ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΑΙ

ΔΙΜΗΝΙΑΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΗΣ ΕΝ ΠΕΙΡΑΙΕΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΝ ΕΤΟΣ 1964—1965	ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ – ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1964	ΙΕ' ΤΟΜΟΣ	ΑΡΙΘ. ΤΕΥΧΟΥΣ 2

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ὑπὸ τοῦ κ. Ἀπ. Α. ΛΑΖΑΡΗ

Τακτικοῦ Καθηγητοῦ τῆς Α.Β.Σ.

Γενικὰ

Ἡ ἐπίλυσις ἑνὸς προβλήματος οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ συνίσταται εἰς τὴν *ἐπιλογὴν* μιᾶς λύσεως ἢ ἑνὸς «συνόλου» λύσεων, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν ἓν προκαθωρισμένον κριτήριον. Γενικῶς τὰ προβλήματα οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι προβλήματα ἐπιλογῆς. Ταῦτα δύνανται νὰ καταταγοῦν εἰς δύο γενικὰς κατηγορίας. Εἰς προβλήματα *ἁπλῆς συνεπείας* καὶ εἰς προβλήματα *ἀριστοποιήσεως*. Ἡ ἐπίλυσις τῶν προβλημάτων τῆς πρώτης κατηγορίας ἀποσκοπεῖ εἰς τὸν προσδιορισμὸν λύσεων ἀφ' ἑνὸς μὲν *οἰκονομικῶς σημαντικῶν*, ἀφ' ἑτέρου δὲ *οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατῶν*. Οὕτω, π.χ., δὲν δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς οἰκονομικῶς σημαντικὴ λύσις ὑποδηλοῦσα ἀρνητικὸν ἐπίπεδον δραστηριότητος τῶν διαφόρων κλάδων παραγωγῆς μιᾶς οἰκονομίας. Τὸ ἐπίπεδον δραστηριότητος αὐτῶν δύναται νὰ εἶναι θετικὸν ἢ μηδενικόν. Ἐξ ἄλλου οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατὴ (ἢ πραγματοποιήσιμος) εἶναι δυνατὸν νὰ χαρακτηρισθῇ μία λύσις ὅταν αὕτη εὑρίσκεται ἐν συνεπείᾳ μὲ τὰς διαθεσίμους ποσότητας παραγωγικῶν συντελεστῶν καὶ τὰς ἐν χρήσει τεχνολογικὰς μεθόδους παραγωγῆς.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς δευτέρας κατηγορίας ἐπιδιώκεται ὁ προσδιορισμὸς μιᾶς ἢ περισσοτέρων λύσεων, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν ταυτοχρόνως τὰ κριτήρια συνεπείας καὶ τὰ κριτήρια ἀριστοποιήσεως ὡρισμένων συναρτήσεων ὠφελιμότητος.

Τὰ κύρια χαρακτηριστικὰ τῶν προβλημάτων ἀμφοτέρων τῶν κατηγοριῶν εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ μιᾶς διαδικασίας ἐπιλογῆς διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῶν. Τοῦτο εἶναι προφανὲς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν προβλημάτων ἀριστοποιήσεως, δὲν εἶναι ὅμως ἐξ ἴσου προφανὲς προκειμένου περὶ τῶν προβλημάτων ἁπλῆς συνεπείας. Θὰ ἦτο συνεπῶς σκόπιμον, διὰ λόγους θεωρητικῆς γενικεύσεως καὶ ἑνοποιήσεως τοῦ ἀντικειμένου ἐρεύνης τοῦ Οἰκονομικοῦ Προγραμματισμοῦ, νὰ προβληθῇ ἰδιαιτέρως ἡ ἀναγκαιότης ἐφαρμογῆς μιᾶς διαδικασίας ἐπιλογῆς καὶ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τῆς κατηγορίας ταύτης. Ὡς θὰ ἴδωμεν, ἡ κυρία διαφορὰ μεταξὺ προβλημάτων ἁπλῆς συνεπείας καὶ προβλημάτων ἀριστοποιήσεως συνίσταται οὐχὶ εἰς τὴν διαδικασίαν ἐπιλύσεως αὐτῶν, ἀλλ' εἰς τὸ «μέγεθος» τῶν σχετικῶν «συνόλων» λύσεων. Τὰ σύνολα ταῦτα καθίστανται ὁλονὲν «μικρότερα» ὡς προχωροῦμεν ἀπὸ τὰ πρῶτα πρὸς τὰ δεύτερα προβλήματα.

Ἐπιλογὴ λύσεων ἁπλῆς συνεπείας

1. Εἰς τὴν ἐπακολουθοῦσαν ἀνάλυσιν χρησιμοποιεῖται ὁ μαθηματικὸς συμβολισμὸς τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, ὁ ὁποῖος, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἁπλουστεύει εἰς τὸ ἔπακρον τὴν ἐπιχειρηματολογίαν καὶ ἀπαλλάσσει τὸν ἀναγνώστην ἀπὸ τὰς τεχνικὰς λεπτομερείας τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐξασφαλίζει πλήρη γενικότητα εἰς τὰ ἐξαγόμενα συμπεράσματα.

Ἔστωσαν:

R : Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

R^ν : Τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον ν συνόλων R, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μὲ τὸν ν-διάστατον εὐκλείδιον χῶρον.

