ΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΝ ΤΗ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

(Μέθοδος ἐπιλύσεως τούτων)

ΥΠΟ ΤΟΥ Κ. Κ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

Γενικά: Κατὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν ***Δυναμικῶν ὑποδειγμάτων*** (Dynamic models) εἰς ἅ, ὡς γνωστόν, ὑπεισέρχεται ἡ ἔννοια τοῦ ***χρόνου***, ἡ ἁπλουστέρα μορφὴ τῶν σχέσεων ἐξαρτήσεως, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὡς ὑφισταμένας εἰς ταῦτα, συνίσταται νὰ θεωρήσωμεν τὸ μέγεθος ἑνὸς τῶν μεταβλητῶν ὡς ἐξαρτώμενον, μονονουχί, ἐκ τοῦ μεγέθους τοῦ ἰδίου τούτου μεταβλητοῦ, ὅταν τὸ τελευταῖον ἀναφέρεται εἰς μίαν ἢ πλείονας χρονολογίας κατὰ τὸ παρελθόν.

Ἐὰν π.χ. εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ Ἐθνικὸν εἰσόδημα αὐξάνει ἐτησίως κατὰ 10 %, διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μέγεθος αὐτοῦ κατὰ τὸ τρέχον ἔτος, ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰς διαστάσεις αὐτοῦ κατὰ τὰ τελευταῖα, πρὸ τοῦ τρέχοντος, ἔτη.

Ἀλλὰ ἡ τοιαύτη σχέσις, ὡς εἶναι φανερόν, ἐλαχίστην ἑρμηνείαν παρέχει διότι ἀγνοεῖ τὴν ἐπίδρασιν τῶν λοιπῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται εἰς τὴν ***ἐπένδυσιν*** καὶ τὴν ***κατανάλωσιν***. Πάντως, ἂν ὑφίσταται τοιαύτη σχέσις ἐξαρτήσεως, ἡ ὡς εἴρηται κατάστασις δύναται νὰ ἀναλυθῇ κατὰ τὸν ἁπλούστερον τρόπον.

2. Ἐὰν π.χ. ἔχῃ δοθῇ : $y(t) = 5y(t-1) + 73y(t-2) - 18y(t-3) + 10$ ὅπου $y(t)$ παριστᾷ τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα κατὰ τὸ ἔτος t καὶ $y(t-1)$, $y(t-2)$, $y(t-3)$, ὁμοίως τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα κατὰ τὰ προηγούμενα τοῦ ἔτους t, 3, 2 καὶ

μιᾶς πολιτικῆς ἐξουσίας, χωρὶς τὴν ὁποίαν ἡ Ἕνωσις εἶναι ἄχρηστη λογοκοπία. Οἱ ἄνθρωποι καλῆς θελήσεως ἂς παύσωμεν νὰ διαβουκολούμεθα μὲ τὴν πλάνη πὼς μποροῦν τὰ πράγματα νὰ μείνουν ὅπως εἶναι καὶ ἂς ἀγωνισθοῦμε γιὰ τὴ νέα γραμμή, τὴ μόνη ποὺ στέκεται σὲ πραγματικὰ δεδομένα.

Ἰδιαιτέρως ἀπευθύνομαι στοὺς νέους ποὺ ὀργάνωσαν τὴ σημερινὴ πρώτη ἐφετεινὴ ὁμιλία τους. Ἂς ἀνασκουμπωθοῦν καὶ ἂς συζητήσουν μὲ τοὺς νέους τῆς Εὐρώπης. Ἡ καλύτερη ἰδεολογία γιὰ τοὺς νέους δὲν εἶναι ἐκείνη ποὺ τοὺς σερβίρεται ἀπὸ τοὺς παληοὺς ἕτοιμη, εἶναι ἐκείνη ποὺ δημιουργοῦν οἱ ἴδιοι, πατῶντας μὲν στὴν πραγματικότητα, μὰ καὶ προσβλέποντας στὸ βασικώτερο ἰδανικὸ τῶν πολιτισμένων ὄντων ; Τὴν διαρκῆ, τὴν ἀτέρμονα, τὴν ἀκατάβλητον προσπάθειαν γιὰ τὴν συνεχῆ καλυτέρευσιν τῆς τύχης τῶν ἀνθρώπων.

Ἡ ἱστορία ξανακαλεῖ γιὰ μιὰ ἀκόμη, ἴσως τελευταία, φορὰ τοὺς λαοὺς τῆς Εὐρώπης. Ἂς τὴν ἀκούσουμε ἐπὶ τέλους. Καὶ ἂς ἀγωνισθοῦμε γιὰ νὰ πείσουμε καὶ τοὺς ἄλλους, ὅσους εἶναι καρφωμένοι στὶς ψυχώσεις, στοὺς μύθους στὰ συμφέροντα καὶ στὶς ὑστεροβουλίες τους, ὅσους πιστεύουν ἢ καμώνονται πὼς πιστεύουν στοὺς νεκρούς, ἂς ἀγωνισθοῦμε νὰ τοὺς πείσουμε ν' ἀκούσουν κι' αὐτοὶ τὸ κάλεσμα τῆς ἱστορίας ποὺ ἠχεῖ καὶ πάλι. Δὲν ἐπιβάλλει τὸ δρόμο αὐτὸ μόνον τὸ συμφέρον τῆς Εὐρώπης. Τὸ ἐπιβάλλει ἡ πίστις εἰς τὸν ἄνθρωπο ποὺ κινδυνεύει νὰ χάσῃ τὸν ἀνθρωπισμόν του. Καί, ὅπως εἶπε ὁ Μένανδρος.

