ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΥΧΑΙΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΙΣΟΝΟΜΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΙΝ ΤΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Ὑπὸ τῶν κ.κ. Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ καὶ Γ. ΑΝΤΩΝΕΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Σημαντικῆς χρησιμότητος διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν σχετικῶν πρὸς τὴν ὀρθολογικὴν διαχείρισιν τῶν ἀποθεμάτων εἶναι ἡ ἐκτίμησις τοῦ νόμου πιθανότητος τῶν πωλήσεων, κατά τινα χρονικὴν περίοδον, ἢ τῶν, κατὰ τὴν περίοδον ταύτην, ἐκροῶν τῶν ὑλικῶν ἐκ τῆς ἀποθήκης πρὸς τὸ ἐργοστάσιον.

Διὰ τῆς γνώσεως τοῦ νόμου τούτου, δύναται ν' ἀντιμετωπισθῇ τὸ πρόβλημα τῆς ἀποθηκεύσεως τῶν ἐμπορευμάτων ἢ τῶν πρώτων ὑλῶν καὶ λοιπῶν ὑλικῶν τῆς ἐκμεταλλεύσεως, κατὰ τρόπον ὥστε, ἀφ' ἑνὸς μὲν ν' ἀποφεύγεται ἡ συσσώρευσις μὲ τὰς δυσμενεῖς οἰκονομικὰς συνεπείας ἐκ τῆς ἀκινητοποιήσεως κεφαλαίων κλπ., ἀφ' ἑτέρου δὲ νὰ διατηρῆται εἰς ἠθελημένον χαμηλὸν ἐπίπεδον ὁ ἐκ τοῦ ἠλαττωμένου ἀποθέματος κίνδυνος τῆς μὴ ἱκανοποιήσεως τῆς ζητήσεως τῶν πελατῶν ἢ τῶν ἀναγκῶν τοῦ ἐργοστασίου.

Τόσον ὅμως αἱ πωλήσεις ὅσον καὶ αἱ ἐκροαὶ ὑλικῶν δύνανται νὰ ἐξομοιωθοῦν πρὸς μεγέθη τοῦ τύπου :

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (1)$$

ἔνθα X_i εἶναι ἀνεξάρτητοι τυχαῖαι μεταβληταί, ἀκολουθοῦσαι τὸν αὐτὸν νόμον L, καὶ N τυχαία ἐπίσης μεταβλητή, ἀνεξάρτητος τῆς ἀκολουθίας X_i, ἀκολουθοῦσα ἕνα νόμον L_1.

Τὸ ὕψος τῶν πωλήσεων, κατὰ τὴν ὑπ' ὄψιν χρονικὴν περίοδον, ἐξαρτᾶται πράγματι, συμφώνως πρὸς τὸ σχῆμα (1), ἐκ τοῦ ὕψους τῶν ἀτομικῶν ἀγορῶν τῶν πελατῶν (X_i) καὶ ἐκ τοῦ πλήθους τούτων (N), ἀναλόγως δὲ ἐξαρτᾶται καὶ τὸ σύνολον τῶν ἐκροῶν ὑλικῶν ἐκ τῆς ἀποθήκης πρὸς τὸ ἐργαστάσιον.

Μεγέθη, τέλος, τῆς κατηγορίας ταύτης ὑπεισέρχονται συχνὰ εἰς τὰ θέματα, γενικώτερον, τῶν ἐπιχειρησιακῶν ἐρευνῶν.

1.2. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ νόμου πιθανότητος τῆς Υ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη ἀκολουθεῖ ἕνα νόμον G καὶ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τοῦτο, βάσει δείγματος ἐκ ταύτης. Ἄλλος τρόπος, τὸν ὁποῖον θὰ παρουσιάσωμεν ἐδῶ, εἶναι νὰ εὕρωμεν τὸν νόμον G, διὰ τῶν συνιστώντων νόμων L καὶ L_1 τῶν μεταβλητῶν X_i καὶ N.

Ἡ λογιστικὴ ὑπηρεσία διαθέτει συνήθως στατιστικὰ στοιχεῖα, καλύπτοντα k χρονικὰς περιόδους, ἐκ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τρία εἴδη δειγμάτων.

α) Δεῖγμα μεγέθους $N_1 + N_2 + \ldots + N_k$, σχετικὸν μὲ τὴν μεταβλητὴν X. Τὸ δεῖγμα τοῦτο εἶναι ἐπαρκὲς διὰ νὰ δώσῃ μίαν ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν τοῦ νόμου L τῆς X.

β) Δεῖγμα μεγέθους k τῆς μεταβλητῆς N. Καὶ τὸ δεῖγμα τοῦτο μᾶς δίδει ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν τοῦ νόμου L_1 τῆς N. Πράγματι, παρ' ὅλον τὸ μικρόν του μέγεθος, θὰ ἀναφέρεται εἰς συγκεκριμένην ἀσυνεχῆ μεταβλητήν, διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ δεχθῶμεν a priori ἕνα νόμον, π.χ., διωνυμικὸν ἢ Poisson.