X_ι, $(\iota = 1, 2, \ldots, \nu)$: οἱ ἄξονες τοῦ συστήματος συντεταγμένων τοῦ χώρου R^ν καὶ

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$: τυχὸν στοιχεῖον (διατεταγμένον ν-απλοῦν) τοῦ R^ν. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα δύνανται νὰ κληθοῦν ἐπίσης ***διανύσματα***, ὁ δὲ χῶρος R^ν ***διανυσματικὸς χῶρος***.

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς δοθεῖσαν οἰκονομίαν λαμβάνουν μέρος εἰς τὴν παραγωγὴν ν συντελεσταί, ἕκαστος τῶν ὁποίων συμβολίζεται διὰ τοῦ δείκτου $\iota (= 1, 2, \ldots, \nu)$ καὶ ὅτι αἱ ποσότητες αὐτῶν μετροῦνται ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων ἀξόνων X_ι τοῦ R^ν. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τὸ γενικὸν στοιχεῖον x ὑποδηλοῖ ***συνδυασμὸν*** ποσοτήτων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ἐκ τῶν ἀντιστοίχων συντελεστῶν.

2. Ἤδη δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἐπὶ τοῦ R^ν τὸ ἀκόλουθον ὑποσύνολον αὐτοῦ:

$$A = \{ x \mid x \varepsilon R^\nu \text{ καὶ } x \geqq 0 \} \tag{1}$$

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω συμβολισμὸν τὸ ὑποσύνολον A περιλαμβάνει πάντα τὰ στοιχεῖα x τοῦ R^ν $(= x \varepsilon R^\nu)$ τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν πρότασιν «$x \geqq 0$». Ἡ ἔννοια τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι ὅτι δι' ἕκαστον στοιχεῖον x_ι τοῦ x πρέπει νὰ ἰσχύῃ $x_\iota \geq 0$, μὴ ἀποκλειομένης καὶ τῆς περιπτώσεως $x_\iota = 0$ δι' ἅπαντα τὰ ι, ταυτοχρόνως. Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ πρότασις «$x \geqq 0$» ἀποτελεῖ ***κριτήριον ἐπιλογῆς*** ἐξ ὅλων τῶν στοιχείων (ἢ συνδυασμῶν) τοῦ R^ν μόνον τῶν μὴ ἀρνητικῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὴν ***θετικὴν πε-***

ριοχὴν τοῦ ἐν λόγῳ χώρου. Ἀποκλείονται δηλαδή, ὡς μὴ οἰκονομικῶς σημαντικοί, πάντες οἱ ποσοτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, οἱ ὁποῖοι ὑποδηλοῦν ἀρνητικὴν χρησιμοποίησιν ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἐκ τῶν συντελεστῶν αὐτῶν. Διὰ τοῦτο ἡ πρότασις $x \geqq 0$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς *κριτήριον οἰκονομικῆς σημαντικότητος* τῶν συνδυασμῶν x.

3. Ἂν αἱ διαθέσιμοι ποσότητες τῶν συντελεστῶν $1, 2, \ldots, \nu$ εἶναι $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὰς *οἰκονομικὰς δυνατότητας* τῆς δοθείσης οἰκονομίας διὰ τοῦ στοιχείου

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu)$$

τοῦ συνόλου A. Θὰ ὀνομάζωμεν *οἰκονομικῶς δυνατοὺς* τοὺς συνδυασμοὺς ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, οἱ ὁποῖοι εἶναι πραγματοποιήσιμοι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν οἰκονομικῶν δυνατοτήτων π. Οἱ συνδυασμοὶ οὗτοι ἀποτελοῦν ἓν ὑποσύνολον τοῦ A, τὸ B:

$$B = \{x \mid x \varepsilon A \text{ καὶ } x \leqq \pi\} \tag{2}$$

Ἡ πρότασις «$x \leqq \pi$» ἀποτελεῖ ἐνταῦθα τὸ κριτήριον ἐπιλογῆς τῶν οἰκονομικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν τοῦ A. Ἡ πρότασις αὕτη, ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν πρότασιν «$x \geqq 0$», καλύπτει ὅλας τὰς περιπτώσεις πλήρους, μερικῆς ἢ μηδενικῆς χρησιμοποιήσεως τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων ἑνὸς ἢ περισσοτέρων συντελεστῶν παραγωγῆς ταυτοχρόνως.

4. Θὰ ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι εἰς τὴν ἐν λόγῳ οἰκονομίαν εἶναι τεχνολογικῶς δυνατὴ ἡ παραγωγὴ ἀγαθῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως, ἀντιστοίχως, τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων (ἢ μεθόδων παραγωγῆς):

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= (\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots, \mu_{1\nu})\\
\mu_2 &= (\mu_{21}, \mu_{22}, \ldots, \mu_{2\tau})\\
&\;\;\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
\mu_\rho &= (\mu_{\rho 1}, \mu_{\rho 2}, \ldots, \mu_{\rho\nu})
\end{aligned}$$

αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν προφανῶς σημεῖα τοῦ A (1).