«Ὡς χαρίεν ἄνθρωπος, ἂν ἄνθρωπος ᾖν».

1 έτη, τότε δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ ἄνω ἐξίσωσις, ***ἐξίσωσις διαφορῶν τρίτης τάξεως***, ἐμφαίνει ὅτι τὸ κατὰ τὴν τρέχουσαν περίοδον ἐθνικὸν εἰσόδημα ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἰσοδήματος, τῶν προηγηθέντων τῆς τρεχούσης περιόδου, τριῶν τελευταίων περιόδων. Ἐὰν δὲ γνωρίζωμεν ὅτι $y(t-2) = 2$, $y(t-2) = 1$ καὶ $y(t-3) = 1{,}5$, τότε: $y(t) = 5 . 2 + 73 . 1{,}0 - 18 . 1{,}5 + 10 = 66$ εἶναι τὸ εἰσόδημα κατὰ τὴν περίοδον t, εἶναι δὲ ἡ y(t) ***γραμμικὴ ἐξίσωσις διαφορῶν***, καθ' ἃ ἐτονίσθη ἤδη, τρίτης τάξεως, μὲ σταθεροὺς συντελεστάς. Καλεῖται αὕτη ***τρίτης τάξεως***, διότι ἡ κατὰ τὴν περίοδον t κατάστασις ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τριῶν προηγουμένων τῆς t περιόδων, $t-1$, $t-2$ καὶ $t-3$ καὶ οὐχὶ ἐκ μόνης τῆς καταστάσεως τῆς περιόδου t. Εἶναι δὲ ***γραμμική***, διότι οἱ εἰς αὐτὴν περιλαμβανόμενοι ὅροι εἶναι πάντες πρώτου βαθμοῦ καὶ ἐπὶ πλέον ἔχει σταθεροὺς συντελεστάς, διότι αἱ τιμαὶ αὐτῶν παραμένουν ἀναλλοίωτοι καθ' ὅλην τὴν θεωρουμένην περίοδον.

3. Σκοπὸς τῆς παρούσης εἶναι τὰ καταδείξῃ πῶς σχέσεις τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἐξευρίσκονται εἰς μερικὰ ὑποδείγματα ἅτινα καταρτίζονται καὶ ποία ἡ τεχνικὴ ἥτις βοηθεῖ διὰ νὰ παράσχωμεν πληροφορίας διὰ τὸ μέλλον, συναρτήσει δεδομένων ἀναφερομένων εἰς τὸ παρελθόν.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι $\Delta y(t) = y(t) - y(t-1)$, εἶναι ἡ πρώτη διαφορὰ τῆς y(t). Ἑπομένως ἡ σχέσις τῆς μορφῆς:

$$y(t) = \alpha_1 y(t-1) + \alpha_2 (t-2) + \ldots \alpha_n y(t-n) + \beta \qquad (2)$$

θὰ καλῆται ***ἐξίσωσις γραμμικὴ διαφορῶν n τάξεως***, μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς καὶ σταθερόν, ἐπίσης, ὅρον.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ καθίσταται σαφὲς ὅτι θὰ ἔχωμεν γραμμικὰς ἐξισώσεις διαφορῶν πρώτης, δευτέρας, τρίτης ... τάξεως, μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς καὶ μετὰ ἢ ἄνευ σταθεροῦ ὅρου.

4. ***Ἐπίλυσις γραμμικῶν ἐξισώσεων διαφορῶν πρώτης τάξεως.*** Πᾶσα γραμμικὴ ἐξίσωσις διαφορῶν τῆς μορφῆς:

$$y(t) = \alpha\, y(t-1) + \beta$$

καλεῖται πρώτης τάξεως.

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν ταύτην δέον νὰ γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς διὰ $t=0$, δηλ. $y(0) = c_0$, ἥτις καλεῖται ***ἀρχικὴ κατάστασις***.

Ἡ ***χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις*** τῆς δοθείσης εὑρίσκεται, παραλειπομένου τοῦ σταθεροῦ ὅρου δηλ. εἶναι ἡ: $y(t) = \alpha\, y(t-1)$ καὶ τιθεμένου: $y(t) = x^t$ καὶ $y(t-1) = x^{t-1}$, ἔχομεν: $x^t = x^{t-1}\alpha$ ἢ $x = \alpha$.

Δηλ. δεχόμεθα ὅτι ἡ $X(t) = x^t$ πληροῖ τὴν χαρακτηριστικὴν καὶ ἡ $Z(t)=z$ τὴν δοθεῖσαν καὶ συνεπῶς ὅτι $y(t) = X(t) + Z(t)$.

