ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

Τοῦ κ. W. ALLEN SPIVEY
Καθηγητοῦ Στατιστικῆς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Μίτσιγκαν

Κατὰ μετάφρασιν κ. ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
'Αποφοίτου τῆς Α.Β.Σ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1ον

ΒΑΣΙΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Σύνολα

Θὰ ἀρχίσωμεν μὲ μίαν ἔννοιαν φαινομενικῶς ἁπλῆν, ἔχουσαν διαισθητικὸν ἀντίστοιχον εἰς τὴν καθ' ἡμέραν ἐμπειρίαν. Τὴν ἔννοιαν τοῦ ***συνόλου*** ἀντικειμένων ἢ στοιχείων. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ μαθηματικὸς εἰς τὴν τυπικὴν ἀνάπτυξιν μαθηματικῶν συστημάτων θὰ προετίμα νὰ θεωρήσῃ τὸν ὅρον «σύνολον» ὡς ἀκαθόριστον, εἶναι εὐχερὲς νὰ δείξωμεν τόσον τὴν σημασίαν ὅσον καὶ τὴν χρῆσιν τοῦ ὅρου. ***Σύνολον*** εἶναι πᾶσα καλῶς καθωρισμένη συλλογὴ στοιχείων διακρινομένων ἀλλήλων, καὶ εἶναι ὅρος συνώνυμος τῶν ὅρων «ὁμάς», «ὁλότης», «τάξις». Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἔννοια αὕτη εἶναι γενική, πρέπει νὰ προσέξωμεν τὰ ἑξῆς δύο σημεῖα : ἓν σύνολον ἀποτελεῖται ἐκ διαφόρων μεταξύ των στοιχείων οὕτως ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου εἶναι «ξεχωριστὸ» ἀντικείμενον καὶ δύο στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου δὲν εἶναι ὅμοια, δηλ. δὲν ταυτίζονται.

Τὰ σύνολα θὰ συμβολίζωνται γενικῶς διὰ κεφαλαίων γραμμάτων, ὅπως Α, Β, . . . , Τ, Χ, καὶ τὰ στοιχεῖα ἢ μέλη τῶν συνόλων διὰ μικρῶν γραμμάτων, α, β . . . χ. 'Αφοῦ θὰ ἐκλαμβάνωμεν τὰ ἀντικείμενα ὡς μέλη συνόλων (1), προσδιορίζομεν τὸ σύμβολον «ἀνήκει εἰς», $\in$:
$\alpha \in A$ σημαίνει ὅτι τὸ α εἶναι στοιχεῖον (μέλος) τοῦ συνόλου Α. Θὰ εὕρωμεν χρήσιμον καὶ τὸ σύμβολον «δὲν ἀνήκει εἰς», οὕτως ὅταν γράφωμεν $\alpha \notin A$ ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ στοιχεῖον α δὲν εἶναι μέλος τοῦ συνόλου Α.

Ἂν ἓν σύνολον περιέχῃ μόνον ὀλίγα στοιχεῖα, δύναται τότε νὰ προσδιορισθῇ δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του μεταξὺ ἀγκυλῶν, ὡς :

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Πλέον χρήσιμος τρόπος προσδιορισμοῦ ἑνὸς συνόλου, ὅμως, εἶναι νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἰδιότητα τὴν ὁποίαν ἔχουν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Π.χ. ἂν χ

1) Θὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἓν στοιχεῖον εἶναι πάντοτε μέλος συνόλου τινός. Δὲν θὰ ἐπιτρέψωμεν τὴν ὕπαρξιν στοιχείων μὴ ἀνηκόντων εἰς ἓν σύνολον.

τὸ σύμβολον τὸ δυνάμενον νὰ ἀντιπροσωπεύσῃ πᾶν στοιχεῖον εἰς τὸ σύνολον Β ἀνωτέρω, τότε δυνάμεθα νὰ ἀναγνωρίσωμεν τὸ σύνολον Β οὕτω :

$$B = \{\chi \mid \chi \text{ ἀκέραιος ἀριθμὸς } 1 \leqq \chi \leqq 10\}$$

δηλ. τὸ Β εἶναι τὸ σύνολον ὅλων ἐκείνων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα περιγράφει τὸ χ (ὅπου χ ἀκέραιος ἀριθμὸς $1 \leqq \chi \leqq 10$).

Ἡ γενικότης τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου δύναται νὰ διασαφηνισθῇ κατ' ἀρκετοὺς τρόπους. Π.χ. δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν σύνολα ἀποτελούμενα ἀπὸ πεπερασμένον ἀριθμὸν στοιχείων, σύνολα περιέχοντα ἀπεριόριστον ἀριθμὸν στοιχείων ἢ ἀκόμα σύνολα ἀποτελούμενα ἀπὸ ἓν μόνον στοιχεῖον, π.χ. τὸ σύνολον $\{\alpha\}$. Πράγματι, τὰ μονοσύνολα ἔχουν μεγάλην σπουδαιότητα καὶ πρέπει νὰ ἑρμηνεύωνται μετὰ προσοχῆς, καθ' ὅσον τὸ σύνολον $\{\alpha\}$ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ στοιχεῖον α. Διὰ νὰ κατανοηθῇ ἡ διαφορὰ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει Ἑταιρεία Προστασίας Οἰκονομολόγων μὲ κατὰ τόπους παραρτήματα ἀνὰ τὴν χώραν καὶ ὅτι τὸ παράρτημα τῆς πόλεώς σας ἔχει ὡς μέλη δύο φιλοστόργους κυρίας. Ἂν ἡ μία ἐξ αὐτῶν παραιτηθῇ, τότε τὸ παράρτημα (σύνολον) ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ ἑνὸς ἀπομείναντος μέλους. Ὁπωσδήποτε ἡ κυρία αὕτη διαφέρει τοῦ συνόλου (παραρτήματος) μολονότι εἶναι τὸ μόνον μέλος.

Ἐκτὸς τούτου, τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων δύνανται νὰ εἶναι οἱαδήποτε καθωρισμένα ἀντικείμενα ἢ καὶ σύνολα (ὁπότε ὁμιλοῦμεν περὶ «συλλογῆς συνόλων» ἀντὶ «συνόλου συνόλων»). Θὰ παραδεχθῶμεν ἐπίσης τὸ «κενὸν σύνολον», ἤτοι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον οὐδὲν στοιχεῖον περιλαμβάνει. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ὕπαρξις κενοῦ συνόλου ἢ «μηδενικοῦ» (ὡς καλεῖται) φαίνεται παράδοξος, θὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο παρέχει σημαντικὴν εὐχέρειαν εἰς τὴν ἀνάλυσιν καί, ἐπὶ πλέον, ἡ ἔννοια δὲν εἶναι, ὡς κατ' ἀρχὰς φαίνεται, θεωρητική. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι καὶ ἡ ἀπομείνασα κυρία παραιτεῖται. Τὸ παράρτημα τότε καθίσταται μὴ ἐνεργητικὸν (τὸ σύνολον εἶναι κενόν), ἀλλὰ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς ἐὰν δὲν ὑπῆρχε παράρτημα εἰς τὴν πόλιν καθ' ὁλοκληρίαν. Θὰ ὁρίσωμεν ἐπίσης ὅτι τὸ κενὸν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον παντὸς συνόλου καὶ θὰ συμβολίσωμεν αὐτὸ (τὸ κενὸν σύνολον) διὰ τοῦ συμβόλου $\emptyset$.

