ΣΠΟΥΔΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΕΩΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ὑπὸ Δ. ΠΑΠΑΜΙΧΑΗΛ καὶ Γ. ΑΝΤΩΝΕΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Τὰ ὑποδείγματα εἶναι ἁπλοποιημένα τυπικὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα παριστοῦν τὴν δομὴν καὶ λειτουργίαν τῶν φαινομένων καὶ περιλαμβάνουν τὸ σύνολον τῶν ἐπ' αὐτῶν ὑποθέσεων, ἰδεῶν ἢ γνώσεων. Εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων, ἓν ὑπόδειγμα ἐκφράζεται διὰ μαθηματικῶν σχέσεων, τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ὀνομάζεται συνήθως «ὑπόδειγμα».

Τὰ ὑποδείγματα χρησιμοποιοῦνται ὑφ' ὅλων τῶν ἐπιστημῶν. Δι' αὐτῶν ἐπιτυγχάνεται ἡ ἁπλοποίησις τοῦ πρὸς μελέτην φαινομένου, δι' ἀπομονώσεως τῶν χρησιμωτέρων στοιχείων του καὶ ἀπαλειφῆς ἐκείνων, τὰ ὁποῖα τὸ περιπλέκουν. Εἶναι ἀφῃρημένα σχήματα, τὰ ὁποῖα «ἑρμηνεύουν» ἁπλῶς τὰ ὑπὸ μελέτην φαινόμενα χωρὶς νὰ τὰ ἀποδίδουν ἀκριβῶς ὑπὸ τὴν μορφὴν ἐμφανίσεώς των εἰς τὴν πρᾶξιν. Τὰ σχήματα ὅμως αὐτὰ ἔχουν τὸ προσόν, καθ' ὃ ἁπλᾶ, ὅτι εἶναι καταληπτά, εὔχρηστα καὶ προσιτὰ εἰς τὰς ἀριθμητικὰς πράξεις. Ἐπὶ πλέον δὲ ἐπιτυγχάνεται δι' αὐτῶν ἡ ἐποπτικὴ ἀνάλυσις τῶν συστατικῶν στοιχείων τῶν φαινομένων καὶ τῶν γενομένων ὑποθέσεων, ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὰ ἀποτελέσματα τοῦ πειραματισμοῦ, καί, γενικώτερον, διευκολύνεται ἡ βαθυτέρα μελέτη τῶν φαινομένων.

1.2. Εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας, ὅπου τὰ φαινόμενα διέπονται ἀπὸ σταθεροὺς νόμους καὶ ὁ πειραματισμὸς δύναται νὰ πραγματοποιῆται ὑπὸ συνθήκας ἐπίσης σταθερὰς καὶ προσεγγιζούσας τὰς φυσικάς, τὰ ὑποδείγματα ἀποδίδουν πιστότερον τὴν πραγματικότητα. Τὸ ὑπόδειγμα, ὡς τεχνητὸν σχῆμα, προσεγγίζει τότε κατὰ πολὺ τὸ φυσικὸν καὶ εἶναι εὔκολος δι' αὐτοῦ μία πολύπλευρος μελέτη, ὅπως, π.χ., ἡ τῆς ἐπιδρασεως ἐπὶ τοῦ φαινομένου ἑνὸς ἢ περισσοτέρων παραγόντων, ὅταν οἱ λοιποὶ παραμένουν σταθεροί.

Εἰς τὰς κοινωνικὰς ὅμως ἐπιστήμας καὶ ἰδιαιτέρως εἰς τὴν οἰκονομικήν, τὰ πράγματα παρουσιάζονται διαφορετικά. Τὰ φαινόμενα εἶναι συνήθως πολύπλοκα, διαμορφοῦνται εἰς ἓν περιβάλλον μεταβλητὸν καὶ οἱ διέποντες αὐτὰ νόμοι εἶναι ἐπίσης μεταβλητοὶ ἐν τῷ χρόνῳ. Ἐξ ἄλλου, ὁ πειραματισμὸς δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὸς καὶ αἱ μεμονωμέναι δοκιμαὶ τοῦ πειράματος σπανίως πραγματοποιοῦνται ὑπὸ συνθήκας σταθερὰς ἢ ἐπιθυμητάς. Ἐξ ἀνάγκης ὅθεν ὁ μελετητὴς τῶν κοινωνικῶν φαινομένων καὶ ἰδιαιτέρως ὁ οἰκονομολόγος, προσφεύγει εἰς ἁπλοποιημένας παραστάσεις. Καὶ αἱ ἁπλοποιήσεις αὗται ἐπιβάλλονται ἐκ τῶν πραγμάτων ὄχι μόνον ἐν ὄψει τῆς χρησιμοποιήσεως θεωρητικῶν γνώσεων, διὰ τὴν σπουδὴν τῶν ὑπὸ μελέτην φαινομένων, ἀλλὰ καὶ κατὰ τὴν συλλογὴν τῶν στοιχείων, καὶ κατὰ τὴν ἑρμηνείαν αὐτῶν, καὶ κατὰ τὴν θεμελίωσιν τῶν νόμων, ὑπὸ τῶν ὁποίων διέπονται τὰ φαινόμενα.

Τὰ ὑποδείγματα ἑπομένως εἰσέρχονται εἰς τὰς κοινωνικὰς ἐπιστήμας ὄχι μόνον ὡς μέσα ἁπλοποιήσεως, ὡς συμβαίνει καὶ εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας, ἀλλά, ἐπὶ πλέον, ἐξ ἀνάγκης, λόγῳ τῆς περιπλοκῆς τῶν φαινομένων των καὶ τῆς κινητότητος τοῦ περιβάλλοντος, εἰς τὸ ὁποῖον ταῦτα διαμορφοῦνται.

1.3. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ἡ χρησιμότης τῶν ὑποδειγμάτων διὰ τὴν ἐπιστημονικὴν ἔρευναν. Εἶναι ὅμως προφανὲς ὅτι ἡ ἐπίτευξις ὀρθῶν καὶ σημαντικῶν ἀποτελεσμάτων ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐκλογὴν τοῦ καταλλήλου ὑποδείγματος. Κατὰ τὴν ἐκλογὴν ταύτην δέον νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ τὰ ἑξῆς : α) Αἱ προϋποθέσεις, ὑπὸ τὰς ὁποίας οἰκοδομεῖται τὸ ὑπόδειγμα. β) Αἱ δυνατότητες αὐτοῦ ἀπὸ ἀπόψεως περιγραφῆς καὶ ἑρμηνείας τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου. γ) Τὰ συνδεόμενα πρὸς τὸ ὑπόδειγμα λογιστικὰ προβλήματα. δ) Οἱ περιορισμοί, εἰς τοὺς ὁποίους ὑπόκεινται τὰ ἐξ αὐτοῦ ἀποτελέσματα.

Ἡ ἐκλογὴ ὅθεν τῶν ὑποδειγμάτων καὶ ἡ χρησιμοποίησις τῶν ἐξ αὐτῶν ἀποτελεσμάτων πρέπει νὰ γίνεται μετὰ πάσης περισκέψεως ὑπὸ τοῦ ἐπιστήμονος ἐρευνητοῦ. Τὰ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντα συμπεράσματα δέον, ἰδίως κατὰ τὴν μελέτην κοινωνικῶν καὶ οἰκονομικῶν θεμάτων, νὰ ὑποβάλλωνται εἰς ἐπίπονον κριτικὸν ἔλεγχον, πρὶν γίνουν ἀποδεκτά.

1.4. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν θὰ μελετήσωμεν τὸ ὑπόδειγμα τῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως. Ἡ γραμμικὴ μορφὴ τῆς παλινδρομήσεως εἶναι ἡ πλέον ἁπλῆ, ἀλλὰ καὶ ἡ πλέον συνήθης εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς. Τοῦτο δὲ διότι, ἐκτὸς τοῦ ὅτι τὸ γραμμικὸν ὑπόδειγμα ἔχει ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογὴν εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῶν πειραματισμῶν ἐπὶ πολλῶν φαινομένων, ἡ χρῆσις αὐτοῦ διευρύνεται σημαντικῶς, κατὰ τὴν μελέτην ἰδίως οἰκονομικῶν θεμάτων, διὰ καταλλήλων ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν μετασχηματισμῶν τῶν μεταβλητῶν.

1.5. Θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ παρουσιάσωμεν τὸ θέμα πρῶτον εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἀκολούθως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύο καὶ τριῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν καί, τελικῶς, νὰ γενικεύσωμεν τ' ἀποτελέσματα διὰ κ ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς. Τοῦτο ὅμως θὰ ἀπετέλει ἐπανάληψιν τῶν ὅσων ἐκτίθενται λεπτομερέστερον εἰς τὰ διδακτικὰ συγγράμματα Γενικῆς Στατιστικῆς, χωρὶς ν' ἀποφευχθῇ ὁπωσδήποτε, ἐν τέλει, διὰ τὴν γενίκευσιν τῶν ἀποτελεσμάτων, ἡ χρησιμοποίησις τοῦ λογισμοῦ μητρῶν καὶ τῶν συμβόλων του.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον θ' ἀκολουθήσωμεν τὴν ἀντίθετον τακτικήν, ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς γενικῆς περιπτώσεως τῶν κ μεταβλητῶν. Νομίζομεν ἐξ ἄλλου, ἐπὶ πλέον, ὅτι ἡ γνῶσις τῆς γενικῆς μορφῆς τοῦ προβλήματος, ἐξαντλεῖ συγχρόνως τὰ μερικὰ προβλήματα, ὡς ὑποπεριπτώσεις τοῦ γενικοῦ καὶ ἐξασφαλίζει μίαν ἐποπτικὴν εἰκόνα τοῦ μελετωμένου θέματος καὶ τῆς λύσεώς του. Ἐπίσης ὅτι ἡ γνῶσις αὕτη διαμορφώνει, διὰ τὸν μελετητήν, τὰς πλέον εὐνοϊκὰς προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐπιτυχῆ ἀντιμετώπισιν τῶν ποικίλων εἰδικῶν καὶ λεπτῶν πρακτικῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται ὑπὸ διάφορον ἑκάστοτε μορφὴν καὶ συνθήκας, κατὰ τὰς συγκεκριμένας μελέτας πάσης φύσεως. Τέλος, ἀπὸ θεωρητικῆς ἀπόψεως, ἡ τοιαύτη παρουσίασις τοῦ προβλήματος εἶναι δυνατόν, νομίζομεν, νὰ συμβάλῃ εἰς τὴν ἑδραίωσιν τῶν σχετικῶν ὑπαρχουσῶν γνώσεων, καὶ νὰ ἀποτελέσῃ ἓν σημεῖον ἐκκινήσεως διὰ περαιτέρω ἀναζητήσεις.

Πρὸς τὸν σκοπὸν ἁπλῆς καὶ καταληπτῆς παρουσιάσεως τοῦ θέματος θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν Λογισμὸν μητρῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι σήμερον κτῆμα ὄχι μόνον τῶν μαθηματικῶν ἀλλὰ καὶ τῶν ἐπιστημόνων τῶν λοιπῶν κλάδων, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦν ἁπλῶς τὸ μαθηματικὸν ἐργαλεῖον.

1.6. Ὡς ἀνεφέρθη, τὰ προκύπτοντα ἀποτελέσματα θεμελιοῦνται ἑκάστοτε εἰς ἕνα σύνολον προϋποθέσεων. Ἑπομένως, πρὶν προχωρήσει ὁ μελετητὴς εἰς τοὺς λογισμούς, δι' ἐφαρμογῆς τῶν σχετικῶν τύπων, πρέπει νὰ βεβαιοῦται διὰ τὴν ὕπαρξιν τῶν προϋποθέσεων τούτων. Πρὸς τοῦτο θὰ καταβληθῇ ἰδιαιτέρα προσπάθεια μεθοδικῆς ἀντιστοιχίσεως τῶν καταλλήλων προϋποθέσεων εἰς ἕκαστον τύπον, οὕτως ὥστε νὰ διευκολύνεται ὁ ἀναγνώστης ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος ἐνδιαφέρεται μόνον διὰ τὴν πρακτικὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἀποτελεσμάτων.

1.7. Σημαντική, νομίζομεν, διὰ τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς τοῦ ὑποδείγματος εἶναι καὶ ἡ συστηματοποίησις τῶν λογιστικῶν πράξεων. Εἶναι γνωσταὶ αἱ συναντώμεναι δυσκολίαι κατὰ τὴν λύσιν, διὰ τῆς χειρός, προβλημάτων, σχετικῶς μεγάλων διαστάσεων, ὁσάκις δὲν διατίθεται ἠλεκτρονικὸς ὑπολογιστής. Πρὸς διευκόλυνσιν προτείνομεν ἕνα «ἀλγόριθμον», μίαν σειρὰν δηλαδὴ τυποποιημένων ἁπλῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν, σχετικῶς εὐκόλως καὶ ἀσφαλῶς, εἰς τὰ ἀπαραίτητα διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἀριθμητικὰ ἀποτελέσματα.

1.8. Τὰ προκύπτοντα γενικὰ ἀποτελέσματα θὰ μερικεύωνται ἑκάστοτε εἰς προβλήματα μιᾶς καὶ δύο ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν καὶ θὰ προκύπτουν, οὕτω, οἱ γνωστοὶ τύποι ἐκ τῆς μεμονωμένης μελέτης τῶν προβλημάτων τούτων. Τέλος, χάριν συνδέσεως τῶν θεωρητικῶν ἀποτελεσμάτων, μὲ τὴν πρακτικὴν τῶν σχετικῶν ὑπολογισμῶν, ὅπερ θεωροῦμεν ἰδιαιτέρως χρήσιμον διὰ τὴν ὀρθὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ὑποδείγματος, γίνεται παραπομπὴ εἰς ἀριθμητικὰ παραδείγματα.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΑΥΤΟΥ

2. ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ – ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

2.1. Γενικὰ - Συμβολισμοὶ

2.1.1. Θὰ ὑπενθυμίσωμεν τὴν γενικὴν ἔννοιαν τῆς παλινδρομήσεως, εἰς τὸν χῶρον $\Pi^{\kappa+1}$ (χῶρος τῶν $\kappa+1$ διαστάσεων), ὁρίζοντες τὴν «*ὑπερεπιφάνειαν παλινδρομήσεως*». Ἐν συνεχείᾳ θὰ προκύψουν, ὡς μερικαὶ περιπτώσεις, εἰς μὲν τὸ ἐπίπεδον (χῶρος Π^2) ἡ «*καμπύλη παλινδρομήσεως*», εἰς δὲ τὸν συνήθη χῶρον (χῶρος 3 διαστάσεων : Π^3) ἡ «*ἐπιφάνεια παλινδρομήσεως*».

2.1.2. Σχετικῶς πρὸς τὸν συμβολισμὸν παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

α) Διὰ τῶν συνήθων κεφαλαίων γραμμάτων Χ, Υ, Ζ, . . . θὰ παρίστανται αἱ μεταβληταὶ ποιοτικῶς, ἐνῶ διὰ τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν γραμμάτων x, y, z, . . . θὰ παρίστανται αὗται ποσοτικῶς. Π.χ., Χ = δαπάνη κρέατος, x = ὡρισμένον ὕψος τῆς δαπάνης κρέατος.

β) Διὰ τῶν μαύρων κεφαλαίων γραμμάτων **Α, Β, Γ** . . . θὰ σημειοῦμεν μήτρας. Οὕτω, μία μήτρα θὰ γράφεται :

$$\mathbf{A} = \| \alpha_i^j \|$$

ἔνθα ὁ κάτω δείκτης i ἀναφέρεται εἰς τὴν τάξιν τῆς γραμμῆς καὶ ὁ ἄνω j εἰς τὴν τάξιν τῆς στήλης. Διὰ νὰ σημειώσωμεν τὰ πλήθη κ καὶ λ τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν μιᾶς μήτρας **Α**, θὰ γράφωμεν καὶ $\underset{(\kappa,\lambda)}{\mathbf{A}}$.

Τὴν μοναδιαίαν μήτραν θὰ παριστῶμεν διά :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ . & & . & . \\ . & & . & . \\ . & & & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

ἢ διὰ $\mathbf{I}_n$, ἐὰν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι αὕτη ἔχει n γραμμὰς καὶ n στήλας. Μία μήτρα μὲ μηδενικὰ ὅλα τὰ στοιχεῖα της θὰ παρίσταται διὰ **0**.

γ) Ἓν σύνολον ν ποιοτικῶν μεταβλητῶν θὰ παρίσταται διὰ $(X^1, X^2, \ldots, X^\nu)$ ἢ δι' ἑνὸς διανύσματος $\vec{X}\,(X^1, X^2, \ldots, X^\nu)$ τοῦ χώρου Π^ν. Διὰ τῆς φράσεως «τιμὴ $\vec{x}$ τοῦ $\vec{X}$» θὰ ἐννοοῦμεν ἓν ὡρισμένον σύνολον τιμῶν $(x^1, x^2, \ldots, x^\nu)$ τοῦ συνόλου $(X^1, X^2, \ldots, X^\nu)$. Μία συνάρτησις $g(x^1, x^2, \ldots, x^\nu)$ θὰ σημειοῦται, πρὸς συντομίαν, διὰ $g(\vec{x})$.

Τέλος, ὁσάκις ἓν διάνυσμα $\vec{X}$ θὰ εἰσάγεται εἰς πράξεις μητρῶν, θὰ θεωρῆται ὡς μήτρα-στήλη. Τότε τὸ $\vec{X}'$ θὰ παριστᾶ τὴν ἀντίστοιχον μήτραν-γραμμὴν αὐτοῦ.

2.2. Κατανομαὶ εἰς τὸν χῶρον $\Pi^{\kappa+1}$

2.2.1. Ἔστω αἱ κ+1 συνεχεῖς τυχαῖαι μεταβληταὶ Y καὶ $\vec{X}\,(X^1, X^2, \dots X^\kappa)$, ἀκολουθοῦσαι, εἰς τὸν χῶρον $\Pi^{\kappa+1}$, τὸν νόμον πιθανότητος :

$$f(y, \vec{x})\,dy\,d\vec{x} = \text{πιθ.}\{y < Y < y + dy,\ x^j < X^j < x^j + dx^j\} \qquad (1)$$
$$j = 1, 2, \dots, \kappa$$

ὅπου $\vec{x}$ εἶναι ὡρισμένη τιμὴ τοῦ $\vec{X}$ καὶ $d\vec{x} = dx^1 \cdot dx^2 \dots dx^\kappa$.

Ἐξ αὐτοῦ προκύπτουν οἱ «*μερικοὶ νόμοι*» τῶν Y καὶ $\vec{X}$:

Νόμος Y: $h(y)dy = [\underbrace{\int\int\dots\int}_{\kappa} f(y, \vec{x})d\vec{x}]dy$, Νόμος X: $g(\vec{x})d\vec{x} = [\int f(y, \vec{x})dy]d\vec{x}$.

Δηλαδή :

Πυκνότης τῆς Y: $h(y) = \underbrace{\int\int\dots\int}_{\kappa} f(y, \vec{x})d\vec{x}$, Πυκνότης τῆς X: $g(\vec{x}) = \int f(y, \vec{x})dy$.

2.2.2. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἀνεξαρτησίας τῶν Y καὶ $\vec{X}$ θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν:

$$f(y, \vec{x}) = h(y)\,g(\vec{x}) \qquad (2)$$

Τοὐναντίον, ἂν αἱ Y καὶ X εἶναι ἐξηρτημέναι, τότε :

$$f(y, \vec{x}) = g(\vec{x}) \cdot h_{\vec{x}}(y) = g_y(\vec{x}) \cdot h(y) \qquad (3)$$

Αἱ συναρτήσεις $h_{\vec{x}}(y)$ καὶ $g_y(\vec{x})$ εἶναι αἱ «*δεσμευμέναι*» πυκνότητες τῶν μεταβλητῶν Y καὶ $\vec{X}$ ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν (3) ἔχομεν :

$$h_{\vec{x}}(y) = \frac{f(y, \vec{x})}{g(\vec{x})}, \quad g_y(\vec{x}) = \frac{f(y, \vec{x})}{h(y)} \qquad (3')$$

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν (2) καὶ (3′) ὅτι, ἐὰν αἱ Y, $\vec{X}$ εἶναι ἀνεξάρτητοι, τότε

$$h_{\vec{x}}(y) = h(y) \quad \text{καὶ} \quad g_y(\vec{x}) = g(\vec{x})$$

2.2.3. Ἐκ τῶν (3′) προκύπτουν ἐπίσης οἱ «*δεσμευμένοι νόμοι*» τῶν μεταβλητῶν Y καὶ $\vec{X}$.

