰ κ διάβαζε u.

Ὡστόσο, στὴν περίπτωσή μας δὲν εἶναι ἡ σχέση (6α) ποὺ ἰσχύει ἀλλὰ ἡ

$$(z-y)'(u-y) > 0 \quad (7)$$

ἢ

$$(z-y)'u > (z-y)'y \quad (7\alpha)$$

γιατὶ δὲν ἀδιαφοροῦμε γιὰ τὸ τί τιμὲς θὰ πάρῃ τὸ u παρὰ τὸ τοποθετοῦμε μέσα στὸ C, στὴν πραγματικότητα. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι πολὺ γενικὴ καὶ αὐστηρή.

Ἂν $u \in C$ τότε κάθε γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν u καὶ z περιέχεται ἐπίσης στὸ C

$$\{\lambda u + (1-\lambda) z\} \in C \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Ἀπὸ τὴν ἰδιότητα τῆς $|z-y|$ νὰ εἶναι ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση ἕπεται ὅτι

$$|\lambda u + (1-\lambda)z - y|^2 \geqslant |z-y|^2 \quad (8)$$

ἢ

$$|(z-y) + \lambda(u-z)|^2 \geqslant |z-y|^2$$

ἢ

$$\lambda^2 |u-z|^2 + 2\lambda |z-y|\,|u-z| \geqslant 0 \qquad \text{ἐφ' ὅσον } \lambda > 0$$

ἢ

$$\lambda\,|u-z|^2 + 2\,|z-y|\,|u-z| \geqslant 0 \qquad \text{ἐφ' ὅσον } \lambda < 1$$

Γιὰ $\lambda \to 0$

$$\sum_{i=1}^{m} (z_i - y_i)(u_i - z_i) \geqslant 0 \quad (9)$$

Ἡ ἀλήθεια αὐτῆς τῆς ἀνισότητας εἶναι γενικὴ γιὰ κάθε σημεῖο u ποὺ ἀνήκει στὸ C

Ἀπὸ τὴν ταυτότητα

$$u_i - y_i = u_i - z_i + z_i - y_i$$

$$(u_i - y_i)^2 = (u_i - z_i)^2 + (z_i - y_i)^2 + 2(z_i - y_i)(u_i - z_i)$$

καὶ

$$(u_i - y_i) - (z_i - y_i) = (u_i - z_i)$$

$$(u_i - z_i)^2 = (u_i - y_1)^2 + (z_i - y_i)^2 - 2(u_i - y_i)(z_i - y_i)$$

$$0 = 2(z_i - y_i)^2 + 2(z_i - y_i)(u_i - z_i) - 2(u_i - y_i)(z_i - y_i)$$

Καὶ ἀπὸ τὴν σχέση (9)

$$\Sigma (u_i - y_i)(z_i - y_i) \geqslant \Sigma (z_i - y_i)^2$$

ἀλλὰ $z_i \neq y_i$ καὶ ἑπομένως $\Sigma (z_i - y_i)^2 > 0$

Ἄρα

$$\Sigma (u_i - y_i)(z_i - y_i) > 0 \quad (10)$$

ἢ σὲ διανυσματικὴ μορφὴ $(z-y)'(u-y) > 0$

Ἐπειδὴ τὸ u εἶναι ὁποιοδήποτε διάνυσμα στὸ C ἡ σχέση (10) ἰσχύει γιὰ ὅλο τὸ C. Ἀκόμα ἀποδεικνύεται εὔκολα πὼς τὸ z εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας τοῦ C.

Ἀκολουθεῖ ἕνα δεύτερο θεώρημα ποὺ διατυπώνει κατὰ κάποιο ἐπίσημο τρόπο τὸ ἀρκετὰ ἁπλὸ γεγονὸς ὅτι ἕνα διάνυσμα ἢ θ' ἀνήκῃ σ' ἕνα κυρτὸ κῶνο ἢ θὰ εἶναι ἀπ' ἔξω.