Τὰ γενικὰ στοιχεῖα $\mu_{\kappa\iota}$ ($\kappa = 1, 2, \ldots, \rho$ καὶ $\iota = 1, 2, \ldots, \nu$) εἶναι μὴ ἀρνητικὰ καὶ δεικνύουν τὴν ποσότητα τοῦ συντελεστοῦ ι ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος τοῦ ἀγαθοῦ α_κ βάσει τῆς ἀντιστοίχου παραγωγικῆς δραστηριότητος μ_κ.

Συνοπτικῶς δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$M \equiv (\mu_{\kappa\iota})$$

ὅπου M εἶναι μήτρα τάξεως ρxν, μὲ στοιχεῖα $\mu_{\kappa\iota}$.

---

1) Δὲν εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως τὰ $\mu_1, \ldots, \mu_\rho$ εἶναι καὶ σημεῖα τοῦ B.

Ἂν ἐκ τοῦ συνόλου N τῶν μὴ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν λάβωμεν ἀριθμοὺς λ_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, \rho)$, ἐκφράζοντας ἀντιστοίχως τὰ ἐπίπεδα χρησιμοποιήσεως τῶν παραγωγικῶν δραστηριοτήτων μ_κ, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἓν ὑποσύνολον Γ τοῦ B, περιλαμβάνον ἅπαντας τοὺς οἰκονομικῶς καὶ *τεχνολογικῶς δυνατοὺς* συνδυασμοὺς τοῦ τελευταίου :

$$\Gamma = \{ x \mid x \varepsilon B \text{ καὶ } x = \Lambda M \} \tag{3}$$

ὅπου $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho)$.

Τὸ ὑποσύνολον Γ ὡρίσθη ἐπὶ τοῦ B βάσει τοῦ κριτηρίου «$x = \Lambda M$» ἤ, ἀναλυτικῶς «$x = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_\rho \mu_\rho$». Τὸ κριτήριον τοῦτο ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐκ τῶν στοιχείων x τοῦ οἰκονομικῶς πραγματοποιησίμου συνόλου B πρέπει νὰ ἐπιλεγοῦν μόνον ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho$. Τὰ οὕτω ἐπιλεγόμενα στοιχεῖα x εἶναι ὄχι μόνον οἰκονομικῶς ἀλλὰ καὶ τεχνολογικῶς πραγματοποιήσιμα, καθ' ὅσον ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει αἱ συντεταγμέναι ἑκάστου στοιχείου x παριστοῦν τὰς ποσότητας τῶν συντελεστῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ὑφισταμένων παραγωγικῶν μεθόδων $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho$ εἰς ὡρισμένα ἐπίπεδα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$, ἀντιστοίχως. Στοιχεῖα x μὴ δυνάμενα νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\mu_1, \ldots \mu_\rho$ ἀποκλείονται τῆς ἐπιλογῆς, ὡς μὴ τεχνολογικῶς πραγματοποιήσιμα.

5. Προφανῶς οἱ τεχνολογικῶς πραγματοποιήσιμοι συνδυασμοὶ x ἀποτελοῦν ἓν σύνολον Γ', τοιοῦτον ὥστε : $\Gamma \subset \Gamma' \subset A$ (1), ἤτοι :

$$\Gamma' = \{ x \mid x \varepsilon A \text{ καὶ } x = \Lambda M \} \tag{3'}$$

Εἰς τὸ προηγούμενον τμῆμα ὡρίσθη τὸ Γ ὡς σύνολον τῶν συνδυασμῶν x οἱ ὁποῖοι εἶναι *ταυτοχρόνως* οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατοί, ἐνῶ τὸ σύνολον Γ' περιλαμβάνει ἅπαντας τοὺς τεχνολογικῶς πραγματοποιησίμους συνδυασμούς, ἀνεξαρτήτως ἐὰν οὗτοι εἶναι ἢ ὄχι καὶ οἰκονομικῶς πραγματοποιήσιμοι (2). Δυνάμεθα βεβαίως νὰ ὁρίσωμεν τὸ σύνολον Γ ὡς «τομὴν» (3) τῶν συνόλων B καὶ Γ' :

$$\Gamma = \Gamma' \cap B \tag{3''}$$

6. Διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ συνόλου Γ περατοῦται ἡ *πρώτη φάσις* τῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς, ἡ ἀφορῶσα εἰς τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων ἁπλῆς συνεπείας. Ἡ διαδικασία αὕτη μᾶς ὡδήγησεν ἀπὸ τὸ γενικὸν σύνολον R^ν εἰς τὸ

1) Τὸ σύμβολον $\subset$ δηλοῖ σχέσιν γνησίου ὑποσυνόλου πρὸς σύνολον.

2) Τὸ σύνολον Γ' ἀποτελεῖ περίπτωσιν *κυρτοῦ κώνου* μὲ κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων.

3) Ἡ «τομὴ» δύο συνόλων περιλαμβάνει ἅπαντα τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν ταυτοχρόνως καὶ εἰς τὰ δύο σύνολα, ἐκφράζεται δὲ διὰ τοῦ συμβόλου $\cap$.

ὑποσύνολον Γ τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἑξῆς κατὰ σειρὰν κριτηρίων:

α) Τοῦ κριτηρίου οἰκονομικῆς σημαντικότητος: $x \geqq 0$

β) Τοῦ κριτηρίου τῶν οἰκονομικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν: $x \leqq \pi$

γ) Τοῦ κριτηρίου τῶν τεχνολογικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν: $x = \Lambda M$.