Οὕτω, π.χ., «ὁ δεσμευμένος νόμος τῆς Y ὡς πρὸς $\vec{X}$» θὰ εἶναι :

$$h_{\vec{x}}(y)\,dy = \text{πιθ.}\{y < Y < y + dy / \vec{X} = \vec{x}\} \qquad (4)$$

καὶ παριστᾶ τὴν κατανομὴν πιθανοτήτων τῶν τιμῶν τῆς Y, ἐντὸς ἀπειροστοῦ χώρου Π^{κ} περὶ τὴν τιμὴν $\vec{x}$ (ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι ὑποχῶρος τοῦ $\Pi^{\kappa+1}$). Αἱ χαρακτηριστικαὶ ποσότητες τοῦ νόμου (4), μαθηματικὴ ἐλπίς, διακύμανσις,... κ.λ.π., θὰ καλοῦνται «δεσμευμέναι» τοιαῦται καὶ θὰ σημειοῦνται διὰ $E_{\vec{x}}(Y)$, $V_{\vec{x}}(Y)$, ... ἀντιστοίχως.

Οὕτω, π.χ., ἡ «*δεσμευμένη μαθηματικὴ ἐλπίς*», καὶ ἡ «*δεσμευμένη διακύμανσις*» τῆς Y θὰ εἶναι :

$$
\begin{aligned}
E_{\vec{x}}(Y) &= E\{Y/\vec{X} = \vec{x}\} = \int y h_{\vec{x}}(y)\,dy, \\
V_{\vec{x}}(Y) &= V\{Y/\vec{X} = \vec{x}\} = \int [\,y - E_{\vec{x}}(Y)\,]^2 h_{\vec{x}}(y)\,dy
\end{aligned} \qquad (5)
$$

Προφανῶς τὰ δεύτερα μέλη τῶν (5) εἶναι ἐν γένει συναρτήσεις τοῦ $\vec{x}$.

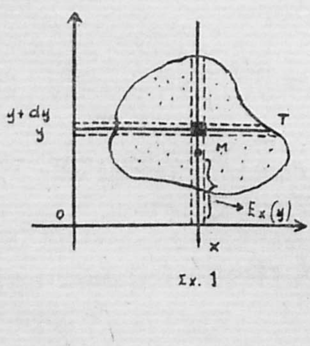
Παράδειγμα 1. Ἔστω σύνολον 2 τυχαίων μεταβλητῶν (Y, X). Αἱ διάφοροι τιμαὶ τοῦ ζεύγους εὑρίσκονται εἰς ἕνα τόπον T τοῦ ἐπιπέδου xOy καὶ εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ T ὑπάρχει πυκνότης πιθανότητος $f(y, x)$.

Ὁ δεσμευμένος νόμος τῆς Y θὰ εἶναι :

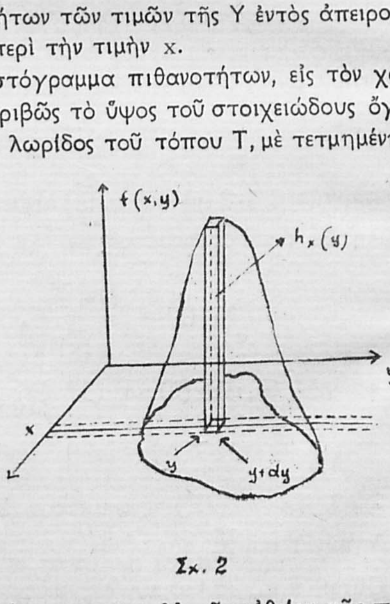
$$h_x(y)\,dy = \frac{f(y, x)}{g(x)}\,dy = \pi\iota\theta.\{\,y < Y < y + dy/X = x\,\}$$

καὶ παριστᾶ τὴν κατανομὴν πιθανοτήτων τῶν τιμῶν τῆς Y ἐντὸς ἀπειροστῆς λωρίδος παραλλήλου πρὸς τὸν Oy, περὶ τὴν τιμὴν x.

Δηλαδὴ ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ ἱστόγραμμα πιθανοτήτων, εἰς τὸν χῶρον τῶν 3 διαστάσεων, τὸ $h_x(y)$ εἶναι ἀκριβῶς τὸ ὕψος τοῦ στοιχειώδους ὄγκου, τοῦ προβαλλομένου εἰς στοιχεῖον τῆς λωρίδος τοῦ τόπου T, μὲ τετμημένην x.



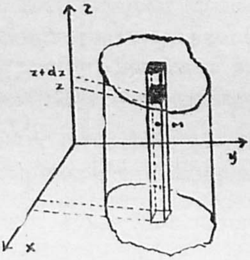
Σχ. 1



Σχ. 2

Ἡ $E_x(Y)$ θὰ παριστᾶ ἓν ὡρισμένον σημεῖον M τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oy, μὲ τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν x.

Παράδειγμα 2. Ἔστω σύνολον 3 τυχαίων μεταβλητῶν X, Y, Z. Αἱ διάφοροι τιμαὶ τοῦ συνόλου αὐτοῦ εὑρίσκονται εἰς ἕνα τόπον T τοῦ χώρου (Oyxz)



Σχ. 3

καὶ εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ T ὑπάρχει πυκνότης πιθανότητος f (x, y, z). Ὁ δεσμευμένος νόμος τῆς Z θὰ εἶναι

$$h_{xy}(z)\,dz = \frac{f(x,y,z)}{g(x,y)}\,dz = \text{πιθ.}\,\{z < Z < z + dz \,/\, X = x,\ Y = y\}$$

καὶ παριστᾷ τὴν κατανομὴν πιθανοτήτων τῶν τιμῶν τῆς Z, ἐντὸς ἀπειροστοῦ παραλληλεπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oz, περὶ τὸ σημεῖον (x, y).

Ἡ $E_{xy}(Z)$ θὰ παριστᾷ ἓν ὡρισμένον σημεῖον M τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oz.

2.3. Ἡ ἔννοια τῆς παλινδρομήσεως

2.3.1. Δοθέντος τοῦ συνόλου $(Y, \vec{X})$ καὶ τοῦ νόμου πιθανότητός του (1), δυνάμεθα ἐν γένει νὰ ἐλέγξωμεν ἐὰν ὑπάρχῃ ἀνεξαρτησία τῶν Y καὶ $\vec{X}$, ἐξετάζοντες ἐὰν ἰσχύῃ ἡ σχέσις (2). Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ Y καὶ $\vec{X}$ δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι, τότε ἡ Y εἶναι ἐξηρτημένη ἐκ τοῦ μεταβλητοῦ διανύσματος $\vec{X}$ καί, τρόπον τινά, ἡ μεταβολὴ τῆς Y «ἑρμηνεύεται» ἐκ τῆς μεταβολῆς τοῦ $\vec{X}$. Διὰ τοῦτο αἱ X^j, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$ θὰ καλοῦνται «*ἑρμηνευτικαὶ*» μεταβληταί [1].

Τίθεται ὅμως τὸ ἐρώτημα: Εἶναι γνωστὸς ὁ ἀκριβὴς τρόπος ἐξαρτήσεως τῆς Y ἐκ τῶν $X^1, X^2, \ldots, X^\kappa$; Δηλαδὴ ὑφίσταται μία ἀναλυτικὴ ἔκφρασις $Y = \Phi(X^1, X^2, \ldots, X^\kappa)$, ἡ ὁποία δίδει, διὰ ἕκαστον σύστημα τιμῶν $X^j = x^j$, τὴν τιμὴν y τῆς Y;

Μὲ μόνον δεδομένον τὸν νόμον (1) τοῦ συνόλου $(Y, \vec{X})$ τοῦτο εἶναι ἐν γένει ἀδύνατον. Πράγματι ἐκ τῆς (4) προκύπτει ὅτι ἡ Y δὲν λαμβάνει μίαν

1) Καλοῦνται ἀκόμη καὶ «*ἀνεξάρτητοι*» ἢ «*ἐξωγενεῖς*», διότι αἱ τιμαί των ὁρίζονται ἢ ἐκτιμῶνται ἀνεξαρτήτως τῆς Y.

μοναδικὴν τιμήν, διὰ $\vec{X} = \vec{x}$, ἀλλ' ἀπειρίαν τιμῶν καὶ ἑκάστην μὲ ὡρισμένην πιθανότητα. Αἱ ἄπειροι αὗται τιμαὶ εὑρίσκονται εἰς ἓν διάστημα τοῦ ὁποίου καὶ ἡ θέσις καὶ τὸ πλάτος μεταβάλλονται μετὰ τοῦ $\vec{x}$. Ἡ μαθηματικὴ ὅμως ἐλπίς, ἡ διάμεσος ἢ ἑτέρα χαρακτηριστικὴ ποσότης τοῦ νόμου (4) θὰ εἶναι, διὰ $X = x$, ὡρισμένος ἀριθμός, πέριξ τοῦ ὁποίου «παλινδρομοῦν» αἱ τιμαὶ τῆς Y. Ἡ χαρακτηριστικὴ αὕτη ποσότης εἶναι «δεσμευμένη», δηλαδὴ εὑρίσκεται δι' ὡρισμένην τιμὴν $\vec{x}$ τοῦ $\vec{X}$, καὶ θὰ σημειοῦται γενικῶς διὰ $\lambda_{\vec{x}}(Y)$. Αὕτη, παριστῶσα ἓν ὡρισμένον σημεῖον τοῦ διαστήματος μεταβολῆς τῆς Y, εἶναι, τρόπον τινά, ἓν κέντρον παλινδρομήσεως τῶν τιμῶν τῆς Y, διὰ $\vec{X} = \vec{x}$. Ἡ $\lambda_{\vec{x}}(Y)$ θὰ μεταβάλλεται μετὰ τοῦ $\vec{x}$ καὶ ἡ μεταβολή της αὕτη δίδει μίαν εἰκόνα (ἢ ἓν μέτρον) τῆς ἐξαρτήσεως τῆς Y ἐκ τῶν X^j, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$. Τὸ σύνολον τῶν κέντρων τούτων παλινδρομήσεως $\lambda_{\vec{x}}(Y)$ θὰ καλοῦμεν «ὑπερεπιφάνειαν παλινδρομήσεως», εἰς τὸν χῶρον $\Pi^{\kappa+1}$.

2.3.2. Τώρα ὅμως τίθεται αὐτομάτως θέμα ἐκλογῆς τῆς χαρακτηριστικῆς ποσότητος $\lambda_{\vec{x}}(Y)$, ἡ ὁποία θὰ ληφθῇ ὡς κέντρον παλινδρομήσεως τῶν τιμῶν τῆς Y, διὰ $\vec{X} = \vec{x}$. Ἐρωτᾶται δηλαδή : ποία χαρακτηριστικὴ ποσότης εἶναι προτιμοτέρα διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς παλινδρομήσεως. Ἡ μαθηματικὴ ἐλπίς, ἡ διάμεσος ἢ ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή ; Ἡ ἀπάντησις πρέπει νὰ βασισθῇ ἐφ' ἑνὸς μέτρου ἀξιολογήσεως τῶν διαφόρων ὑπερεπιφανειῶν παλινδρομήσεως, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐπὶ τῇ βάσει τῶν διαφόρων χαρακτηριστικῶν τιμῶν. Εἶναι λογικὸν νὰ θεωρήσωμεν καλλιτέραν ἐκείνην τὴν ἐπιφάνειαν παλινδρομήσεως, ἀπὸ τὴν ὁποίαν αἱ τιμαὶ τῆς Y εἶναι ὀλιγώτερον διεσπαρμέναι. Διὰ τοῦτο θὰ λάβωμεν ἐκεῖνο τὸ $\lambda_{\vec{x}}(Y)$, τὸ ὁποῖον καθιστᾷ τὴν μέσην τετραγωνικὴν ἀπόκλισιν τῶν τιμῶν τῆς Y, ἀπὸ τῆς ὑπερεπιφανείας παλινδρομήσεως, ἐλαχίστην. Δηλαδὴ θὰ λάβωμεν τὸ $\lambda_{\vec{x}}(Y)$, τὸ ὁποῖον καθιστᾷ τὴν ποσότητα $E\{[Y - \lambda_{\vec{x}}(Y)]^2\}$ ἐλαχίστην. Ἀλλά :

$$\begin{aligned}
E\{[Y - \lambda_{\vec{x}}(Y)]^2\} &= \int\int\ldots\int [y - \lambda_{\vec{x}}(Y)]^2 f(y, \vec{x})\, dy\, d\vec{x} = \\
&= \int\int\ldots\int [y - \lambda_{\vec{x}}(Y)]^2 g(\vec{x})\, h_{\vec{x}}(y)\, dy\, d\vec{x} = \\
&= \int\int\ldots\int g(\vec{x})\, d\vec{x} \int [y - \lambda_{\vec{x}}(Y)]^2 h_{\vec{x}}(y)\, dy = \\
&= \int\int\ldots\int g(\vec{x})\, d\vec{x} \int [y - E_{\vec{x}}(Y) + E_{\vec{x}}(Y) - \lambda_{\vec{x}}(Y)]^2 h_{\vec{x}}(y)\, dy = \\
&= \int\int\ldots\int g(\vec{x})\, d\vec{x} \{\int [y - E_{\vec{x}}(Y)]^2 h_{\vec{x}}(y)\, dy + [E_{\vec{x}}(Y) - \lambda_{\vec{x}}(Y)]^2\} = \\
&= \int\int\ldots\int g(\vec{x})\, d\vec{x} \{V_{\vec{x}}(Y) + [E_{\vec{x}}(Y) - \lambda_{\vec{x}}(Y)]^2\}.
\end{aligned}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος ἕπεται ὅτι ἡ θεωρηθεῖσα ποσότης, γίνεται ἐλαχίστη διὰ $\lambda_{\vec{x}}(Y) = E_{\vec{x}}(Y)$. Θὰ χρησιμοποιήσωμεν ἑπομένως τὴν δεσμευμένην μαθηματικὴν ἐλπίδα $E_{\vec{x}}(Y)$ διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν ὑπερεπιφάνειαν παλινδρομήσεως.

2.3.3. Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω κατατοπιστικῶν ἐννοιῶν, θὰ προχωρήσωμεν τώρα εἰς αὐστηροτέραν διατύπωσιν τῆς ἐννοίας τῆς παλινδρομήσεως. Δοθέντος τοῦ συνόλου τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $(Y, \vec{X})$, μὲ νόμον πιθανότητος τὸν (1), ὡρίσαμεν ὡς δεσμευμένην μαθηματικὴν ἐλπίδα τῆς Y, τὴν μαθηματικήν της ἐλπίδα διὰ $\vec{X} = \vec{x}$, δηλαδὴ τὴν ποσότητα :

$$E_{\vec{x}}(Y) = E(Y/\vec{X} = \vec{x}) = \int y h_{\vec{x}}(y) dy \tag{5'}$$

Αὕτη εἶναι προφανῶς συνάρτησις τοῦ $\vec{x}(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa)$. Ἐὰν θέσωμεν $E_{\vec{x}}(Y) = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa)$, τότε θὰ καλοῦμεν «ὑπερεπιφάνειαν παλινδρομήσεως» τὴν ὑπερεπιφάνειαν τοῦ χώρου $\Pi^{\kappa+1}$, μὲ ἐξίσωσιν :

$$y = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa) \tag{6}$$

Δηλαδὴ ἡ ὑπερεπιφάνεια παλινδρομήσεως εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, μὲ συντεταγμένας $[\vec{x}, E_{\vec{x}}(Y)]$.

Ἡ παλινδρόμησις θὰ καλῆται «γραμμική» ἐὰν ἡ (6) εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ὡς πρὸς $x^1, x^2, \ldots, x^\kappa$, δηλαδὴ ἐὰν $E_{\vec{x}}(Y) = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\kappa x^\kappa$. Τότε θὰ ἔχωμεν «ὑπερεπίπεδον παλινδρομήσεως», μὲ ἐξίσωσιν τήν :

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\kappa x^\kappa . \tag{6'}$$

Παρατήρησις 1. Ἡ $\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa)$ εἶναι, διὰ τὸ δεδομένον σύνολον τιμῶν $(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa)$, εἷς ἀριθμός, πέριξ τοῦ ὁποίου διασπείρονται αἱ τιμαὶ τῆς Y, κατὰ τὴν διάρκεια τῶν ἐπανειλημμένων δοκιμῶν τοῦ πειράματός μας. Ἄρα δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$Y = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa) + U \tag{7}$$

ἔνθα U εἶναι τυχαία μεταβλητή, εἰς τὴν ὁποία συγκεντροῦμεν τὰς ἐπιδράσεις ἐπὶ τῶν τιμῶν τῆς Y, ὅλων τῶν λοιπῶν παραγόντων, πλὴν τῶν X^j. Δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τῆς U εἶναι ἀνεξάρτητοι τῶν τιμῶν τῶν X^j καὶ ἐπειδὴ θέλομεν νὰ ἔχωμεν $E_{\vec{x}}(Y) = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa)$, θὰ πρέπει νὰ εἶναι $E(U) = 0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς (6') θὰ ἔχωμεν τήν :

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\kappa x^\kappa + U \tag{7'}$$

Παρατήρησις 2. Τὸ σύνολον τῶν $\kappa+1$ τυχαίων μεταβλητῶν ἐλήφθη ὡς $(Y\vec{X})$ διὰ νὰ τονισθῇ ἀκριβῶς ὅτι σκοπός μας εἶναι ἡ μελέτη τῆς ἐξαρτήσεως τῆς Y, ἐκ τῶν X^j. Ἐννοεῖται ἑπομένως ὅτι εἰς τὸ σύνολον τοῦτο δύναται νὰ ὁρισθῇ παλινδρόμησις οἱασδήποτε ἄλλης μεταβλητῆς. Οὕτω, π.χ., δύναται νὰ ὁρισθῇ ἡ ὑπερεπιφάνεια παλινδρομήσεως τῆς X^1 ὡς ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων μὲ συντεταγμένας $[y, x^2, x^3, \ldots, x^\kappa, E_{y, x^2,\ldots,x^\kappa}(X^1)]$.

2.3.4. *Ἡ παλινδρόμησις εἰς ζεῦγος τυχαίων μεταβλητῶν.* Ἐφαρμόζοντες τὰ ἀνωτέρω διὰ τὸ ζεῦγος τῶν τυχαίων μεταβλητῶν (X, Y), μὲ νόμον πιθανότητος $f(x, y)dxdy$, θὰ ἔχωμεν ὡς δεσμευμένον νόμον τῆς Y τόν:

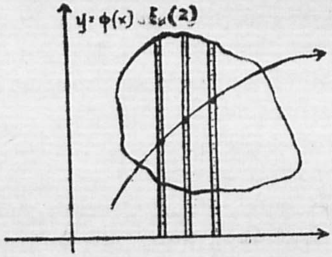
$$h_x(y)dy = \frac{f(x, y)}{g(x)}dy = \text{πιθ.}\{y < Y < y + dy / X = x\},$$

ἔνθα $g(x) = \int f(x, y)\,dy$. Τότε, θέτοντες τὴν δεσμευμένην μαθηματικὴν ἐλπίδα $E_x(y) = \varphi(x)$, δηλαδὴ θέτοντες:

$$E_x(Y) = \int y\,\frac{f(x, y)}{g(x)}\,dy = \varphi(x),$$

θὰ ἔχωμεν ὡς ἐξίσωσιν τῆς «καμπύλης παλινδρομήσεως» τήν:

$$y = \varphi(x)$$



Σχ. 4

Ἐὰν ἡ $\varphi(x)$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, δηλαδὴ ἐὰν $\varphi(x)=\alpha x+\beta$, θὰ ἔχωμεν τὴν «εὐθεῖαν παλινδρομήσεως»

$$y = \alpha x + \beta.$$

Παρατήρησις 1. Ὁμοίως, ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ δεσμευμένου νόμου τῆς X, δηλαδὴ ἐκ τῆς:

$$g_y(x)\,dx = \frac{f(x, y)}{h(y)}dx = \text{πιθ.}\{x < X < x + dx / Y = y\},$$

ἔνθα $h(y) = \int f(x, y)\, dx$, καὶ εὑρίσκοντες τὴν δεσμευμένην μαθηματικὴν ἐλπίδα τῆς X, δηλαδὴ τὴν συνάρτησιν $E_y(X) = \int x \frac{f(x, y)}{h(y)}\, dx = \sigma(y)$, ἔχομεν τὴν καμπύλην παλινδρομήσεως τῆς **X**, μὲ ἐξίσωσιν :

$$x = \sigma(y)$$

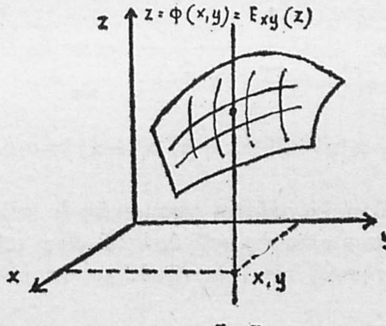
Εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν $\sigma(y) = \gamma y + \delta$, ἔχομεν τὴν εὐθείαν παλινδρομήσεως

$$x = \gamma y + \delta.$$

2.3.5. *Ἡ παλινδρόμησις εἰς τὸν συνήθη χῶρον.* Δοθέντος ἑνὸς συνόλου τριῶν τυχαίων μεταβλητῶν (X, Y, Z), μὲ νόμον πιθανότητος $f(x, y, z)\, dxdydz$, θὰ ἔχωμεν ὡς δεσμευμένον νόμον τῆς Z, τόν :

$$h_{xy}(z)\, dz = \frac{f(x, y, z)}{g(x, y)}\, dz = \text{πιθ.}\{ z < Z < z + dz \,/\, X = x, Y = y \}$$