Πράξεις ἐπὶ συνόλων

Δύο στοιχεῖα καλοῦνται ἴσα, $\chi = \psi$, ἂν χ καὶ ψ εἶναι ἓν καὶ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον. Οὕτως ἡ λέξις «ἴσον» εἰς τὰ μαθηματικὰ δηλοῖ τὸ αὐτὸ μὲ τὴν λέξιν «ἄλλως»· ὅταν λέγωμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα χ καὶ ψ εἶναι ἴσα, ἐννοοῦμεν ὅτι ταῦτα εἶναι δύο ὀνομασίαι τοῦ αὐτοῦ ἀντικειμένου. Οὕτως, ὁδηγούμεθα εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο συνόλων : τὰ σύνολα Α, Β εἶναι ἴσα ἂν περιέχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα. Παρατηρήσατε ὅτι οὐδὲν ἀναφέρεται περὶ τῆς σειρᾶς τῶν στοιχείων. Ὅταν τὰ Α καὶ Β περιλαμβάνουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα — ἀσχέτως κατὰ ποίαν σειρὰν — καλοῦνται ἴσα.

Δοθέντος ἑνὸς συνόλου, φυσικὴ εἶναι ἡ σκέψις νὰ ὑποδιαιρέσωμεν τοῦτο καὶ νὰ θεωρήσωμεν τμήματα αὐτοῦ. Τὰ τμήματα ἑνὸς συνόλου λέγονται ὑποσύνολα (subsets), καὶ εἰδικώτερον :

Τὸ σύνολον P εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου T ἂν πᾶν στοιχεῖον τοῦ P εἶναι στοιχεῖον τοῦ T.

Θὰ παραστήσωμεν τοῦτο γράφοντες $P \subset T$, «τὸ P περιέχεται εἰς τὸ T», ἤ, ἐνίοτε $T \supset P$, «Τὸ T περιέχει τὸ P». Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ὁ ὁρισμὸς τοῦ ὑποσυνόλου δὲν δηλοῖ κατ' ἀνάγκην ὅτι τὸ σύνολον P εἶναι τμῆμα τοῦ T κατὰ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ P εἶναι «μικρότερον» ἢ περιέχει ὀλιγώτερα στοιχεῖα τοῦ T. Ὁ ὁρισμὸς ἐπιτρέπει εἰς τὸ P νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ T, ὡς δύναται εὐχερῶς νὰ γίνῃ ἀντιληπτόν [2]. Ἂν ἔχωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ P εἶναι ὑποσύνολον τοῦ T ἀλλὰ τὸ T περιέχει ἓν ἢ πλείονα στοιχεῖα μὴ περιεχόμενα εἰς τὸ P, τότε τὸ P καλεῖται ***γνήσιον ὑποσύνολον*** (proper subset) τοῦ T καὶ γράφομεν $P \underset{\neq}{\subset} T$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἔχομεν δύο σύνολα A, B [3]. Τότε δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν ἀρκετὰ δυνατὰ σύνολα. Ἓν προφανὲς σύνολον εἶναι τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν στοιχείων τῶν A καὶ B:

Ἡ ***ἕνωσις*** τῶν A καὶ B, $(A \cup B)$, εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων ἢ εἰς τὸ A ἢ εἰς τὸ B ἢ εἰς ἀμφότερα.

Συμβολικῶς:

$$A \cup B = \{\chi \mid \chi \in A \text{ ἢ } \chi \in B\}$$

Παράδειγμα: ἂν $A = \{1, \text{σκύλος, καναρίνι}, \bar{X}\}$, $B = \{1, \text{καναρίνι}, \bar{Y}\}$, τότε $A \cup B = \{1, \text{σκύλος, καναρίνι}, \bar{X}, \bar{Y}\}$. Σημειώσατε ὅτι, μολονότι τὸ στοιχεῖον «καναρίνι» ἐμφανίζεται εἰς ἀμφότερα τὰ σύνολα A, B, ἐμφανίζεται μόνον ἅπαξ εἰς τὸ σύνολον $A \cup B$.

Ἂν A καὶ B ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ ἄλλα σύνολα.

Ἡ ***τομὴ*** τῶν A καὶ B εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἀμφότερα τὰ A καὶ B. Τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ:

$$A \cap B = \{\chi \mid \chi \in A \text{ καὶ } \chi \in B\}$$

Περαιτέρω, ἂν τὰ A καὶ B ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, εἶναι λογικὸν νὰ θελήσωμεν νὰ θεωρήσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ B τὰ μὴ περιλαμβανόμενα εἰς τὸ A.

Ἔστωσαν τὰ A καὶ B· ἡ ***διαφορὰ*** $B - A$ εἶναι τὸ ὑποσύνολον τοῦ B τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα δὲν εἶναι εἰς τὸ A, ἢ

$$B - A = \{\chi \mid \chi \in B \text{ καὶ } \chi \notin A\}.$$

Τελικῶς, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν A καὶ B εἶναι τοιαῦτα ὥστε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ B περιέχονται εἰς τὸ A. Ἔχομεν οὕτω εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρω περιπτώσεως — περίπτωσιν ἐπαρκῶς σημαντικὴν διὰ νὰ τῆς δώσωμεν εἰδικὴν ὀνομασίαν:

---

2) Ὁπωσδήποτε ἂν $A \subset B$ καὶ $B \subset A$ τότε $A = B$.

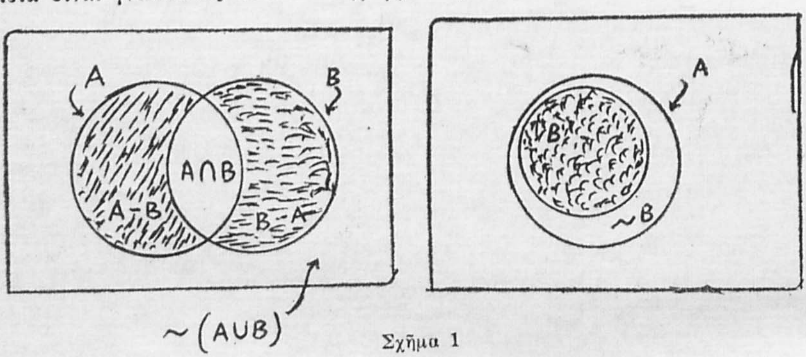
3) Θὰ λάβωμεν κατὰ συνθήκην ὅτι ὅλα τὰ σύνολα εἶναι ὑποσύνολα δοθέντος (ἢ γενικοῦ) συνόλου. Αὐτό, ὁμοῦ μετὰ τῆς ἀνωτέρω ἀναφερθείσης συνθήκης ὅτι ἓν στοιχεῖον πρέπει πάντοτε νὰ ἀνήκῃ εἰς ἓν σύνολον, θὰ μᾶς ἐξασφαλίσῃ τὴν ἔλλειψιν παραδόξων εἰς τὴν σπουδήν μας τῶν συνόλων.

Ἔστωσαν τὰ A καὶ B καὶ $B \subset A$· τότε, ὅταν λέγωμεν *συμπλήρωμα τοῦ B εἰς τὸ A* ἐννοοῦμεν τὸ σύνολον τῶν στοιχείων εἰς τὸ A τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸ B καὶ ἐκφράζομεν αὐτὸ γράφοντες $\sim B$.

Ἕκαστος τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν δύναται νὰ γενικευθῇ εἰς τρία ἢ πλείονα σύνολα. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὰ σύνολα $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, ὅπου ν οἱοσδήποτε θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός, τότε ἡ ἕνωσις τῶν δοθέντων συνόλων, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu$, εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων εἰς ἓν τουλάχιστον τῶν δοθέντων συνόλων καὶ ἡ τομή, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu$, εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων εἰς ὅλα τὰ δοθέντα σύνολα.

Εὐχερῶς τώρα κατανοοῦμεν τὴν μεγάλην χρησιμότητα τοῦ κενοῦ συνόλου. Π.χ. ἂν ἐξακριβώσωμεν ὅτι $A \cap B = \emptyset$, γνωρίζομεν ὅτι τὰ A καὶ B δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα (ἤ, ὡς λέγομεν ἐνίοτε, τὰ A καὶ B εἶναι ἀμοιβαίως ἀποκλειστικὰ σύνολα). Ὁμοίως, τὸ σύνολον $B - A$ δυνατὸν νὰ εἶναι κενόν, ἢ δυνατὸν νὰ ἔχωμεν $\sim A = \emptyset$, ὅπου $A \subset B$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ σημαίνῃ ὅτι $A = B$[4].