Ἐν ἄλλοις λόγοις οἱ ἐπιλεγέντες τελικῶς συνδυασμοὶ x εἶναι τοιοῦτοι ὥστε:

$$0 \leqq x = \Lambda M \leqq \pi \quad (^1)$$

Ἐπιλογὴ ἀρίστης λύσεως

Ἤδη δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν ***δευτέραν*** (καὶ τελευταίαν) ***φάσιν*** τῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς, ἡ ὁποία ἀφορᾷ εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν οἰκονομικῶς ἀρίστων συνδυασμῶν x. Πρέπει ἐν τούτοις νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ φάσις αὕτη ἐπιλογῆς δὲν εἶναι πάντοτε ἀναγκαία. Οὕτω, π.χ., εἴς τινα προβλήματα ἀναλύσεως εἰσροῶν - ἐκροῶν ἡ ἐπιλογὴ τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατῶν λύσεων θεωρεῖται ἐπαρκὴς διὰ τὴν τελικὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων αὐτῶν.

Ἔστω ὅτι ἡ ὑπ' ὄψει οἰκονομία ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τοὺς οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατοὺς συνδυασμούς, οἱ ὁποῖοι ἀριστοποιοῦν ταυτοχρόνως δοθεῖσαν συνάρτησιν $k = \varphi(x)$ (²). Ἂν θέσωμεν

$$\overset{*}{k} = \varphi(x)\,\mathrm{opt}$$

διὰ τὴν ἀρίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως ταύτης, τότε δυνάμεθα νὰ ἐπιλέξωμεν ἐκ τοῦ Γ τὸ ὑποσύνολον Δ τῶν οἰκονομικῶς ἀρίστων λύσεων:

$$\Delta = \{ x \mid x \varepsilon \Gamma \ \text{καὶ}\ \overset{*}{k} = \varphi(x)\,\mathrm{opt} \} \qquad (4)$$

Ἡ πρότασις $\overset{*}{k} = \varphi(x)\,\mathrm{opt}$ ἀποτελεῖ τὸ κριτήριον τῆς ἐπιλογῆς ταύτης.

Πολλαπλᾶ κριτήρια ἀριστοποιήσεως

Διὰ τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ συνόλου Δ δὲν τερματίζεται κατ' ἀνάγκην ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως. Δυνατὸν ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ νὰ ἐνδιαφέρεται διὰ τὴν ἱκανοποίησιν πλειόνων κριτηρίων ἀριστοποιήσεως, ὁπότε τίθεται ζή-

---

1) Ἐπειδὴ ἡ σχέσις $0 \leqq x$ ἐμπεριέχεται εἰς τὰς δύο ἄλλας σχέσεις, αὕτη δύναται νὰ παραληφθῇ.

2) Ὁ ὅρος «ἀριστοποίησις» καλύπτει τόσον τὴν περίπτωσιν τῆς *μεγιστοποιήσεως*, ἐὰν ἡ συνάρτησις ἀφορᾷ εἰς οἰκονομικὸν κέρδος, ὅσον καὶ τὴν περίπτωσιν τῆς *ἐλαχιστοποιήσεως*, ὅταν ἡ συνάρτησις ἀναφέρεται εἰς οἰκονομικὴν θυσίαν (π.χ. κόστος παραγωγῆς).

τημα *συνθέτου ἀριστοποιήσεως*, κατ' ἀντιδιαστολὴν πρὸς τὴν *ἁπλῆν* τοιαύτην, ἥτις βασίζεται ἐπὶ ἑνὸς μοναδικοῦ κριτηρίου ἐπιλογῆς.

Ἡ διαδικασία συνθέτου ἀριστοποιήσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ κατὰ δύο τρόπους, τοὺς ὁποίους ἐξετάζομεν κατωτέρω.

Α΄ τρόπος ἀριστοποιήσεως

Ἔστω τὸ σύνολον:

$$K = (\overset{*}{k}_1, \overset{*}{k}_2, \overset{*}{k}_3, \overset{*}{k}_4)$$

τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν κριτήρια ἀριστοποιήσεως, ἤτοι

$$\overset{*}{k}_\iota = \varphi_\iota (x) \text{ opt} \qquad \iota = 1, \ldots, 4$$

Εὑρισκομένη ἐνώπιον πλειόνων κριτηρίων ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ προβῇ εἰς μίαν ἱεράρχησιν αὐτῶν κατὰ σειρὰν σημαντικότητος, εἰς τρόπον ὥστε νὰ δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ ταῦτα ἀναλόγως εἰς τὴν διαδικασίαν ἐπιλογῆς.