ἔνθα $g(x, y) = \int f(x, y, z)\, dz$. Τότε θέτοντες τὴν δεσμευμένην μαθηματικὴν



Σχ. 5

ἐλπίδα τῆς Z : $E_{xy}(Z) = \int z \frac{f(x, y, z)}{g(x, y)}\, dz = \varphi(x, y)$, ἔχομεν τὴν «ἐπιφάνειαν παλινδρομήσεως» μὲ ἐξίσωσιν τήν :

$$z = \varphi(x, y)$$

Ἐὰν ἡ $\varphi(x, y)$ εἶναι γραμμική, δηλαδὴ $\varphi(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, ἔχομεν τὸ «ἐπίπεδον παλινδρομήσεως», μὲ ἐξίσωσιν :

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

3. ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΕΩΣ

3.1. Γενικὰ

3.1.1. Ὡς ἀνεφέρθη, δοθέντος τοῦ νόμου πιθανότητος $f(y, \vec{x})\, dy\, d\vec{x}$, τοῦ συνόλου τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $(Y, \vec{X})$, ὁρίζεται ἡ ὑπερεπιφάνεια παλινδρομήσεως $y = \varphi(\vec{x})$ καὶ (βλ. παρατ. 1 τῆς παραγρ. 2.3.4.), δι' ἕκαστον σύστημα τιμῶν $\vec{x}(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa)$, θὰ εἶναι :

$$Y = \varphi(\vec{x}) + U = Y_M + U \tag{8}$$

ἔνθα U εἶναι τυχαία μεταβλητὴ μὲ $E\{U\} = 0$. Εἶναι καὶ ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια παλινδρομήσεως δὲν δίδει τὴν μαθηματικὴν ἔκφρασιν τῆς ἐξαρτήσεως τῆς Y ἐκ τῶν X^j, ἀλλὰ μίαν «*στοχαστικὴν*» ἔκφρασιν, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν πληροφοριακὴν μόνον εἰκόνα τῆς ἐξαρτήσεως ταύτης. Ἓν μέτρον τῆς ἐξαρτήσεως δύναται νὰ εἶναι ἡ διαφορὰ $\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0)$, ὅπου $\vec{x}_0$ ἓν σημεῖον ἀναφορᾶς. Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ διαφορὰ αὕτη τόσον μεγαλυτέρα προφανῶς εἶναι καὶ ἡ ἐξάρτησις τῆς Y ἐκ τῶν X^j. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γραμμικῆς παλινδρομήσεως ἔχομεν $\varphi(\vec{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\kappa x^\kappa$ καὶ ἄρα :

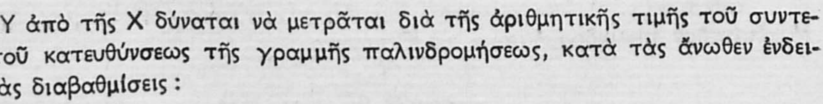
$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\kappa x^\kappa + U$$

Ἑπομένως ἡ διαφορὰ $\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0)$ θὰ εἶναι :

$$\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}_0) = \alpha_1(x^1 - x^1_0) + \alpha_2(x^2 - x^2_0) + \ldots + \alpha_\kappa(x^\kappa - x^\kappa_0) = \alpha_1 \Delta x^1 + \alpha_2 \Delta x^2 + \ldots \alpha_\kappa \Delta x^\kappa$$

Δηλαδὴ ἡ διαφορὰ αὕτη ἐκφράζεται γραμμικῶς ἐκ τῶν διαφορῶν $x^j - x^j_0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ Δx^j καὶ ἄρα τοῦ x^j, ἀποτελεῖ ἓν μέτρον τῆς μερικῆς ἐξαρτήσεως τῆς Y ἐκ τῆς X^j μεμονωμένως.

Παράδειγμα 1. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἑνὸς ζεύγους τυχαίων μεταβλητῶν, μὲ γραμμικὴν παλινδρόμησιν θὰ εἶναι : $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$. Ὁ βαθμὸς τῆς ἐξαρτήσεως



ἔντονος ἐξάρτησις — Σχ. 6 — ἀσθενὴς ἐξάρτησις — ἀνεξαρτησία

τῆς Y ἀπὸ τῆς X δύναται νὰ μετρᾶται διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ κατευθύνσεως τῆς γραμμῆς παλινδρομήσεως, κατὰ τὰς ἄνωθεν ἐνδεικτικὰς διαβαθμίσεις :

3.1.2. Εἰς τὰς ἐρευνητικὰς ἐφαρμογὰς δὲν εἶναι ἐν γένει γνωστὸς ὁ νόμος πιθανότητος τοῦ συνόλου $(Y, \vec{X})$ καὶ οὔτε ἑπομένως ἡ ὑπερεπιφάνεια παλινδρομήσεως τῆς Y ὡς πρὸς $\vec{X}$. Διαθέτομεν ἁπλῶς μίαν σειρὰν πειραματικῶν δεδομένων καὶ ἐπιδιώκομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἐξάρτησιν τῆς Y ἐκ τοῦ $\vec{X}(X^1, X^2, \ldots, X^\kappa)$. Ἐὰν θεωρήσωμεν n (ἐκ τοῦ πειράματος) τιμὰς τῆς Y, δι' ὡρισμένην ἑκάστοτε ἀντιστοιχοῦσαν τιμὴν $\vec{x}(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa)$ τοῦ $\vec{X}$, τὰς $y_{1\vec{x}}, y_{2\vec{x}}, \ldots, y_{n\vec{x}}$, ἡ μέση τιμὴ τούτων $E^*_{\vec{x}}(Y)$ εἶναι μία ἐκτίμησις τῆς $E_{\vec{x}}(Y)$. Ἡ ὑπερεπιφάνεια ἑπομένως, ἡ ὁποία διέρχεται πλησιέστερον ἐκ τῶν σημείων $(\vec{x}, E^*_{\vec{x}}(y))$, διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς $\vec{x}$, λαμβάνεται ὡς ἐκτίμησις τῆς ἀγνώστου ὑπερεπιφανείας τῶν σημείων $[\vec{x}, E_{\vec{x}}(Y)]$.

3.1.3. Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος παλινδρομήσεως ἐπεκτείνεται εἰς περιπτώσεις, ὅπου τὰ δεδομένα τῆς παρατηρήσεως δὲν συμβιβάζονται μὲ τὴν γραμμικὴν μορφὴν τῆς συναρτήσεως $\varphi(\vec{x})$ εἰς τὴν σχέσιν (8). Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας γίνεται συνήθως χρῆσις καταλλήλων μετασχηματισμῶν $Y_1 = K(Y)$ καὶ $X^j_1 = \Lambda_j(X^j)$ τῶν μεταβλητῶν Y καὶ $\vec{X}$, εἰς τρόπον ὥστε ἡ παλινδρόμησις τῶν Y_1 καὶ $\vec{X}_1$ νὰ εἶναι γραμμική.

Οἱ πλέον ἐν χρήσει μετασχηματισμοὶ τοῦ εἴδους τούτου, ἰδίως κατὰ τὰς οἰκονομετρικὰς μελέτας, ὅπου παρουσιάζουν καὶ εἰδικὰ πλεονεκτήματα, εἶναι οἱ τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως. Δηλαδὴ λαμβάνομεν:

$$Y_1 = \log Y, \quad X^j_1 = \log(X^j).$$

Χρησιμοποιοῦνται ὅμως ἀκόμη καὶ αἱ ἀντίστροφοι συναρτήσεις ἢ ἄλλαι μορφαὶ συναρτήσεων τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν ἢ ὁμάδων αὐτῶν κ.λ.π.

3.2. Μορφὴ τοῦ ὑποδείγματος

3.2.1. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς προηγουμένας παρατηρήσεις, θὰ πλησιάσωμεν, εἰς τὴν παράγραφον αὐτήν, περισσότερον τὸ πρόβλημα.

Μελετῶμεν τὸ μέγεθος Y (ἐξηρτημένη μεταβλητή), τὸ ὁποῖον, ὡς πιστεύομεν, ἐξαρτᾶται (ἑρμηνεύεται) ἐξ ἑνὸς συνόλου k μεταβλητῶν (ἑρμηνευτικαὶ μεταβληταί), τῶν $X^1, X^2, \ldots, X^k$. Ἡ μορφὴ τῆς ἐξαρτήσεως αὐτῆς τῆς Y διὰ τῶν X^j, $j = 1, 2, \ldots, k$, δὲ εἶναι γνωστή. Ἐκ τῆς μελέτης ὅμως τῆς φύσεως τῶν μεταβλητῶν καὶ τῶν πειραματικῶν δεδομένων ἀγόμεθα εἰς τὸ νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη εἶναι πλησιεστέρα πρὸς τὴν γραμμικήν. Ὁπωσδήποτε ἡ ὑποτιθεμένη αὕτη γραμμικὴ σχέσις εἶναι ἁπλῶς «στοχαστική». Δὲν εἶναι μία ἀκριβὴς μαθηματικὴ συνάρτησις τῆς Y διὰ τῶν X^j. Ἀποτέλεσμα τούτου εἶναι ὅτι αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τῆς Y διαφέρουν συνήθως τῶν προκυπτουσῶν μέσω τῆς συναρτήσεως. Αἱ ἀποκλίσεις δὲ αὗται δύνανται νὰ ὀφείλωνται εἴτε εἰς τὴν ἐκλογὴν τῆς συναρτήσεως καθ' ἑαυτήν, εἴτε καὶ εἰς τὴν ἐπίδρασιν πλήθους ἄλλων μεταβλητῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν ἐθεωρήθησαν σημαντικαὶ ἢ δὲν κατέστη δυνατὸν ν' ἀναγνωρισθοῦν, διὰ νὰ περιληφθοῦν εἰς τὸ ὑπόδειγμα, ὡς πρόσθετοι ἑρμηνευτικαὶ μεταβληταὶ ἢ δὲν ἠδύναντο νὰ μετρηθοῦν κλπ. Πρὸς ἑρμηνείαν τῶν ἀποκλίσεων, τῶν ὀφειλομένων εἰς τὸ σύνολον τῶν παραγόντων τούτων, γίνεται χρῆσις μιᾶς ἀκόμη μεταβλητῆς, τῆς U. Θὰ ἔχωμεν οὕτω:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X^1 + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_k X^\kappa + U \tag{9}$$

3.2.2. Ὡς εἶναι προφανὲς ἐκ τῆς σχεσεως (9), ἡ ὑπὸ μελέτην μεταβλητὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἄθροισμα (1) δύο ὅρων:

α) Ἑνὸς γνωστοῦ ὅρου, δι' ὡρισμένον σύστημα τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν, τὸν ὁποῖον θὰ παριστῶμεν διὰ Y_M:

$$Y_M = \beta_0 + \beta_1 X^1 + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_\kappa X^\kappa . \tag{10}$$

Ὁ ὅρος οὗτος παριστᾷ μίαν «βεβαίαν» μεταβλητὴν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι αὕτη ἔχει γνωστὴν τιμὴν ἔστω y_M δι' ὡρισμένον σύστημα τιμῶν $\vec{x}\,(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa)$ τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν $\vec{X}\,(X^1, X^2, \ldots, X^\kappa)$. Τὰ διάφορα σύνολα τιμῶν $(x^1, x^2, \ldots, x^\kappa, y_M)$ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ὑπερεπιπέδου, μὲ ἐξίσωσιν:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_\kappa x^\kappa . \tag{11}$$

β) Ἑνὸς μεταβλητοῦ ὅρου U, ὁ ὁποῖος παριστᾷ μίαν «τυχαίαν» μεταβλητὴν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι αἱ τιμαὶ ταύτης, αἱ παρατηρούμεναι εἰς ἐπανειλημμένας δοκιμὰς τοῦ πειράματος, ὑπὸ τὸ αὐτὸ σύστημα τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν, εἶναι ἑκάστοτε διάφοροι. Αἱ τιμαὶ αὐταὶ τῆς U θὰ κατανέμωνται συμφώνως πρὸς ὡρισμένον νόμον πιθανότητος. Οὕτω, θὰ γράφωμεν τὴν (9) καὶ ὡς

$$Y = Y_M + U. \tag{9'}$$

3.2.3. Συμφώνως πρὸς ὅσα ἀνεφέρθησαν εἰς τὴν παραγρ. 2.2., ἡ ποσότης y_M θὰ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς παριστῶσα τὴν δεσμευμένην μαθηματικὴν ἐλπίδα τῆς μεταβλητῆς Y, διὰ τὴν δεδομένην τιμὴν $\vec{x}$ τοῦ διανύσματος $\vec{X}$. Ἡ ἄποψις αὕτη προϋποθέτει βεβαίως, γενικώτερον, ὅτι αἱ ἑρμηνευτικαὶ μεταβλη-

---

1) Εἰς τινας περιπτώσεις χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ πολλαπλασιαστικὴ μορφὴ

$$Y = f\,(X^1, X^2, \ldots, X^\kappa) \cdot U,$$

ἡ ὁποία ὅμως μετατρέπεται εἰς ἀθροιστικὴν διὰ λογαριθμήσεως.

ταὶ X^j, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$, εἶναι τυχαῖαι καὶ ὅτι ὑφίσταται εἷς νόμος πιθανότητος τοῦ συνόλου $\{Y, X^j, j = 1, 2, \ldots, \kappa\}$. Ἂν καὶ εἰς τὴν πρᾶξιν συναντῶνται συχνὰ μεταβληταί, αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται, ὡς ἐκ τῆς φύσεώς των, νὰ θεωρηθοῦν τυχαῖαι (ὡς π.χ. ὁ χρόνος), ἡ ἔννοια αὕτη ἐν τούτοις δύναται νὰ θεωρηθῇ γενικῆς ἰσχύος, δοθέντος ὅτι, κατὰ τοὺς λογισμοὺς εἰς τοὺς ὁποίους θ' ἀναφερθῶμεν κατωτέρω, γίνεται πάντοτε χρῆσις δεδομένων τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν καὶ οὕτω δὲν παρεμβαίνει παρὰ ὁ δεσμευμένος νόμος πιθανότητος τῆς μεταβλητῆς Υ, διὰ τὸ ὡρισμένον ἑκάστοτε σύστημα τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν. Αὐτὴ ἄλλως τε εἶναι καὶ ἡ ἔννοια τῆς βεβαιότητος, ἡ ὁποία προσεδόθη ἀνωτέρω (βλ. παραγρ. 3.2.2.) εἰς τὴν μεταβλητὴν Y_M καὶ διατυποῦται εἰς τὴν κάτωθι ὑπόθεσιν, ἀφορῶσαν τὰς ἑρμηνευτικὰς μεταβλητάς.

Ὑπόθεσις 1. ***Αἱ τιμαὶ τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν εἶναι ὡρισμέναι εἰς ἑκάστην δοκιμὴν τοῦ πειράματος.***

Ἡ ὑπόθεσις αὕτη σημαίνει ὅτι ἡ μεταβλητὴ U εἶναι ἡ μόνη πηγὴ μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῆς Υ, κατὰ τὴν διάρκειαν ἐπαναλήψεων τοῦ πειράματος μὲ τὸ αὐτὸ $\vec{x}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ κάτωθι ὑπόθεσις, ἀφορῶσα τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν U.

Ὑπόθεσις 2: ***Ἡ τυχαία μεταβλητὴ U ἔχει μηδενικὴν μαθηματικὴν ἐλπίδα, ἤτοι*** $E\{U\} = 0$.

Τότε ἐκ τῆς (9) θὰ ἔχωμεν:

$$E_{\vec{x}}(Y) = E\{Y / \vec{X} = \vec{x}\} = \beta_0 + \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_\kappa x^\kappa = y_M \qquad (12)$$

Οὕτω, τοῦ $\vec{x}$ μεταβαλλομένου, ὁ τόπος τῶν σημείων $[\vec{x}, E_{\vec{x}}(Y) = y_M]$, εἶναι ἐν προκειμένῳ (βλ. καὶ παραγρ. 2.3.2) τὸ «ὑπερεπίπεδον παλινδρομήσεως» τῆς μεταβλητῆς Υ, ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν X^j, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$, ἔχον ὡς ἐξίσωσιν τὴν (11).

3.2.4. Ἡ γενομένη ἤδη ὑπόθεσις 2 ὁδηγεῖ εἰς μίαν πρώτην γνωριμίαν τῆς φύσεως τῆς τυχαίας μεταβλητῆς U καὶ εἰς μίαν πρώτην ἀξιολόγησιν τοῦ ὑποδείγματος (9), διὰ τὴν ἑρμηνείαν τῆς μεταβλητῆς Υ. Ἡ ὑπόθεσις 2 ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι αἱ ἐπὶ τῆς μεταβλητῆς Υ ἐπιδράσεις τῶν ἐπὶ μέρους μὴ εἰσαχθέντων εἰς τὸ ὑπόδειγμα, ὑπὸ μορφὴν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν, παραγόντων, οἱ ὁποῖοι συνιστοῦν τὴν U, ἀναιροῦν ἀλλήλους, ἤ, ἄλλως, ὅτι τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων ἀπὸ τοῦ κέντρου παλινδρομήσεως y_M, ἀντιστοιχοῦντος εἰς δεδομένον σύστημα τιμῶν x^j τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν X^j, ἑνὸς μεγάλου (ἀπείρου) ἀριθμοῦ παρατηρήσεων y, διὰ τὸ αὐτὸ σύστημα τιμῶν x^j, εἶναι ἴσον πρὸς μηδέν. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ὑπερεπίπεδον παλινδρομήσεως τῆς Y ὀφείλει νὰ διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου τοῦ νέφους τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα παριστοῦν τὸ σύνολον τῶν δυναμένων νὰ προκύψουν τιμῶν y αὐτῆς, ἐξ ἐπανειλημμένων παρατηρήσεων, ὑπὸ τὸ αὐτὸ σύστημα τιμῶν x^j τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν.

Οὕτω, τὸ ὑπερεπίπεδον (11) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἑρμηνεῦον τὸν σχηματισμὸν τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου, χωρὶς νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ μεταβλητὴ U, ἡ ὁποία ἐνσωματώνει τὸ σύνολον τῶν πολυαρίθμων παραγόντων, συνεπαγομένων ἀλληλοσυμψηφιζόμενα ἀποτελέσματα ἐπὶ τῆς Y. Δηλαδὴ ἡ U ἀγνοεῖται ὡς συντελεστικὸς παράγων τῆς μεταβολῆς τῆς Y. Ἐν τούτοις, δὲν παύει νὰ εἶναι ἓν ἐκ τῶν κυριωτέρων στοιχείων τοῦ ὑποδείγματος, διότι, ἐκτὸς τῶν ἄλλων, ἀποτελεῖ ἕνα μέτρον τῆς ἀποτελεσματικότητός του διὰ τὴν ἑρμηνείαν τοῦ ὑπὸ μελέτην φαινομένου. Ἰδιαιτέρα μελέτη τῆς κατανομῆς τῆς μεταβλητῆς U θὰ γίνῃ εἰς τὸ Δεύτερον Μέρος τῆς παρούσης ἀναλύσεως.

3.3. Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος ἐκ τοῦ πειραματισμοῦ

3.3.1. Εἰς ἕνα πείραμα, εἰς τὸ ὁποῖον εἰσέρχονται κ+1 μεταβληταὶ προσαρμόζομεν τὸ σύνολον [1] τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $(Y, X^1, X^2, \ldots, X^\kappa)$. Ἐκτελοῦμεν n δοκιμὰς καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ σύνολον τῶν τιμῶν:

$$(y_i, x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^\kappa), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ἡ μελετωμένη μεταβλητὴ Y τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X^1 + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_\kappa X^\kappa + U$$

ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ἐὰν $Y_M = E_{\vec{x}}(Y)$,

$$Y_M = \beta_0 + \beta_1 X^1 + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_\kappa X^\kappa \qquad (10')$$

Ζητεῖται ὅπως, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀριθμητικῶν δεδομένων τοῦ πειράματος, ἐκτιμηθοῦν αἱ παράμετροι β_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, \kappa$, ὡς καὶ ὡρισμένα χαρακτηριστικὰ τῆς κατανομῆς τῆς τυχαίας μεταβλητῆς U.