Αἱ ἔννοιαι αὗται δύνανται εὐχερῶς νὰ παρασταθοῦν μέσῳ διαγραμμάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι γνωστὰ ὡς Βέννια διαγράμματα (Venn diagrams).



Σχῆμα 1

Ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων εἰς ἓν σύνολον

Δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι δύο σύνολα δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων, ἄνευ καταμετρήσεως τῶν στοιχείων ἑκάστου συνόλου· ἂν ἴδωμεν σειρὰν ἀνθρώπων ἔξωθεν κινηματογράφου ἐν λειτουργίᾳ, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν καθισμάτων τοῦ κινηματογράφου περιέχει ὀλιγώτερα στοιχεῖα ἢ τὸ σύνολον τῶν ἀνθρώπων τῶν ἐπιθυμούντων νὰ ἴδουν τὴν ταινίαν κατ' αὐτὴν τὴν ὥραν, καὶ καταλήγοντες εἰς αὐτὸ τὸ συμπέρασμα, δὲν γνωρίζομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν στοιχείων εἰς ἕκαστον σύνολον. Οὕτω, προσδιορίζομεν ἂν δύο σύνολα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων σχηματίζοντες ἀντιστοιχίαν τῶν στοιχείων εἰς τὰ δύο σύνολα. Ἂν ἡ ἀντιστοιχία εἶναι πλήρης — δὲν ὑπάρχουν στοιχεῖα ὑπολειπόμενα

4) Ἂς λεχθῇ παρεμπιπτόντως ὅτι εἶναι λογικώτερον νὰ λέγωμεν «τὸ» κενὸν σύνολον παρὰ «ἓν» κενὸν σύνολον, διότι ὑπάρχει μόνον ἓν τοιοῦτον σύνολον. Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι ὑπάρχουν δύο κενὰ σύνολα, ἔστωσαν X καὶ Ψ. Ἀφοῦ τὸ κενὸν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον παντὸς συνόλου, ἔχομεν $X \subset Y$ καὶ ἐπίσης $\Psi \subset X$, ὅπερ συνεπάγεται ὅτι $X = \Psi$.

εἰς ἓν σύνολον — λέγομεν ὅτι ταῦτα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων. Ἡ ἀρχὴ αὕτη τῆς ἀντιστοιχίας εἶναι ἡ βάσις μιᾶς ἐννοίας μαθηματικῆς μεγάλης σημασίας, γνωστῆς ὡς *«ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἕν»*.

Τὰ σύνολα $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ καὶ $T = \{\chi, \psi, \omega, \ldots\}$ θεωροῦνται εὑρισκόμενα εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἕν, ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν ζεύγη στοιχείων οὕτως ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Σ νὰ ἀντιστοιχῇ μὲ ἓν καὶ μόνον στοιχεῖον τοῦ T καὶ ἀντιστρόφως.

Ὅταν δύο σύνολα δύνανται νὰ τοποθετηθοῦν εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἕν, καλοῦνται *ἰσοδύναμα* ($A \leftrightarrow B$). Δυστυχῶς ἡ λέξις ἰσοδύναμος εἶναι συνώνυμος τῆς λέξεως «ἴσος» εἰς τὴν καθ' ἡμέραν χρῆσιν, οὕτως ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἀπαιτεῖ προσοχήν. Δύο σύνολα δύνανται, βεβαίως, νὰ εἶναι ἰσοδύναμα, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ στοιχεῖα των διαφέρουν εὐρέως: σύνολον 15 ἐλεφάντων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς σύνολον 15 ποδοσφαιρικῶν γηπέδων ἢ πρὸς πᾶν ἕτερον σύνολον περιέχον 15 στοιχεῖα.

Ἡ γνωστή μας ἀρίθμησις εἶναι στενῶς συνδεδεμένη πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς ἀντιστοιχίας ἓν πρὸς ἕν. Ἔστωσαν τὰ σύνολα: A ὡς ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καὶ B ὡς ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα θέλομεν νὰ ἀριθμήσωμεν. Ἀριθμοῦμεν θέτοντες εἰς ἀντιστοιχίαν ἀκεραίους ἀριθμοὺς πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ B, διαδοχικῶς, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 1, καὶ ὁ τελευταῖος ἀκέραιος σχηματίζων ζεῦγος μὲ στοιχεῖον τοῦ B εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ B. Δυνάμεθα ὁμοίως νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς — ἢ «φυσικοὺς ἀριθμοὺς» ὡς οὗτοι ἐνίοτε καλοῦνται — διὰ νὰ εἰσαγάγωμεν δύο νέας τάξεις συνόλων: τὰ πεπερασμένα καὶ τὰ ἀπειροσύνολα. Πεπερασμένον εἶναι τὸ σύνολον τὸ ὁποῖον περιέχει στοιχεῖα τῶν ὁποίων ἡ ἀρίθμησις δύναται νὰ περατωθῇ. Ἤτοι:

Ἔστωσαν τὰ I, σύνολον ὅλων τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν $\{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}$ καὶ I_ν τὸ ὑποσύνολον τοῦ I, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν

$$I_\nu = \{\chi \mid \chi \in I \text{ καὶ } 1 \leqq \chi \leqq \nu\}$$

(Δηλ. τὸ I_ν εἶναι τὸ ὑποσύνολον τοῦ I ἀποτελούμενον ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 1, 2, . . . , ν). Τότε, ἓν σύνολον Σ εἶναι πεπερασμένον ἂν $\Sigma \leftrightarrow I_\nu$. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι πεπερασμένον, ὡς ὡρίσθη, δὲν σημαίνει «μικρόν». Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἠλεκτρονίων εἰς τὸ σύμπαν εἶναι «μέγα», ἀλλ' ὑπάρχει σύνολον I_ν ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό.

Εὐχερῶς ὁρίζομεν τώρα ἓν ἀπειροσύνολον: ἓν σύνολον εἶναι ἀπειροσύνολον ἂν δὲν εἶναι οὔτε κενὸν οὔτε πεπερασμένον. Διαισθητικῶς, ἓν ἀπειροσύνολον εἶναι ἓν σύνολον περιέχον τόσα στοιχεῖα ὥστε ἡ ἀρίθμησίς των οὐδέποτε θὰ ἤρχετο εἰς πέρας. Παράδειγμα συνόλου στερουμένου «τελευταίου» στοιχείου εἶναι τὸ σύνολον I ὅλων τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Εἰς τὸ σύστημα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἂν χ καὶ ψ ἀνήκουν εἰς τὸ I, τότε $\chi + \psi$ καὶ $\chi\psi$ ἀνήκουν εἰς τὸ I ἐπίσης. Ἂς ὑποτεθῇ τώρα ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος χ ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ τελευταῖον μέλος τοῦ I. Ἀλλὰ $\chi + 5 \in I$· ἔχομεν ἀντίφασιν — τὸ χ δὲν δύναται νὰ εἶναι τὸ τελευταῖον στοιχεῖον τοῦ I.