Ἡ πλήρης ἱεράρχησις τῶν στοιχείων τοῦ K προϋποθέτει τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς *ὑπερκριτηρίου*, τὸ ὁποῖον δύναται πράγματι νὰ χρησιμοποιήσῃ ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ διὰ τὴν ἱεράρχησιν ταύτην. Κατ' οὐσίαν ἡ ὕπαρξις τοῦ ὑπερκριτηρίου ἐκδηλοῦται διὰ τῆς πληρώσεως τῶν δύο βασικῶν ἀξιωμάτων τῆς θεωρίας τῆς ἐπιλογῆς, ἤτοι τοῦ ἀξιώματος τῆς *συγκρισιμότητος* καὶ τοῦ ἀξιώματος τῆς *μεταβατικότητος* ἢ τῆς *συνεπείας*. Συμφώνως πρὸς τὸ πρῶτον ἀξίωμα, δι' ἕκαστον ζεῦγος στοιχείων τοῦ πρὸς ἱεράρχησιν συνόλου K, π.χ. τῶν στοιχείων $\overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_2$, ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀποφανθῇ ἂν ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_2$ ἢ $\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$, ὅπου τὸ σύμβολον $\preccurlyeq$ σημαίνει «οὐχὶ σημαντικώτερον τοῦ . . .». Δυνατὸν νὰ εἶναι ταυτοχρόνως

$$\overset{*}{k} \preccurlyeq \overset{*}{k}_2 \text{ καὶ } \overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$$

ὁπότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\overset{*}{k}_1 \sim \overset{*}{k}_2$. Ὁ συμβολισμὸς « $\sim$ » σημαίνει «ἐξ ἴσου σημαντικὸν πρὸς τό . . .» καὶ ὑποδηλοῖ *ἀδιαφορίαν* ἐπιλογῆς μεταξὺ τῶν $\overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_2$. Εἶναι ἐξ ἄλλου δυνατὸν νὰ ἔχωμεν:

$$\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_2 \text{ καὶ οὐχὶ } \overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$$

ὁπότε γράφομεν ἁπλούστερον $\overset{*}{k}_1 \prec \overset{*}{k}_2$. Τὸ σύμβολον « $\prec$ » σημαίνει «ὀλιγώτερον σημαντικὸν τοῦ . . .» καὶ ὑποδηλοῖ σαφῆ προτίμησιν τῆς οἰκονομικῆς ἀρχῆς εἰς τὸ στοιχεῖον $\overset{*}{k}_2$ (1).

---

1) Ἀντὶ $\overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_2$, $\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1$, $\overset{*}{k}_1 \sim \overset{*}{k}_2$ καὶ $\overset{*}{k}_2 \prec \overset{*}{k}_1$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἰσοδυνάμως: $\overset{*}{k}_2 \succcurlyeq \overset{*}{k}_1$, $\overset{*}{k}_1 \succcurlyeq \overset{*}{k}_2$, $\overset{*}{k}_2 \sim \overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_1 \succ \overset{*}{k}_2$, ἀντιστοίχως.

Συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα τῆς μεταβατικότητος ἄν, π.χ.:

$$\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_1 \text{ καὶ } \overset{*}{k}_1 \preccurlyeq \overset{*}{k}_3 \text{ θὰ ἔχωμεν καὶ } \overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_3 .$$

Τὸ ἀξίωμα αὐτὸ ἐξασφαλίζει τὴν *συνέπειαν* τῆς συγκρισιμότητος τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου.

Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχή, βάσει τῶν ἀνωτέρω τεθεισῶν ὑποθέσεων, ἱεραρχεῖ ὡς ἀκολούθως τὰ στοιχεῖα ταῦ συνόλου K:

$$\overset{*}{k}_2 \preccurlyeq \overset{*}{k}_3 \sim \overset{*}{k}_1 \prec \overset{*}{k}_4 \qquad (5)$$

Ἡ ἱεράρχησις αὕτη ὁρίζει τὴν σειρὰν προτεραιότητος τῶν κριτηρίων $\overset{*}{k}_i$ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς σημαντικότητος αὐτῶν. Οὕτω τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_4$ ἀξιολογεῖται ὡς τὸ σημαντικώτερον ὅλων. Ἕπονται τὰ κριτήρια $\overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_3$, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑφίσταται ἰσοδυναμία. Τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_2$, χαρακτηριζόμενον ὡς οὐχὶ σημαντικώτερον τοῦ $\overset{*}{k}_3$ (καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου αὐτοῦ $\overset{*}{k}_1$), κατατάσσεται τελευταῖον εἰς τὴν κλίμακα σημαντικότητος, καθ' ὅσον ἐκ τοῦ συμβολισμοῦ δὲν ἀποκλείεται τὸ ἐνδεχόμενον $\overset{*}{k}_2 \prec \overset{*}{k}_3$.

Βάσει τῆς ἀνωτέρω ἱεραρχήσεως ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ δύναται τώρα νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν διαδικασίαν ἀριστοποιήσεως, ὡς ἀκολούθως:

Μὲ ἀφετηρίαν τὸ σύνολον Γ τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν, καὶ μὲ κριτήριον ἐπιλογῆς τὸ $\overset{*}{k}_4 = \varphi_4(x)\,\mathrm{opt}$, ὁρίζει τὸ ὑποσύνολον Δ τοῦ Γ:

$$\Delta = \{ x \mid x \varepsilon \Gamma \text{ καὶ } \overset{*}{k} = \varphi_4(x)\,\mathrm{opt} \} \qquad (5)$$