3.3.2. Σχετικῶς πρὸς τὰς συνθήκας τοῦ πειραματισμοῦ, δηλαδὴ σχετικῶς πρὸς τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας δύνανται νὰ προκύψουν τὰ σύνολα τῶν πειραματικῶν δεδομένων, τὰ κάτωθι δύο σχήματα εἶναι δυνατά:

---

1) Ἀκριβέστερον, εἰς ἑκάστην δοκιμὴν τοῦ πειράματος, ἔστω τὴν δοκιμὴν τάξεως i, προσαρμόζεται τὸ σύνολον τῶν τυχαίων μεταβλητῶν $(Y_i, X_i^1, X_i^2, \ldots, X_i^\kappa)$, λαμβάνον τὰς τιμὰς $(y_i, x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^\kappa)$.

α) Ἀποδίδεται ὡρισμένον σύστημα τιμῶν εἰς τὰς μεταβλητὰς X^j, ἤτοι αἱ συγκεκριμέναι τιμαὶ x_i^j, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$ καὶ καταγράφεται ἡ προκύπτουσα ἐκ τοῦ πειράματος τιμὴ y_i τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ μεταβλητὴ Y. Τοῦτο ἐπαναλαμβάνεται n φορὰς καί, οὕτω, ἔχομεν ἓν σύνολον n συστημάτων τιμῶν.

Παράδειγμα 1. Ἁπλοῦν παράδειγμα τοιούτου σχήματος εἶναι τὸ ἑξῆς (βλ. [3]). Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μελετήσωμεν τὴν ἀπόστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀκινητοποιεῖται ἓν αὐτοκίνητον μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ ὁδηγοῦ τροχοπέδησίν του. Ἡ ἀπόστασις αὕτη θεωρεῖται, πρὸς ἁπλούστευσιν, συνάρτησις τῆς ταχύτητος, ὡς μόνης ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς.Οἱ λοιποὶ ἐπιδρῶντες ἑκάστοτε παράγοντες, ὡς, π.χ., τὸ ἀνώμαλον ἢ μὴ τοῦ καταστρώματος τῆς ὁδοῦ, τὸ εἶδος τῶν φρένων, ἡ παλαιότης αὐτῶν, ἡ ταχύτης ἐνεργείας τοῦ ὁδηγοῦ, κλπ., δὲν ἐξετάζονται ἐνταῦθα ὡς ἰδιαίτεραι ἑρμηνευτικαὶ μεταβληταὶ καὶ θεωροῦνται ὅτι συνιστοῦν, ἐν τῷ συνόλῳ των, τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν U εἰς τὸ ὑπόδειγμα:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + U.$$

Ἐπιβάλλεται εἰς τὸν ὁδηγὸν ὡρισμένη ἑκάστοτε ταχύτης x_i, δίδεται ἐντολὴ τροχοπεδήσεως τοῦ αὐτοκινήτου καὶ μετρᾶται ἡ μετὰ ταύτην διανυθεῖσα ἀπόστασις y_i, μέχρι τῆς ἀκινητοποιήσεώς του. Ὁ πειραματισμὸς ἐπαναλαμβάνεται εἰς n δοκιμάς, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουν τὰ δεδομένα (y_i, x_i), $i=1, 2, \ldots, n$, τὰ ὁποῖα θὰ χρησιμοποιηθοῦν περαιτέρω διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων β_j, $j=0, 1$.

β) Αἱ X^j θεωροῦνται τυχαῖαι μεταβληταὶ ὡς καὶ ἡ Y. Τότε ἐκ τῆς δοκιμῆς i τάξεως τοῦ πειράματος προκύπτουν αὐτομάτως αἱ τιμαὶ τῶν κ+1 τυχαίων μεταβλητῶν, δηλαδὴ αἱ :

$$[\, y_i, \; x_i^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, \kappa \,]$$

ὡς τυχαῖον δεῖγμα τῶν ἀντιστοίχων μεταβλητῶν Y καὶ X^j.

Παράδειγμα 1. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμά μας, δὲν ἐπιβάλλεται τώρα εἰς τὸν ὁδηγὸν ὡρισμένη ταχύτης. Ἀφίνεται νὰ τρέχῃ κατὰ βούλησιν, εἰς μίαν δὲ στιγμὴν τοῦ χρόνου δίδεται ἡ ἐντολὴ τῆς τροχοπεδήσεως τοῦ ὀχήματος καὶ μετρᾶται, ἐκτὸς τῆς ἀποστάσεως μέχρις ἀκινητοποιήσεώς του, ὡς προηγουμένως, καὶ ἡ ταχύτης, τὴν ὁποίαν εἶχεν ἀναπτύξει κατὰ τὸν χρόνον τῆς τροχοπεδήσεως.

Τὸ σχῆμα τοῦτο ἀναλογεῖ εἰς τὸ πλεῖστον τῶν οἰκονομετρικῶν προβλημάτων, ὅπου οἱ ἐλεγχόμενοι πειραματισμοί, τοῦ προηγουμένου σχήματος εἶναι συνήθως ἀδύνατοι.

Παράδειγμα 2. Πρὸς μελέτην τῆς δαπάνης καταναλώσεως κρέατος ὑπὸ τῶν νοικοκυριῶν, συναρτήσει τοῦ εἰσοδήματός των, ἐπιλέγονται τυχαίως νοικοκυριὰ καὶ μετρᾶται, δι' ἕκαστον, τόσον ἡ δαπάνη καταναλώσεως κρέατος (τιμὴ τῆς ἐξηρτημένης μεταβλητῆς) ὅσον καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰσοδήματός του (τιμὴ τῆς ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς). Τὰ ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεων τούτων, ἐπὶ διαφορετικῶν νοικοκυριῶν, δύνανται βεβαίως νὰ θεωρηθοῦν ὡς προερχόμενα ἐκ πειραματικῶν δοκιμῶν ἐπὶ τοῦ ἰδίου φαινομένου (συμπεριφορὰ τοῦ νοικοκυριοῦ ὡρισμένου τύπου, ὡς πρὸς τὴν κατανάλωσιν κρέατος), ὑπὸ τὴν παραδοχὴν ὅτι αἱ διαφοραὶ εἰς τὴν συμπεριφορὰν διαφόρων νοικοκυριῶν ἀποδίδονται ἀποκλειστικῶς εἰς ἀναλόγους διαφορὰς τῶν εἰσοδημάτων των. Ἡ προσέγγισις τῆς ὑποθέσεως ταύτης εἰς τὴν πρᾶξιν ἀποτελεῖ σημαντικὸν πρόβλημα τῆς οἰκονομετρικῆς ἀναλύσεως, τὸ ὁποῖον ἐκφεύγει τῶν σκοπῶν τῆς παρούσης ἐργασίας.

Τὸ σχῆμα (β) ἀνάγεται εἰς τὸ σχῆμα (α). διὰ τῆς κάτωθι συμπληρωματικῆς ὑποθέσεως (βλ. καὶ παρατηρ. 1 τῆς παραγρ. 6.2.).

Ὑ π ό θ ε σ ι ς 3. Ἡ μεταβλητὴ **U** *καὶ αἱ ἑρμηνευτικαὶ μεταβληταὶ* $\mathbf{X}^j$, *ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὴν αὐτὴν δοκιμὴν ἢ διαφόρους δοκιμὰς τοῦ πειράματος, εἶναι μεταξύ των ἀνεξάρτητοι.*

3.3.3. Ἡ θέσις τοῦ ὑπερεπιπέδου (11) δὲν εἶναι γνωστή, διότι εἶναι ἄγνωστοι οἱ συντελεσταὶ αὐτοῦ β_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, \kappa$. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ β_j^*, $j = 0, 1, 2, \ldots, \kappa$ τὰς ἐκτιμήσεις αὐτῶν [1], ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τοῦ πειραματισμοῦ καὶ τῆς μεθόδου, ἡ ὁποία θὰ ἐκτεθῇ κατωτέρω, τότε ἡ ἄγνωστος θέσις τοῦ ὑπερεπιπέδου (11) θὰ ἐκτιμηθῇ διὰ τῆς θέσεως τοῦ ὑπερεπιπέδου :

$$y_M^* = \beta_0^* + \beta_1^* x^1 + \beta_2^* x^2 + \ldots + \beta_\kappa^* x^\kappa \tag{10''}$$

Θὰ λαμβάνεται δὲ τότε, διὰ τὴν Y, ἀντιστοίχως πρὸς τὰς (9) καὶ (9'), ἡ ἔκφρασις

$$Y = \beta_0^* + \beta_1^* X^1 + \beta_2^* X^2 + \ldots + \beta_\kappa^* X^\kappa + U^* = Y_M^* + U^* \tag{9''}$$

Παράδειγμα 1. Εἰς περίπτωσιν δύο διαστάσεων, ἡ μεταβλητὴ Y προσδιορίζεται ἐκ μιᾶς μόνης ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς, τῆς X. Ἡ ἄγνωστος «εὐθεῖα παλινδρομήσεως» τῆς Y ὡς πρὸς X (βλ. Σχ. 7), θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$y_M = \beta_0 + \beta_1 x \tag{13}$$

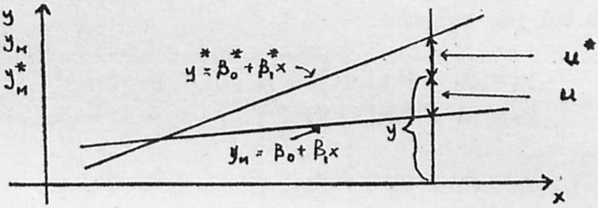
ἡ ὁποία θὰ ἐκτιμᾶται διὰ τῆς :

$$y_M^* = \beta_0^* + \beta_1^* x. \tag{14}$$

1) Δι' ἀστερίσκου θὰ διακρίνωμεν γενικώτερον τὰς ἐκτιμήσεις τῶν μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα παρίστανται διὰ τῶν ἄνευ ἀστερίσκου συμβόλων.

Θὰ ἔχωμεν τότε ὡς ἐκτίμησιν τῆς ἀγνώστου ἐξαρτήσεως τὴν

$$Y = \beta_0^* + \beta_1^* X + U^* \tag{15}$$



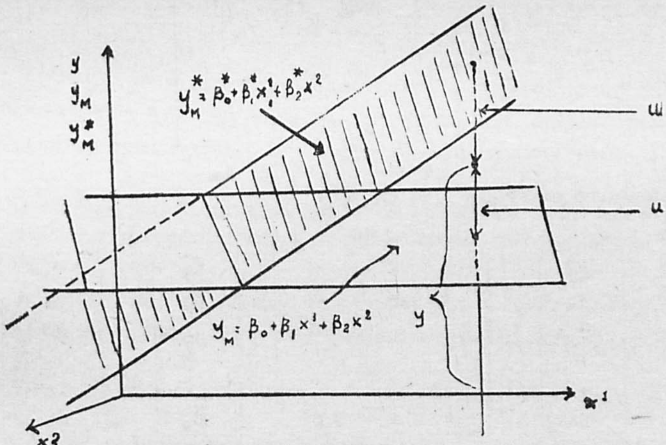
Σχ. 7

Παράδειγμα 2. Εἰς τὴν περίπτωσιν τριῶν διαστάσεων, θὰ ἔχωμεν, (βλ. καὶ σχ. 8) τὸ «ἐπίπεδον παλινδρομήσεως», τοῦ ὁποίου ἡ ἐξίσωσις :

$$y_M = \beta_0 + \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2$$

εἶναι ἄγνωστος καὶ ἐκτιμᾶται διὰ τῆς ἐξισώσεως :

$$y_M^* = \beta_0^* + \beta_1^* x^1 + \beta_2^* x^2$$



Σχ. 8

Θὰ ἔχωμεν τότε ὡς ἐκτίμησιν τῆς ζητουμένης ἐξαρτήσεως τὴν

$$Y = \beta_0^* + \beta_1^* X^1 + \beta_2^* X^2 + U^* \tag{18}$$

4. ΕΚΤΙΜΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

4.1. Ἀλγεβρικὴ διατύπωσις τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος

4.1.1. Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, τὰ ἀποτελέσματα οἱασδήποτε δοκιμῆς τοῦ πειράματος, ἔστω τῆς i, θὰ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^1 + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_\kappa x_i^\kappa + u_i ,$$

καί, ὡς ἐκ τούτου, τὸ σύνολον τῶν πειραματικῶν δεδομένων (βλ. παραγ. 3.3.1) θὰ συνδέεται διὰ τῶν σχέσεων :

$$\begin{array}{l} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1^1 + \beta_2 x_1^2 + \ldots + \beta_\kappa x_1^\kappa + u_1 \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2^1 + \beta_2 x_2^2 + \ldots + \beta_\kappa x_2^\kappa + u_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n^1 + \beta_2 x_n^2 + \ldots + \beta_\kappa x_n^\kappa + u_n \end{array} \tag{19}$$

Θεωροῦντες τώρα τὰ διανύσματα :

$$\vec{y}\,(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Pi^n, \qquad \vec{\beta}\,(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\kappa) \in \Pi^{\kappa+1},$$

$$\vec{u}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \Pi^n$$

καὶ τὴν μήτραν :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 \ldots x_1^\kappa \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 \ldots x_2^\kappa \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 \ldots x_n^\kappa \end{bmatrix},$$

θὰ γράφωμεν τὸ σύστημα (19) ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 \ldots x_1^\kappa \\ 1 & x_2^1 \ldots x_2^\kappa \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ 1 & x_n^1 \ldots x_n^\kappa \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\kappa \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} \tag{19'}$$

ἤ, συντομώτερον :

$$\vec{y} = \mathbf{x}\,\vec{\beta} + \vec{u}$$

Τὸν χῶρον Π^n, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκουν τὰ διανύσματα $\vec{y}$, $\vec{u}$, θὰ καλοῦμεν χῶρον τῶν παρατηρήσεων καὶ τὸν χῶρον $\Pi^{\kappa+1}$, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ διάνυσμα $\vec{\beta}$, θὰ καλοῦμεν χῶρον τῶν παραμέτρων.

4.1.2. Τὸ σύνολον τῶν πειραματικῶν δεδομένων (y_i, x_i^1, x_i^2, . . . , x_i^κ) συνιστᾷ εἰδικὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν ἀντιστοίχων μεταβλητῶν (Y_i, X_i^1, X_i^2, ..., X_i^κ), αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν προσηρτημέναι εἰς τὴν δοκιμὴν τοῦ πειράματος τάξεως i [1]. Ἀλλὰ εἰς μίαν ἐπανάληψιν τῆς δοκιμῆς διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^\kappa)$ τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν, ἡ μεταβλητὴ Y_i θὰ λάβῃ ἐν γένει ἄλλην τιμήν. Οὕτω, ἡ Y_i εἶναι τυχαία μεταβλητὴ ὁριζομένη διὰ τῆς

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i^1 + \beta_2 x_i^2 + \ldots + \beta_\kappa x_i^\kappa + U_i$$

Ἐπαναλαμβάνοντες τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς καὶ τὴν διαδικασίαν τῶν (19) καὶ (19'), καταλήγομεν εἰς τήν :

$$\vec{Y} = \mathbf{x}\vec{\beta} + \vec{U}$$

ἔνθα $\vec{Y}$ καὶ $\vec{U}$ εἶναι τυχαῖα διανύσματα, τῶν ὁποίων τιμαὶ εἶναι τὰ $\vec{y}$ καὶ $\vec{u}$.

Ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς [2] τοῦ $\vec{Y}$, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἓν ὡρισμένον διάνυσμα τοῦ χώρου Π^n, θὰ σημειοῦται μὲ $\vec{y}_M$, καὶ θὰ ἔχωμεν, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ὑποθέσεις 1 καὶ 2,

$$E\{\vec{Y}\} = \vec{y}_M = \mathbf{x}\vec{\beta} \tag{20}$$

Τότε θὰ εἶναι ἀκόμη :

$$\vec{Y} = \vec{y}_M + \vec{U} \tag{20'}$$

4.1.3. Ἡ μήτρα $\mathbf{x}$ ἔχει n γραμμὰς καὶ $\kappa + 1$ στῆλας καὶ ἑπομένως δυνάμεθα δι' αὐτῆς νὰ ἀπεικονίσωμεν [3] τὸ χῶρον τῶν παραμέτρων $\Pi^{\kappa+1}$ εἰς τὸν χῶρον τῶν παρατηρήσεων Π^n. Κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην, τὴν ὁποίαν

---

1) Ὁ σταθερὸς ὅρος β_0 θεωρεῖται ἐπίσης ὡς συντελεστὴς ὑποθετικῆς μεταβλητῆς x^0, ἡ ὁποία λαμβάνει σταθερῶς τὴν τιμὴν 1 εἰς πᾶσαν δοκιμὴν τοῦ πειράματος, ἤτοι $x_i^0 = 1$, δι' οἱονδήποτε i.

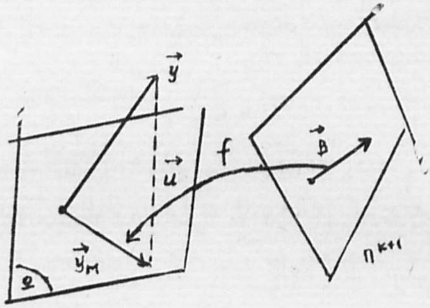
2) Ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τυχαίου διανύσματος $\vec{Y}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\rho)$ ἔχει συντεταγμένας προβολὰς τὰς μαθηματικὰς ἐλπίδας τῶν συντεταγμένων προβολῶν, δηλαδὴ ἡ $E(\vec{Y})$ ἔχει συντεταγμένας προβολὰς τὰς $E(Y_1), E(Y_2), \ldots, E(Y_\rho)$.

3) Γενικῶς τῇ βοηθείᾳ μιᾶς μήτρας $\underset{(\mu,\nu)}{A}$ ἀπεικονίζεται εἰς χῶρος ν διαστάσεων K^ν εἰς ἕνα χῶρον μ διαστάσεων R^μ. Πράγματι, ἐὰν $\vec{\zeta} \in K^\nu$, τότε ἡ *«εἰκὼν»* τοῦ $\vec{\zeta}$ θὰ εἶναι ἓν διάνυσμα $\vec{\xi} \in R^\mu$, τὸ ὁποῖον θὰ δίδεται ἐκ τῆς $\vec{\xi} = \underset{(\mu,\nu)}{A}\vec{\zeta}$. Τὸ $\vec{\zeta}$ καλεῖται καὶ *«πρότυπον»* τοῦ $\vec{\xi}$ Τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων θὰ εἶναι εἷς ὑποχῶρος τοῦ R^μ, ὁ ὁποῖος σημειοῦται, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ f τὴν ἀπεικόνισιν, $f(K^\nu)$. Τὸ $\vec{\xi}$ δὲν εἶναι ἐν γένει εἰκὼν μόνον τοῦ $\vec{\zeta}$, ἀλλὰ ἑνὸς συνόλου διανυσμάτων $\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \vec{\zeta}_3 \ldots$ τοῦ K^ν. Ἐὰν ἕκαστον διάνυσμα τοῦ $f(K^\nu)$ εἶναι εἰκὼν μόνον ἑνὸς διανύσματος τοῦ χώρου K^ν, τότε ἡ ἀπεικόνισις καλεῖται *«ἀμφιμονοσήμαντος»*. Διὰ νὰ εἶναι μιὰ ἀπεικόνισις ἀμφιμονοσήμαντος, πρέπει ὁ ὑποχῶρος $f(K^\nu)$ νὰ εἶναι ἐπίσης ν διαστάσεων, δηλαδὴ πρέπει $\nu \leqslant \mu$ καὶ διασ. $f(K^\nu) = \nu$. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν ἡ μήτρα $\underset{(\mu,\nu)}{A}$ εἶναι ν τάξεως. Τότε ὁρίζεται καὶ ἡ ἀντίστροφος ἀπεικόνισις, ἡ ὁποία σημειοῦται μὲ f_{-1} καὶ θὰ ἔχωμεν : $\vec{\zeta} = f^{-1}(\vec{\xi})$.

Ὡς παράδειγμα μὴ ἀμφιμονοσημάντου ἀπεικονίσεως ἀναφέρεται ἡ ἀπεικόνισις ἐκείνη θὰ ὀνομάσωμεν f, τὸ $\vec{y}_M$ ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (20), εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ $\vec{\beta}$, δηλαδή :

$$\vec{y}_M = f(\vec{\beta})$$

Ἐν γένει ὅμως τὸ $\vec{y}_M$ δὲν εἶναι εἰκὼν μόνον τοῦ $\vec{\beta}$, ἀλλὰ ἐνδεχομένως εἶναι εἰκὼν καὶ ἄλλων διανυσμάτων τοῦ $\Pi^{\kappa+1}$. Τὸ $\vec{y}_M$ θὰ εἶναι εἰκὼν μόνον



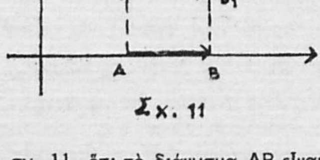
Σχ. 9

τοῦ $\vec{\beta}$, ἐφ' ὅσον ἡ ἀπεικόνισις αὕτη f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Τότε θὰ ὁρίζεται ἡ ἀντίστροφος ἀπεικόνισις f^{-1} καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{\beta} = f^{-1}(\vec{y}_M)$$

Εἰς τὸ πρόβλημά μας ἐνδιαφερόμεθα ἰδιαιτέρως διὰ τὸ ἀμφιμονοσήμαντον τῆς f, διότι θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον $\vec{\beta}$, ὡς πρότυπον (ἀντίστροφον εἰκόνα)

τοῦ ἐπιπέδου xoy (χῶρος Π^2) εἰς τὸν ἄξονα x (χῶρος Π^1), κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς κάθε διάνυσμα τοῦ Π^2 ἀντιστοιχοῦμεν τὴν προβολήν του ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox.