Τὰ ἀπειροσύνολα εἶναι ἐνδιαφέροντα καὶ παίζουν σπουδαῖον ρόλον εἰς τὰ θεωρητικὰ καὶ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά. Ἓν τῶν ἐνδιαφερόντων χαρακτηριστικῶν εἶναι ὅτι ἓν ἀπειροσύνολον δύναται νὰ τεθῇ εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἓν μὲ ἓν γνήσιον ὑποσύνολόν του([5]). Ἂς θεωρηθῇ, π.χ., τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀρτίων ἀκεραίων ἀριθμῶν $I_e = \{2, 4, 6, \ldots, 2\nu, \ldots\}$. Τὸ σύνολον αὐτὸ εἶναι καὶ ἀπειροσύνολον καὶ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ I, καὶ εἷς τρόπος νὰ δειχθῇ ἡ ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἓν μεταξὺ I καὶ I_e εἶναι ὁ κάτωθι :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4\ldots\ldots & \nu\ldots\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8\ldots\ldots & 2\nu\ldots\ldots \end{array}$$

Σύνολά τινα ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ μὴ δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἓν μὲ τὸ I, μολονότι εἶναι ἀπειροσύνολα. Δηλ. ἂν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς ἐκ τῶν συνόλων αὐτῶν σχηματίσουν ζεύγη μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ I, τότε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ I θὰ ἐξαντληθοῦν καὶ θὰ ἔχουν ἀπομείνει στοιχεῖα εἰς τὸ σύνολον. Παράδειγμα τοιούτου συνόλου εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μεταξὺ 0 καὶ 1. Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ σύνολον αὐτὸ εἶναι ἀπειροσύνολον, δὲν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον I. Ὑπάρχουν «περισσότεροι» πραγματικοὶ ἀριθμοὶ εἰς τὸ σύνολον ἢ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἰς τὸ I. Αἱ δύο αὗται σειραὶ ἀπεριοριστίας ὁδηγοῦν εἰς τοὺς κάτωθι ὁρισμούς :

Ἓν ἀπειροσύνολον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον I ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καλεῖται ***ἀριθμητὸν ἀπειροσύνολον***· εἰ δ' ἄλλως καλεῖται ***μὴ ἀριθμητὸν ἀπειροσύνολον***.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ ($\chi \neq \psi$) καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων τμήματος εὐθείας εἶναι παραδείγματα μὴ ἀριθμητῶν ἀπειροσυνόλων.

Ὁ ἀναγνώστης ἴσως ἔχῃ τώρα τὴν ἐντύπωσιν ὅτι παραθέτομεν ὁρισμοὺς ἐπὶ ὁρισμῶν ἄνευ σκοποῦ, ἀπομακρυνόμενοι συνεχῶς δυνατῶν ἐφαρμογῶν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, συμβαίνει ὅμως αἱ ἔννοιαι αὗται νὰ εἶναι οὐσιώδους βαρύτητος τόσον εἰς τὰ θεωρητικὰ ὅσον καὶ εἰς τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά. Ἡ ἔννοια τῆς μὴ δυναμένης νὰ ἀριθμηθῇ ἀπεριοριστίας, π.χ., χρησιμοποιεῖται εὐρέως. Τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀριθμητόν, ὅπως καὶ τὰ σύνολα τῶν σημείων εὐθειῶν καὶ τμημάτων καμπυλῶν καὶ ἡ γνῶσις εἶναι θεμελιώδης εἰς τὴν συνέχειαν καὶ ἱκανότητα διαφορισμοῦ τῶν συναρτήσεων — ἐννοιῶν εὑρισκομένων εἰς τὴν βάσιν πολλῶν ἐφαρμογῶν. Τῷ ὄντι, ἀπειροσύνολα ἀριθμητὰ ἢ μὴ προῆλθον ἀπὸ τὰ αἰτήματα τοῦ ὑλικοῦ κόσμου τὰ βασιζόμενα ἐπὶ τῆς χρήσεως τῶν ἀριθμῶν, ὡς κατανοεῖται ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τοῦ ἀριθμητικοῦ μας συστήματος. Ἡ πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως, ἐπὶ παραδείγματι, ὡδήγησεν ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀκεραίων (θετικῶν, ἀρνητικῶν καὶ μηδενός). Ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως προεκάλεσεν ἑτέραν ἐπέκτασιν οὕτως ὥστε νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ

---

5) Εἰς τυπικωτέραν μαθηματικὴν ἀνάπτυξιν, ἓν ἀπειροσύνολον ὁρίζεται ὡς σύνολον ἔχον τὴν ἰδιότητα ταύτην (δηλ. σύνολον ἰσοδύναμον πρὸς γνήσιον ὑποσύνολόν του). Τότε τὸ πεπερασμένον σύνολον ὁρίζεται ὡς σύνολον μὴ δυνάμενον νὰ τεθῇ εἰς ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἓν μὲ γνήσιον ὑποσύνολόν του.

θεώρησις ἀριθμῶν τῆς μορφῆς π/ρ, ἔνθα π καὶ ρ ἀκέραιοι, $\rho \neq 0$. Ἡ ἐξαγωγὴ τετραγωνικῶν ριζῶν ἐπέφερεν ἑτέρας δύο ἐπεκτάσεις τοῦ συστήματος. Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι θετικῶν ἀριθμῶν ὡς $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, δὲν ἠδύναντο νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς κανονικὰ κλάσματα· τοιοῦτοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν (σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) [6]. Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὡς ἡ $\sqrt{-2}$, ὡδήγησαν εἰς τὸ σύστημα τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν (ἡ ἄτυχος λέξις «φανταστικὸς» εἶναι ὑπόλειμμα προηγουμένου αἰῶνος· ὁ φανταστικὸς ἀριθμὸς ἔχει σταθερὰν ὕπαρξιν εἰς τὰ μαθηματικὰ ὡς πᾶς ἕτερος ἀριθμός) [7]. Αἱ συνδυασμέναι πράξεις τῆς προσθέσεως πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἐξαγωγῆς τετραγωνικῶν ριζῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δίδουν τὸ σύστημα τῶν μιγάδων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν μορφὴν $\alpha + \beta_i$, ὅπου α καὶ β πραγματικοὶ καὶ $i = \sqrt{-1}$. Τὸ κάτωθι διάγραμμα ἀνακεφαλαιώνει τὰς ἰδέας αὐτάς.

Φυσικοὶ ἀριθμητοὶ (ἀπεριόριστοι ἀριθμητοὶ)

Μηδὲν

Ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι (ἀπεριόριστοι ἀριθμητοὶ)

— ἀκέραιοι (ἀπεριόριστοι ἀριθμητοὶ)

κλάσματα (ἀπερ. ἀριθ.)

— σύμμετροι (ἀπερ. ἀριθ.)

ἀσύμμετροι (ἀπερ. μὴ ἀριθμητοὶ)

πραγματικοὶ β = (ἀπερ. μὴ ἀριθμητοὶ)

φανταστικοὶ $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ (ἀπερ. μὴ ἀριθμητοὶ)

— μιγάδες $\alpha + \beta_i$, α καὶ β πραγματικοὶ (ἀπεριόρ. μὴ ἀριθμητοὶ)

---

6) Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἀπεριόριστοι δεκαδικαὶ ἐπεκτάσεις, ὡς π.χ. 0,35291784392... Αἱ δεκαδικαὶ ἐπεκτάσεις συμμέτρων ἀριθμῶν εἶναι ἐπίσης ἀπεριόριστοι (1/3=0,33333 ..., 8/7=1, 142857142857 . .) ἀλλ' εἰς ἑκάστην ἐπέκτασιν τὰ ψηφία μετά τινα θέσιν ἐπαναλαμβάνονται καθ' ὁμάδας ὡς τὸ (3) καὶ (142857) ἀνωτέρω. Ὑπάρχει ἓν θεώρημα, π.χ., κατὰ τὸ ὁποῖον ἕκαστος περιοδικὸς δεκαδικὸς εἶναι σύμμετρος καὶ ἀντιστρόφως. Δύναται ἐπίσης νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν τὴν ἰδιότητα ταύτην· οὐδεὶς σαφὴς τύπος εἶναι γνωστὸς διὰ τὴν διαδοχὴν τῶν στοιχείων εἰς τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς.

7) Ἀφοῦ $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\sqrt{-1}$, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τὸν φανταστικὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ὡς $\sqrt{2_i}$, δηλ. ὡς γινόμενον τῆς ρίζης θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ i, ὅπου $i = \sqrt{-1}$. Ἐκ τούτου, πᾶς φανταστικὸς ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $\sqrt{-k}$ δύναται νὰ γραφῇ $\sqrt{k_i}$.