Συνεπῶς ἔχομεν $z = z\alpha + \beta$ ἢ $z(1-\alpha) = 6$ ἢ $z = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$

Κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἔχωμεν:

$$y(t) = X(t) + Z(t) = K(x)^t + z$$

καὶ διὰ $t = 0$, $y(0) = C_0 = K + z$ ἢ $K = C_0 - z$

Ἡ λύσις ὅθεν τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως διαφορῶν πρώτης τάξεως θὰ εἶναι γενικῶς : $y(t) = K \cdot M^t + z$ (ὅπου : $M = x$)

Ἐφαρμογή. Δίδεται $y(t) = 4y(t-1)$ καὶ $y(0) = C_0 = 3$

θὰ ἔχωμεν : $x^t = 4x^{t-1}$ ἢ $x = 4$

Ἑπομένως $y(t) = K(4)^t$ καὶ διὰ $t = 0$

$y(0) = 3 = K4^0 = K$ δηλ. $K = 3$, διότι $4^0 = 1$

Κατ' ἀκολουθίαν : $y(t) = 3 \cdot 4^t$

καὶ διὰ $t = 0$: $y(0) = 3$

διὰ $t = 1$: $y(1) = 3 \cdot 4 = 12$

διὰ $t = 2$: $y(2) = 3 \cdot 4^2 = 48$ κ.λ.π.

5. Ὁ κ. Harrod καταρτίζων δυναμικὸν σύστημα ἐστηρίχθη ἐπὶ τῶν κάτωθι ὑποθέσεων :

α) Ἡ ἀποταμίευσις τοῦ κοινωνικοῦ συνόλου, κατά τινα περίοδον t, εἶναι, ὑπὸ ἔποψιν ἀναλογίας, σταθερὰ καὶ ἴση πρός τι ποσοστὸν τοῦ εἰσοδήματος κατὰ τὴν περίοδον ταύτην δηλ. $S(t) = sy(t)$ ὅπου $y(t)$ τὸ εἰσόδημα κατὰ τὴν περίοδον t.

β) Αἱ ὑπὸ τῶν ἐπιχειρηματιῶν ἐπιθυμηταὶ ἐπενδύσεις $I(t)$ εἶναι σταθεραὶ καὶ ἴσαι πρὸς g φορὰς τῆς αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος τῆς περιόδου t ὡς πρὸς τὴν περίοδον t—1 δηλ. $I(t) = g\,[\,y(t) - y(t-1)\,]$

ἀλλὰ ἵνα αἱ ἐπιθυμίαι τῶν ἐπενδυόντων ἱκανοποιοῦνται, θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν ἐξίσωσιν τῆς ἀποταμιεύσεως πρὸς τὴν ἐπένδυσιν δηλ. :

$$S(t) = I(t)$$

ἢ $$sy(t) = g\,[y(t) - y(t-1)] = gy(t) - gy(t-1)$$

ἢ $$(g-s)\,y(t) = gy\,(t-1)$$

ἢ τέλος $$y(t) = \frac{g}{g-s} \cdot y\,(t-1) \qquad (\text{ὅπου } g > s)$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ ἁπλῆν ***γραμμικὴν ἐξίσωσιν διαφορῶν πρώτης τάξεως*** ἄνευ σταθεροῦ ὅρου. Διὰ τὴν ἐπίλυσιν ταύτης θέτομεν τὴν συνθήκην $y(0) = C_0$, δηλ. ὅτι τὸ εἰσόδημα συμπεριφέρεται ἀπὸ περιόδου εἰς περίοδον ὡς ἄν, αἱ ἐπιθυμίαι τῶν ἐπιχειρηματιῶν, οἱ ὁποῖοι ἐπιδιώκουν ἐπενδύσεις, ἱκανοποιοῦνται πλήρως. Ἑπομένως, ὅταν δίδεται ἡ ἀρχικὴ κατάστασις $y(0) = C_0$, ἡ μορφωθεῖσα ἐξίσωσις καθιστᾷ ἡμᾶς ἱκανοὺς νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἠγγυημένον εἰσόδημα διά τινα μελλοντικὴν περίοδον καὶ συνεπῶς, οὕτω, νὰ ἔχωμεν χρήσιμόν τινα πληροφορίαν.

6. Ἡ γενικὴ ὅθεν λύσις τῆς ἐξισώσεως διαφορῶν : $y(t) = \alpha y(t-1) + \beta$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν : $y(t) = A \cdot m^t + z$

ὅπου A καὶ m ὡρισμένοι ἀριθμοί, καθοριζόμενοι ὡς ἀνωτέρω.

Ἂν m ἀριθμὸς θετικός, τότε ἂν $m = 1$, $y(t) = A + z$ δηλ. πάντοτε, δι' ὅλας τὰς μελλοντικὰς περιόδους, ἡ τιμὴ τῆς $y(t)$ θὰ εἶναι ***σταθερά***.

Ἐὰν $m > 1$, φανερὸν εἶναι ὅτι, $m^2 > m$, $m^3 > m^2$, $m^4 > m^3$ κλπ. Ἐὰν $m < 0$ δηλ. ἀριθμὸς ἀρνητικός, τότε μόνον αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τοῦ m θὰ εἶναι θετικαί, δηλ. $y(t)$ θὰ συμπεριφέρεται ὡς ἂν m ἦτο θετικόν, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι $y(t)$ κατὰ μίαν περίοδον θὰ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ τὴν ἀμέσως ἑπομένην θετικὸν κ.ο.κ.

Ἐφαρμογή : Ἄν : $y(t) = 3y(t-1) + 10$ καὶ $y(0) = 12$, τότε

$$z = 3z + 10 \quad \eta \quad -2z = 10 \quad \eta \quad z = -5$$

ἐξ ἄλλου $\quad x^t = 3x^{t-1} \quad \eta \quad x = m = 3$

ὅθεν $\quad y(t) = A(x)^t + z = A(3)^t - 5$

ἀλλὰ διὰ $t=0$, $\quad y(0) = 12 = A \cdot 3^0 - 5 = A - 5 \quad \eta \quad A = 17$

Ἑπομένως : $\quad y(t) = 17(3)^t - 5$

οὕτω διὰ $t = 0$, $\quad y(0) = 17-5 = 12$

διὰ $t = 1$, $\quad y(1) = 51-5 = 46$

διὰ $t = 2$, $\quad y(2) = 17 \cdot 9 - 5 = 148$ κλπ.