Σχ. 11

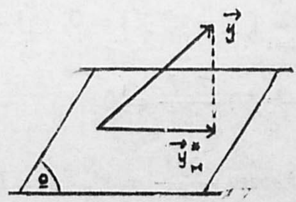
Εἶναι προφανὲς εἰς τὸ σχ. 11, ὅτι τὸ διάνυσμα AB εἶναι εἰκὼν ἀπειρίας διανυσμάτων τοῦ χώρου τῶν δύο διαστάσεων, ὡς τῶν A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... Τοὐναντίον, ἐὰν ἀπεικονίσωμεν τὴ εὐθεῖαν ΓΔ (χῶρος Π^1) εἰς τὸν ἄξονα ox (χῶρος Π^1), εἰς τρόπον ὥστε εἰς κάθε διάνυσμα τῆς ΓΔ νὰ ἀντιστοιχοῦμεν τὴν προβολήν του εἰς τὸν ox, τότε ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

τοῦ $\vec{y}_M$. Ἀλλὰ ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ὅταν ὁ ὑποχῶρος $\Omega = f(\Pi^{\kappa+1})$ εἶναι καὶ αὐτὸς $\kappa+1$ διαστάσεων, δηλαδὴ ὅταν ἡ μήτρα εἶναι $\kappa+1$ τάξεως. Οὕτω, πρέπει νὰ δεχθῶμεν τὴν ὑπόθεσιν:

Ὑπόθεσις 4. Ἡ μήτρα $\mathbf{x}$ *εἶναι τάξεως* $\kappa+1$, *καὶ* $\kappa+1 \leqslant n$

Συνέπεια τῆς ὑποθέσεως ταύτης εἶναι ὅτι τὰ $\kappa+1$ διανύσματα - στῆλαι τῆς $\mathbf{x}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

4.1.4. Δοθέντων τῶν πειραματικῶν δεδομένων $(y_i, x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^\kappa)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ σχηματίζομεν τὴν μήτρα $\mathbf{x}$, ἡ ὁποία ἔστω ὅτι πληροῖ τὴν ὑπόθεσιν 4. Γνωρίζομεν ἐπίσης τὸ $\vec{y}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ καὶ ζητοῦμεν $\vec{\beta}$, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρεθῇ ὡς πρότυπον (ἀντίστροφος εἰκὼν) τοῦ $\vec{y}_M$. Ἀλλὰ οὔτε τὸ $\vec{y}_M$ μᾶς εἶναι γνωστόν. Πράγματι, τὸ $\vec{y}_M$ εἶναι ἡ μαθηματικὴ ἐλπὶς τοῦ τυχαίου διανύσματος $\vec{Y}$, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν μόνον τὴν τιμὴν $\vec{y}$. Οὕτω, τίθεται ἤδη θέμα ἐκτιμήσεως τοῦ $\vec{y}_M$. Δηλαδὴ θὰ ζητήσωμεν μίαν «*ἐκτίμησιν*» $\vec{y}_M^*$ τοῦ $\vec{y}_M$ καὶ τὴν ἀντίστροφον εἰκόνα αὐτοῦ τοῦ $\vec{y}_M^*$, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἓν διάνυ-



Σχ. 10

σμα, ἔστω $\vec{\beta}^*$, τοῦ $\Pi^{\kappa+1}$, ποὺ θὰ λάβωμεν ὡς ἐκτίμησιν τοῦ ζητουμένου $\vec{\beta}$. Τίθεται ὅμως τὸ ἐρώτημα: Ποῖον διάνυσμα θὰ λάβωμεν ὡς ἐκτίμησιν τοῦ $\vec{y}_M$; Κατ' ἀρχὴν ἀφοῦ τὸ $\vec{y}_M$ κεῖται ἐντὸς τοῦ $\Omega = f(\Pi^{\kappa+1})$ πρέπει καὶ ἡ ἐκτίμησίς του $\vec{y}_M^*$ νὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ Ω. Εἶναι δὲ λογικὸν νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν διανυσμάτων τοῦ Ω, τὸ «πλησιέστερον» πρὸς τὸ γνωστὸν διάνυσμα $\vec{y}$, δηλαδὴ νὰ λάβωμεν τὸ $\vec{y}_M^*$ τοῦ Ω, τοιοῦτον ὥστε τὸ διάνυσμα $\vec{y} - \vec{y}_M^*$ νὰ ἔχῃ μέτρον ἐλάχιστον. Τότε ὅμως τὸ $\vec{y} - \vec{y}_M^*$ θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸν Ω, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ $\vec{y}_M^*$ θὰ εἶναι ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ $\vec{y}$, εἰς τὸν χῶρον Ω.

4,2. Ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\kappa$

4.2.1. Ἐλέχθη ὅτι τὸ y_M^* θὰ ληφθῇ ἐντὸς τοῦ Ω, ἄρα θὰ εἶναι εἰκὼν ἑνὸς $\beta^* \in \Pi^{\kappa+1}$ ὁριζομένου διὰ τῆς :

$$\vec{y}_M^* = \mathbf{x}\,\vec{\beta}^* \tag{21}$$

Τὸ $\vec{\beta}^*$ θὰ ληφθῇ ὡς ἐκτίμησις τοῦ $\vec{\beta}$. Ἐὰν θέσωμεν $y_M^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ καὶ $\vec{\beta}^* (\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_\kappa^*)$, τότε τὰ β_j^*, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$ θὰ ὁρισθοῦν ἐκ τῆς (21), δηλαδὴ ἐκ τῶν :

$$y_i^* = \beta_0^* x_i^0 + \beta_1^* x_i^1 + \ldots + \beta_\kappa^* x_i^\kappa, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{21'}$$

ἔνθα, ὑπενθυμίζεται, $x_i^0 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ὡς ἀνεφέρθη ἐπίσης τὸ $\vec{y}_M^*$ θὰ ληφθῇ καὶ τοιοῦτον ὥστε $|\vec{y} - \vec{y}_M^*| = \min$. Τότε ὅμως :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0^* x_i^0 - \beta_1^* x_i^1 - \ldots - \beta_\kappa^* x_i^\kappa) = \min. \tag{22}$$

4.2.2. Οὕτω τὰ β_j^* θὰ ὁρισθοῦν ἐκ τοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει διὰ μηδενισμοῦ τῶν παραγώγων τῆς (22), ὡς πρὸς β_j, δηλαδὴ ἐκ τοῦ : (1)

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 \right\} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \kappa. \tag{23}$$

ἢ $$2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*) \frac{\partial y_i^*}{\partial \beta_j^*} = 0$$

Ἀλλὰ ἐκ τῆς (21), ἔχομεν $\dfrac{\partial y_i^*}{\partial \beta_j^*} = x_i^j$, $j = 0, 1, \ldots, \kappa$. Οὕτω :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)\, x_i^j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^* x_i^j = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \kappa.$$

Αἱ τελευταῖαι αὗται γράφονται ἀναλυτικῶς (ἐὰν ἐπαναθέσωμεν $x_i^0 = 1$)

$$\begin{aligned}
&y_1^* + y_2^* + \ldots + y_n^* = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \\
&y_1^* x_1^1 + y_2^* x_2^1 + \ldots + y_n^* x_n^1 = y_1 x_1^1 + y_2 x_2^1 + \ldots + y_n x_n^1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_1^* x_1^\kappa + y_2^* x_2^\kappa + \ldots + y_n^* x_n^\kappa = y_1 x_1^\kappa + y_2 x_2^\kappa + \ldots\ y_n x_n^\kappa
\end{aligned}$$

1) Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Τὸ σύστημα τοῦτο καλεῖται σύστημα κανονικῶν ἐξισώσεων καὶ γράφεται διὰ τῶν μητρῶν:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \dots & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 \dots & x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^\kappa & x_2^\kappa \dots & x_n^\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \dots & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 \dots & x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^\kappa & x_2^\kappa \dots & x_n^\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

ἤ, συντομώτερον:

$$\mathbf{x}'\,\vec{y}_M^* = \mathbf{x}'\,\vec{y}$$

ἤ, λόγῳ τῆς (21):

$$\mathbf{x}'\mathbf{x}\,\vec{\beta}^* = \mathbf{x}'\,\vec{y}$$

Τὸ γινόμενον $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ εἶναι μία τετραγωγικὴ συμμετρικὴ μήτρα μὲ $\kappa+1$ γραμμὰς καὶ στήλας, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν $\mathbf{S}$, δηλαδή:

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}'\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \dots & 1 \\ x_1^1 & x_2^1 \dots & x_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^\kappa & x_2^\kappa \dots & x_n^\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 \dots & x_1^\kappa \\ 1 & x_2^1 \dots & x_2^\kappa \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n^1 \dots & x_n^\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i^1 & \sum_i x_i^2 \dots & \sum_i x_i^\kappa \\ \sum_i x_i^1 & \sum_i (x_i^1)^2 & \sum_i x_i^1 x_i^2 \dots & \sum_i x_i^1 x_i^\kappa \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_i x_i^\kappa & \sum_i x_i^\kappa x_i^1 & \sum_i x_i^\kappa x_i^2 \dots & \sum_i (x_i^\kappa)^2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Θὰ ἔχωμεν οὕτω:

$$\mathbf{S}\,\vec{\beta}^* = \mathbf{x}'\,\vec{y}$$

καὶ τελικῶς:

$$\boxed{\vec{\beta}^* = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{x}'\,\vec{y}} \tag{25}$$

4.2.3. ***Ἀνακεφαλαίωσις***: Ἔχοντες τὰ πειραματικὰ δεδομένα,

$$(y_i,\ x_i^1,\ x_i^2, \dots, x_i^\kappa), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς, προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπερεπίπεδον παλινδρομήσεως τῆς Y ὡς πρὸς X^j, $j = 1, 2, \dots, \kappa$. Θέτομεν

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 \dots & x_1^\kappa \\ 1 & x_2^1 \dots & x_2^\kappa \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n^1 \dots & x_n^\kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{x}'\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}'\vec{y} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i^1 y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_i x_i^\kappa y_i \end{bmatrix}$$

Τότε τὰ β_j ὁρίζονται ἐκ τῆς :

$$\begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\kappa^* \end{bmatrix} = [\,\mathbf{S}^{-1}\,] \begin{bmatrix} \sum\limits_i y_i \\ \sum\limits_i x_i^1 y_i \\ \sum\limits_i x_i^2 y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum\limits_i x_i^\kappa y_i \end{bmatrix}, \tag{25'}$$

καὶ τὸ ἐπίπεδον παλινδρομήσεως θὰ δίδεται διὰ τῆς ἐξισώσεως :

$$y = \beta_0^* + \beta_1^* x^1 + \beta_2^* x^2 + \ldots + \beta_\kappa^* x^\kappa \tag{26}$$

4.2.4. Αἱ ἀπαιτούμεναι ὡς ἄνω ἀριθμητικαὶ πράξεις, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν β_j^* εἶναι ἤδη ἐπίπονοι, δυσκολεύονται δὲ περαιτέρω, εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας οἱ ἀριθμοὶ y_i καὶ x_i^j εἶναι μεγάλοι. Αἱ ἐκτιθέμεναι κατωτέρω δυναταὶ παραλλαγαὶ τῆς μεθόδου ἔχουν ὡς σκοπὸν ἀκριβῶς τὴν σμίκρυνσιν τῶν ἀριθμῶν, πρὸς ἐλάφρυνσιν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων. Εἰς ἄλλην παράγραφον (βλ. § 5) γίνεται τυποποίησις τῶν σχετικῶν πρὸς τὸ ὑπόδειγμα ἀριθμητικῶν πράξεων ἐν γένει, πρὸς διευκόλυνσίν των.

4.3. Πρώτη ἁπλοποίησις τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος

4.3.1. Θέτοντες νέας ἑρμηνευτικὰς μεταβλητάς :

$$Z^j = X^j - a^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, \kappa.$$

δηλαδὴ ἀφαιροῦντες ἐξ ὅλων τῶν τιμῶν $x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j$, τῆς ἰδίας μεταβλητῆς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν a^j, δυνάμεθα, κατὰ τὰ προηγούμενα, νὰ ἐκτιμήσωμεν τοὺς συντελεστὰς b_j , τοιούτους ὥστε νὰ ἔχωμεν :

$$Y = b_0 + b_1 Z^1 + b_2 Z^2 + \ldots + b^\kappa Z^\kappa + U$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν b_j^* , ἐκτιμητῶν τῶν b_j , εἶναι εὐχερέστερος, διότι αἱ τιμαὶ z_i^j τῶν Z^j εἶναι μικρότεραι τῶν x_i^j, ἐὰν ἐκλέξωμεν καταλλήλως τοὺς a^j.

4.3.2. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν b_0^* , b_1^* , b_2^* , . . . , b_κ^* κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον, θὰ ἔχωμεν, ἐπανερχόμενοι εἰς τὰς ἀρχικὰς μεταβλητάς,

$$Y = b_0^* + b_1^* (X^1 - a^1) + b_2^* (X^2 - a^2) + \ldots + b_\kappa^* (X^\kappa - a^\kappa) + U$$

ἢ $\quad Y = b_0^* - b_1^* a^1 - b_2^* a^2 - \ldots - b_\kappa^* a^\kappa + b_1^* X^1 + b_2^* X^2 + \ldots + b_\kappa^* X^\kappa + U$

ὅτε ἐκ τῆς συγκρίσεως μὲ τὴν (9'') προκύπτει ὅτι

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= b_1^* \\ \beta_2^* &= b_2^* \\ &\cdots\cdots \\ \beta_\kappa^* &= b_\kappa^* \\ \beta_0^* &= b_0^* - b_1^* a^1 - b_2^* a^2 - \ldots - b_\kappa^* a^\kappa \end{aligned} \tag{27}$$

δηλαδὴ πλὴν τοῦ σταθεροῦ ὅρου, ὁ ὁποῖος ἐπίσης δίδεται ἐξ ἁπλοῦ τύπου, οἱ εὑρεθέντες b_j^*, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$, εἶναι ἀκριβῶς οἱ ζητούμενοι β_j^*.

4.3.3. Συνήθως ὡς a^j λαμβάνομεν τὴν μέσην τιμὴν $\bar{x}^j$ τῶν τιμῶν τῆς X^j. Δηλαδὴ λαμβάνομεν:

$$a^j = \bar{x}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, \kappa.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ παριστῶμεν τὰς νέας ἑρμηνευτικὰς μεταβλητάς, ὄχι διὰ Z^j ἀλλά, διὰ $\mathring{X}^j$, ἤτοι:

$$\mathring{X}^j = X^j - \bar{x}^j$$

καὶ τὰς τιμὰς αὐτῶν διὰ $\mathring{x}_i^j = x_i^j - \bar{x}^j$. Οὕτω, αἱ ἐκτιμήσεις $(b_0^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_\kappa^*)$ τῶν συντελεστῶν $(b_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\kappa)$ τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος:

$$Y = b_0 + \beta_1 \mathring{X}^1 + \beta_2 \mathring{X}^2 + \ldots + \beta_\kappa \mathring{X}^\kappa + U \tag{28}$$

θὰ ὑπολογίζωνται, κατὰ τὸν γενικὸν τύπον (25), δηλαδή [1]:

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \hdashline \beta^* \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}' \vec{y}$$

Θέτομεν τώρα:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathring{x}_1^1 & \mathring{x}_1^2, \ldots, & \mathring{x}_1^\kappa \\ \mathring{x}_2^1 & \mathring{x}_2^2, \ldots, & \mathring{x}_2^\kappa \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathring{x}_n^1 & \mathring{x}_n^2, \ldots, & \mathring{x}_n^\kappa \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sum_i (\mathring{x}_i^1)^2 & \sum_i \mathring{x}_i^1 \mathring{x}_i^2 \ldots & \sum_i \mathring{x}_i^1 \mathring{x}_i^\kappa \\ \sum_i \mathring{x}_i^2 \mathring{x}_i^1 & \sum_i (\mathring{x}_i^2)^2 \ldots & \sum_i \mathring{x}_i^2 \mathring{x}_i^\kappa \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_i \mathring{x}_i^\kappa \mathring{x}_i^1 & \sum_i \mathring{x}_i^\kappa \mathring{x}_i^2 \ldots & \sum_i (\mathring{x}_i^\kappa)^2 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}' \dot{\mathbf{x}}$$

---

1) Τὸ σύμβολον $\begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \hdashline \beta^* \end{bmatrix}$ παριστᾷ τὸ διάνυσμα $(b_0, \beta_1^*, \ldots, \beta_\kappa^*)$ γραμμένον ὡς ἐπιμερισμένη μήτρα - στήλη. Εἰς τὰς μήτρας $\mathbf{S}$ καὶ $\mathbf{x}'$ τὰ στοιχεῖα x_i^j ἀντικαθίστανται ἐδῶ διὰ τῶν $\mathring{x}_i^j$.

Ἡ μήτρα $\dot{\mathbf{x}}$ ἔχει μόνον κ στήλας (δὲν περιέχει τὴν πρώτην στήλην τῶν μονάδων ὡς ἡ $\mathbf{x}$). Ἡ μήτρα $\mathbf{V}$ καλεῖται μήτρα [1] ῥοπῶν (ἢ μήτρα διακυμάτσεων καὶ συνδιακυμάνσεων). Παρατηροῦμεν ἀκόμη, ὅτι, λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν $\mathring{x}_i^j$, θὰ ἔχωμεν $\sum_i \mathring{x}_i^j = 0$. Οὕτω, ἡ μήτρα $\mathbf{S}$ θὰ γράφεται [2]:

$$S = [1 \,\vdots\, \dot{\mathbf{x}}]'[1 \,\vdots\, \dot{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} n & 0 \;\; 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \cdot & \mathbf{V} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \;\; 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \cdot & \mathbf{V}^{-1} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Θὰ ἔχωμεν ἐπομένως:

$$\begin{bmatrix} b_0^* \\ \beta_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\kappa^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \cdot & \\ \cdot & \mathbf{V}^{-1} \\ \cdot & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i \mathring{x}_i^1 y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_i \mathring{x}_i^\kappa y_i \end{bmatrix}$$

καὶ ἐξ αὐτῆς:

$$b_0^* = \frac{1}{n} \sum_i y_i = \bar{y}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\kappa^* \end{bmatrix} = [\mathbf{V}^{-1}] \begin{bmatrix} \sum_i \mathring{x}_i^1 y_i \\ \sum_i \mathring{x}_i^2 y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_i \mathring{x}_i^\kappa y_i \end{bmatrix} \tag{29}$$

---

1) Ὡς στοιχεῖα τῆς μήτρας V δύνανται νὰ ληφθοῦν καὶ αἱ ἐκφράσεις:

$$\frac{1}{n} \sum_i (\mathring{x}_i^j)^2, \qquad \frac{1}{n} \sum_i \mathring{x}_i^j \mathring{x}_i^\rho, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad j, \rho = 1, 2, \ldots, \kappa$$

ὅτε $\mathbf{V} = \frac{1}{n} \dot{\mathbf{x}}'\dot{\mathbf{x}}$ καὶ $\mathbf{V}^{-1} = n\,(\dot{\mathbf{x}}'\dot{\mathbf{x}})^{-1}$

2) Τὸ σύμβολον $[1 \,\vdots\, \mathbf{x}]$ παριστᾷ ἐπιμερισμένην μήτραν, τῆς ὁποίας ἡ πρώτη στήλη περιλαμβάνει μονάδας.