Πολλὰ ἐνδιαφέροντα χαρακτηριστικὰ ἀπειροσυνόλων εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναφερθοῦν. Ὑπάρχουν, ἐπὶ παραδείγματι, ὑψηλότεραι «σειραὶ» (ἢ «τάξεις») ἀπειριστίας περὶ τῶν ὁποίων ἀσχολεῖται ἡ θεωρία τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν, καὶ ὑπάρχουν συναρπαστικὰ θεωρήματα περὶ αὐτῶν (ἡ ἕνωσις καὶ ἡ τομὴ δύο ἀπειροσυνόλων μὴ ἀριθμητῶν εἶναι μὴ ἀριθμητὰ ἀπειροσύνολα, κλπ.) ἡ ἐξέτασις τῶν ὁποίων εὑρίσκεται, δυστυχῶς, ἐκτὸς τοῦ θέματός μας.

Διατεταγμένα ζεύγη καὶ συναρτήσεις

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως χρησιμοποιεῖται κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ἐνίοτε μετὰ προσοχῆς, ἐνίοτε ἐλαστικῶς, ἐνίοτε λανθασμένως· ἐνίοτε τὴν χρησιμοποιοῦμεν διὰ νὰ ἐκφράσωμεν χαλαρὰν σχέσιν μεταξὺ μεταβλητῶν, δημιουργοῦντες οὕτω τὴν δυνατότητα (ἴσως ἐξ ἀμελείας) νὰ νομίσουν ἄλλοι ὅτι αἱ μεταβληταὶ συσχετίζονται καθ' ὡρισμένον καὶ ἐντονώτερον τρόπον ἢ εἰς τὴν πραγματικότητα. Ὁ προσεκτικὸς ὁρισμὸς τῆς συναρτήσεως εἶναι ἐπιτακτικός, ὄχι μόνον διὰ τὴν κατανόησιν τῶν ἀκολούθως ἀναπτυσσομένων, ἰδίᾳ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἀλλ' ἐπίσης, ἕνεκα τῆς ἀσαφείας τῆς δημιουργηθείσης ὑπὸ τῆς ποικιλίας τῶν χρήσεων τῆς συναρτήσεως εἰς ἐφαρμογάς, τοιοῦτος ὁρισμὸς ἀξίζει νὰ δοθῇ ὀρθῶς. Θὰ θεωρήσωμεν ἀρχικῶς προκαταρκτικάς τινας ἰδέας.

Ἡ πρώτη εἰσαγομένη ἔννοια εἶναι τοῦ *ζεύγους* στοιχείων. Ἔστω τὸ σύνολον $A = \{α, β, γ, \ldots\}$. Τότε ἓν ζεῦγος τοῦ A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ A, $\{α, β\}$, συνιστάμενον ἐκ δύο στοιχείων, α, β τοῦ A. Ἂς θεωρήσωμεν ἐπιπροσθέτως τὴν σειρὰν τῶν στοιχείων τοῦ ζεύγους οὕτως ὥστε νὰ ὁρίσωμεν ποῖον στοιχεῖον προηγεῖται καὶ ποῖον ἕπεται· τὸ σύνολον τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν α καὶ β, ὁμοῦ μετὰ τῆς καθωρισμένης σειρᾶς αὐτῶν, καλεῖται ***διατεταγμένον ζεῦγος*** (ordered pair) καὶ δηλοῦται διὰ $(α, β)$.

Τὰ διατεταγμένα ζεύγη $(α, β)$ καὶ $(γ, δ)$ καλοῦνται ἴσα μόνον ὅταν $α = γ$ καὶ $β = δ$. Ὁπωσδήποτε, τὰ ζεύγη (σύνολα) $\{α, β\}$ καὶ $\{γ, δ\}$ εἶναι ἴσα ἂν $α = γ$ καὶ $β = δ$, ἢ $α = δ$ καὶ $β = γ$.

Ἔστωσαν τὰ σύνολα $M = \{θ, ι, κ, \ldots\}$ καὶ $N = \{ρ, σ, τ, \ldots\}$. Ἑκάστη ἐκλογὴ ἑνὸς στοιχείου τοῦ M καὶ ἑνὸς τοῦ N ὁρίζει διατεταγμένον ζεῦγος, ἔστω $(ι, τ)$. Θὰ ἐπιτρέψωμεν, διὰ λόγους ἁπλότητος, τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐννοίας τοῦ διατεταγμένου ζεύγους καὶ ἂν τὰ δύο στοιχεῖα αὐτοῦ εἶναι ἴσα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν ἓν διατεταγμένον ζεῦγος, ἔστω τῆς μορφῆς $(α, α)$, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διάταξις οὐδεμίαν σημασίαν ἔχει. Παραθέτομεν τὴν ἐπεξήγησιν ταύτην διότι, ὅταν σχηματίζωνται διατεταγμένα ζεύγη ἐκ πλειόνων τοῦ ἑνὸς συνόλων, ἡ πιθανότης νὰ ἔχουν τὰ σύνολα κοινὰ στοιχεῖα προκύπτει φυσικῷ τῷ λόγῳ, καὶ ἡ ἐκλογὴ ἑνὸς στοιχείου ἐκ τοῦ ἑνὸς συνόλου καὶ ἑνὸς στοιχείου ἐκ τοῦ ἑτέρου συνόλου θὰ ἠδύνατο νὰ δώσῃ διατεταγμένα ζεύγη τῆς μορφῆς $(α, α)$. Τοιαῦτα διατεταγμένα ζεύγη εἶναι σπουδαιότατα, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἂς ἐπιστρέψωμεν εἰς τὰ σύνολα $M = \{θ, ι, κ, \ldots\}$ καὶ $N = \{ρ, σ, τ, \ldots\}$. Ἔστω χ τὸ σύμβολον τὸ ἀντιπροσωπεῦον οἱονδήποτε στοιχεῖον τοῦ M (Δηλ. τὸ χ εἶναι μεταβλητὴ ὡς πρὸς τὸ M) καὶ ἔστω ψ μεταβλητὴ ὡς πρὸς τὸ N. Τότε ἑκάστη ἐκλογὴ στοιχείου $\chi \in M$ καὶ $\psi \in N$ ὁρίζει ἓν διατεταγμένον ζεῦγος (χ, ψ). Ἂς θεωρήσωμεν ἓν διατεταγμένον ζεῦγος ὡς ἓν ἀντικείμενον καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῶν σχηματιζομένων ἐκ τῶν συνόλων M καὶ N. Τὸ νέον αὐτὸ σύνολον — ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ὁποίου εἶναι διατεταγμένον ζεῦγος — καλεῖται καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν συνόλων M καὶ N ἤ, βραχύτερον, τὸ σύνολον γινομένου, καὶ ἐκφράζεται μὲ $M \times N$ [8]. Εἰς τὴν παραστατικὴν τῶν συνόλων, τὸ σύνολον αὐτὸ ὁρίζεται ὡς

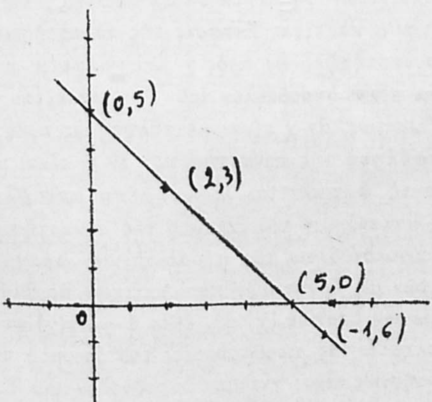
$$M \times N = \{(\chi, \psi) \mid \chi \in M \text{ καὶ } \psi \in N\}$$

Τὸ πραγματικὸν ἐπίπεδον τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας παρέχει ἴσως τὸ πλέον γνωστὸν παράδειγμα συνόλου γινομένου. Ἕκαστον σημεῖον εἰς τὸ ἐπίπεδον ἀντιπροσωπεύεται ὑφ᾽ ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους πραγματικῶν ἀριθμῶν (χ, ψ), καὶ εἰς τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην ἡ σπουδαιότης τῆς διατάξεως εἶναι εὐχερῶς ἀντιληπτή, διότι τὸ σημεῖον $(2, 5)$ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον $(5, 2)$. Ἔστωσαν τὰ σύνολα $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ καὶ $P = \{\rho_1, \rho_2\}$. Τότε $\Pi \times P$ εἶναι τὸ σύνολον :

$$\{(\pi_1, \rho_1), (\pi_1, \rho_2), (\pi_2, \rho_1), (\pi_2, \rho_2), (\pi_3, \rho_1), (\pi_3, \rho_2)\}.$$

(Παρατηρήσατε ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους δὲν ἀπαιτεῖ οὔτε ἰσοδυναμίαν μεταξὺ τῶν συνόλων M καὶ N οὔτε ὅτι πρέπει νὰ εἶναι διάφορα μεταξύ των).