7. ***Ἐπίλυσις γραμμικῶν ἐξισώσεων διαφορῶν δευτέρας τάξεως.***

Ἐὰν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις : $y(t) = Ay(t-1) + By(t-2) + \Gamma$, ἀπαιτεῖται, πρὸς ἐπίλυσιν αὐτῆς, νὰ εἶναι γνωστὴ ἡ κατάστασις εἰς $t=0$ καὶ $t=1$, δηλ. $y(0) = C_0$ καὶ $y(1) = C_1$.

Πρὸς τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι $X(t)$ πληροῖ τὴν $y(t) = Ay(t-1) + By(t-2)$ καὶ ἡ $Z(t)$, τὴν $y(t) = Ay(t-1) + By(t-2) + \Gamma$ καὶ συνεπῶς $y(t) = X(t)+Z(t)$

Ἡ χαρακτηριστικὴ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι :

$$y(t) = Ay(t-1) + By(t-2)$$

καὶ τιθεμένου $\quad y(t) = x^t, \quad y(t-1) = x^{t-1} \quad$ καὶ $\quad y(t-2) = x^{t-2}$

ἤτοι $\quad x^t = A\,x^{t-1} + B\,x^{t-2}$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ x^{2-t}, λαμβάνομεν :

$$x^2 = Ax + B \quad \eta \quad x^2 - Ax - B = 0$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἄνω ἐξισώσεως εἶναι :

$$x_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

θέτομεν νῦν $Z(t) = z$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$z = zA + zB + \Gamma \quad \eta \quad z = \frac{\Gamma}{1 - A - B}$$

ὅπου δέον $z \neq 0$. Ἐὰν $z = 0$, τότε θέτομεν $Z(t) = zt$ καὶ ἄρα

$$zt = Az(t-1) + Bz(t-2) + \Gamma$$
$$= Azt - Az + Bzt - 2Bz + \Gamma$$

ἢ

$$zt\,(1 - A - B) + z\,(A + 2B) = \Gamma$$

Ἀλλά, βάσει τῆς προηγουμένης περιπτώσεως $(1 - A - B) = 0$, ἐξ ὑποθέσεως.

Συνεπῶς : $\quad z = \dfrac{\Gamma}{A + 2B} \quad$ ὅπου $z \neq 0$.

Ἐὰν καὶ πάλιν $z = 0$, τότε θέτομεν $Z(t) = zt^2$ καὶ ἄρα

$$zt^2 = Az(t-1)^2 + Bz(t-2)^2 + \Gamma$$
$$= Az(t^2-2t+1) + Bz(t^2-2t+4) + \Gamma$$
$$= Azt^2 - 2Azt + Az + Bzt^2 - 4Bzt + 4B + \Gamma$$

ἢ

$$zt^2(1-A-B) + 2zt(A+2B) - z(A+4B) = \Gamma$$

ἀλλὰ αἱ δύο πρῶται παρενθέσεις εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, μηδέν, ὅθεν :

$$z = \frac{-\Gamma}{B + 4B}$$

ὅπου δέον $z \neq 0$. Ἂν ὄχι, θὰ τεθῇ καὶ πάλιν $Z(t) = zt^3$ κλπ.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τελικῶς :

$$y(t) = \alpha(x_1)^t + \beta(x_2)^t + z$$

ἀλλὰ διὰ $t = 0$, $\quad y(0) = c_0 = \alpha + \beta + z$

καὶ διὰ $t = 1$, $\quad y(1) = c_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 + z$

τὸ σύστημα τοῦτο ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν α καὶ β.

8. ***Ἐφαρμογή***. Δίδεται : $y(t) = 2y(t-1) + 3(t-2) + 8$, καὶ $y(0) = 6$ καὶ $y(1) = 2$.

Ἡ χαρακτηριστικὴ τῆς δοθείσης εἶναι : $\quad x^t = 2x^{t-1} + 3x^{t-2}$

ἢ $\quad x^2 = 2x + 3 \quad$ ἢ $\quad x^2 - 2x - 3 = 0$

ἄρα :

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

Συνεπῶς $\quad y(t) = \alpha(3)^t + \beta(-1)^{t-1}$

ἀλλὰ $Z(t) = z$, ὅθεν

$$z = 2z + 3z + 8 \quad \text{δηλ.}$$

$$-4z = 8 \quad \text{ἢ} \quad z = -2$$

Ἑπομένως ἡ γενικὴ λύσις εἶναι : $y(t) = X(t) + Z(t) = \alpha(3)^t + 6(-1)^t - 2$.