Δηλαδὴ ὡς ἐκτίμησις τοῦ σταθεροῦ ὅρου εἰς τὸ ὑπόδειγμα (28) θὰ λαμβάνεται ἡ μέση τιμὴ τῶν τιμῶν τῆς Y. Αἱ ἐκτιμήσεις β_j^* τῶν ἄλλων συντελεστῶν β_j θὰ δίδωνται ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (29). Αἱ (29) γράφονται συντομώτερον, ἐὰν θέσωμεν $\vec{\beta}^*(\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_\kappa^*)$:

$$b_0^* = \bar{y} \quad \text{καὶ} \quad \vec{\beta}^* = \mathbf{V}^{-1} \dot{\mathbf{x}}' \vec{y} \tag{30}$$

Ἤ, τελικῶς, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν (27):

$$\beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x}^1 - \beta_2^* \bar{x}^2 - \dots - \beta_\kappa^* \bar{x}^\kappa \quad \text{καὶ} \quad \vec{\beta}^* = V^{-1} \dot{\mathbf{x}}' \vec{y}, \tag{30'}$$

ὅτε τὸ ἐπίπεδον παλινδρομήσεως θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν:

$$y = (\bar{y} - \beta_1^* \bar{x}^1 - \beta_2^* \bar{x}^2 - \dots - \beta_\kappa^* \bar{x}^\kappa) + \beta_1^* x^1 + \beta_2^* x^2 + \dots + \beta_\kappa^* x^\kappa \tag{31}$$

Παρατήρησις 1. Εὑρέθη ὅτι $b_0^* = \bar{y}$. Τοῦτο εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ ὡς ἑξῆς: Διὰ προσθέσεως τῶν (21') καὶ διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματός των διὰ n προκύπτει:

$$\bar{y} = \beta_0^* + \beta_1^* \bar{x}^1 + \beta_2^* \bar{x}^2 + \dots + \beta_\kappa^* \bar{x}^\kappa \tag{32}$$

Ἀλλὰ ἐκ τῆς τελευταίας τῶν (27) ἔχομεν, διὰ $a^j = \bar{x}^j$:

$$b_0^* = \beta_0^* + \beta_1^* \bar{x}^1 + \beta_2^* \bar{x}^2 + \dots + \beta_\kappa^* \bar{x}^\kappa. \quad \text{Ἤτοι:} \quad b_0^* = \bar{y}$$

4.4. Δευτέρα ἁπλοποίησις τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος

4.4.1. Ἡ πρώτη ἁπλοποίησις σκοπὸν εἶχε τὴν σμίκρυνσιν τῶν τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν. Δυνάμεθα ὅμως νὰ μειώσωμεν ἐπίσης καὶ τὰς τιμὰς τῆς Y, ἀφαιροῦντες ἐξ αὐτῶν οἱονδήποτε ἀριθμὸν c. Οὕτω θέτομεν νέας μεταβλητάς, τάς:

$$W = Y - c, \quad Z^j = X^j - a^j, \quad j = 1, 2, \dots, \kappa.$$

καὶ ζητοῦμεν ἐκτιμήσεις τῶν συντελεστῶν b^j, οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ

$$W = b_0 + b_1 Z^1 + b_2 Z^2 + \dots + b_\kappa Z^\kappa + U.$$

Μετὰ τήν, κατὰ τὰ προηγούμενα, εὕρεσιν τῶν $b_0^*, b_1^*, \dots, b_\kappa^*$, θὰ ἔχωμεν:

$$Y - c = b_0^* + b_1^*(X^1 - a^1) + b_2^*(X^2 - a^2) + \dots + b_\kappa^*(X^\kappa - a^\kappa) + U$$

ἤ

$$Y = (c + b_0^* - b_1^* a^1 - b_2^* a^2 - \dots - b_\kappa^* a_\kappa) + b_1^* X^1 + b_2^* X^2 + \dots + b_\kappa^* X^\kappa + U.$$

ἐκ τῶν ὁποίων, διὰ συγκρίσεως πρὸς τὴν (9''), προκύπτει ὅτι :

$$\begin{array}{l} \beta_1^* = b_1^* \\ \beta_2^* = b_2^* \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_\kappa^* = b_\kappa^* \\ \beta_0^* = c + b_0^* - b_1^* a^1 - b_2^* a^2 - \ldots - b_\kappa^* a^\kappa \end{array} \tag{33}$$

4.4.2. Ἐὰν λάβωμεν ὁμοίως ὡς a^j, c τὰς μέσας τιμὰς τῶν τιμῶν τῶν X^j καὶ Y, δηλαδὴ ἐάν :

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}, \quad a^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^j = \bar{x}^j$$

Τότε θὰ σημειοῦμεν, τὰς νέας μεταβλητάς, ὄχι μὲ W, Z^j, ἀλλὰ μὲ $\mathring{Y}$, $\mathring{X}^j$, δηλαδή :

$$\mathring{Y} = Y - \bar{y}, \quad \mathring{X}^j = X^j - \bar{x}^j, \quad j = 1, 2, \ldots \kappa .$$

Καὶ θὰ ἔχωμεν οὕτω τὸ γραμμικὸν ὑπόδειγμα :

$$\mathring{Y} = b_0 + \beta_1 \mathring{X}^1 + \beta_2 \mathring{X}^2 + \ldots + \beta_\kappa \mathring{X}^\kappa + U \tag{34}$$

τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ b_0, β_j , θὰ ἐκτιμῶνται ἀπὸ τὴν (25), ἤτοι (βλ. καὶ ὑποσημ. σελ. 37)

$$\left[\begin{array}{c} \vec{b}_0^* \\ \hline \beta^* \end{array}\right] = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\vec{y}$$

Τώρα ὅμως θὰ ἔχωμεν καὶ $\sum_i \dot{y}_i = 0$. Οὕτω, κατὰ τὴν (29), θὰ εἶναι :

$$\begin{bmatrix} b_0^* \\ \beta_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\kappa^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \; 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ 0 & \mathbf{V}^{-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_i \dot{x}_i^1 \dot{y}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_i \dot{x}_i^\kappa \dot{y}_i \end{bmatrix}$$

δηλαδή : $$b_0^* = 0$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\kappa^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_i \dot{x}_i^1 \dot{y}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_i \dot{x}_i^\kappa \dot{y}_i \end{bmatrix} \tag{35}$$

Οὕτως ἔχομεν τελικῶς, ἐὰν ὁμοίως θέσωμεν $\vec{\beta}^*(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_\kappa^*)$,

$$b_0^* = 0$$
$$\vec{\beta}^* = \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{x}}'\dot{\vec{y}} \tag{36}$$

4.4.3. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν β_j^*, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὰς (33):

$$\vec{\beta}^* = \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{x}}'\dot{\vec{y}}$$

$$\beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^*\bar{x}^1 - \beta_2^*\bar{x}^2 - \ldots - \beta_\kappa^*\bar{x}^\kappa$$

καὶ τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον παλινδρομήσεως θὰ ἔχῃ ὁμοίως ἐξίσωσιν:

$$y = (\bar{y} - \beta_1^*\bar{x}^1 - \beta_2^*\bar{x}^2 - \ldots - \beta_\kappa^*\bar{x}^\kappa) + \beta_1^* x^1 + \beta_2^* x^2 + \ldots + \beta_\kappa^* x^\kappa \tag{37}$$

Παρατήρησις 1. Ἡ (37) εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ μὲ τὴν (31), ἂν καὶ προέκυψεν ἐκ διαφορετικῶν ὑπολογισμῶν. Καὶ τοῦτο διότι τὰ δεύτερα μέλη τῶν (29) καὶ (35) εἶναι ἴσα, διότι:

$$\sum_i \dot{x}_i^j \dot{y}_i = \sum_i \dot{x}_i^j (y_i - \bar{y}) = \sum_i \dot{x}_i^j y_i - \bar{y}\sum_i \dot{x}_i^j = \sum_i \dot{x}_i^j y_i$$

4.5. Περίπτωσις μιᾶς ἑρμηνευτικῆς μεταβλητῆς. Εὐθεία παλινδρομήσεως

Ἐὰν ἔχωμεν μίαν μόνον ἑρμηνευτικὴν μεταβλητήν, τότε, τὸ γραμμικὸν ὑπόδειγμα θὰ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + U.$$

Βάσει τῶν πειραματικῶν δεδομένων (y_i, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, θὰ εὕρωμεν, κατὰ τὰ προηγούμενα τῆς παρ. 4.4.2),

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{x}}'\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \dot{x}_2 \ldots \dot{x}_n] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \sum_i \dot{x}_i^2, \quad \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\sum_i \dot{x}_i^2}$$

Οὕτω, κατὰ τὰς (35), θὰ ἔχωμεν:

$$\beta_1^* = \frac{1}{\sum_i \dot{x}_i^2} [\sum_i \dot{x}_i \dot{y}_i] = \frac{\sum_i \dot{x}_i \dot{y}_i}{\sum \dot{x}_i^2}, \quad \beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x}.$$

ὅπου τὰ ἀθροίσματα

$$\sum_i \dot{x}_i \dot{y}_i = \sum_i x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_i x_i \sum_i y_i, \qquad \sum_i \dot{x}_i^2 = \sum_i x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i x_i)^2$$

σχηματίζονται συστηματικῶς εἰς πίνακα (βλ. πιν. 1).

Οὕτω, ἡ εὐθεία παλινδρομήσεως θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν:

$$y = (\bar{y} - \beta_1^* \bar{x}) + \beta_1^* \mathbf{x} \tag{38}$$

4.6. Περίπτωσις δύο ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν. Ἐπίπεδον παλινδρομήσεως

Εἰς τὴν περίπτωσιν δύο ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν, τὸ γραμμικὸν ὑπόδειγμα θὰ εἶναι:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X^1 + \beta_2 X^2 + U$$

Βάσει τῶν πειραματικῶν δεδομένων (y_i, x_i^1, x_i^2), $i = 1, 2, \ldots, n$ (βλ. πιν. 3), καὶ θέτοντες διὰ συντομίαν,

$$ns_1^2 = \sum_i (\dot{x}_i^1)^2 = \sum_i (x_i^1)^2 - \frac{1}{n} (\sum_i x_i^1)^2, \quad r_{12} = \frac{1}{ns_1 s_2} \sum_i \dot{x}_i^1 \dot{x}_i^2 = \frac{1}{ns_1 s_2} \left[\sum_i x_i^1 x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_i x_i^1 \cdot \sum_i x_i^2 \right]$$

$$ns_2^2 = \sum_i (\dot{x}_i^2)^2 = \sum_i (x_i^2)^2 - \frac{1}{n} (\sum_i x_i^2)^2, \quad r_{1Y} = \frac{1}{ns_1 s_Y} \sum_i \dot{x}_i^1 \dot{y}_i = \frac{1}{ns_1 s_Y} \left[\sum_i x_i^1 y_i - \frac{1}{n} \sum_i x_i^1 \cdot \sum_i y_i \right]$$

$$ns_Y^2 = \sum_i \dot{y}_i^2 = \sum_i y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_i y_i)^2, \quad r_{2Y} = \frac{1}{ns_2 s_Y} \sum_i \dot{x}_i^2 \dot{y}_i = \frac{1}{ns_2 s_Y} \left[\sum_i x_i^2 y_i - \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 \cdot \sum_i y_i \right]$$

λαμβάνομεν, κατὰ τὰ προηγούμενα τῆς παρ. 4.4.2,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^1 & \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^1 & \dot{x}_2^2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \dot{x}_n^1 & \dot{x}_n^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sum_i (\dot{x}_i^1)^2 & \sum_i \dot{x}_i^1 \dot{x}_i^2 \\ \\ \sum_i \dot{x}_i^1 \dot{x}_i^2 & \sum_i (\dot{x}_i^2)^2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} s_1^2 & r_{12} s_1 s_2 \\ \\ r_{12} s_1 s_2 & s_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{n(1-r_{12}^2)} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s_1^2} & -\dfrac{r_{12}}{s_1 s_2} \\ -\dfrac{r_{12}}{s_1 s_2} & \dfrac{1}{s_2^2} \end{bmatrix}$$

Οὕτω, κατὰ τὴν (35), θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{bmatrix} = \frac{1}{n(1-r_{12}^2)} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s_1^2} & -\dfrac{r_{12}}{s_1 s_2} \\ -\dfrac{r_{12}}{s_1 s_2} & \dfrac{1}{s_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\, s_1 s_Y r_{1Y} \\ n\, s_2 s_Y r_{2Y} \end{bmatrix}$$

δηλαδή:

$$\beta_1^* = \frac{1}{n(1-r_{12}^2)} \left\{ \frac{n\, s_1 s_Y r_{1Y}}{s_1^2} - \frac{n\, s_2 s_Y r_{12} r_{2Y}}{s_1 s_2} \right\} = \frac{s_Y}{s_1} \cdot \frac{r_{1Y} - r_{12} r_{2Y}}{1 - r_{12}^2}$$

$$\beta_2^* = \frac{1}{n(1-r_{12}^2)} \left\{ -\frac{n\, s_1 s_Y r_{12} r_{1Y}}{s_1 s_2} + \frac{n\, s_2 s_Y r_{2Y}}{s_2^2} \right\} = \frac{s_Y}{s_2} \cdot \frac{r_{2Y} - r_{12} r_{1Y}}{1 - r_{12}^2}$$

Ἤτοι, τελικῶς:

$$\boxed{\beta_1^* = \frac{s_Y}{s_1} \cdot \frac{r_{1Y} - r_{12} r_{2Y}}{1 - r_{12}^2}, \quad \beta_2^* = \frac{s_Y}{s_2} \cdot \frac{r_{2Y} - r_{12} r_{1Y}}{1 - r_{12}^2}, \quad \beta_0^* = \bar{y} - \beta_1^* \bar{x}^1 - \beta_2^* \bar{x}^2}$$

Τὸ ἐπίπεδον παλινδρομήσεως θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν:

$$y = (\bar{y} - \beta_1^* \bar{x}^1 - \beta_2^* \bar{x}^2) + \beta_1^* x^1 + \beta_2^* x^2 \tag{39}$$

5. ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΠΡΟΣ ΕΚΤΙΜΗΣΙΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

5.1. Γενικὰ

Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν προηγουμένων ἀποτελεσμάτων, μᾶς εἶναι ἀπαραίτητον, ἀφοῦ σχηματίσωμεν ἐκ τῶν πειραματικῶν δεδομένων τὴν μήτραν $\mathbf{V}$ καὶ τὸ διάνυσμα $\dot{\mathbf{x}}\vec{y}$, νὰ ἀντιστρέψωμεν τὴν μήτραν $\mathbf{V}$. Ἡ ἐργασία ὅμως αὕτη καθίσταται ἤδη ἐπίπονος εἰς προβλήματα μὲ τρεῖς καὶ πλέον ἑρμηνευτικὰς μεταβλητάς.

Πρὸς διευκόλυνσιν τῶν πράξεων θὰ παραθέσωμεν ἐνταῦθα ἁπλῆν μέθοδον (βλ. καὶ [2] § 4.3.), ἡ ὁποία εἶναι γνωστή, διὰ τὴν λύσιν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων, ὡς μέθοδος τῶν Jordan - Gauss. Θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ κυρίως ἡ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου ταύτης εἰς τὸ πρόβλημά μας πρὸς εὕρεσιν τοῦ διανύσματος $\vec{\beta}^*$ καὶ τῆς ἀντιστρόφου μήτρας $\mathbf{V}^{-1}$, ἡ ὁποία εἶναι χρήσιμος διὰ τὰς λοιπὰς ἐκτιμήσεις μας, καὶ ἡ τυποποίησις, ὑπὸ μορφὴν ἑνὸς συνόλου πρακτικῶν πρακτικῶν κανόνων («ἀλγόριθμος»), τῶν σχετικῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

5.2. Ἀλγόριθμος παρέχων τὴν λύσιν ἑνὸς γραμμικοῦ συστήματος καὶ τὴν ἀντίστροφον μήτραν αὐτοῦ.

5.2.1. Ἡ μέθοδος ἐφαρμόζεται διὰ τὴν λύσιν παντὸς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων καὶ συνίσταται εἰς τὴν διαδοχικὴν ἀπαλειφὴν τῶν ἀγνώστων, ἐξ ὅλων τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος. πλὴν ἐκείνης τῆς ὁποίας ἡ τάξις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τάξιν τοῦ ἀγνώστου.

Οὕτω, εἰς ἕνα πρῶτον στάδιον, μετασχηματίζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ἀγνώστου νὰ γίνῃ ἴσος μὲ τὴν μονάδα καὶ ἀπαλείφομεν τὸν πρῶτον τοῦτον ἄγνωστον ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος. Ἐπιτυγχάνομεν, οὕτω, ἕνα νέον σύστημα ἐξισώσεων, τοῦ ὁποίου μόνον ἡ πρώτη ἐξίσωσις περιλαμβάνει τὸν πρῶτον ἄγνωστον x_1 μὲ συντελεστὴν τὴν μονάδα.

Εἰς τὸ δεύτερον στάδιον, μετασχηματίζομεν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ νέου συστήματος, οὕτως ὥστε ὁ δεύτερος ἄγνωστος x_2 νὰ ἔχῃ συντελεστὴν τὴν μονάδα καὶ ἀπαλείφομεν τὸν δεύτερον αὐτὸν ἄγνωστον ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων ἐξισώσεων. Εἰς τὸ προκῦπτον νέον σύστημα, ὁ πρῶτος ἄγνωστος x_1 ἐμφανίζεται μόνον εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν καὶ ὁ δεύτερος x_2 μόνον εἰς τὴν δευτέραν, ἔχουν δὲ ἀμφότεροι συντελεστὰς ἴσους μὲ τὴν μονάδα

Συνεχίζοντες τὴν αὐτὴν διαδικασίαν, μέχρι τοῦ τελευταίου σταδίου, προκύπτει σύστημα, περιλαμβάνον ἐξισώσεις τοιαύτας ὥστε ἡ πρώτη περιέχει μόνον τὸν πρῶτον ἄγνωστον, ἡ δευτέρα περιέχει μόνον τὸν δεύτερον κ.ο.κ. καὶ ἡ τελευταία περιέχει μόνον τὸν τελευταῖον ἄγνωστον. Δηλαδὴ προκύπτει αὐτὴ αὕτη ἡ λύσις τοῦ συστήματος.

5.2.2. Τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα θὰ βοηθήσῃ εἰς τὴν κατανόησιν τῶν προηγουμένων.

Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= \frac{1}{2} \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= \frac{13}{2} \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned} \quad \text{ἤ} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (40) \\ (41) \\ (42) \end{matrix}$$

Πρῶτον στάδιον: Ἀπαλειφὴ τοῦ x_1 ἐξ ὅλων τῶν ἐξισώσεων πλὴν τῆς πρώτης. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ νέου συστήματος προκύπτουν ὡς ἑξῆς:

Ἡ (40′) ἐκ τῆς (40), διαιρεθείσης διὰ τοῦ 2 (συντελεστοῦ τοῦ x_1).

Ἡ (41′) διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς (40′) ἐπὶ −1 (ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x_1 εἰς τὴν (41)) καὶ προσθέσεώς της εἰς τὴν (41).

Ἡ (42′) διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς (40′) ἐπὶ −1 (ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x_1 εἰς (42)) καὶ προσθέσεώς της εἰς τὴν (42).

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 &= \frac{25}{4} \\ -\frac{5}{2}x_2 + \frac{9}{2}x_3 &= \frac{31}{4} \end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{25}{4} \\ \frac{31}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (40') \\ (41') \\ (42') \end{matrix}$$

Δεύτερον στάδιον: Ἀπαλειφὴ τοῦ x_2 ἐξ ὅλων τῶν ἐξισώσεων πλὴν τῆς δευτέρας.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= \frac{5}{2} \\ 7x_3 &= 14 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \\ 14 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (40'') \\ (41'') \\ (42'') \end{matrix}$$

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ νέου τούτου συστήματος προέρχονται ὡς ἑξῆς:

Ἡ (41″) ἐκ τῆς (41′), διὰ διαιρέσεώς της διὰ $\frac{5}{2}$.

Ἡ (40″) διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς (41″) ἐπὶ $-\frac{1}{2}$ καὶ προσθέσεώς της εἰς τὴν (40′).

Ἡ (42″) διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς (41″) ἐπὶ $\frac{5}{2}$ καὶ προσθέσεώς της εἰς τὴν (42′).

Τρίτον στάδιον: Ἀπαλειφὴ τοῦ x_3 ἐξ ὅλων τῶν ἐξισώσεων πλὴν τῆς τρίτης.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \quad &= \frac{1}{2} \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \text{ἢ} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (40''') \\ (41''') \\ (42''') \end{matrix}$$

Ἡ μετάβασις εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο στάδιον, τὸ ὁποῖον δίδει καὶ τὴν λύσιν τοῦ ἀρχικοῦ μας συστήματος, γίνεται διὰ τῆς ἰδίας ὡς καὶ ἀνωτέρω διαδικασίας.

5.2.3. Ἀποβλέποντες μόνον εἰς τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων, δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν εἰς ἕνα ἑνιαῖον πίνακα τὴν σειρὰν τῶν ὡς ἄνω ὑπολογισμῶν, διὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ ἑνὸς σταδίου εἰς τὸ ἄλλο.

Πίναξ 1.