γ) Δεῖγμα μεγέθους k τῆς μεταβλητῆς Y. Τοῦτο ἀναφέρεται εἰς συνεχῆ μεταβλητήν, κατὰ κανόνα πολὺ περισσότερον διεσπαρμένην ἀπὸ τὰς μεταβλητὰς X καὶ N. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, ἐν συνδυασμῷ καὶ πρὸς τὸ σχετικῶς μικρὸν μέγεθος τοῦ δείγματος τούτου συγκριτικῶς πρὸς τὸ τῆς X, ἀποφεύγομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν νόμον τῆς Y ἐξ αὐτοῦ. Θὰ προσπαθήσωμεν, οὕτω, νὰ προσεγγίσωμεν τὸν νόμον τῆς Y, τῇ βοηθείᾳ τῶν νόμων L καὶ L_1.

1.3. Ἐὰν καλέσωμεν $G(y) = \pi\iota\theta\,(Y < y)$ τὸν νόμον τῆς ὁλικῆς πιθανότητος τῆς Y καὶ θέσωμεν (θεωροῦντες γνωστοὺς τοὺς νόμους τῶν X_i καὶ N)

$$F(x) = \pi\iota\theta\,(X < x), \quad G_n(y) = \pi\iota\theta\,(Y < y\,/\,N = n), \quad p_n = \pi\iota\theta\,(N = n)$$

θὰ ἔχωμεν, ὡς εἶναι προφανές :

$$\pi\iota\theta(Y<y) = p_0 \pi\iota\theta[Y<y/N=0] + p_1 \pi\iota\theta[Y<y/N=1] + \ldots + p_n\, \pi\iota\theta[Y<y/N=n] + \ldots$$

δηλαδή :

$$G(y) = \pi\iota\theta\,(Y<y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, G_n(y) \tag{2}$$

Ἡ (2) ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν θεωρητικῶς τὸν νόμον τῆς Y, ἐκ τῶν συνιστώντων νόμων L καὶ L_1. Ἀλλά, διὰ μίαν ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν τῆς G(y), ἀπαιτεῖται καὶ μεγάλος ἀριθμὸς ὅρων, εἰς τὸ ἄθροισμα (2), καὶ μεγάλος ἀριθμὸς δεκαδικῶν ψηφίων, δι' ἕκαστον ὅρον (ἐπειδὴ οἱ ὅροι τῆς (2) εἶναι ἀριθμοὶ πολὺ μικροί), δηλαδὴ ἀπαιτεῖται λογισμὸς ἀρκετὰ ἐπίπονος. Ἐξ ἄλλου, ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$G(y) = 1 - \varepsilon$$

διὰ δεδομένον ε, ἡ ὁποία εἶναι ἐνδιαφέρουσα διὰ τὰ πρακτικὰ προβλήματα τῆς διαχειρίσεως τῶν ἀποθεμάτων καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἐπιχειρησιακῶν ἐρευνῶν, παρουσιάζει σοβαροτάτας δυσκολίας. Οὕτω, τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ τύπου (2) εἶναι, πρακτικῶς, λίαν περιωρισμένον καὶ ὡς ἐκ τούτου θ' ἀναζητήσωμεν τὸν νόμον τῆς Y διὰ συνθετωτέρων μεθόδων.

2. ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΖΟΥΣΑΙ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΝ

2.1. Ἡ πεῖρα ἔδειξεν ὅτι πολλάκις μία τυχαία μεταβλητὴ Y, ἐξαρτωμένη ἐκ μιᾶς παραμέτρου ν καὶ ἔχουσα κωδωνοειδῆ κατανομήν, τείνει πρὸς τὴν κανονικήν, ὅταν τὸ $\nu \to \infty$. Τότε, διὰ τὴν πυκνότητα τῆς ἀντιστοίχου τυποποιημένης μεταβλητῆς $U = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}$ θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος:

$$f(u) = \varphi(u) + \upsilon(u) \quad \text{ἔνθα} \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2} \tag{3}$$

ὅπου τὸ $\upsilon(u)$ εἶναι, διὰ κάθε u, πολὺ μικρόν, ὅταν τὸ $\nu \to \infty$. Οὕτω, μία πρώτη προσέγγισις τῆς $f(u)$ εἶναι ἡ $\varphi(u)$. Διὰ μεγαλυτέραν προσέγγισιν χρειάζεται ν' ἀναπτύξωμεν τὴν συνάρτησιν $\upsilon(u)$ εἰς σειράν.

2.2. Ἕνας τρόπος ἀναπτύξεως εἶναι νὰ θέσωμεν:

$$f(u) = \varphi(u) + \frac{\alpha_1}{1!}\varphi'(u) + \frac{\alpha_2}{2!}\varphi''(u) + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(u) + \ldots \tag{4}$$

ἔνθα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ προσδιοριστέοι συντελεσταί. Ἀλλά:

$$\varphi'(u) = -u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2} = -u\varphi(u) = -H_1(u)\,\varphi(u)$$

$$\varphi''(u) = -\varphi(u) - u\varphi'(u) = (u^2-1)\,\varphi(u) = H_2(u)\,\varphi(u)$$

$$\varphi^{(3)}(u) = 2u\varphi(u) + (u^2-1)\varphi'(u) = -(u^3-3u)\,\varphi(u) = -H_3(u)\,\varphi(u)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(\nu)}(u) = (-1)^\nu H_\nu(u)\,\varphi(u)$$

$$\text{ἔνθα}\quad H_\nu(u) = u^\nu - \binom{\nu}{2}u^{\nu-2} + 1.3\binom{\nu}{4}u^{\nu-4} - 1.3.5.\binom{\nu}{6}u^{\nu-6} + \ldots \tag{5}$$