ἀλλὰ διὰ $t = 0$, $\quad y(0) = 6 = \alpha + \beta - 2 \quad$ ἢ $\quad \alpha + \beta = 8$

καὶ διὰ $t = 1$, $\quad y(1) = 2 = \alpha \,.\, 3 - \beta - 2 \quad$ ἢ $\quad 3\alpha - \beta = 4$

ἑπομένως : $4\alpha = 12$ ἢ $\alpha = 3$. ὅθεν $\alpha + \beta = 8$ ἢ $3 + \beta = 8$ ἢ $\beta = 5$

Κατ' ἀκολουθίαν $\quad y(t) = 3(3)^t + 5(-1)^t - 2$

οὕτω διὰ $t = 0$, $\quad y(0) = 3 + 5 - 2 = 6$

καὶ διὰ $t = 1$, $\quad y(1) = 3 \,.\, 3 - 5 - 2 = 2$ κλπ.

9. ***Ἐφαρμογή***. Ὑποθέσωμεν ὅτι κατά τινα περίοδον τὸ σχέδιον τῶν παραγωγῶν ἀποβλέπει εἰς τὴν παραγωγὴν προϊόντων, ἅτινα προσδοκοῦν νὰ πωλήσουν μὲ τὰς τρεχούσας τιμὰς (ἐνταῦθα ἀγνοεῖται ἡ δυνατότης τῆς μεταβολῆς τῶν τιμῶν, οὕτως ὥστε ἡ χρηματικὴ ἀξία τοῦ προϊόντος δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ὡς δείκτης τῆς φυσικῆς παραγωγῆς). Θὰ διασπάσωμεν τὴν ἐκτιμωμένην ζήτησιν τῶν προϊόντων εἰς δύο τμήματα, τὴν ἀφορῶσαν καταναλωτικὰ ἀγαθὰ καὶ τὴν τοιαύτην κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν.

Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ παραγωγοὶ προσδοκοῦν ζήτησιν διὰ τὰ καταναλωτικὰ ἀγαθά, ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἀνάλογος τοῦ εἰσοδήματος καὶ ζήτησιν διὰ τὰ κεφαλαιουχικὰ ἀγαθά, ἡ ὁποία νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ποσοστοῦ τῆς αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος, ἐνεργοῦντες οὕτω βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιταχύνσεως *.

---

* W. Baumol : Economic Dynamics 1951.

Ἐπειδή, λοιπόν, οὗτοι εἶναι ἀνέφικτον νὰ γνωρίζουν τὸ εἰσόδημα περιόδου τινος, κατὰ τὴν ἔναρξιν αὐτῆς, ὅταν καταρτίζουν τὰ σχέδιά των, ὑποθέτομεν ὅτι αἱ ἐκτιμήσεις αὐτῶν γίνονται, βάσει τῶν μᾶλλον προσφάτων πληροφοριῶν καὶ συνεπῶς οὗτοι ἐλπίζουν ὅτι τὸ εἰσόδημα τῆς περιόδου αὐτῆς θὰ εἶναι, τοὐλάχιστον, ἴσον πρὸς τὸ εἰσόδημα τῶν προηγουμένων περιόδων. Μεταφράζοντες συμβολικῶς τὰς ὡς ἄνω ὑποθέσεις ἔχομεν :

$$y(t) = C(t) + I(t)$$

ὅπου $y(t)$ τὸ ἐθνικὸν προϊὸν (εἰσόδημα) θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐκτιμηθεῖσαν ζήτησιν καταναλωτικῶν ἀγαθῶν $C(t)$ καὶ τὴν τοιαύτην κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν $I(t)$. Ἐπίσης ὅμως θὰ ἔχωμεν : $C(t) = cy(t-1)$

ὅπου c ἡ ***ὁρικὴ*** καὶ ***μέση ροπὴ πρὸς κατανάλωσιν***, ἔστω $c = 1/4$ καὶ τέλος : $I(t) = B[y(t-1) - y(t-2)]$, ὅπου B σταθερὰ—ὁ ***συντελεστὴς ἐπιταχύνσεως***, ἔστω $B = 5$ π.χ.

Ἐὰν νῦν ἀντικαταστήσωμεν τὰ $C(t)$ καὶ $I(t)$ εἰς τὴν $y(t)$, λαμβάνομεν :

$$y(t) = C(t) + I(t) = cy(t-1) + B[y(t-1) - y(t-2)]$$
$$= (c + B)\,y(t-1) - By(t-2)$$

ἢ $$y(t) = 5\frac{1}{4}\,y(t-1) - 5y(t-2)$$

ἥτις παρέχει τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος (εἰσοδήματος) κατά τινα περίοδον t καὶ τοῦ ἐθνικοῦ προϊόντος κατὰ τὰς δύο προηγουμένας περιόδους. Τὸ σύστημα τοῦτο συμπληροῦται, λαμβανομένων ὑπ' ὄψει τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν : $y(0) = C_0 = 3$ καὶ $y(1) = C_1 = 6{,}5$ π.χ.