Εἴμεθα πλέον ἕτοιμοι νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως. Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν ἰσότητα (ἐξίσωσιν) $\chi + \psi = 5$ [9]. Γραφικῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον, αὕτη



Σχῆμα 2

8) Ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους δὲν περιλαμβάνει ἰδέας ἔξωθεν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, ὡς «εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ» ἢ «προηγούμενον τοῦ». Ἓν διατεταγμένον ζεῦγος καθορίζεται ἂν ἀναφέρωμεν τὰ δύο στοιχεῖα του καὶ ποῖον εἶναι τὸ πρῶτον στοιχεῖον του. Ὁ καθορισμὸς οὗτος ἐκφράζεται σαφῶς ἂν ὁρίσωμεν τὸ σύνολον τὸ περιέχον τὰ δύο στοιχεῖα καὶ κατόπιν τὸ σύνολον τὸ ἀποτελούμενον ἐκ μόνον τοῦ πρώτου στοιχείου:

$$\{(\alpha, \beta), (\alpha)\}$$

9) Ἡ χρῆσις τοῦ συμβόλου ἰσότητος εἰς τὰς ἐξισώσεις διαφέρει τῆς χρήσεώς του μεταξὺ στοιχείων καὶ συνόλων. Εἰς ἐξίσωσιν ὅπως $\chi+\psi=5$, τὸ σύμβολον ἰσότητος δηλοῖ

θὰ δώσῃ εὐθεῖαν πᾶν σημεῖον τῆς ὁποίας δύναται νὰ ἀντιπροσωπευθῇ ὑφ᾽ ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους (χ, ψ) τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδιότητα τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων του νὰ εἶναι 5. Τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (χ, ψ) τοιοῦτον ὥστε $\chi+\psi=5$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου ὅλων τῶν σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν χ, ψ, καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον εἶναι τὸ σύνολον γινομένου $X \times \Psi$, ὅπου X εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ, καὶ Ψ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις $\chi+\psi=5$ κατευθύνει τὴν προσοχήν μας εἰς ὑποσύνολον τοῦ συνόλου γινομένου - ὑποσύνολον, πρέπει νὰ σημειωθῇ, μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν ὅτι δοθεὶς ἀριθμὸς χ δὲν ἐμφανίζεται ὡς τὸ πρῶτον στοιχεῖον διατεταγμένου ζεύγους πλέον τῆς μιᾶς φορᾶς. Τὸ παράδειγμα αὐτὸ ὁδηγεῖ εἰς τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς συναρτήσεως:

Ἔστωσαν τὰ σύνολα Σ καὶ Τ καὶ ὑποτεθείσθω ὅτι εἰς ἕκαστον $\chi \in \Sigma$ εἰς κανὼν ἢ ἀντιστοιχία προσδιορίζει ἓν καὶ μόνον στοιχεῖον $\psi \in T$. Τότε ὁ κανὼν οὗτος ὁρίζει ἓν σύνολον φ διατεταγμένων ζευγῶν καὶ τὸ σύνολον αὐτὸ καλεῖται συνάρτησις τοῦ Σ πρὸς τὸ Τ.

Ἡ συνάρτησις εἶναι λοιπὸν σύνολον — σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν — καὶ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου γινομένου, $\Sigma \times T$. Ὁ κανὼν ἢ ἀντιστοιχία εἶναι ἡ ἰδιότης, ἡ ὁποία προσδιορίζει τὸ σύνολον, ἢ ποῖα ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ $\Sigma \times T$ θὰ περιληφθοῦν εἰς ὑποσύνολον καλούμενον σύνολον συναρτήσεως.

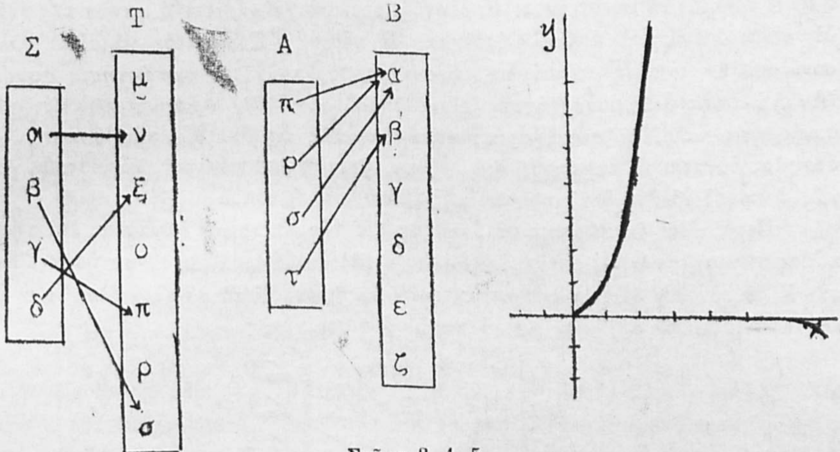
Τὸ σύνολον Σ καλεῖται ἡ περιοχὴ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως φ καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων $\psi \in T$ τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται δεύτερα εἰς τὰ διατεταγμένα ζεύγη εἰς τὴν φ καλεῖται *ἔκτασις* τῆς συναρτήσεως. Τὸ σύμβολον ψ καλεῖται ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς χ καὶ γράφεται πολλάκις φ(χ). Ἡ ἔκτασις τῆς φ — ἡ ὁποία εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Τ — καλεῖται τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως φ. Ὁμοίως, ἂν χ εἶναι μεταβλητὴ ὡς πρὸς Σ, τότε τὸ χ καλεῖται ἡ ***ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ*** τῆς συναρτήσεως· ἂν ψ εἶναι μεταβλητὴ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν τῆς φ, τότε τὸ ψ καλεῖται ***ἐξηρτημένη μεταβλητή***. Τὰ σχήματα 3-5 θὰ διευκολύνουν τὴν κατανόησιν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

Ἔστω X τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἔστω Υ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἔστω φ τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (χ, ψ), ἔνθα $\psi = \varphi(\chi) = \chi^2$.

Τὸ σχῆμα 3 πληροῖ τὰς προϋποθέσεις τοῦ ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως. Ἐδῶ ἡ ἔκτασις τῆς συναρτήσεως εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Τ. Τὸ σχῆμα 4 δεικνύει μίαν συνάρτησιν, ἡ ὁποία ἔχει τὰ διατεταγμένα ζεύγη {(π, α), (ρ, α), (σ, α), (τ, β)}. Δύο διατεταγμένα ζεύγη δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πρῶτον στοιχεῖον —ὅπως ἀπαιτεῖται— ἀλλὰ διατεταγμένα τινὰ ζεύγη ἔχουν τὸ αὐτὸ δεύτερον στοιχεῖον — ὅπερ ἐπιτρέπεται. Τὸ σχῆμα 5 εἶναι κλασσικωτέρα παρουσίασις μιᾶς συναρτήσεως. Ἐδῶ

ὑποθετικὴν ἰσότητα· ἡ ἰσότης ἐπαληθεύεται μόνον διὰ τὰς τιμὰς χ καὶ ψ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων εἶναι 5 — ὄχι δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ. Εἰς ἰσότητας ἐπαληθευομένας δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τὸ σύμβολον ἰσότητος ἔχει συνήθως τρεῖς γραμμὰς ≡ καὶ ἡ ἰσότης καλεῖται *ταυτότης* δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν.

τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι τὸ σύνολον $(\chi, \psi = \chi^2)$, $\chi \geqq 0$. Ἡ συνάρτησις αὕτη παρουσιάζει ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν δὲν ἔχουν αἱ ἄλλαι: ἕκαστον στοιχεῖον $\psi \in \Psi$ ἔχει ἓν ἀντίστοιχον, ἓν «ταῖρι» εἰς Χ. Ὅταν ἡ ἔκτασις τῆς



Σχῆμα 3, 4, 5.

συναρτήσεως εἶναι ὁλόκληρον τὸ Ψ, λέγομεν ὅτι ἔχομεν συνάρτησιν τοῦ Χ ἐπὶ τοῦ (onto) Ψ. Συνάρτησις ἐπὶ τοῦ Ψ εἶναι λοιπὸν εἰδικὴ περίπτωσις συναρτήσεως ὡς πρὸς Ψ: ἂν συνάρτησις εἶναι ἐπὶ τοῦ Ψ, εἶναι καὶ ὡς πρὸς Ψ, ἀλλὰ τὸ ἀντίστροφον δὲν συμβαίνει πάντοτε, ὡς εἴδομεν εἰς τὰ σχήματα 3 καὶ 4.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις δὲν ὁρίζεται πλήρως, ἂν δὲν λάβουν χώραν τρεῖς προδιαγραφαί: τὸ σύνολον περιοχῆς, τὸ σύνολον Ψ καὶ ὁ κανὼν τῆς σχέσεως. Κατ᾽ αὐστηρὰν ἐξέτασιν, ἡ ἐξίσωσις $\psi = \chi^2$ δὲν ὁρίζει συνάρτησιν ἂν δὲν προσδιορισθοῦν τὰ σύνολα περιοχῆς καὶ ἐκτάσεως. Π.χ. ἂν λάβωμεν Χ ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ Ψ ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ $\psi = \chi^2$ γραφικῶς εἶναι διάφορος ἐκείνης τοῦ σχήματος 5 κατὰ τὸ ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι τώρα ὡρισμένη διὰ $\chi < 0$. Οὕτως, ὁ διάφορος προσδιορισμὸς τοῦ συνόλου περιοχῆς δύναται νὰ δώσῃ διάφορον σύνολον συναρτήσεως καὶ ἂν ἀκόμη χρησιμοποιῆται ὁ αὐτὸς κανὼν ἀντιστοιχίας.

Ὑπάρχουν ἄλλοι συμβολισμοὶ μιᾶς συναρτήσεως, οἱ ὁποῖοι τονίζουν τὴν σπουδαιότητα τῶν ὑπ᾽ αὐτὴν κειμένων συνόλων. Ἡ ἀμέσως ἀνωτέρω ἐξετασθεῖσα συνάρτησις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς $\varphi : X \rightarrow \Psi$, ὅπου Χ τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, Ψ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως δίδονται ὑπὸ $\psi = \varphi(\chi) = \chi^2$. Λέγομεν ἐνίοτε ὅτι ἡ Χ ἀπεικονίζεται ἐντὸς τῆς Ψ ὑπὸ τῆς φ, ἢ ὅτι ἡ Χ μετασχηματίζεται εἰς Ψ, καὶ οὕτω θὰ ἐκλαμβάνωμεν τὰς λέξεις «ἀπεικόνισις» καὶ «μετασχηματισμὸς» συνωνύμους τῆς λέξεως «συνάρτησις». Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις, ἐπὶ παραδείγματι, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀπεικόνισις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (ἢ τοῦ ἄξονος τῶν χ) εἰς τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (μὴ ἀρνητικὸν τμῆμα τοῦ ἄξονος τῶν ψ). Ἕτερος εἰς συμβολισμὸς συναρτήσεως εἶναι $\varphi : (\chi, \psi)$. Οὗτος παρουσιάζει τὸ πλεονέκτημα τῆς ἐμφάσεως ἐπὶ τοῦ ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν, ὅπου $\chi \in X$ καὶ $\psi \in \Psi$.

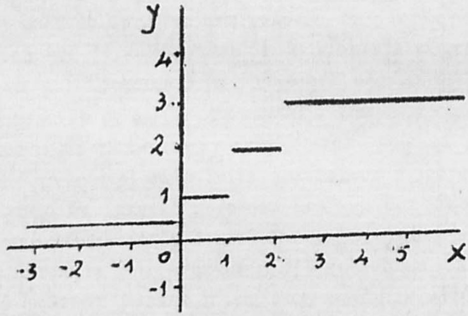
Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τῆς συναρτήσεως εἶναι, βεβαίως, γενικός. Τὰ σύνολα X καὶ Ψ δυνατὸν νὰ συνίστανται ἐξ οἱωνδήποτε στοιχείων, καὶ ὁ κανὼν τῆς σχέσεως δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀποτελῇ ἰσότητα. Ἡ περιοχὴ X δυνατὸν νὰ εἶναι συλλογὴ συνόλων· ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει ἡ συνάρτησις καλεῖται ***συνάρτησις συνόλων***. Ἂν ἡ ἔκτασις μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ὑποσύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτησις καλεῖται ***συνάρτησις πραγματικῶν τιμῶν***. Ἐπίσης, ὁ κανὼν ἀντιστοιχίας δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ λέξεων, δειχθῇ ὑπὸ πίνακος, παρασταθῇ γραφικῶς ἢ προσδιορισθῇ διὰ μαθηματικῆς ἐξισώσεως ἢ τύπου.

Περαιτέρω διασάφησις θὰ βοηθήσῃ εἰς τὴν ἀπονομὴν ἐμφάσεως ἐπὶ τῆς ποικιλίας τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας μιᾶς συναρτήσεως. Ἔστωσαν X τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, Ψ τὸ σύνολον ὅλων τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ὁ κανὼν ἀντιστοιχίας :

$$\begin{array}{ll} \varphi(\chi) = 1/2 & \text{ὅταν} \quad \chi \leqq 0, \\ \varphi(\chi) = 1 & \text{»} \quad 0 < \chi \leqq 1, \\ \varphi(\chi) = 2 & \text{»} \quad 1 < \chi \leqq 2, \\ \varphi(\chi) = 3 & \text{»} \quad 2 < . \end{array}$$

Τὸ σχῆμα 6 παρουσιάζει γραφικῶς τὴν συνάρτησιν ταύτην (καλουμένην κλιμακωτήν).

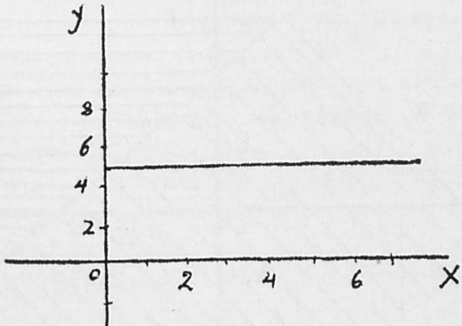
Ἤ, ἔστωσαν X τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, Ψ τὸ σύν-



Σχῆμα 6

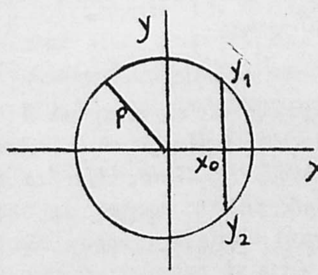
ολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μεγαλυτέρων τοῦ 2 καὶ κανὼν σχέσεως $\varphi(\chi)=5$. Γραφικῶς ἡ συνάρτησις δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 7. Ἕκαστον στοιχεῖον $\chi \in X$ ἀπεικονίζεται εἰς ἓν στοιχεῖον τοῦ Ψ, τὸ στοιχεῖον 5, οὕτως ὥστε οἱ μὴ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀπεικονίζονται εἰς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν 5. Συνάρτησις ἔχουσα τὴν ἰδιότητα ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον εἰς τὴν περιοχὴν νὰ δύναται νὰ ἀπεικονισθῇ εἰς ἓν στοιχεῖον τοῦ συνόλου Ψ καλεῖται ***σταθερὰ συνάρτησις*** ἤ, ἁπλῶς, ***σταθερά***.