A

	$\vec{A}^1$	$\vec{A}^2$	$\vec{A}^3$	$\vec{A}^0$
0	2	1	−1	1/2
	1	3	2	13/2
	1	−2	4	8
1	1	1/2	−1/2	1/4
	0	5/2	5/2	25/4
	0	−5/2	9/2	31/4
2	1	0	−1	−1
	0	1	1	5/2
	0	0	7	14
3	1	0	0	1
	0	1	0	1/2
	0	0	1	2

$\vec{X}$

I

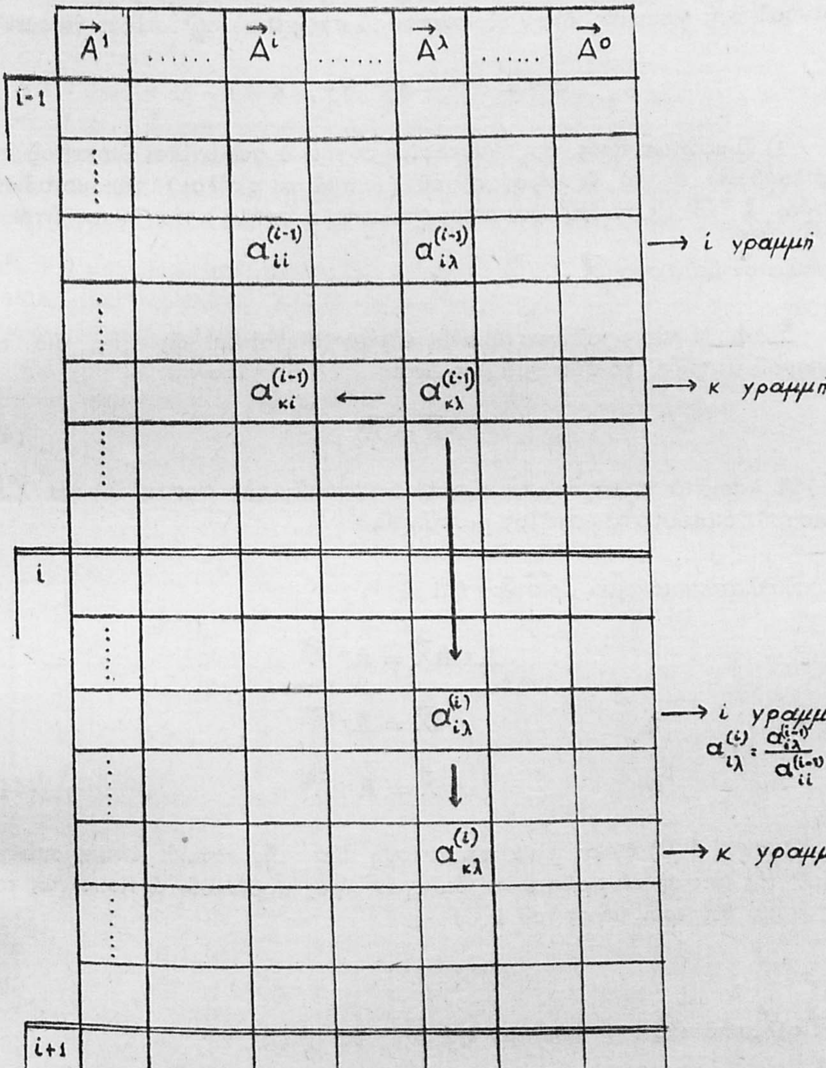
Εἰς τὸν ὑποπίνακα 1 (0) περιλαμβάνονται οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ πρὸς λύσιν συστήματος (στῆλαι $\vec{A}^1$, $\vec{A}^2$, $\vec{A}^3$) καὶ οἱ σταθεροί του ὅροι (στήλη $\vec{A}^0$).

Οἱ λοιποὶ ὑποπίνακες 1 (1), 1 (2), 1 (3) ἀφοροῦν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἰσοδυνάμων συστημάτων εἰς τὰ ἀντίστοιχα στάδια. Ἡ μετάβασις, ἐκ τοῦ ἑνὸς ὑποπίνακος εἰς τὸν ἑπόμενον γίνεται διὰ πρακτικῶν κανόνων, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἁπλῶς, ἐκ τῆς σειρᾶς τῶν περιγραφεισῶν προηγουμένως πράξεων.

Οἱ κανόνες οὗτοι, δι' ἓν σύστημα ρ ἐξισώσεων μὲ ρ ἀγνώστους, εἶναι οἱ κάτωθι:

α) Ἕκαστος ὑποπίναξ ἔχει $\rho + 1$ στῆλας $\vec{A}^1$, $\vec{A}^2$, ..., $\vec{A}^\rho$, $\vec{A}^0$ καὶ ρ γραμμάς. Τὰ στοιχεῖα τοῦ ὑποπίνακος (i) θὰ σημειοῦται μὲ $\alpha_{\kappa\lambda}^{(i)}$ ἔνθα $\kappa =$ δείκτης γραμμῆς: $\kappa = 1, 2, \ldots, \rho$, $\lambda =$ δείκτης στήλης, $\lambda = 1, 2, \ldots \rho, 0$ καὶ $i =$ δείκτης ὑποπίνακος.

β) Εἰς τὸν ὑποπίνακα 1 (0) θέτομεν τοὺς συντελεστὰς τοῦ δοθέντος συστήματος. Ὁ ὑποπίναξ 1 (1) συμπληροῦται τῇ βοηθείᾳ τοῦ 1 (0), ὁ 1 (2) τῇ βοηθείᾳ τοῦ 1 (1)... κ.ο.κ. Δηλαδὴ ἡ συμπλήρωσις τοῦ ὑποπίνακος (i) ἀρχίζει, ἀφοῦ ἔχει τερματισθῇ πλήρως ἡ συμπλήρωσις τοῦ προηγουμένου ὑποπίνακος (i − 1).



Σχ 12

γ) Ἡ συμπλήρωσις τοῦ ὑποπίνακος 1 (i) γίνεται διὰ τῆς συμπληρώσεως πρῶτον τῆς i γραμμῆς. Εἰς ταύτην θέτομεν τὰ στοιχεῖα τῆς i γραμμῆς τοῦ προηγουμένου πίνακος, διαιρεθέντα διὰ τοῦ στοιχείου της, τοῦ ἀνήκοντος εἰς τὴν στήλην i. Ἤτοι: $\alpha_{i\lambda}^{(i)} = \dfrac{\alpha_{i\lambda}^{(i-1)}}{\alpha_{ii}^{(i-1)}}$.

δ) Ἡ συμπλήρωσις οἱουδήποτε ἄλλου φατνίου τοῦ 1 (i), δηλαδὴ ἡ εὕρεσις τοῦ τυχόντος $\alpha_{\kappa\lambda}^{(i)}$, $\kappa \neq i$, γίνεται ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν τὸ στοιχεῖον τοῦ ἀντιστοίχου φατνίου τοῦ προηγουμένου πίνακος $\alpha_{\kappa\lambda}^{(i-1)}$. Ἐξ αὐτοῦ κινούμεθα ὁριζοντίως (ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς) μέχρι τῆς i στήλης, ὅπου εὑρίσκεται τὸ στοιχεῖον $\alpha_{\kappa i}^{(i-1)}$ καὶ καθέτως (ἐπὶ τῆς αὐτῆς στήλης) μέχρι τῆς κατασκευασθείσης γραμμῆς, ὅπου εὑρίσκεται τὸ στοιχεῖον $\alpha_{i\lambda}^{(i)}$. Τότε θέτομεν:

$$\alpha_{\kappa\lambda}^{(i)} = \alpha_{\kappa\lambda}^{(i-1)} - \alpha_{\kappa i}^{(i-1)} \alpha_{i\lambda}^{(i)}, \quad \kappa \neq i$$

ε) Συμφώνως πρὸς τὴν διαδικασίαν αὐτὴν ὁ τελευταῖος ὑποπίναξ 1 (ρ) περιλαμβάνει εἰς τὸ ἓν μέρος αὐτοῦ (ρ πρῶται στῆλαι) τὴν μοναδιαίαν μήτραν $\mathbf{I}_{(\rho,\rho)}$ καὶ εἰς τὸ δεύτερον μέρος (τελευταία στήλη) τὴν λύσιν, ἤτοι τὸ ζητούμενον διάνυσμα $\vec{X}$.

5.2.4. Ἡ λύσις τοῦ συστήματος ἐπιτυγχάνεται καὶ ὡς ἑξῆς, διὰ τοῦ λογισμοῦ μητρῶν. Τὸ σύστημά μας εἶναι:

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{A}^0 \tag{43}$$

ὅπου $\mathbf{A}$ παριστᾷ τετραγωνικὴν μήτραν ρ γραμμῶν καὶ ρ στηλῶν, καὶ $\vec{X}, \vec{A}^0$ παριστοῦν διανύσματα - στήλας ρ στοιχείων.

Πολλαπλασιάζομεν ἀριστερὰ ἐπὶ $\mathbf{A}^{-1}$.:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{X} = \mathbf{A}^{-1}\vec{A}^0$$

ἢ

$$\mathbf{I}\vec{X} = \mathbf{A}^{-1}\vec{A}^0$$

ἢ

$$\vec{X} = \mathbf{A}^{-1}\vec{A}^0 \tag{44}$$

Ὁ πίναξ 1 (0) δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ τῆς κάτωθι ἐπιμερισμένης μήτρας, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέρος παριστοῦν ἀντιστοίχως τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέρος τοῦ 1 (0)

$$[\,A \mid A^0\,]$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀριστερὰ ἐπὶ $\mathbf{A}^{-1}$, θὰ ἔχωμεν,

$$[\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \mid \mathbf{A}^{-1}\vec{A}^0\,]$$

ἤ, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν (44),

$$[\,\mathbf{I} \mid \vec{X}\,] \tag{45}$$

Ἡ ἐπιμερισμένη μήτρα $[\mathbf{I} \mid \vec{X}]$ θὰ παριστᾶ, διὰ τῶν δύο τμημάτων αὐτῆς τὸν πίνακα 1 (ρ).

Οὕτω λοιπὸν ὅλη ἡ διαδικασία σχηματισμοῦ τοῦ πίνακος (1) ἀντικαθιστᾶ τρόπον τινὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῆς $\mathbf{A}$ ἐπὶ τὴν μήτραν $\mathbf{A}^{-1}$, οὕτως ὥστε νὰ προκύψῃ τελικῶς ἡ μοναδιαία μήτρα $\mathbf{I}$.

5.2.5. Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν (βλ. [6], σελ. 209), ὅπως προκύπτει ἡ μοναδιαία μήτρα $\mathbf{I}$ ἐκ μιᾶς τετραγωνικῆς μήτρας $\mathbf{A}$, κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον προκύπτει ἡ $\mathbf{A}^{-1}$ ἐκ τῆς $\mathbf{I}$. Οὕτω, ἐὰν τὴν αὐτὴν διαδικασία τοῦ πίνακος 1, ἐπαναλάβομεν εἰς τὴν μοναδιαίαν μήτραν $\mathbf{I}$, τότε εὑρίσκομεν τὴν $\mathbf{A}^{-1}$. Δηλαδὴ ἐὰν σχηματίσωμεν ἕναν ἄλλον πίνακα 2, ὁ ὁποῖος θὰ περιέχῃ τὴν μοναδιαίαν μήτραν $\mathbf{I}$ ὁμοῦ μετὰ τῶν στηλῶν $\vec{A}^1, \vec{A}^2, \ldots, \vec{A}^p, \vec{A}^0$, τότε εἰς τὸν τελευταῖον ὑποπίνακα 2 (ρ), ἐὰν ἀκολουθήσωμεν τὴν αὐτὴν διαδικασίαν σχηματισμοῦ του, θὰ ἐμφανίζεται καὶ ἡ ἀντίστροφος μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$.

Θὰ χρησιμοποιήσωμεν λοιπὸν τὸν ἀλγόριθμον πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματός μας, ἐπαυξάνοντες τὴν μήτραν $\mathbf{A}$, διὰ τῆς μοναδιαίας μήτρας.

Πίναξ 2

	A			I				
	$\vec{A}^1$	$\vec{A}^2$	$\vec{A}^3$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{A}^0$	Σ
0	2	1	−1	1	0	0	1/2	7/2
	1	3	2	0	1	0	13/2	27/2
	1	−2	4	0	0	1	8	12
1	1	1/2	−1/2	1/2	0	0	1/4	7/4
	0	5/2	5/2	−1/2	1	0	25/4	47/4
	0	−5/2	9/2	−1/2	0	1	31/4	41/4
2	1	0	−1	3/5	−1/5	0	−1	6/10
	0	1	1	−1/5	2/5	0	5/2	47 10
	0	0	7	−1	1	1	14	22
3	1	0	0	16/35	−2/35	1/7	1	89/35
	0	1	0	−2/35	9/35	−1/7	1/2	109/70
	0	0	1	−1/7	1/7	1/7	2	22/7
	I			$\mathbf{A}^{-1}$			$\vec{X}$	

Οὕτω, ὁ πίναξ τῶν συντελεστῶν, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκκινεῖ τώρα ὁ ἀλγόριθμος, παρίσταται διὰ τῆς ἐπιμερισμένης μήτρας :

$$[\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{I} \,\vdots\, \vec{A^0}]$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀριστερὰ ἐπὶ $\mathbf{A}^{-1}$, θὰ ἔχωμεν,

$$[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{A}^{-1}\vec{A^0}]$$

$$\text{ἢ} \qquad [\mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{A}^{-1} \,\vdots\, \vec{X}] \tag{47}$$

Πράγματι, ὁ τελευταῖος πίναξ τοῦ ἀλγορίθμου (Πιν. 2 (3)), παριστώμενος διὰ τῆς μήτρας $[\mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{A}^{-1} \,\vdots\, \vec{X}]$, δίδει, ὡς ἀντίστροφον μήτραν τῆς Α, τὴν

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 16/35 & -2/35 & 1/7 \\ -\ 2/35 & 9/35 & -\ 1/7 \\ -\ 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαληθευθῇ ὅτι : $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

5.3. Ἐφαρμογὴ τοῦ ἀλγορίθμου εἰς τὸ γραμμικὸν ὑπόδειγμα

5.3.1. Ἐπανερχόμενοι τώρα εἰς τὸ πρόβλημά μας, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ τύπος (25) παριστᾷ τὴν λύσιν τοῦ γραμμικοῦ συστήματος :

$$\mathbf{S}\vec{\beta^*} = \mathbf{x}'\vec{y} \tag{48}$$

Τὰ πειραματικὰ δεδομένα τοποθετοῦνται εἰς πίνακα (Πιν. 3) καὶ μετά τινας πράξεις (πίναξ 4), δύνανται νὰ διαταχθοῦν εἰς ὑποπίνακα ἀνάλογον πρὸς τὸν 2 (0), παριστώμενον διὰ τῆς ἐπιμερισμένης μήτρας :

$$[\mathbf{S} \,\vdots\, \mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{x}'\vec{y}] \tag{49}$$

Δι' ἐφαρμογῆς δὲ τοῦ ἀνωτέρω περιγραφέντος ἀλγορίθμου, νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἕνα τελικὸν πίνακα ἀνάλογον τοῦ 2 (3), παριστώμενον διὰ τῆς ἐπιμερισμένης μήτρας :

$$[\mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{S}^{-1} \,\vdots\, \vec{\beta^*}] \tag{50}$$

εἰς τὴν ὁποίαν περιλαμβάνεται, ἐκτὸς τοῦ ζητουμένου διανύσματος $\vec{\beta^*}$ καὶ ἡ ἀντίστροφος μήτρα $\mathbf{S}^{-1}$.

5.3.2. Ὁμοίως ὁ τύπος [1] (30) παριστᾷ τὴν λύσιν τοῦ γραμμικοῦ συστήματος:

$$\mathbf{V}\,\vec{\beta}^{*} = \dot{\mathbf{x}}'\vec{y} \tag{48'}$$

Τὰ πειραματικὰ δεδομένα, παριστάμενα διὰ τῆς ἐπιμερισμένης μήτρας:

$$[\,\mathbf{V} \,\vdots\, \mathbf{I} \,\vdots\, \dot{\mathbf{x}}'\vec{y}\,] \tag{49'}$$

προκύπτουν ἐπίσης ἐκ τοῦ πίνακος, 4, ἤτοι:

$\sum_i (\mathring{x}_i^j)^2 = \sum_i (x_i^j)^2 - \frac{1}{n}(\sum_i x_i^j)^2$ (Πίν. 4, γραμμὴ $n+5$ – Στοιχεῖα διαγωνίου τῆς μήτρας $\mathbf{V}$)

$\sum_i \mathring{x}_i^j \mathring{x}_i^p = \sum_i x_i^j x_i^p - \frac{1}{n} \sum_i x_i^j \sum_i x_i^p$ (Πίν. 4, γραμμὴ $n+6$ – Λοιπὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας $\mathbf{V}$)

$\sum_i \mathring{x}_i^j y_i = \sum_i x_i^j y_i - \frac{1}{n} \sum x_i^j \sum y_i$ (Πίν. 4, γραμμὴ $n+7$ – Στοιχεῖα τοῦ διανύσματος $\dot{\mathbf{x}}'\vec{y}$)

καὶ δύνανται νὰ διαταχθοῦν εἰς ὑποπίνακα ἀνάλογον πρὸς 2 (0), ἐκ τοῦ ὁποίου, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀλγορίθμου, θὰ προκύψῃ ὁ τελικὸς ὑποπίναξ, παριστώμενος διά:

$$[\,\mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{V}^{-1} \,\vdots\, \vec{\beta}^{*}\,] \tag{50'}$$

καὶ περιλαμβάνων, ἐκτὸς τοῦ $\vec{\beta}^{*}$ καὶ τὴν $\mathbf{V}^{-1}$.

Παρατήρησις 1. Οἱ προσδιοριστέοι συντελεσταὶ τοῦ Gauss $C_{ij} = C_{ji}$ τῆς ὁμωνύμου μεθόδου (βλ. [1], σελ. 76 - 80, [8], σελ. 309), προκύπτοντες διὰ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος:

$$\mathbf{V}\,\mathbf{C} = \mathbf{I}$$

δὲν εἶναι παρὰ τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας $\mathbf{V}^{-1}$ καὶ δίδονται ἑπομένως αὐτομάτως ὑπὸ τοῦ ἀλγορίθμου.

---

1) Ὁ (30) εἶναι ἰσοδύναμος τοῦ (36), βλ. παρατήρησιν 1 τῆς παραγρ. 4.4.3. Τὸ σύμβολον $\vec{\beta}^{*}$ περιλαμβάνει ἐδῶ κ συνιστώσας, ἤτοι εἶναι $\vec{\beta}^{*}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\kappa)$, ἐνῷ εἰς τὴν (48) περιλαμβάνει καὶ τὸν σταθερὸν ὅρον β_0.

Πίναξ 3

Πειραματικά δεδομένα

Δοκιμή i	y_i	x_i^1	x_i^2	. . . . . .	x_i^κ
1	y_1	x_1^1	x_1^2	. . . . . .	x_1^κ
2	y_2	x_2^1	x_2^2	. . . . . .	x_2^κ
3	y_3	x_3^1	x_3^2	. . . . . .	x_3^κ
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
n	y_n	x_n^1	x_n^2	. . . . . .	x_n^κ
$\sum_{i=1}^{n}$	$\sum_i y_i$	$\sum_i x_i^1$	$\sum_i x_i^2$	. . . . . .	$\sum_i x_i^\kappa$
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$	$\bar{y}$	$\bar{x}^1$	$\bar{x}^2$	. . . . . .	$\bar{x}^\kappa$

5.3.3. Θέμα σημαντικῆς πρακτικῆς χρησιμότητος, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ἀλγορίθμου, εἶναι ἡ ἐξασφάλισίς μας ἔναντι τοῦ κινδύνου σφαλμάτων κατὰ τοὺς ὑπολογισμούς, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀναπόφευκτον νὰ ὑπεισέρχωνται εἰς τὰ διάφορα στάδια τῆς διαδικασίας, ἰδίως λόγῳ τῆς διατηρήσεως μεγάλου ἀριθμοῦ δεκαδικῶν ψηφίων. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν καὶ πρόσθετον στήλην Σ, (βλ. Πιν. 2), τὰ στοιχεῖα τῆς ὁποίας εἶναι τὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα τῶν στοιχείων τῶν γραμμῶν τοῦ πίνακος. Αὕτη προορίζεται ἀκριβῶς νὰ χρησιμεύσῃ πρὸς ἔλεγχον τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, τῶν σχετικῶν μὲ τοὺς μετασχηματισμοὺς τῶν στοιχείων ἑκάστου ὑποπίνακος πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ἑπομένου. Ἐπὶ τῶν στοιχείων τῆς στήλης ταύτης ἐφαρμόζεται ὁ ἀλγόριθμος, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ πίνακος, ἐὰν δέ, κατὰ τὰς σχετικὰς ἀριθμητικὰς πράξεις, δὲν παρεισέφρυσαν σφάλματα, οἱ προκύπτοντες εἰς τὴν στήλην Σ ἀριθμοὶ δέον νὰ ταυτίζωνται ἑκάστοτε πρὸς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν ἀντιστοίχων γραμμῶν. Διὰ τῆς ἐπαληθεύσεως, βῆμα πρὸς βῆμα, τῆς συμφωνίας ταύτης ἐπιτυγχάνεται ἡ ἔγκαιρος ἀποκάλυψις, ὁ ἐντοπισμὸς καὶ ἡ διόρθωσις τῶν σφαλμάτων, κατὰ τρόπον ὥστε, περαιουμένης τῆς διαδικασίας τοῦ ἀλγορίθμου, νὰ λαμβάνεται ἡ ὀρθὴ λύσις καὶ ἡ ὀρθὴ ἀντίστροφος μήτρα $\mathbf{S}^{-1}$ ἢ $\mathbf{V}^{-1}$.