θὰ ἔχωμεν : $x^2 = 5\frac{1}{4}x - 5$ ἢ $x^2 - 5{,}25x + 5 = 0$

καὶ

$$x_1 = \frac{5{,}24 + \sqrt{7{,}5625}}{2} = 4 \quad \text{καὶ} \quad x_2 = 1{,}25$$

ὅθεν

$$y(t) = \alpha(x_1)^t + \beta(x_2)^t = \alpha(4)^t + \beta(1{,}25)^t$$

ἀλλὰ διὰ $t = 0$, $y(0) = 3 = \alpha + \beta$

καὶ διὰ $t = 1$, $y(1) = 6{,}5 = 4\alpha + 1{,}25\beta$

δηλ.

$$\alpha + \beta = 3 \quad \text{ἢ} \quad 4\alpha + 4\beta = 12$$
$$4\alpha + 1{,}25\beta = 6{,}5 \qquad 4\alpha + 1{,}25\beta = 6{,}5$$

ἤτοι : $2{,}75\beta = 5{,}5$ ἢ $\beta = 2$ καὶ $\alpha + \beta = 3$ ἢ $\alpha + 2 = 3$ ἢ $\alpha = 1$

Ἑπομένως : $y(t) = 1(4)^t + 2(1{,}25)^t$

οὕτω διὰ $t = 0$, $y(0) = 1 + 2 = 3$

καὶ διὰ $t = 1$, $y(1) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1{,}25 = 4 + 2{,}50 = 6.5$ κλπ

10. ***Ἐφαρμογή.*** Ἡ ζήτησις τῆς ζαχάρεως εἰς Η. Π. Α. δίδεται ὑπό :

$$p(t) = 2{,}34 - 1{,}34\,D(t)$$

καὶ ἡ προσφορὰ αὐτῆς ὑπό : $D(t) = 0{,}5 + 0{,}6\,p(t-1)$

κατὰ H. Schultz (εἰς G. Tintner : Mathematics and Statistics for Economists 1955), ὑποτιθεμένου ὅτι : $D(0) = 1{,}25$.

Θὰ ἔχωμεν : $p(t) = 2{,}34 - 1{,}34\,[0{,}5 + 0{,}6\,p(t-1)]$

ἢ $p(t) = 1{,}67 - 0{,}804\,p(t-1)$

Ἐπειδὴ ὅμως : $D(0) = 1{,}25$

θὰ ἔχωμεν καί : $p(0) = 2{,}34 - 1{,}34\,D(0) = 2{,}34 - 1{,}34 \,.\, 1{,}25 = 0.665$

Ἀλλὰ $x^t = -804\,x^{t-1}$ ἤτοι $x = -0{,}804$

καὶ $z = -0{,}804z + 1{,}67$ ἢ $z = 0{,}925$

κατ' ἀκολουθίαν : $y(t) = A \,.\, m^t + z$

$$= A\,(-0{,}804)^t + 0{,}925$$

καὶ διὰ $t = 0$ $p(0) = 0{,}665 = A + 0{,}925$ ἢ $A = -0{,}26$

Ἑπομένως ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως τῆς Ζητήσεως εἶναι :

$$p(t) = -0{,}26\,(-0{,}804)^t + 0{,}925$$

οὕτω διὰ $t=0$, $p(0) = -0{,}26 + 0{,}925 = 0{,}665$ κλπ.

11. ***Ἐφαρμογή***. Ὑποτίθεται ὅτι ὑφίσταται μία οἰκονομία ὅπου ὅλον τὸ εἰσόδημα καταναλίσκεται καὶ ὅπου εἰς χρόνον t, ἡ κατανάλωσις εἶναι σταθερὸν πολλαπλάσιον α τοῦ εἰσοδήματος εἰς χρόνον t—1. Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ κατανάλωσις (=εἰσόδημα) εἶναι A, τότε

$$y(t) = \alpha\, y(t-1) + A \qquad \text{δηλ.} \qquad y(0) = A \ (*)$$

τούτου τεθέντος : $x^t = \alpha\, x^{t-1}$ ἢ $x = \alpha$

καὶ $z = \alpha z + A$ ἢ $z = \dfrac{A}{1-\alpha}$

ἀλλὰ

$$y(t) = K(\alpha)^t + z = K(\alpha)^t + \frac{A}{1-\alpha}$$

καὶ διὰ $t = 0$, $y(0) = A$. ὅθεν

$$A = K + \frac{A}{1-\alpha} \qquad \text{ἢ} \qquad K = -\frac{A\alpha}{1-\alpha}$$

συνεπῶς

$$y(t) = \frac{A}{1-\alpha} - \frac{A\alpha}{1-\alpha}(\alpha)^t$$

ἐὰν νῦν $\alpha < 1$, τότε $-\dfrac{A\,\alpha \,.\, \alpha^t}{1=\alpha} = -\dfrac{A\,\alpha^{t+1}}{1-\alpha} = -\dfrac{A}{\dfrac{1}{\alpha^{t+1}} - \dfrac{1}{.\,\alpha^t}}$

καὶ διὰ $t \to \infty$, τότε ὅριον τοῦ παρανομαστοῦ εἶναι τὸ μηδέν.

Συνεπῶς τὸ y(t) τείνει πρὸς $\dfrac{A}{1-\alpha}$ ὅταν $t \to \infty$

* G. Tintner, op. cit.

Ἐὰν $\alpha = 0,712$ (ἐκτιμήσεις T. Haavelmo) διὰ τὰς Η.Π.Α. (1930—1944)

καὶ $A = 10^9 = 1\,000\,000\,000$, τότε

$$y(3) = \frac{10^9}{1 - 0,712} - \frac{10^9 (0,712)^4}{1 - 0,712} =$$

$$= \frac{10^9}{1 - 0,712} [1 - (0,712)^4] = \frac{10^9}{0,288} . 0,2569 = 2,58 . 10^9$$

$$= 2\,580\,000\,000 \text{ περίπου.}$$

12. ***Πολλαπλαῖ ρίζαι*** : Ἐὰν δοθῇ : $y(t) = 4y(t-1) - 4y(t-2)$ καὶ αἱ ἀρχικαὶ συνθῆκαι εἶναι : $y(0) = 5$ καὶ $y(1) = 6$, τότε

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

δηλ. $$x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 16}}{2} = 2 \quad \text{καὶ} \quad x_2 = 2$$

ἤτοι : $x_1 = x_2 = 2$. Συνεπῶς ὑφίσταται πολλαπλότης 2.