Θεώρημα

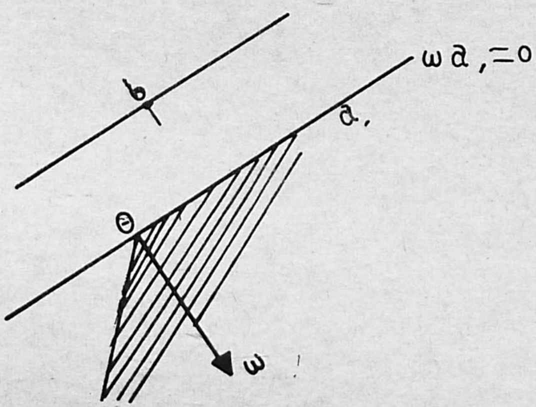
Ἂν ἰσχύη ἡ σχέση (4)

$$y\,(A \quad b) \geqslant 0 \tag{11}$$

Τότε ὑπάρχουν $x \geqslant 0$ ποὺ ἱκανοποιοῦν τὸ σύστημα

$$Ax = b \tag{12}$$

Τὰ στοιχεῖα ποὺ σχηματίζουν τὴν μήτρα A γεννοῦν ἕνα κῶνο στὸν E_m. Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ κῶνος εἶναι κυρτὸς καὶ κλειστὸς (περιέχει τὰ ὁριακά του σημεῖα). Τὸ b δὲν περιέχεται σ' αὐτόν. Τότε ὑπάρχει ἕνα ὑπερεπίπεδο ποὺ περιέχει τὸ b ἐνῶ ἀφήνει ὅλο τὸν κῶνο στὸν θετικὸ ἡμιχῶρο του.



Ἔστω z νὰ εἶναι τὸ πλησιέστερο σημεῖο τοῦ κώνου στὸ b. (Ξανὰ ὑποθέτουμε ὅτι ἡ ἀπόδειξη γιὰ τὴν ὕπαρξη τοῦ z εἶναι γνωστή).

Τότε ἡ κατεύθυνση $\omega = b - z$ εἶναι τέτοια ποὺ σχηματίζει ὀρθὴ ἢ ὀξεῖα γωνία μὲ κάθε σημεῖο τοῦ κώνου, ἀλλὰ ἀμβλεία γωνία μὲ τὸ b

$$\omega b < 0 \tag{13}$$

Ἂν λοιπὸν θέσουμε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση

$$y\,(A \ \cdot \ b) \geqslant 0$$

εἶναι σὰν νὰ ὑποχρεώνουμε τὸ b νὰ περιέχεται μέσα στὸν κῶνο, ποὺ γεννιέται ἀπ' τὴν A. Ἀλλὰ τότε εἶναι δυνατὸ νὰ περιγράψουμε τὸ b σὰν γραμμικὸ συνδυασμὸ τῶν ἀνυσμάτων τῆς A

$$Ax = b.$$

Τώρα ἔχουμε τὸν ἐξοπλισμὸ νὰ προχωρήσουμε καὶ ν' ἀποδείξουμε τὸ θεμελιῶδες θεώρημα

Λῆμμα 1

Ἀπὸ τὸ πρωτεῦον	$Ax \geqslant b$	ἢ	$y'Ax \leqslant y'b$
Ἀπὸ τὸ δίδυμο	$y'A \geqslant c'$	ἢ	$y'Ax \geqslant c'x$

Τότε

$$y'b \geqslant c'x \tag{3}$$

Λῆμμα 2

Ἀπὸ τὸ λῆμμα 1

$$cx \leqslant yb$$

γιὰ κάθε x, y ποὺ ἀνήκουν ἀντίστοιχα στὰ σύνολα τῶν ἀποδεκτῶν λύσεων τῶν προβλημάτων ποὺ τὰ συμβολίζουμε X καὶ Ψ.

Ἂν λοιπὸν $\widehat{x} \in X$, $\widehat{y} \in \Psi$, καὶ ἱκανοποιοῦν τὸ συμμετρικὸ πρόβλημα

$$\widehat{y}\, b = \widehat{cx}$$

Τότε $\widehat{x}$ καὶ $\widehat{y}$ εἶναι ἄριστες λύσεις.