Τὰ πολυώνυμα $H_\nu(u)$, ν βαθμοῦ, καλοῦνται ***πολυώνυμα*** τοῦ *Hermite* καὶ εἶναι «ὀρθογώνια» ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν $\varphi(u)$, δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_\lambda(u)\, H_\nu(u)\, \varphi(u)\, du = \begin{cases} 0, & \text{διὰ } \lambda \neq \nu \\ \nu!, & \text{διὰ } \lambda = \nu \end{cases} \tag{6}$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ἡ (4) γίνεται :

$$f(u) = \varphi(u) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\alpha_\nu}{\nu!} H_\nu(u)\,\varphi(u)$$

καί, ἂν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $H_\nu(u)\,du$ καὶ ὁλοκληρώσωμεν ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ἔχομεν προφανῶς, λόγῳ τῆς (6) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,H_\nu(u)\,du = (-1)^{\nu} \frac{\alpha_\nu}{\nu!}\,\nu!$$

δηλαδὴ τελικῶς :

$$\alpha_\nu = (-1)^{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\nu(u)\,f(u)\,du$$

Ἐξ αὐτῆς, θέτοντες τὰς διαφόρους ἐκφράσεις τῶν $H_\nu(u)$ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ U εἶναι «τυποποιημένη», δηλαδή :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\,f(u)\,du = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\,du = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^{\nu} f(u)\,du = \frac{\mu_\nu}{\sigma^{\nu}}$$

ἔνθα τὰ μ_ν (=κεντρικαὶ ῥοπαὶ) καὶ σ ἀναφέρονται εἰς τὴν Y, εὑρίσκομεν :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -\frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad \alpha_5 = -\left(\frac{\mu_5}{\sigma^5} - 10\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right), \ldots$$

Οὕτω, ἡ (4) γίνεται τελικῶς :

$$f(u) = \varphi(u) - \frac{\mu_3}{3!\,\sigma^3}\varphi^{(3)}(u) + \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\varphi^{(4)}(u) - \frac{1}{5!}\left(\frac{\mu_5}{\sigma^5} - 10\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)\varphi^{(5)}(u) + \ldots \tag{7}$$

καὶ δι' ὁλοκληρώσεως, ἀπὸ $-\infty$ ἕως u, ἔχομεν τὴν συνάρτησιν κατανομῆς τῆς U :

$$\boxed{F(u) = \Phi(u) - \frac{\mu_3}{3!\,\sigma^3}\Phi^{(3)}(u) + \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\Phi^{(4)}(u) - \frac{1}{5!}\left(\frac{\mu_5}{\sigma^5} - 10\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)\Phi^{(5)}(u) + \ldots} \tag{8}$$

ἔνθα $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-u^2/2}\,du.$

Ἡ σειρὰ (8) εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ Bruns - Charlier. Ἂν καὶ θεωρητικῶς θὰ ἔπρεπε νὰ ἐξετασθῇ τὸ θέμα τῆς συγκλίσεως (1), ἐν τούτοις τὸ ἐνδιαφέρον εἰς τὴν πρᾶξιν περιορίζεται εἰς τὴν ἐπίτευξιν ἱκανοποιητικῆς προσεγγίσεως τοῦ νόμου τῆς U, διὰ τῆς διατηρήσεως ὀλίγων ἐκ τῶν πρώτων ὅρων τῶν ἀναπτυγμάτων. Ἡ προσέγγισις δὲ αὕτη ἐπιτυγχάνεται πράγματι εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων ἀνεξαρτήτως τῆς συγκλίσεως τῶν σειρῶν. Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν οὕτω ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον:

$$F(u) = \Phi(u) - \frac{\mu_3}{3!\,\sigma^3}\,\Phi^{(3)}(u) + \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\Phi^{(4)}(u) \tag{9}$$

Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ τύπου (9) δὲν παρουσιάζει λογιστικὰς δυσκολίας. Τὰ $\Phi(u)$, $\Phi^{(3)}(u)$ καὶ $\Phi^{(4)}(u)$ δίδονται διὰ κάθε u ὑπὸ πινάκων, τὰ δὲ σ, μ_3, μ_4 ἐκτιμῶνται ἐκ τῶν πειραματικῶν δεδομένων τῆς Y. Ὑπολογίζεται, οὕτω, ἡ τιμὴ τῆς $F(u) = \text{πιθ}\,(U < u)$ καὶ λύεται ἡ ἐξίσωσις:

$$F(u) = 1 - \varepsilon.$$

2.3. Ὁ Edgeworth, ἀκολουθῶν ἄλλην μέθοδον, κατέληξεν εἰς ἓν ἀνάπτυγμα τῆς $f(u)$, τὸ ὁποῖον διαφέρει τοῦ (7) μόνον ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν ὅρων, κατὰ τρόπον ὥστε ἕκαστος ὅρος νὰ εἶναι μικρὸς ὡς πρὸς τὸν προηγούμενόν του (2). Τοῦτο εἶναι τό:

$$f(u) = \varphi(u) - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\mu_3}{\sigma^3}\,\varphi^{(3)}(u) + \left[\frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\varphi^{(4)}(u) + \frac{10}{6!}\left(\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)^2\varphi^{(6)}(u)\right] +$$
$$+\left[-\frac{1}{5!}\left(\frac{\mu_5}{\sigma^5} - 10\,\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)\varphi^{(5)}(u)\,.\,.\,.\,.\,.\right] + \,.\,.\,.\,.\,.$$