Τὸ σύνολον Δ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημαντικώτερον κριτήριον $\overset{*}{k}_4$, εἶναι τὸ σύνολον ἀριστοποιήσεως τὸ ὁποῖον ἐνδιαφέρει τὴν οἰκονομικὴν ἀρχὴν περισσότερον ἐξ ὅλων τῶν συνόλων ἀριστοποιήσεως τῶν δυναμένων νὰ προσδιορισθοῦν βάσει τῶν ἄλλων κριτηρίων. Τὸ σύνολον τοῦτο δυνατὸν νὰ ἔχῃ ἓν ἢ περισσότερα στοιχεῖα. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅταν δηλαδὴ $\Delta = \{x\}$, ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως τερματίζεται, ἄνευ χρησιμοποιήσεως τῶν λοιπῶν κριτηρίων ἐπιλογῆς, καθ' ὅσον ἐπιλογὴ εἶναι νοητὴ μόνον ἂν ὑφίστανται περισσότεροι τοῦ ἑνὸς συνδυασμοὶ (=λύσεις). Ὁ προσδιορισθεὶς μοναδικὸς συνδυασμὸς ἀποτελεῖ τότε τὴν ἀρίστην λύσιν τοῦ προβλήματος βάσει τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_4$. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, ὅταν δηλαδὴ τὸ σύνολον Δ περιλαμβάνῃ πλείονας συνδυασμούς, ἐξ ὁρισμοῦ ἰσοδυνάμους ὡς πρὸς τὸ κριτήριον $\overset{*}{k}_4$, ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ δύναται νὰ προχωρήσῃ περαιτέρω εἰς τὴν διαδικασίαν ἀριστοποιήσεως, ἐφαρμόζουσα ἀδιαφόρως ἓν ἐκ τῶν δύο ἑπομένων ἰσοδυνάμων, ἀπὸ ἀπόψεως σημαντικότητος κριτηρίων, ἔστω τὸ $\overset{*}{k}_1$.

Οὕτω δύναται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὑποσύνολον Ε τοῦ Δ:

$$\mathrm{E} = \{ x \mid x \varepsilon \Delta \text{ καὶ } \overset{*}{k}_1 = \varphi_1(x) \, \mathrm{opt} \}, \tag{6}$$

τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ ἐκ κατασκευῆς ἀμφότερα τὰ κριτήρια $\overset{*}{k}_4$ καὶ $\overset{*}{k}_1$, ταυτοχρόνως.

Ἡ διαδικασία δύναται νὰ συνεχισθῇ, κατὰ τὰ γνωστά, ἂν $\mathrm{E} \neq \{x\}$, ὁπότε χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ $\overset{*}{k}_1$ κριτήριον $\overset{*}{k}_3$, διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὑποσυνόλου Ζ τοῦ Ε

$$\mathrm{Z} = \{ x \mid y \varepsilon \mathrm{E} \text{ καὶ } \overset{*}{k}_3 = \varphi_3(x) \, \mathrm{opt} \} \tag{7}$$

Τὸ Ζ εἶναι ἄριστον ὡς πρὸς τὰ τρία κριτήρια $\overset{*}{k}_4$, $\overset{*}{k}_1$ καὶ $\overset{*}{k}_3$, ταυτοχρόνως. Ἂν $\mathrm{Z} \neq \{x\}$, προχωροῦμεν εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ὑποσυνόλου Η, βάσει τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_2$:

$$\mathrm{H} = \{ x \mid x \varepsilon \mathrm{Z} \text{ καὶ } \overset{*}{k}_2 = \varphi_2(x) \, \mathrm{opt} \} \tag{8}$$

Τὸ Η εἶναι ἄριστον ὡς πρὸς ἅπαντα τὰ δοθέντα κριτήρια, ταυτοχρόνως.

Β' τρόπος ἀριστοποιήσεως

Εἰς τὰ προηγούμενα ὑπετέθη ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἱεραρχήσῃ ***κατὰ τάξιν*** σπουδαιότητος (in the ordinal sense) τὸ σύνολον Κ τῶν κριτηρίων ἐπιλογῆς. Κατόπιν τῆς ἱεραρχήσεως ταύτης ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως, βάσει πλειόνων κριτηρίων, καταλήγει εἰς μίαν διαδοχικὴν ἐφαρμογὴν τῶν κριτηρίων αὐτῶν, κατὰ τὴν ὁρισθεῖσαν σειράν. Ἤδη θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀξιολογήσῃ ***ποσοτικῶς*** (in the cardinal sense) τὰ κριτήρια ἐπιλογῆς, βάσει δοθέντος ὑπερκριτηρίου ὠφελιμότητος. Τοῦτο κατ' οὐσίαν σημαίνει ὅτι ὑφίσταται ἡ δυνατότης ***μεταtροπῆς*** τῶν μονάδων ἀξίας ἑκάστου κριτηρίου εἰς μονάδας ἀξίας τοῦ ὑπερκριτηρίου. Ἀλλ' ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ μαθηματικῶς τὸ ὑπερκριτήριον, βάσει τῶν συναρτήσεων τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, ἡ δὲ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος ἀριστοποιήσεως νὰ ἐπιδιωχθῇ εὐθέως διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ οὕτω διατυπουμένου ὑπερκριτηρίου.