Κατὰ ταῦτα :

$$y(t) = \alpha(x_1)^t + \beta(x_2)^t = \alpha(2)^t + \beta(2)^t = (\alpha + \beta)\, 2^t$$

Ἔχομεν ὅμως βάσει τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν :

$$y(0) = 5 = \alpha + \beta \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha + \beta = 5 = d$$

καὶ $$y(1) = 6 = 2(\alpha + \beta) \qquad \text{ἢ} \qquad \alpha + \beta = 3 = d$$

ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατόν, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς d νὰ ἰσοῦται, ταυτοχρόνως, πρὸς 3 καὶ 5.

Εἰς τὴν περίπτωσιν πολλαπλότητος ριζῶν διὰ νὰ λύσωμεν τὴν γραμμικὴν ἐξίσωσιν διαφορῶν δευτέρας τάξεως, ἱκανοποιούσης ἅμα τῆς λύσεως τὰς ἀρχικὰς συνθήκας, θέτομεν $x_1 = x_2$ καὶ $y(t) = (x_1)^t$ καὶ $y(t) = t(x_1)^t$ ὅτε

$$y(t) = \beta\,\alpha^t + \gamma\, t\, \alpha^t \qquad \text{ὅπου} \qquad x_1 = x_2 = \alpha$$

κατὰ ταῦτα διὰ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν δέον νὰ ἔχωμεν :

$$y(t) = \beta(2)^t + \gamma\, t\, (2)^t$$

καὶ διὰ $t = 0$, $\quad y(0) = 5 = \beta$

καὶ διὰ $t = 1$, $\quad y(1) = 2\beta + 2\gamma = 6$ ἢ $10 + 2\gamma = 6$ ἢ $\gamma = -2$.

Ἑπομένως ἡ λύσις εἶναι $\quad y(t) = 5(2)^t - 2t\,(2)^t$

πράγματι διὰ $t = 0$, $\quad y(0) = 5$

καὶ διὰ $t = 1$, $\quad y(1) = 5 . 2 - 2 . 2 = 6$

13. ***Ἐφαρμογή.*** Δίδεται :

$$y(t) = 2y(t-1) - y(t-2) + 12 \quad \text{καὶ} \quad y(0) = 5 \quad \text{καὶ} \quad y(1) = 9$$

Θέτομεν $$X(t) = 2X(t-1) - X(t-2)$$

ἢ $$x^2 - 2x + 1 = 0$$

ἤτοι $$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - 4}}{2} = 1 \quad \text{καὶ} \quad x_2 = 1$$

δηλ. $x_1 = x_2 = 1$.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν :

$$y(t) = \alpha(1)^t + \beta\, t(1)^t = \alpha + \beta t$$

καὶ $\quad z = 2z - z + 12 \quad$ ἢ $\quad 12 = 0$

ἑπομένως τὸ ἐξαγόμενον στερεῖται οἱασδήποτε ἐννοίας.

Θέτομεν $Z(t) = zt$ καὶ ἄρα $\quad zt = 2z(t-1) - z(t-2) + 12$

$$= 2zt - 2z - zt + 2z + 12$$

ἢ $\quad 12 = 0$

ἐπαναλαμβάνομεν, θέτοντες $\quad zt^2 = Z(t)$, ἄρα

$$zt^2 = 2z\,(t-1)^2 - z(t-2)^2 + 12$$

$$= 2zt^2 - 4zt + 2z - zt^2 + 4zt + 4z + 12$$

$$= zt^2 - 2z + 12 \quad \text{ἢ} \quad z = 6$$

οὕτως ὥστε ἔχομεν : $\quad Z(t) = zt^2 = 6\,.\,t^2 \quad$ καὶ ἑπομένως ἡ λύσις εἶναι :

$$y(t) = X(t) + Z(t) = \alpha + \beta t + 6t^2$$

Πράγματι διὰ $t = 0$, $\quad y(0) = 5 = \alpha$

καὶ διὰ $t = 1$, $\quad y(1) = 9 = \alpha + \beta + 6 \quad$ ἢ $\quad \alpha + \beta = 3$

ἑπομένως $\quad 5 + \beta = 3$, $\quad$ ἢ $\quad \beta = -2$

Κατὰ συνέπειαν $\quad y(t) = 5 - 2t + 6t^2$

καὶ διὰ $t = 0$, $\quad y(0) = 5$

καὶ διὰ $t = 1$, $\quad y(1) = 5 - 2 + 6 = 9$ κλπ.

14. ***Ἐπίλυσις γραμμικῶν ἐξισώσεων διαφορῶν τρίτης τάξεως.*** Ἡ ἐπίλυσις τούτων γίνεται, ὡς ἐν τοῖς πρόσθεν, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω.