Ὁλοκληροῦντες καὶ περιοριζόμενοι εἰς τοὺς τρεῖς πρώτους ὅρους, ἔχομεν:

$$F(u) = \Phi(u) - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\mu_3}{\sigma^3}\,\Phi^{(3)}(u) + \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\Phi^{(4)}(u) + \frac{10}{6!}\left(\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)^2\Phi^{(6)}(u) \tag{10}$$

2.4. Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τοὺς γνωστοὺς τύπους, τοὺς δίδοντας τὰς ἡμιαναλλοιώτους (cumulants) μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς, συναρτήσει τῶν κεντρικῶν ῥοπῶν της, δηλαδὴ τούς:

$$k_1 = m_1, \quad k_2 = \mu_2 = \sigma^2, \quad k_3 = \mu_3, \quad k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2, \quad k_5 = \mu_5 - 10\,\mu_2\,\mu_3, \,.\,.\,.\,.\,.$$

---

1) Ὁ Cramér ἔδειξεν ὅτι αἱ σειραὶ τῶν δευτέρων μελῶν τῶν (7) καὶ (8) συγκλίνουν, ἐὰν συγκλίνῃ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{u^2}{4}} f(u)\,du$.

2) Ὁ Cramér ἔδειξεν ἀργότερα ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ Edgeworth παρέχει ἱκανοποιητικωτέραν προσέγγισιν.

ἡ σειρὰ (8) μετατρέπεται εἰς τήν:

$$F(u) = \Phi(u) - \frac{k_3}{3!k_2^{3/2}}\Phi^{(3)}(u) + \frac{k_4}{4!k_2^2}\Phi^{(4)}(u) - \frac{k_5}{5!k_2^{5/2}}\Phi^{(5)}(u) + \dots \quad (10')$$

Ἡ σειρὰ αὐτὴ εἶναι γνωστὴ ὡς ἀνάπτυγμα Gram - Charlier. Περιοριζόμενοι εἰς τοὺς τρεῖς πρώτους ὅρους ἔχομεν τὸν τύπον:

$$F(u) = \Phi(u) - \frac{k_3}{3!k_2^{3/2}}\Phi^{(3)}(u) + \frac{k_4}{4!k_2^2}\Phi^{(4)}(u) \quad (10'')$$

Ὁμοίως, θέτοντες τὰς ἡμιαναλλοιώτους εἰς τὸν τύπον (10), εὑρίσκομεν:

$$F(u) = \Phi(u) - \frac{k_3}{3!k_2^{3/2}}\Phi^{(3)}(u) + \frac{k_4}{4!k_2^2}\Phi^{(4)}(u) + \frac{10}{6!}\left(\frac{k_3}{k_2^{3/2}}\right)^2\Phi^{(6)}(u) \quad (10''')$$

2.5. Ὑποθέτοντες τώρα ὅτι ἡ ἐξεταζομένη τυχαία μεταβλητὴ Υ ἔχει κωδονοειδῆ κατανομήν, πλησιάζουσαν τὴν κανονικήν, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν, πρὸς εὕρεσιν τῆς συναρτήσεως κατανομῆς της, μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν, τοὺς τύπους (10″) ἢ (10‴). Πρὸς τοῦτο ὅμως εἶναι ἀπαραίτητος προηγουμένως ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἡμιαναλλοιώτων αὐτῆς. Μὲ τὸν ὑπολογισμὸν τούτων θὰ ἀσχοληθῶμεν εἰς τὰς παραγρ. 3 - 6.

3. ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΙΑΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_{\nu+1})$

3.1. Ὡς γνωστόν, ὁ νόμος πιθανότητος ἑνὸς συνόλου $\nu+1$ τυχαίων μεταβλητῶν $(X_1, X_2, \dots, X_{\nu+1})$ εἶναι:

$$\text{πιθ}\{x_1 < X_1 < x_1 + dx_1, x_2 < X_2 < x_2 + dx_2, \dots, x_{\nu+1} < X_{\nu+1} < x_{\nu+1} + dx_{\nu+1}\} =$$
$$= f(x_1, x_2, \dots, x_{\nu+1})\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{\nu+1}.$$

Καὶ ἡ μέση τιμὴ μιᾶς συναρτήσεως $Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_{\nu+1})$, ἡ ὁποία Ζ εἶναι ἐπίσης τυχαία μεταβλητή, θὰ δίδεται διά:

$$E(Z) = \underbrace{\int\int\dots\int}_{\nu+1} Z(x_1, x_2, \dots, x_{\nu+1})\, f(x_1, x_2, \dots, x_{\nu+1})\, dx_1\, dx_2 \dots dx_{\nu+1} \quad (11)$$

3.2. Τὴν μέσην τιμὴν τῆς Ζ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ δι' ἑνὸς «δεσμευμένου» νόμου πιθανότητος τοῦ συνόλου $(X_1, X_2, \dots, X_{\nu+1})$.