Γιατὶ $\quad cx \leqslant \widehat{y}\, b \quad$ ἐφ' ὅσον $\quad \widehat{y} \in \Psi$

ἢ $\quad cx \leqslant c\,\widehat{x} \quad$ ὥστε $\quad c\,\widehat{x}$ max

Ὅμοια καὶ γιὰ τὸ $\widehat{y}$.

Λῆμμα 3

Ἂν δοθῆ ἡ ἄριστη λύση $\quad y^0 \in \Psi$

καὶ ἡ ἄριστη λύση $\quad x^0 \in X$

θὰ δείξουμε ὅτι $\quad cx^0 = y^0 b$

Θεωροῦμε τὴν σχέση (5)

$$(y \;\; \zeta) \begin{bmatrix} I_{(m\times m)} & O_{(m\times 1)} & A_{(m\times n)} & b \\ O_{1\times m} & 1 & -c' & -\mu \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{14}$$

ὅπου τὰ στοιχεῖα τοῦ y καὶ τὸ ζ μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί. Αὐτὸ ὑπαγορεύει τὴν ὕπαρξη τοῦ διανύσματος τῶν μεταβλητῶν

$$(z \quad z_{m+1} \quad x)$$

ὅπου

(15α) $\quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \quad z_i \geqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$

(15β) $\quad z_{m+1} \geqslant 0$

(15γ) $\quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Τὸ διάνυσμα αὐτὸ ἱκανοποιεῖ λοιπὸν τὴν σχέση

$$\begin{bmatrix} I & 0 & A \\ 0 & 1 & -c' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ z_{m+1} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -\mu \end{bmatrix} \tag{16}$$

ἢ σὲ διανυσματικὲς ἐξισώσεις

$$z + Ax = b \tag{17}$$

$$z_{m+1} - c'x = -\mu \tag{18}$$

Ὁρίζουμε τὸν ἀριθμὸ μ ὡς ἑξῆς :

$$y^0 b = \mu \leqslant yb$$

γιὰ κάθε $y \in \Psi$. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς εἶναι δυνατὸς γιατὶ ὑποθέτουμε στὸ λῆμμα 3 ὅτι ἡ ἄριστη λύση y^0 εἶναι γνωστή.

Ἀπὸ τὶς (15α) καὶ (17) $\quad Ax \leqslant b$

Ἀπὸ τὶς (15β) καὶ (18) $\quad cx \geqslant \mu$

καὶ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ μ

$$cx \geqslant y^0 b \tag{19}$$

Τὸ σημεῖο ἀνισότητας στὴν (19) ἀντιφάσκει στὴν σχέση (3) στὸ λῆμμα 1, Συμπέρασμα $cx = y^0 b$ δηλαδὴ x optimum.

Ἀπομένει ν' ἀναλύσουμε ποιοὶ ἦταν αὐτοὶ οἱ περιορισμοί, ποὺ αὐθαίρετα ἐπιβάλαμε μὲ τὴν σχέση (14). Αὐτὴ ἀναλύεται σὲ τρεῖς διανυσματικὲς ἐξισώσεις

(α) $\quad y_i \geqslant 0 \qquad \Sigma y_i + \zeta \geqslant 0$

(β) $\quad yA - \zeta c' > 0 \quad$ ἢ $\quad y'A \geqslant \zeta c'$

(γ) $\quad yb - \zeta\mu \geqslant 0 \quad$ ἢ $\quad y\,b \geqslant \zeta\mu$

Διακρίνουμε δυὸ περιπτώσεις:

$\zeta > 0$. Τότε οἱ σχέσεις

(α) ἱκανοποιεῖται αὐτομάτως

(β) εἶναι τὸ ἴδιο τὸ δίδυμο πρόβλημα

(γ) ἐπακόλουθο τῆς min ἰδιότητας τοῦ $\mu = y^0 b$.

$\zeta = 0$. Τότε οἱ σχέσεις

(α) ἱκανοποιεῖται αὐτομάτως

(β) ὁρίζεται αὐθαίρετα

(γ) $yb \geqslant 0$ πρέπει ν' ἀποδειχθῆ.