Πίναξ 4

Προετοιμασία τῶν πειραματικῶν δεδομένων

	Τετράγωνα					Γινόμενα							
	y_i^2	$(x_i^1)^2$	$(x_i^2)^2$	$\cdots$	$(x_i^\kappa)^2$	$x_i^1 y_i$	$x_i^2 y_i$	$\cdots$	$x_i^\kappa y_i$	$x_i^1 x_i^2$	$\cdots$	$x_i^1 x_i^\kappa$	$\cdots$	$x_i^{\kappa-1} x_i^\kappa$
1	y_1^2	$(x_1^1)^2$	$(x_1^2)^2$	$\cdots$	$(x_1^\kappa)^2$	$x_1^1 y_1$	$x_1^2 y_1$	$\cdots$	$x_1^\kappa y_1$	$x_1^1 x_1^2$	$\cdots$	$x_1^1 x_1^\kappa$	$\cdots$	$x_1^{\kappa-1} x_1^\kappa$
2	y_2^2	$(x_2^1)^2$	$(x_2^2)^2$	$\cdots$	$(x_2^\kappa)^2$	$x_2^1 y_2$	$x_2^2 y_2$	$\cdots$	$x_2^\kappa y_2$	$x_2^1 x_2^2$	$\cdots$	$x_2^1 x_2^\kappa$	$\cdots$	$x_2^{\kappa-1} x_2^\kappa$
3	y_3^2	$(x_3^1)^2$	$(x_3^2)^2$	$\cdots$	$(x_3^\kappa)^2$	$x_3^1 y_3$	$x_3^2 y_3$	$\cdots$	$x_3^\kappa y_3$	$x_3^1 x_3^2$	$\cdots$	$x_3^1 x_3^\kappa$	$\cdots$	$x_3^{\kappa-1} x_3^\kappa$
.	.	.	.		.	.	.		.	.		.		.
.	.	.	.		.	.	.		.	.		.		.
.	.	.	.		.	.	.		.	.		.		.
n	y_n^2	$(x_n^1)^2$	$(x_n^2)^2$	$\cdots$	$(x_n^\kappa)^2$	$x_n^1 y_n$	$x_n^2 y_n$	$\cdots$	$x_n^\kappa y_n$	$x_n^1 x_n^2$	$\cdots$	$x_n^1 x_n^\kappa$	$\cdots$	$x_n^{\kappa-1} x_n^\kappa$
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	$\sum\limits_i y_i^2$	$\sum\limits_i (x_i^1)^2$	$\sum\limits_i (x_i^2)^2$	$\cdots$	$\sum\limits_i (x_i^\kappa)^2$	$\sum\limits_i x_i^1 y_i$	$\sum\limits_i x_i^2 y_i$	$\cdots$	$\sum\limits_i x_i^\kappa y_i$	$\sum\limits_i x_i^1 x_i^2$	$\cdots$	$\sum\limits_i x_i^1 x_i^\kappa$	$\cdots$	$\sum\limits_i x_i^{\kappa-1} x_i^\kappa$
(ἀπὸ πίν.3) $\frac{1}{n}(\sum\limits_i x_i^j)^2$		*	*	*	*									
(ἀπὸ πίν.3) $\frac{1}{n}\sum\limits_i x_i^j \sum\limits_i x_i^\rho$										*	*	*	*	*
(ἀπὸ πίν.3) $\frac{1}{n}\sum\limits_i x_i^j \Sigma y_i$						*	*	*	*					
$\sum\limits_i (x_i^j)^2 - \frac{1}{n}(\sum\limits_i x_i^j)^2$		*	*	*	*									
$\sum\limits_i x_i^j x_i^\rho - \frac{1}{n}\sum\limits_i x_i^j \Sigma x_i^\rho$										*	*	*	*	*
$\sum\limits_i x_i^j y_i - \frac{1}{n}\sum\limits_i x_i^j \sum\limits_i y_i$						*	*	*	*					

6. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΤΩΝ (1) B_j^*

6.1. Γενικὰ

Τὸ εὑρεθὲν διάνυσμα (βλ. (25)).

$$\vec{\beta}^* = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\vec{y}$$

εἶναι μιὰ *«ἐκτίμησις»* τοῦ ζητουμένου $\vec{\beta}$. Δηλαδὴ ἔχει στοιχεῖα τὰς τιμὰς β_j^* αἱ ὁποῖαι θὰ ληφθοῦν ὡς συντελεσταὶ τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν $X^1, X^2, \ldots, X^\kappa$. Τὰ β_j^* προέκυψαν ἐκ τῶν παρατηρήσεων μας y_i, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ὡρισμένα συστήματα τιμῶν $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^\kappa)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τῶν $(X^1, X^2, \ldots, X^\kappa)$. Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὸ πείραμά μας, διὰ τὰ αὐτὰ πάντοτε συστήματα τιμῶν τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν, θὰ προκύψουν ἐν γένει ἄλλαι τιμαὶ y_i καὶ ἑπομένως ἄλλη ἐκτίμησις τοῦ $\vec{\beta}$. Αἱ διάφοροι αὗται ἐκτιμήσεις τοῦ $\vec{\beta}$ θὰ εἶναι τιμαὶ ἑνὸς τυχαίου διανύσματος:

$$\vec{B}^* = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\vec{Y} \tag{51}$$

Αἱ συντεταγμέναι B_j^* αὐτοῦ θὰ εἶναι οἱ ἐκτιμηταὶ τῶν παραμέτρων β_j. Εἶναι προφανὲς ἐκ τῆς (51) ὅτι οἱ ἐκτιμηταὶ οὗτοι εἶναι γραμμικαὶ συναρτήσεις τῶν τυχαίων μεταβλητῶν Y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, τῶν ὁποίων τιμαὶ εἶναι αἱ παρατηρήσεις μας y_i. Κατωτέρω θ' ἀναζητήσωμεν ὡρισμένα χαρακτηριστικὰ τῶν ἐκτιμιτῶν B_j^*.

6.2. Ἡ μέση τιμὴ τῶν B_j^*

Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσιν 2, διὰ κάθε σύστημα τιμῶν $(x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^\kappa)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, θὰ ἔχωμεν $E(U_i) = 0$. Ἐξ ἄλλου, βλ. (20), $E(\vec{Y}) = \mathbf{x}\vec{\beta}$.

Ἑπομένως:

$$E(\vec{B}^*) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'E(\vec{Y}) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{x}\vec{\beta} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\vec{\beta} = \mathbf{I}\vec{\beta} = \vec{\beta}$$

δηλαδή:

$$E(B_j^*) = \beta_j, \; j = 0, 1, 2, \ldots, \kappa$$

Οὕτω, συμπεραίνομεν ὅτι: Αἱ τυχαῖαι μεταβληταὶ B_j^* εἶναι ἀμερόληπτοι ἐκτιμηταὶ τῶν παραμέτρων β_j.

---

1) Ἐὰν εἰς τὸν νόμον μιᾶς τυχαίας μεταβλητῆς X εἰσέρχεται μία παράμετρος θ, τότε θεωροῦντες ἕνα πεπερασμένον σύνολον τυχαίων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ τοῦ ἰδίου νόμου πιθανοτήτων, καλοῦμεν *«ἐκτιμητὴν»* τῆς θ κάθε τυχαίαν μεταβλητὴν $\Theta^* = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$, τῆς ὁποίας μία τιμὴ εἶναι ἡ θ. Ἡ τυχαία μεταβλητὴ Θ^* θὰ λέγεται *«ἀμερόληπτος»* ἐκτιμητής, ἐὰν $E(\Theta^*) = \theta$. Κάθε τιμὴ θ^* τῆς Θ^* θὰ λέγεται *«ἐκτίμησις»* τῆς παραμέτρου θ·

Παρατήρησις 1. Ἀνωτέρω αἱ ἑρμηνευτικαὶ μεταβληταὶ δὲν ἐθεωρήθησαν τυχαῖαι, ἀλλ' ἐλάμβανον ὡρισμένας τιμὰς εἰς ἑκάστην δοκιμὴν τοῦ πειράματος (βλ. και παραγρ. 3.3.2α). Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἄλλωστε ἐχρησιμοποιήθησαν τὰ σύμβολα x^j_i καὶ $\mathbf{x}$ ἀντὶ τῶν X^j_i καὶ $\mathbf{X}$. Ἐὰν ἀντιθέτως καὶ αἱ X^j_i εἶναι τυχαῖαι μεταβληταὶ (βλ. καὶ παραγρ. 3.2.2β), ὡς συμβαίνει συνήθως εἰς τὴν πρᾶξιν, δὲν ἀρκεῖ ἡ ὑπόθεσις 2, ὥστε αἱ τυχαῖαι μεταβληταὶ B^*_j νὰ εἶναι ἀμερόληπτοι ἐκτιμηταὶ τῶν β_j. Ἀπαιτεῖται καὶ ἡ ὑπόθεσις 3. Πράγματι, ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (51) θέσωμεν :

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{X} \quad \text{καὶ} \quad \vec{Y} = \mathbf{X}\vec{\beta} + \vec{U}$$

θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} \vec{B^*} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\vec{\beta} + \vec{U}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\vec{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\vec{U} \\ &= \mathbf{I}\vec{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\vec{U} \\ &= \vec{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\vec{U}. \end{aligned} \tag{52}$$

Διὰ νὰ εἶναι $E(\vec{B^*}) = \vec{\beta}$, δηλαδὴ διὰ νὰ εἶναι τὸ διάνυσμα $\vec{B^*}$ ἀμερόληπτος ἐκτιμητὴς τοῦ $\vec{\beta}$ πρέπει

$$E\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\vec{U}\} = 0$$

Τοῦτο ὅμως πραγματοποιεῖται ὑπὸ τὰς ὑποθέσεις 2 καὶ 3.

6.3. Ἡ διακύμανσις τῶν B^*_j

6.3.1. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς διακυμάνσεις (καὶ συνδιακυμάνσεις) τῶν τυχαίων μεταβλητῶν B^*_j ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν μήτραν τῶν ροπῶν αὐτῶν

$$\mathbf{M}_{\vec{B^*}} = \| E\{(B^*_\lambda - \beta_\lambda)(B^*_j - \beta_j)\}\| = E\{(\vec{B^*} - \vec{\beta})(\vec{B^*} - \vec{\beta})'\}$$

Ἀλλὰ ἐκ τῶν (25) καὶ (51) ἔχομεν ἀμέσως [1]

$$\vec{B^*} - \vec{\beta} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'(\vec{Y} - \vec{y}) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\vec{U}$$

$$(\vec{B^*} - \vec{\beta})' = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\vec{U})' = \vec{U}'\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1}$$

Ἐπομένως (βλ. καὶ ἀνωτέρω παρατήρησιν διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν X^j εἶναι τυχαῖαι),

---

1) Διὰ τὴν συμμετρικὴν μήτραν S^{-1}, ἔχομεν $(S^{-1})' = S^{-1}$.

$$\mathbf{M}_{\vec{B}^*} = \mathrm{E}\{ \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\vec{U}\vec{U}'\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1} \} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\mathrm{E}(\vec{U}\vec{U}')\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1}.$$

Ὑπόθεσις 5. Ὅλαι αἱ τυχαῖαι μεταβληταὶ U_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *ἔχουν τὴν αὐτὴν διακύμανσιν* σ^2 *καὶ εἶναι ἀνεξάρτητοι. Δηλαδὴ* $\mathrm{E}(U_i) = \sigma^2$ *καὶ* $\mathrm{E}(U_iU_j) = 0$.

Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\mathrm{E}(\vec{U}\vec{U}') = \mathrm{E}\begin{bmatrix} U_1^2 & U_1U_2 \ldots & U_1U_n \\ U_2U_1 & U_2^2 \ldots & U_2U_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_nU_1 & U_nU_2 \ldots & U_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}(U_1^2) & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{E}(U_2^2) \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & \mathrm{E}(U_n^2) \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

καὶ ἄρα

$$\mathbf{M}_{\vec{B}^*} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'(\sigma^2\mathbf{I})\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1} = \sigma^2\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}'\mathbf{x})\mathbf{S}^{-1} = \sigma^2(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S})\mathbf{S}^{-1} = \sigma^2\mathbf{I}\mathbf{S}^{-1}$$

Δηλαδὴ τελικῶς :

$$\mathbf{M}_{\vec{B}^*} = \sigma^2\mathbf{S}^{-1}$$

Ἐξ αὐτῆς εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ διακύμανσις τοῦ ἐκτιμητοῦ β_j^* θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς διακυμάνσεως τῆς τυχαίας μεταβλητῆς U ἐπὶ τὸ διαγώνιον στοιχεῖον j τάξεως τῆς μήτρας $\mathbf{S}^{-1}$.

6.3.2. Προκειμένου νὰ ἀξιολογήσωμεν τώρα τὴν ἀκρίβειαν [1] τῶν εὑρεθέντων ἐκτιμητῶν B_j^*, θὰ συγκρίνωμεν τὴν διακύμανσιν αὐτῶν πρὸς τὰς διακυμάνσεις ἄλλων ἐκτιμητῶν τῶν παραμέτρων β_j. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι οἱ εὑρεθέντες ἐκτιμηταὶ B_j^* εἶναι ἀκριβέστεροι ἐξ ὅλων τῶν ἀμερολήπτων ἐκτιμητῶν τῶν β_j, οἱ ὁποῖοι εἶναι, ὡς καὶ οἱ B_j^*, γραμμικαὶ συναρτήσεις τῶν τυχαίων μεταβλητῶν Y_i. Πρὸς τοῦτο θὰ καλέσωμεν B_j^{**} ἕνα ἄλλον τοιοῦτον ἐκτιμητὴν καὶ θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

$$\mathrm{V}(B_j^*) \leqslant \mathrm{V}(B_j^{**}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \kappa \tag{54}$$

1) Δοθέντων δύο ἐκτιμητῶν Θ_1^* καὶ Θ_2^* μιᾶς παραμέτρου ϑ, θεωρεῖται «*ἀκριβέστερος*» ὁ ἔχων τὴν μικροτέραν διακύμανσιν. Οὕτω, θὰ λέγωμεν ὅτι ἀκριβέστερος εἶναι ὁ Θ_1^*, ἐὰν $\mathrm{V}(\Theta_1^*) \leqslant \mathrm{V}(\Theta_2^*)$.

Ἐπειδὴ οἱ B_j^{**} εἶναι γραμμικαὶ συναρτήσεις τῶν Y_i, θὰ δίδωνται διὰ μιᾶς ἐκφράσεως τῆς μορφῆς :

$$\vec{B}^{**} = \mathbf{A}\vec{Y} \tag{55}$$

ὅπου ἡ μήτρα $\mathbf{A}$ ἔχει $\kappa+1$ γραμμὰς καὶ n στήλας. Ἀκόμη, ἐπειδὴ οἱ B_j^{**} εἶναι ἀμερόληπτοι ἐκτιμηταί, θὰ εἶναι $E(\vec{B}^{**}) = \vec{\beta}$. Ἀλλά :

$$E(\vec{B}^{**}) = E(\mathbf{A}\vec{Y}) = E[\mathbf{A}(\mathbf{x}\vec{\beta} + U)] = \mathbf{A}\mathbf{x}\vec{\beta} + \mathbf{A}E(\vec{U}) = \mathbf{A}\mathbf{x}\vec{\beta}.$$

Ἄρα ἡ μήτρα $\mathbf{A}$ πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη ὥστε :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{I}. \tag{56}$$

Αἱ ζητούμεναι διακυμάνσεις τῶν B_j^{**} εὑρίσκονται εἰς τὴν διαγώνιον τῆς μήτρας τῶν ροπῶν $\mathbf{M}_{\vec{B}^{**}}$. Διὰ τοῦτο θὰ προσπαθήσωμεν νὰ συγκρίνωμεν τὰ διαγώνια στοιχεῖα τῶν μητρῶν τῶν ροπῶν $\mathbf{M}_{\vec{B}^{**}}$ καὶ $\mathbf{M}_{\vec{B}^{*}}$. Πρὸς τοῦτο καλοῦμεν $\mathbf{D}$ τὴν διαφορὰν τῶν δύο μητρῶν $\mathbf{A}$ καὶ $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'$, ὅτε

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}'\mathbf{x}) + \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} + \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{x}$$

καί, λόγῳ τῆς (56), $\mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, δηλαδὴ τὸ γινόμενον $\mathbf{D}\mathbf{x}$ εἶναι μία τετραγωνικὴ μήτρα μὲ $\kappa+1$ γραμμὰς καὶ στήλας, ἔχουσα ὅλα τὰ στοιχεῖα της μηδενικά. Ἐξ ἄλλου :

$$\vec{B}^{**} = \mathbf{A}\vec{Y} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D})\vec{Y} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\vec{Y} + \mathbf{D}\vec{Y} = \vec{B}^{*} + \mathbf{D}(\mathbf{x}\vec{\beta} + \vec{U}) = \vec{B}^{*} + (\mathbf{D}\mathbf{x})\vec{\beta} + \mathbf{D}\vec{U} = \vec{B}^{*} + \mathbf{D}\vec{U}$$

$$\vec{B}^{**} - \vec{\beta} = \vec{B}^{*} - \vec{\beta} + \mathbf{D}\vec{U} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}'\vec{U} + \mathbf{D}\vec{U} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D})\vec{U}$$

$$(\vec{B}^{**} - \vec{\beta})' = \vec{U}'(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D})' = \vec{U}'(\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{D}').$$

Καὶ τότε

$$\mathbf{M}_{\vec{B}^{**}} = E\{(\vec{B}^{**} - \vec{\beta})(\vec{B}^{**} - \vec{\beta})'\} = E\{(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D})\vec{U}\vec{U}'(\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{D}')\} =$$

$$= (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D})E(\vec{U}\vec{U}')(\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{D}') = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D})\sigma^2\mathbf{I}(\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{D}') =$$

$$= \sigma^2(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}' + \mathbf{D})(\mathbf{x}\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{D}') = \sigma^2[\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}'\mathbf{x})\mathbf{S}^{-1} + (\mathbf{D}\mathbf{x})\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{x})' + \mathbf{D}\mathbf{D}'] =$$

$$= \sigma^2[\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}) + \mathbf{0}\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{0} + \mathbf{D}\mathbf{D}'] =$$

$$= \sigma^2[\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{D}']$$

δηλαδή, τελικῶς:

$$M_{\vec{B}^{**}} = M_{\vec{B}^*} + \sigma^2 DD' \qquad (57)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ διαγώνιος ὅρος τῆς μήτρας DD' εἶναι θετικός, διότι ἐὰν θέσωμεν $D = |\delta_{\lambda\rho}|$ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\mu_j^2 = \delta_{j1}^2 + \delta_{j2}^2 + \ldots + \delta_{jn}^2$, προκύπτει ὅτι ὁ διαγώνιος ὅρος τῆς μήτρας $M_{\vec{B}^{**}}$ εἶναι μεγαλύτερος τῶν διαγωνίων ὅρων τῆς $M_{\vec{B}^*}$ κατὰ τὸ γινόμενον $\sigma^2\mu_j^2$. Δηλαδὴ $V(B_j^{**}) = V(B_j^*) + \sigma^2\mu_j^2$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ἡ (54).

Παρατήρησις 1. Ἐὰν ἡ Y (ἢ ἡ U) ἀκολουθῇ κανονικὸν νόμον, τότε, ὡς θὰ ἀποδειχθῇ κατωτέρω, τὸ $\vec{B}^*$ εἶναι ἐκτιμητὴς συμπίπτων πρὸς τὸν προκύπτοντα, διὰ τῆς μεθόδου τῆς maximum de vraisemblance.

Παρατήρησις 2. Τὰ ἀνωτέρω χαρακτηριστικὰ εὑρέθησαν χωρὶς τὰ γίνῃ οἱαδήποτε ὑπόθεσις ἐπὶ τοῦ νόμου πιθανότητος τῆς Y (ἢ τῆς U). Ἐὰν ἡ Y (ἢ ἡ U) ἔχῃ κανονικὴν κατανομήν, τότε ὅλαι αἱ Y_i θὰ ἀκολουθοῦν, ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων, κανονικὸν νόμον καὶ οἱ ἐκτιμηταὶ B_j^*, ὡς γραμμικαὶ συναρτήσεις τῶν Y_i, θὰ ἀκολουθοῦν ἐπίσης κανονικὸν νόμον. Ὁ νόμος οὗτος εἶναι ἐντελῶς γνωστός, διότι διὰ τὴν μήτραν κατανομῆς $\mathbf{\Phi}$ αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν $\mathbf{\Phi} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{S}$, δηλαδὴ $\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{M}_{\vec{B}^*} = \sigma^2\mathbf{S}^{-1}$.

(Προσεχῶς τὸ Δεύτερον Μέρος)