Ὡς γνωστόν, ὁ «μερικὸς» (marginale) νόμος πιθανότητος μιᾶς ἐκ τῶν μεταβλητῶν τοῦ συνόλου, ἔστω τῆς $X_{\nu+1}$, θὰ ἔχῃ πυκνότητα:

$$h(x_{\nu+1}) = \underbrace{\int\int\dots\int}_{\nu} f(x_1, x_2, \dots, x_{\nu+1})\, dx_1\, dx_2 \dots dx_\nu$$

καὶ ὁ δεσμευμένος (liée) νόμος πιθανότητος τοῦ συνόλου $(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$, δι᾽ ὡρισμένην τιμὴν $x_{\nu+1}$ τῆς $X_{\nu+1}$, θὰ ἔχῃ πυκνότητα:

$$g_{\nu+1}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1})}{h(x_{\nu+1})}$$

Οὕτω, ὁ τύπος (11) γράφεται:

$$E(Z) = \int \Big[\underbrace{\int \int \ldots \int}_{\nu} Z(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}) g_{\nu+1}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_\nu \Big] h(x_{\nu+1}) dx_{\nu+1}$$

ὅπου ἡ ἀγγύλη περιλαμβάνει συνάρτησιν μόνον τοῦ $x_{\nu+1}$, τὴν ὁποίαν θὰ σημειοῦμεν διὰ $E(Z/X_{\nu+1} = \text{σταθ.})$, διότι ἀκριβῶς εἶναι ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τῆς Z διὰ $X_{\nu+1} = \text{σταθ.}$ Οὕτω, θὰ ἔχωμεν τελικῶς:

$$E(Z) = E\,[\,E\,(Z/X_{\nu+1} = \text{σταθ.})\,]\ ^{(1)} \tag{12}$$

4. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$

4.1. Θὰ ἐφαρμόσωμεν τώρα τὰ προηγούμενα ἀποτελέσματα, ἐπανερχόμενοι εἰς τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν (1), δηλαδὴ τήν:

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

ὅπου: α) Αἱ X_i ἀκολουθοῦν, ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων, τὸν αὐτὸν νόμον L, μὲ μαθηματικὴν ἐλπίδα $E(X)$, διακύμανσιν $V(X) = \sigma^2$, ροπὰς ν τάξεως ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν m_ν καὶ χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν $\varphi_X(t)$. β) Τὸ πλῆθος N εἶναι τυχαία μεταβλητή, ἀνεξάρτητος τῆς ἀκολουθίας τῶν X_i, ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ ἕνα νόμον L_1.

Ἡ Y τότε δύναται νὰ θεωρηθῇ συνάρτησις τῶν $N + 1$ τυχαίων μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_N$, N καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ προηγούμενα ἀποτελέσματα διὰ $\nu = N$, $X_{\nu+1} = N$.

4.2. Ἡ μέση τιμὴ τῆς Y. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (12) διὰ $Z = Y$, $\nu = N$ καὶ $X_{\nu+1} = N$ ὑπολογίζομεν κατ᾽ ἀρχὴν τὴν $E(Y/N = \text{σταθ})$:

---

1) Παριστῶντες διὰ $E_{\kappa\lambda \ldots \rho}(Z)$ τὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα μιᾶς συναρτήσεως Z τῶν X_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu + 1$, ὅταν αἱ $X_\kappa, X_\lambda, \ldots, X_\rho$ εἶναι μεταβληταί, ἐνῷ αἱ λοιπαὶ σταθεραί, καὶ ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχον δεσμευμένην πιθανότητα τοῦ συνόλου $(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$, διὰ $X_{\nu+1} = \text{σταθ.}$, καταλήγομεν εἰς τὸν τύπον:

$$E(Z) = E_{1, 2, \ldots, \nu}\,[E_{\nu+1}(Z)]$$

Καὶ διὰ διαδοχικῆς ἀναλύσεως τῆς $E_{1, 2, \ldots, \nu}$, εὑρίσκομεν τελικῶς τὸν γνωστὸν τύπον, χρησιμοποιούμενον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς μαθηματικῆς ἐλπίδος ἑνὸς ἐκτιμητοῦ προερχομένου ἐκ πολυσταδιακῆς δειγματοληψίας,

$$E(Z) = E_1\,[\,E_2\,[\,\ldots E_\nu\,[\,E_{\nu+1}(Z)\,] = E_1 E_2 \ldots E_{\nu+1}(Z)$$

$$E(Y/N=\text{σταθ.})=E(X_1+X_2+\ldots+X_N \,/\, N=\text{σταθ.})=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_N)=NE(X)$$