Ἂν y^* εἶναι ἄριστη λύση καὶ γνωστὴ τότε καὶ τὸ διάνυσμα

$$y' = y^* + \lambda y \qquad y \geqslant 0 \qquad \lambda > 0$$

εἶναι μιὰ ἀποδεκτὴ λύση γιατί

$$(y^* + \lambda y) \geqslant y \tag{20}$$

ἢ

$$y^*A + \lambda yA \geqslant y^*A \geqslant c$$

ὅλες οἱ σχέσεις τοῦ δίδυμου προβλήματος ἱκανοποιοῦνται.

Ἑπομένως $\quad y^*b + \lambda yb \geqslant y^*b$

$$yb \geqslant 0$$

Τὸ λῆμμα 3 λοιπὸν ἀποδεικνύεται ὅταν τὸ y^* δίνεται. Ἡ ἴδια ἀπόδειξη κι' ὅταν τὸ x^* δίδεται.

Λῆμμα 4

Καὶ πάλι γιὰ κάθε $x \in X$, $y \in Y$, $c'x \leqslant y'b$. Τὸ y λοιπὸν ἔχει κατώτερο φραγμὸ μὰ δὲν μπορεῖ νὰ θεωρηθῆ πιὰ σὰν ἄριστη λύση. Γιὰ ν' ἀκολουθήσουμε τὴν μέθοδο ποὺ ἐφαρμόσαμε στὸ λῆμμα 3 θὰ ὁρίσουμε τώρα τὸ μ σὰν τὸν μεγαλύτερο ἀπ' τοὺς κατώτερους φραγμοὺς τοῦ y. Αὐτὸ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὁρίσουμε

$$\mu \geqslant c'x$$

ἀφοῦ γιὰ κάθε ζεῦγος λύσεων x, y, τὸ c'x εἶναι κατώτερος φραγμός. Ἀλλὰ ἀκριβῶς κατὰ τὰ προηγούμενα καὶ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις (15β) καὶ (18) ἔχομε $cx \geqslant \mu$.

Ἑπομένως $c'x = \mu$. Καὶ γιὰ τὶς τιμὲς ἐκεῖνες τοῦ y γιὰ τὶς ὁποῖες $yb = \mu$, τὸ συμμετρικὸ πρόβλημα ἀποκτᾶ λύση. Δηλαδὴ τότε ἀποκτοῦμε τὸ optimum. Ἔτσι, ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξή του.

Μιὰ ἀκόμη δυσκολία στὴν περίπτωση $\zeta = 0$ καὶ γιὰ τὴν σχέση (γ). Ἡ (20) δὲν ἰσχύει πλέον μιὰ καὶ ἡ ὕπαρξη optimum λύσης δὲν ἔχει βεβαιωθῆ. Θεωροῦμε τότε ὅτι ὑπάρχει ἕνα $y \in Y$ τέτοιο ποὺ

$$\mu \leqslant yb \leqslant \mu + \varepsilon$$

ὅπου ε μιὰ αὐθαίρετη θετικὴ ποσότητα. Τότε θὰ εἶναι καὶ

$$\mu \leqslant \mu + \varepsilon + \lambda yb$$

ἐπειδὴ ε αὐθαίρετο $\qquad yb \geqslant 0$

καὶ τελικὰ ἂν ὑποθέσουμε ὅτι μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε ὁσοδήποτε μεγάλες τιμὲς τοῦ x (δηλαδὴ x χωρὶς ἀνώτερο φραγμὸ) τότε μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$x^0 = x + \lambda \qquad \text{γιὰ αὐθαίρετο } \lambda > 0$$
$$\text{καὶ γιὰ κάθε } x \in X$$

τὸ y^* τότε γίνεται μεγαλύτερο τοῦ ἀπείρου ἀφοῦ πάντα

$$y^*b \geqslant cx^0$$

αὐτὸ δὲν ἔχει ἔννοια γιὰ ἕνα πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως. Ἁπλῶς δηλώνουμε πὼς τὸ σύνολο Y εἶναι κενό.

Ἔτσι, ἡ ὕπαρξη λύσης καὶ στὰ δυὸ προβλήματα βεβαιώνεται ἐνῶ συγχρόνως δίνεται ἕνα κριτήριο ὅτι φτάσαμε στο optimum : ἡ λύση τοῦ συμμετρικοῦ προβλήματος.