Διὰ τὰς συναρτήσεις τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων ἔχομεν:

$$k_\iota = \varphi_\iota(x) \; (^1) \qquad \iota = 1, \ldots, 4 \tag{9}$$

καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸ ὑπερκριτήριον

$$\mathbf{K} = \omega(x) \tag{10}$$

---

1) $k_\iota = \varphi_\iota(x)$ εἶναι ἡ γενικὴ συνάρτησις, ἡ ὁποία ἀριστοποιουμένη λαμβάνει τὴν μορφὴν $\overset{*}{k}_\iota = \varphi_\iota(x) \, \mathrm{opt}$.

Αὐτὸ τοῦτο τὸ ὑπερκριτήριον δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς

$$\overset{*}{\mathbf{K}} = \omega\,(x)\,\mathrm{opt}\,, \tag{11}$$

ἤτοι ὡς ἡ ἀρίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως (10). Ἂν θέσωμεν

$$\mathbf{K}_\iota = \omega_\iota\,(\,k_\iota\,) \tag{12}$$

διὰ τὴν μετατροπὴν τῶν μονάδων k_ι εἰς μονάδας τοῦ ὑπερκριτηρίου (συμβολικῶς $\omega_\iota : k_\iota \rightarrow \mathbf{K}_\iota$), δυνάμεθα, βάσει τῆς (9), νὰ γράψωμεν

$$\mathbf{K}_\iota = \omega_\iota\,\{\,\varphi_\iota\,(x)\,\} \qquad \iota, = 1, \ldots, 4 \tag{13}$$

$\mathbf{K}_\iota$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἀξίας τοῦ ὑπερκριτηρίου, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς k_ι μονάδας ἀξίας τοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_\iota$. Κατὰ συνέπειαν θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τῆς (10)

$$\mathbf{K} = \sum_\iota \mathbf{K}_\iota = \sum_\iota \omega_\iota\,\{\,\varphi_\iota\,(x)\,\}\ (^1) \tag{14}$$

Ἡ συνάρτησις (14) εἶναι, ὡς παρατηροῦμεν, σύνθετος, διατυπουμένη ὡς συνάρτησις συναρτήσεων. Ἐν ἄλλοις λόγοις ὁ μετασχηματισμός :

$$\omega : x \rightarrow \mathbf{K}$$

ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν :

$$\omega_\iota : k_\iota \rightarrow \mathbf{K}_\iota$$

οἱ ὁποῖοι ἐμπεριέχουν ἤδη τοὺς μετασχηματισμούς :

$$\varphi_\iota : x \rightarrow k_\iota$$

Ἤδη, ἀντὶ τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων ἐπιλογῆς $\overset{*}{k}_\iota = \varphi_\iota\,(x)\ \mathrm{opt}$, χρησιμοποιουμένων κατὰ τὴν σειρὰν ἱεραρχήσεως αὐτῶν εἰς τὴν διαδικασίαν ἀριστοποιήσεως, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τοῦ συνόλου Γ, τῶν οἰκονομικῶς καὶ τεχνολογικῶς δυνατῶν συνδυασμῶν, τὸ ὑπερκριτήριον

$$\overset{*}{\mathbf{K}} = \omega\,(x)\ \mathrm{opt} = \sum_\iota \omega_\iota\,\{\,\varphi_\iota\,(x)\,\}\,\mathrm{opt} \tag{15}$$

πρὸς ἐπιλογὴν τοῦ συνόλου τῶν ἀρίστων λύσεων. Τὸ σύνολον τοῦτο θὰ εἶναι :

$$\Delta = \{\, x \mid x \in \Gamma \ \text{καὶ}\ \overset{*}{\mathbf{K}} = \sum_\iota \omega_\iota\,\{\,\varphi_\iota\,(x)\ \mathrm{opt}\,\}\,\} \tag{16}$$

Ἡ ἱκανοποίησις τοῦ ὑπερκριτηρίου $\overset{*}{\mathbf{K}}$ δὲν σημαίνει βεβαίως κατ' ἀνάγκην

1) Ἂν ἡ ἀριστοποίησις δὲν ὑποδηλοῖ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις μόνον μεγιστοποίησιν ἢ μόνον ἐλαχιστοποίησιν, τότε μετατρέπομεν καταλλήλως τὰς συναρτήσεις μεγιστοποιήσεως εἰς συναρτήσεις ἐλαχιστοποιήσεως ἢ ἀντιθέτως.

καὶ ἱκανοποίησιν τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων $\overset{*}{k}_\iota$. Τοιαύτη ἱκανοποίησις εἶναι δυνατὴ ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἓν ἕκαστον τῶν συνόλων Δ_ι $(\iota = 1, \ldots, 4)$ (1), τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογὴν τῶν κριτηρίων k_ι ἐπὶ τοῦ συνόλου Γ, ἀποτελοῦν ὑποσύνολα τοῦ Δ, ἤτοι ἂν

$$\Delta_\iota \subseteq \Delta$$

Ἂν $\Delta_\iota = \Delta$ τότε ἔχομεν ἐπὶ πλέον ***λειτουργικὴν ἰσοδυναμίαν*** μεταξὺ τοῦ μερικοῦ κριτηρίου $\overset{*}{k}_\iota$ καὶ τοῦ ὑπερκριτηρίου $\overset{*}{\mathbf{K}}$, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀρίστων λύσεων δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ἀδιαφόρως τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου κριτηρίου.