καί : $E[NE(X)] = E(X)\,E(N)$, δηλαδὴ τελικῶς :

$$\boxed{E(Y) = E(N)\,E(X)} \qquad (13)$$

4.3. Ἡ διακύμανσις τῆς Y. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (12) διὰ $Z=[Y-E(Y)]^2$, $\nu = N$ καὶ $X_{\nu+1} = N$, ἔχομεν :

$$E\{[Y-E(Y)]^2/N=\text{σταθ.}\} = E\{[X_1+X_2+\ldots+X_N-E(N)E(X)]^2/N=\text{σταθ.}\}=$$

$$= E\{[X_1-E(X)+X_2-E(X)+\ldots+X_N-E(X)+E(X)\,(N-E(N))]^2/N=\text{σταθ.}\}$$

$$= V(X_1)+V(X_2)+\ldots+V(X_N)+[E(X)]^2[N-E(N)]^2 = (^1)$$

$$= NV(X)+[E(X)]^2[N-E(N)]^2$$

καὶ $V(Y) = E(Z) = E\{E[Y-E(Y)]^2/N=\text{σταθ.}\} = E\{NV(X)+[E(X)]^2\,[N-E(N)]^2\} =$

$$= V(X)\,E(N)+[E(X)]^2\,E[N-E(N)]^2$$

ἤτοι τελικῶς :

$$\boxed{V(Y) = E(N)\,V(X)+[E(X)]^2 V(N)} \qquad (14)$$

5. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ Υ ΟΤΑΝ ΤΟ Ν ΑΚΟΛΟΥΘΗ ΤΟΝ ΝΟΜΟΝ ΤΟΥ POISSON

5.1. Εἰς πλεῖστας περιπτώσεις τῶν θεμάτων τῶν σχετικῶν μὲ τὴν διαχείρισιν τῶν ἀποθεμάτων, δυνάμεθα βασίμως νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πλῆθος N ἀκολουθεῖ τὸν νόμον τοῦ Poisson. Διὰ τοῦτο, ἡ περίπτωσις αὕτη θὰ ἐξετασθῇ ἰδιαιτέρως κατωτέρω.

Διὰ τὸν νόμον τοῦ Poisson ἔχομεν, ὡς γνωστόν :

$$\text{πιθ}\,(N=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Ἱκανοποιητικὴ ἐκτίμησις τοῦ λ δύναται νὰ ληφθῇ ἐκ τοῦ δείγματος τῆς

1) Τὰ διπλάσια γινόμενα ἔχουν, ὡς εἶναι φανερόν, μηδενικὰς μαθηματικὰς ἐλπίδας.

§ 1.2 β. Ἐπειδὴ δέ, διὰ τὸν νόμον τοῦ Poisson, $E(N) = V(N) = \lambda$, οἱ τύποι (13) καὶ (14) δίδουν:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \lambda E(X) \\ V(Y) &= \lambda V(X) + \lambda [E(X)]^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Διὰ τῶν τύπων (15), ἐπιτυγχάνομεν ἱκανοποιητικὰς ἐκτιμήσεις τῆς μέσης τιμῆς καὶ τῆς διακυμάνσεως τῆς Y, ἐκ τῶν ἐκτιμήσεων τῶν χαρακτηριστικῶν τούτων ποσοτήτων τῶν νόμων L καὶ L_1 (Poisson).

5.2. Ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις τῆς Y. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (12) διὰ $Z = e^{itY}$, $\nu = N$ καὶ $X_{\nu+1} = N$, ἔχομεν:

$$E\left(e^{itY} / N = \text{σταθ.}\right) = E\left[e^{it(X_1+X_2+\ldots+X_N)} / N = \text{σταθ.}\right] = E\left(\prod_{i=1}^{N} e^{itX_i} / N = \text{σταθ.}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} E(e^{itX_i}) = \prod_{i=1}^{N} \varphi_X(t) = [\varphi_X(t)]^N$$

καὶ ἑπομένως, ἐὰν $\varphi_\nu^*(t)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις τῆς Y:

$$\varphi_\nu^*(t) = E(e^{itY}) = E[E(e^{itY}/N = \text{σταθ.})] = E\{[\varphi_X(t)]^N\} = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_X(t)]^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda \varphi_X(t)]^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda \varphi_X(t)}$$

ἤτοι τελικῶς:

$$\boxed{\varphi_\nu^*(t) = e^{\lambda[\varphi_X(t) - 1]}} \tag{16}$$

5.3. Αἱ ἡμιαναλλοίωτοι τῆς Y. Λογαριθμίζομεν τὴν (16) διὰ νὰ λάβωμεν τὴν β′ χαρακτηριστικὴν συνάρτησιν:

$$\psi_\nu^*(t) = \lambda[\varphi_X(t) - 1]$$

Ἀλλά, ὡς εἶναι γνωστόν:

$$\varphi_X(t) = 1 + \frac{it}{1!} m_1(X) + \frac{(it)^2}{2!} m_2(X) + \ldots + \frac{(it)^\nu}{\nu!} m_\nu(X) + \ldots$$

ἔνθα $m_k(X)$ εἶναι ἡ ῥοπὴ k τάξεως τῆς X ὡς πρὸς τὴν ἀρχήν. Ἑπομένως:

$$\psi_\nu^*(t) = \frac{it}{1!} \lambda m_1(X) + \frac{(it)^2}{2!} \lambda m_2(X) + \ldots + \frac{(it)^\nu}{\nu!} \lambda m_\nu(X) + \ldots$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι ἡ ἡμιαναλλοίωτος (cumulant) ν τάξεως τῆς Y θὰ δίδεται διὰ τοῦ τύπου :

$$\boxed{k_\nu(Y) = \lambda\, m_\nu(X)} \tag{17}$$

Οὕτω, ὑπολογίζονται αἱ ἡμιαναλλοίωτοι τῆς Y, διὰ τῶν ροπῶν τῆς X καὶ τοῦ λ, δηλαδὴ τῇ βοηθείᾳ τῶν νόμων L καὶ L_1.

6. ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ Υ ΔΙΑ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ (10″)

6.1. Θέτοντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς (17) εἰς τὴν (10″) (1), εὑρίσκομεν :

$$F(u) = \Phi(u) - \frac{m_3}{6\sqrt{\lambda m_2^3}}\Phi^{(3)}(u) + \frac{m_4}{24\lambda m_2^2}\Phi^{(4)}(u) \tag{18}$$

ἤ

$$F(u) = \Phi(u) - w\,\Phi^{(3)}(u) + v\,\Phi^{(4)}(u) \tag{19}$$

ὅπου :

$$w = \frac{m_3}{6\sqrt{\lambda m_2^3}} \quad \text{καὶ} \quad v = \frac{m_4}{24\lambda m_2^2}$$

Ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων ἐπὶ τῆς X (δεῖγμα § 1.2.α.) λαμβάνομεν ἐκτιμήσεις τῶν ροπῶν m_1, m_2, m_3 καὶ m_4 καὶ ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων ἐπὶ τῆς N (δεῖγμα § 1.2.β) λαμβάνομεν ἐκτίμησιν τῆς παραμέτρου λ, ἐκ τούτων δέ, ἐν συνεχείᾳ, ἐκτιμήσεις τῶν (βλ. (15)) :

$$E(Y) = \lambda E(X) = \lambda m_1, \qquad V(Y) = \lambda V(X) + \lambda[E(X)]^2 = \lambda(m_2 - m_1^2) + \lambda m_1^2 = \lambda m_2$$

Αἱ τιμαὶ τῶν $\Phi(u)$, $\Phi^{(3)}(u)$, $\Phi^{(4)}(u)$ δίδονται ὑπὸ πινάκων διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς U.

Εἶναι εὔκολον ἑπομένως νὰ ὑπολογίσωμεν, διὰ τῆς (19), τὴν πιθανότητα ὥστε ἡ μεταβλητὴ Y νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ ὡρισμένην τιμὴν y, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν σχέσεων :

$$\text{πιθ}(Y < y) = \text{πιθ}(U < u) = F(u) \quad \text{καὶ} \quad u = \frac{y - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}$$

6.2. Μεγαλύτερον πρακτικὸν ἐνδιαφέρον ἔχει ὁ ἀντίθετος λογισμός, ὁ ὁποῖος συνίσταται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως :

$$F(u) = 1 - \varepsilon$$

1) Ὁ B. Roy ἔδειξε (βλ. [2]), δι' ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων (ὅπου συνέκρινε τὰ διδόμενα ἀποτελέσματα διὰ τοῦ τύπου (10″) καὶ τοῦ θεωρητικοῦ νόμου (2)) ὅτι ὁ τύπος (10″) δίδει ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν τῆς F(u).

δι' ὡρισμένον ε, π.χ. $\varepsilon = 0{,}05$. Ὁ λογισμὸς οὗτος εἶναι ἰδιαιτέρως χρήσιμος εἰς τὰ πρακτικὰ προβλήματα τῆς διαχειρίσεως τῶν ἀποθεμάτων, ὅπου ζητεῖται συνήθως νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἐλάχιστον ὕψος τοῦ ἀποθέματος εἰς τὴν ἀρχὴν μιᾶς χρονικῆς περιόδου, ὥστε τοῦτο νὰ ἐπαρκέσῃ, μὲ πιθανότητα, π.χ. 95 %, διὰ τὴν πιθανὴν ζήτησιν κατὰ τὴν περίοδον ταύτην.

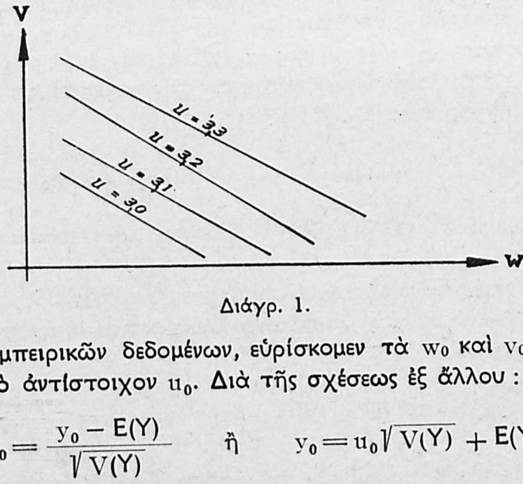
Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως:

$$F(u) = 1 - \varepsilon \quad \text{ἢ} \quad \Phi(u) - w\Phi^{(3)}(u) + v\Phi^{(4)}(u) = 1 - \varepsilon \tag{20}$$

δύναται νὰ γίνῃ διὰ διαδοχικῶν προσεγγίσεων τῇ βοηθείᾳ τοῦ πίνακος, τοῦ δίδοντος τὰ $\Phi(u)$, $\Phi^{(3)}(u)$, $\Phi^{(4)}(u)$. Γίνεται ὅμως εὐκόλως καὶ γραφικῶς. Παρατηροῦμεν, πράγματι, ὅτι ἡ (20) εἶναι γραμμικὴ ὡς πρὸς w καὶ v. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ χαράξωμεν τὴν ἀντίστοιχον εὐθεῖαν δι' ὡρισμένα u καὶ ε. Οὕτω, διὰ $u = 3$ καὶ $\varepsilon = 0{,}05$ θὰ εἶναι:

$$0{,}99865 - 0{,}03545\, w - 0{,}07977\, v = 0{,}95$$

Ὁμοίως εὑρίσκονται καὶ χαράσσονται εὐθεῖαι, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ἄλλας τιμὰς u τῆς U (καὶ πάντα διὰ $\varepsilon = 0{,}05$).