Ἡ μέθοδος Simplex ἀκριβῶς στηρίζεται πάνω σ' αὐτὸ τὸ κριτήριο. Λύνοντας τὸ πρωτεῦον ἂς ποῦμε, χωρίζουμε τὴν μήτρα A σὲ δυὸ τμήματα καὶ ἀντίστοιχα τὰ διανύσματα x καὶ c

$$A = [B \quad Q] \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_q \end{bmatrix}$$
$$c' = [c'_B \quad c'_q]$$

ὅπου B μιὰ ὑπομήτρα διαστάσεων $m \times m$, μιὰ βάση στὸ χῶρο E_m. Τότε ἡ λύση δίνεται σὰν

$$x_B = B^{-1}\,b$$

καὶ κριτήριο ἀριστοποιήσεως εἶναι

$$c' - c'_B B^{-1} A = c' - y'A \leqslant 0\,.$$

Ἡ ἱκανοποίηση τῶν περιορισμῶν τοῦ δίδυμου εἶναι τὸ κριτήριο ὅτι φτάσαμε στὸ max τῆς cx,

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

1) $x \in X$ σημαίνει ένα διάνυσμα x παρμένο ἀπ' τὰ διανύσματα τοῦ συνόλου X (διανυσματικοῦ χώρου). Διαβάζεται x ἐν X.

2) Ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἢ μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι φραγμένο (ἔχει ἀπόλυτο φραγμό) ἂν τὸ σύνολο τῶν ἀπολύτων τιμῶν τους ἔχῃ ἕνα φραγμὸ πρὸς τὰ πάνω, ἂν κάθε στοιχεῖο y τοῦ συνόλου εἶναι τέτοιο ποὺ $|y| \leqslant M$, ὅπου M ἕνας ἀριθμὸς διαφορετικὸς ἀπὸ ἄπειρο.

Ἕνα χωρίο στὸν Εὐκλείδιο χῶρο εἶναι φραγμένο ἂν ὅλα τὰ σημεῖα ποὺ περιέχει μπορεῖ νὰ περιγραφοῦν ἀπὸ πεπερασμένες καρτεσιανὲς συντεταγμένες.

3) Ἕνα ἐπίπεδο στὸν E_m (Εὐκλείδιο χῶρο m διαστάσεων) δίνεται ἐξ ὁρισμοῦ ἀπὸ τὴν ἐξίσωση

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_m x_m = t$$

ἡ δὲ διανυσματικὴ μορφὴ

$$cx = t$$

Ἂν $t = 0$ τὸ ἐπίπεδο περνᾶ ἀπ' τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων καὶ τὰ διανύσματα c καὶ x εἶναι ὀρθογώνια. Γιατὶ ἂν θ εἶναι ἡ γωνία ἀνάμεσα σὲ δυὸ ὁποιαδήποτε διανύσματα a καὶ b πάντα ἰσχύει ἡ σχέση

$$\frac{a \cdot b}{|a|\ |b|} = \text{συν}\ \theta.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ τὸ μῆκος τοῦ a εἶναι $\quad |a| = + \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \right)^{1/2}$

Ὥστε τὸ συν θ εἶναι ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως ἀνάμεσα στὰ σύνολα «παρατηρήσεων» a καὶ b ὅταν αὐτὰ μετροῦνται ἀπ' τὸν μέσο ὅρο τους.

4) (A) συμβολίζεται ὁ κῶνος ποὺ σχηματίζεται ἀπ' τὰ διανύσματα μιᾶς μήτρας **A**.

5) $I_{(m \times m)}$ συμβολίζει $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$

$O_{(1 \times m)}$ συμβολίζει $[\ 0 \ldots\ldots 0\ ]$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

G. Hadley : Linear Programming, Addison. Wesley, 1962.

S. Vajda : Mathematical Programming, Addison. Wesley, 1961.

T. C. Koopmans : Activity analysis of production and Allocation, Monograph No 13 of the Cowles Commission. N.Y., 1951.

Von Neumann J. and Morgenstern : Theory of Games and economic behavior. Princeton 1953 (3rd edition).