Συμπεράσματα

Ἐκ τῆς προηγηθείσης ἀναλύσεως εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαχθοῦν τὰ κάτωθι γενικὰ συμπεράσματα:

1) Κύριον χαρακτηριστικὸν ὅλων τῶν προβλημάτων τοῦ οἰκονομικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν μιᾶς διαδικασίας ἐπιλογῆς. Κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὴν γενικὴν πρότασιν ὅτι ὁ ***Οἰκονομικὸς Προγραμματισμὸς ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν ἐξέτασιν προβλημάτων ἐπιλογῆς.***

2) Ἡ διαδικασία ἀριστοποιήσεως δυνατὸν νὰ βασίζεται οὐχὶ ἐπὶ ἑνὸς ἀλλὰ ἐπὶ πλειόνων κριτηρίων ἐπιλογῆς. Ἡ λύσις τοῦ σχετικοῦ προβλήματος προϋποθέτει τότε τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς ***ὑπερκριτηρίου***, βάσει τοῦ ὁποίου ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ δύναται νὰ ἀξιολογήσῃ τὴν σπουδαιότητα τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων. Ἡ ἀξιολόγησις αὕτη δύναται νὰ γίνῃ βασικῶς κατὰ δύο τρόπους: Ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ ἱεραρχεῖ τὰ κριτήρια εἴτε ***κατὰ τάξιν*** σπουδαιότητος, εἴτε ***ποσοτικῶς***, μὲ βάσιν, πάντοτε τὸ δοθὲν ὑπερκριτήριον. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ μία διαδικασία σταδιακῆς ἀριστοποιήσεως βάσει τῆς διαδοχικῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, ἐφ' ὅσον βεβαίως εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπιλογή, ἤτοι ἐφ' ὅσον ἕκαστον ἐκ τῶν προσδιοριζομένων ἀρίστων συνόλων περιλαμβάνει περισσοτέρας τῆς μιᾶς λύσεις. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν εἶναι εὐχερὴς ἡ σαφὴς μαθηματικὴ διατύπωσις τῆς συναρτήσεως τοῦ ὑπερκριτηρίου, βάσει τῶν συναρτήσεων τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, ὁπότε τὸ οὕτω διαμορφούμενον ὑπερκριτήριον εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ εὐθέως διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ συνόλου τῶν ἀρίστων λύσεων.

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς ὡς ἄνω περιπτώσεις, ἡ οἰκονομικὴ ἀρχὴ ἐπιδιώκει ἀριστοποίησιν μιᾶς συναρτήσεως ***τελικῆς ὠφελιμότητος***, τῆς συναρτήσεως τοῦ ὑπερκριτηρίου, ἀνεξαρτήτως ἐὰν εἶναι ἢ δὲν εἶναι εἰς θέσιν νὰ προσδώσῃ

---

1) Τὰ ὑποσύνολα ταῦτα εἶναι: $\Delta_\iota = \{\, x \mid x \in \Gamma$ καὶ $\overset{*}{k}_\iota \,\}$ διὰ $\iota = 1, \ldots, 4$.

εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην σαφῆ μαθηματικὴν διατύπωσιν. Ἡ ἀριστοποίησις τῆς συναρτήσεως τοῦ ὑπερκριτηρίου ἀποτελεῖ τὸν ***τελικὸν σκοπὸν*** τῆς δεδομένης οἰκονομίας, τοὐλάχιστον ὅσον ἀφορᾷ τὴν περίοδον, τὴν ὁποίαν καλύπτει τὸ τιθέμενον πρόβλημα. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως ταύτης ἡ ἱκανοποίησις εἰς διαφόρους βαθμοὺς τῶν συναρτήσεων τῶν ἐπὶ μέρους κριτηρίων, ἀποτελεῖ *μέσον* διὰ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ὡς ἄνω σκοποῦ.

3) Ἐφ' ὅσον ἡ διαδικασία ἐπιλογῆς ἀρίστων λύσεων ἕπεται τῆς διαδικασίας ἐπιλογῆς λύσεων ἁπλῆς συνεπείας, τὸ σύνολον τῶν ἀρίστων λύσεων εἶναι κατ' ἀνάγκην ὑποσύνολον (συνήθως γνήσιον) τοῦ συνόλου τῶν οἰκονομικῶν καὶ τεχνολογικῶν πραγματοποιησίμων συνδυασμῶν. Γενικῶς ἡ πλήρης διαδικασία ἐπιλογῆς λύσεων ἁπλῆς συνεπείας καὶ ἀρίστων λύσεων ὁδηγεῖ εἰς τὴν συνεχῆ σμίκρυνσιν τῶν προσδιοριζομένων συνόλων, εἰς τρόπον ὥστε τὸ (τελευταῖον) σύνολον τῶν ἀρίστων λύσεων νὰ εἶναι τὸ «μικρότερον» (1) ὅλων.

Βάσει τοῦ χρησιμοποιηθέντος εἰς τὰ προηγούμενα συμβολισμοῦ, ἡ διαδικασία αὕτη εἶναι δυνατὸν νὰ παρασταθῇ συνοπτικῶς διὰ τῆς ἀκολούθου «φωλεᾶς» (ἢ «ἁλύσεως») συνόλων:

$$R^{\nu} \supset A \supset B \supset \Gamma \supset \Delta \supseteq E \ldots$$

1) Ἀπὸ τοπολογικῆς ἀπόψεως.