Διάγρ. 1.

Ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων, εὑρίσκομεν τὰ w_0 καὶ v_0 καὶ ἐκ τοῦ διαγράμματος 1 τὸ ἀντίστοιχον u_0. Διὰ τῆς σχέσεως ἐξ ἄλλου:

$$u_0 = \frac{y_0 - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} \quad \text{ἢ} \quad y_0 = u_0\sqrt{V(Y)} + E(Y)$$

εὑρίσκομεν τὸ ὕψος τοῦ ἀποθέματος, τὸ ὁποῖον, διατιθέμενον εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς περιόδου, εἶναι κατὰ 95 % πιθανὸν νὰ ἐπαρκέσῃ εἰς τὴν ζήτησιν τῆς περιόδου ταύτης.

7. ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ Υ ΔΙΑ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ (10‴)

7.1. Θέτοντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς (17) εἰς τὴν (10‴) εὑρίσκομεν:

$$F(u) = \Phi(u) - \frac{m_3}{6\sqrt{\lambda m_2^3}}\Phi^{(3)}(u) + \frac{m_4}{24 m_2^2}\Phi^{(4)}(u) + \frac{10}{6!}\left(\frac{m_3}{\sqrt{\lambda m_2^3}}\right)^2 \Phi^{(6)}(u) \quad (21)$$

ἢ

$$F(u) = \Phi(u) - w\Phi^{(3)}(u) + v\Phi^{(4)}(u) + \frac{w^2}{2}\Phi^{(6)}(u) \quad (22)$$

ὅπου πάλιν
$$w = \frac{m_3}{6\sqrt{\lambda m_2^3}} \quad \text{καὶ} \quad v = \frac{m_4}{24\lambda m_2^2}$$

ἡ ὁποία δίδει καλλιτέραν προσέγγισιν τῆς $F(u)$, διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ζεύγους w καὶ v, τὰς προκυπτούσας ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων.

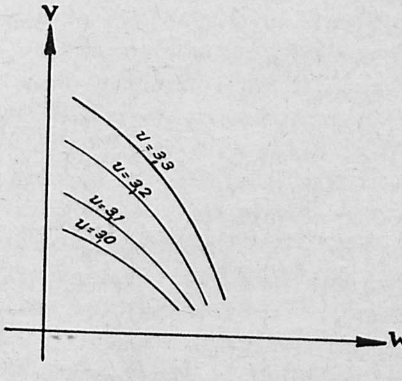
7.2. Δυνατὴ εἶναι, ἐπίσης ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως:

$$\Phi(u) - w\Phi^{(3)}(u) + v\Phi^{(4)}(u) + \frac{w^2}{2}\Phi^{(6)}(u) = 1 - \varepsilon$$

ἡ ὁποία πραγματοποιεῖται διὰ διαδοχικῶν προσεγγίσεων, ἀλλὰ καὶ γραφικῶς. Δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν τὰς καμπύλας δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς w διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς u καὶ δι' ὡρισμένον ε, π.χ. $\varepsilon = 0{,}05$. Οὕτω, διὰ $u = 3$, θὰ ἔχωμεν τὴν καμπύλην

$$0{,}99865 - 0{,}03545\, w - 0{,}07977\, v - \frac{0{,}07977}{2} w^2 = 0{,}95$$

ἡ ὁποία, λυομένη ὡς πρὸς v, χαράσσεται εὐκόλως. Ὁμοίως εὑρίσκονται καὶ χαράσσονται καμπύλαι, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ἄλλας τιμὰς τῆς U.



Διάγρ. 2.

Ἐκ τῶν ἐμπειρικῶν δεδομένων ὁρίζονται τὰ w_0 καὶ v_0 καὶ ἀκολούθως, ὡς καὶ προηγουμένως, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ y_0 τῆς Y.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *Σ. Κανέλλου* : Λογισμὸς πιθανοτήτων, Ἀθῆναι, 1952.
2. *B. Roy* : Revue de Statistique Appliquée, Vol. VIII, No 1, 1960, σελ. 51 - 60.
3. *W. Feller* : An Introduction to Probability Theory and its applications. N. Y., J. Wiley and Sons 1957, p. 268.
4. *H. Cramér* : Mathematical Methods of Statistics. Princeton Univercity Press, 1958.
5. *M. Girault* : Calcul des probabilités en vue des applications. Paris, Dunod, 1960.
6. *Indjoudjian* : Statistique Mathématique. Cours polycopié à l'Institut de Statistique de l' Université de Paris (9, quai Saint - Bernard, Paris 5e).