Δίδεται : $\quad y(t) = y(t-1) + 10y(t-2) + 8y(t-3) + 36$

καὶ $y(0) = -15$, $\quad y(1) = 26 \quad$ καὶ $\quad y(2) = -30$

θέτομεν $Z(t) = z$. Ἄρα

$$z = z + 10z + 8z + 36 \quad \text{ἢ} \quad -18z = 36 \quad \text{ἢ} \quad z = -2$$

Ἡ χαρακτηριστικὴ τῆς δοθείσης εἶναι : $\quad x^t = x^{t-1} + 10\,x^{t-2} + 8\,x^{t-3}$

ἢ $\quad x^3 = x^2 + 10x + 8$

ταύτης αἱ ῥίζαι εἶναι $\quad x_1 = 4$, $\quad x_2 = -2 \quad$ καὶ $\quad x_3 = -1$, $\quad$ διότι

$$f(4) = f(-2) = f(-1) = 0$$

Ἑπομένως : $\quad X(t) = \alpha(4)^t + \beta(-2)^t + \gamma(-1)^t$

καὶ $\quad y(t) = X(t) + Z(t) = \alpha(4)^t + \beta(-2)^t + \gamma(-1)^t - 2$

Ἀλλὰ διὰ $t=0$, $\quad y(0) = -15 = \alpha + \beta + \gamma - 2 \quad$ ἢ $\quad \alpha + \beta + \gamma = -13$

διὰ $t=1$, $\quad y(1) = 26 = 4\alpha - 2\beta - \gamma - 2 \quad$ ἢ $\quad 4\alpha - 2\beta - \gamma = 28$

καὶ διὰ $t=2$, $\quad y(2) = -30 = 16\alpha + 4\beta + \gamma - 2 \quad$ ἢ $\quad 16\alpha + 4\beta + \gamma = -28$

Ἐκ τοῦ συστήματος :

$$\alpha + \beta + \gamma = -13$$

$$4\alpha - 2\beta - \gamma = 28$$

$$16\alpha + 4\beta + \gamma = -28$$

λαμβάνομεν, ἐπιλύοντες κατὰ τὰ γνωστά, $\alpha = 1$, $\beta = -10$, $\gamma = -4$

ὅθεν $y(t) = (4)^t - 10(-2)^t - 4(-1)^t - 2$

Νῦν διὰ $t = 0$, $y(0) = 1 - 10 - 4 - 2 = -15$

διὰ $t = 1$, $y(1) = 4 + 20 + 4 - 2 = 26$

διὰ $t = 2$, $y(2) = 16 - 40 - 4 - 2 = -30$ κλπ.

δηλ. αἱ τιμαὶ τῆς $y(t)$ ***κυμαίνονται***, οὖσαι ὅτε μὲν ἀρνητικαὶ ὁτὲ δὲ θετικαί, διότι αἱ ρίζαι $x_2 = -2$ καὶ $x_3 = -1$ καὶ διότι οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ εἶναι -10 καὶ -4.

15. Συνήθως εἰς τὴν οἰκονομετρίαν αἱ γραμμικαὶ ἐξισώσεις διαφορῶν p τάξεως, συμβολικῶς, δίδονται ὑπό :

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{s=1}^{p} \alpha_s y_{t-s} + \varepsilon_t$$

ὅπου $y(t) = y_t$ καὶ $y(t-s) = y_{t-s}$ $(s = 1, 2, 3 \ldots)$

Εἰς ταύτην τὰ τυχαῖα μεταβλητὰ (variate) ε_t δὲν ***αὐτοσυσχετίζονται***, ἔχουν μέσον τὸ μηδὲν καὶ διακύμανσιν σ^2 — δηλ. ταῦτα ἀκολουθοῦν τὸν Νόμον τοῦ Gauss—Laplace.

Ἡ ἄνω ἐξίσωσις, εἰδικώτερον, καλεῖται ***αὐτοπαλίνδρομος γραμμικὴ ἐξίσωσις p τάξεως.***

Ἂν νῦν αἱ ρίζαι τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως

$$X^p = \sum_{s=1}^{p} \alpha_s X^{p-s}$$

εἶναι, ***κατ' ἀπόλυτον τιμήν***, μικρότεραι τῆς μονάδος, τότε δὲν ὑφίσταται οὔτε ἐξελικτικὴ συνιστῶσα οὔτε αἰωνόβιος τάσις.

Πᾶσαι αἱ πιθανότητες εἶναι ***ἀναλλοίωτοι*** ἔναντι τῆς μεταθέσεως τοῦ ἄξονος τῶν ***χρόνων***.

Ἡ μέθοδος τῆς ***μεγίστης πιθανότητος*** (Maximum likelihood) ἄγει εἰς τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων.

$$\sum_{t=1}^{N} y_t = N\alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sum_{t=1}^{N} y_{t-i}$$

$$\sum_{t=1}^{N} y_t\, y_{t-j} = \alpha_0 \sum_{t=1}^{N} y_{t-j} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{t=1}^{N} \alpha_i\, y_{t-i}\, y_{t-j} \qquad (j=1, 2, \ldots p)$$

αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἢ ***αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις***, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ὅταν ἐφαρμόζεται ἡ γνωστὴ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων (Least squares).

Ἡ διακύμανσις (variance) δίδεται ὑπό :

$$s^2 = \frac{\sum_{t=1}^{N} \left(y_t - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i\, y_{t-i} \right)^2}{N}$$

αἱ ἐκτιμήσεις νῦν τῶν ἄνω παραμέτρων, ὑπὸ ἔποψιν πιθανότητος, συγκλίνουν πρὸς τὰς ἀληθεῖς τιμὰς τῶν τοιούτων τοῦ πληθυσμοῦ, ὅταν $N \to \infty$.