Πρέπει νὰ κατανοηθῇ ὅτι μία βασικὴ ἰδιότης τῆς συναρτήσεως εἶναι ὅτι δύο διατεταγμένα ζεύγη εἰς τὸ σύνολον δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πρῶτον στοιχεῖον (μολονότι πλείονα τοῦ ἑνὸς διατεταγμένα ζεύγη δυνατὸν νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ δεύτερον στοι-



Σχῆμα 7

χεῖον). Εἴς τινα βιβλία μαθηματικῶν αὕτη καλεῖται συνάρτησις μιᾶς τιμῆς, καὶ ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως διευρύνεται διὰ νὰ περιλάβῃ καὶ συναρτήσεις πολλῶν τιμῶν, εἰς τὰς ὁποίας πλείονα τοῦ ἑνὸς στοιχεῖα εἰς τὴν ἔκτασιν εὑρίσκονται εἰς ἀντιστοιχίαν πρὸς δοθὲν στοιχεῖον εἰς τὴν περιοχήν. Θὰ περιορίσωμεν τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ὅρου μόνον εἰς τῆς συναρτήσεις μιᾶς τιμῆς, καὶ ἄλλα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου γινομένου θὰ καλοῦνται *σχέσεις*. Σχέσις, λοιπόν, εἶναι ἁπλῶς καὶ μόνον σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν, καὶ δὲν ἀπαιτεῖται δύο διατεταγμένα ζεύγη νὰ μὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ πρῶτον στοιχεῖον. Ὡς παράδειγμα σχέσεως ἂς θεωρήσωμεν

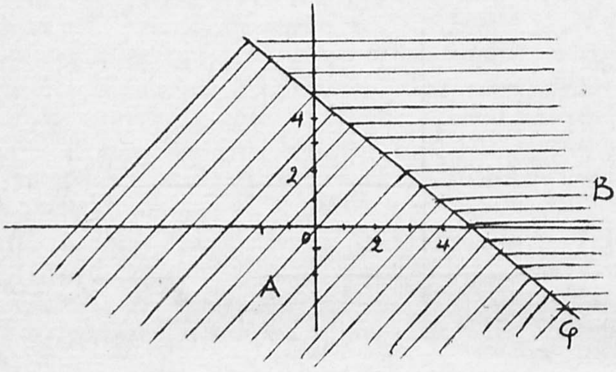


Σχῆμα 8

γραφικῶς τὴν ἐξίσωσιν κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα ρ, $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$, ὡς δεικνύει τὸ σχ. 8. Ἐδῶ τὸ στοιχεῖον χ_0 εὑρίσκεται εἰς ἀντιστοιχίαν μὲ δύο τιμάς, ψ_1, ψ_2, οὕτως, ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 + \psi^2 = \rho^2$ δὲν ὁρίζει συνάρτησιν κατὰ τὸν ὁρισμόν μας· εἶναι παράδειγμα σχέσεως.

Ἐξισώσεις καὶ ἀνισότητες εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον

Ἄς ἐξετάσωμεν τώρα (γραμμικὸν) σύνολον συναρτήσεως εἰς ἐπίπεδον (δισδιάστατον χῶρον) τοῦ ὁποίου ὁ κανὼν εἶναι $\psi = 5 - \chi$. Τότε τὸ σύνολον συναρτήσεως εἶναι $\varphi = \{(\chi, \psi) \mid \psi = 5 - \chi\}$ (10). Τὸ σύνολον αὐτὸ ἐνίοτε καλεῖται σύνολον λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\psi = 5 - \chi$. Τὰ σημεῖα (χ, ψ) θὰ κεῖνται ἀπ' εὐθείας ἂν παρασταθοῦν γραφικῶς, ἐξ οὗ καὶ τὸ ὄνομα γραμμικὴ συνάρτησις.



Σχῆμα 9

Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς βάσις πρὸς προσδιορισμὸν ἄλλων συνόλων σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον. Ἂς ἐξετάσωμεν τὸ σύνολον σημείων (χ, ψ), ὁριζόμενον ὑπό :

$$A = \{(\chi, \psi) \mid \psi < 5 - \chi\}$$

ἔνθα δι' ἕκαστον χ, τὸ ψ ἐπαληθεύει τὴν αὐστηρὰν γραμμικὴν ἀνισότητα $\psi < 5 - \chi$ (ἤ, ὅπως θὰ γράφωμεν, $\chi + \psi - 5 < 0$). Τὸ σημειοσύνολον τὸ ὁριζόμενον μέσῳ γραμμικῆς ἀνισότητος καλεῖται ***ἡμιχῶρος*** ἢ χῶρος λύσεως τῆς ἀνισότητος. Ἕτερος ἡμιχῶρος εἶναι τὸ σημειοσύνολον :

$$B = \{(\chi, \psi) \mid \chi + \psi - 5 > 0\}.$$

Τὰ σύνολα φ, Α καὶ Β ἐμφανίζονται εἰς τὸ σχῆμα 9 (11).

Βλέπομεν ἐδῶ ὅτι μία εὐθεῖα χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς τρία ἀμοιβαίως ἀποκλειστικὰ ἡμισύνολα, τῶν ὁποίων ἡ ἕνωσις εἶναι τὸ ἐπίπεδον : τὸ σύνολον τῶν σημείων κάτωθεν τῆς γραμμῆς, ἐπὶ τῆς γραμμῆς καὶ ὑπὲρ τὴν γραμμήν. Τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπὶ τῆς γραμμῆς εἶναι τὸ ***σύνορον*** τῶν συνόλων Α καὶ Β. Ὅταν ἓν σύνολον ὁρίζηται οὕτως ὥστε νὰ περικλείῃ τὸ σύνορόν του, ὡς, π.χ.,

$$\Gamma = \{(\chi, \psi) \mid \chi + \psi - 5 \leqq 0\},$$

τὸ ὁποῖον εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ὁ ἡμιχῶρος ὁμοῦ μετὰ τῶν σημείων ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καλεῖται ***κλειστὸν σύνολον*** (καὶ ἡ ἀνισότης καλεῖται ἀσθενὴς

---

10) Ἂν ἄλλως δὲν ὁρίζηται, θὰ ἀντιλαμβανώμεθα ὅτι τὰ σύνολα περιοχῆς καὶ ἐκτάσεως τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν συναρτήσεων εἶναι τὰ μέγιστα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

11) Ἀφοῦ τὰ σύνολα φ, Α καὶ Β εἶναι ἀπειροσύνολα, αὐτό, ὡς καὶ τὰ ἄλλα εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο, εἶναι ἀτελὲς γραμμογράφημα : τέλειον θὰ ἦτο ἐὰν ἐπεξετείνετο πρὸς τὸ ἄπειρον πρὸς ὅλας τὰς κατευθύνσεις τοῦ ἐπιπέδου.

ἀνισότης). Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸ σύνολον Γ καλεῖται ***κλειστὸς ἡμιχῶρος*** ὡς εἶναι τὸ σύνολον

$$\Delta = \{(\chi, \psi) \mid \chi + \psi - 5 \geqq 0.$$

Σύνολον μὴ περιλαμβάνον τὸ σύνορόν του καλεῖται ***ἀνοικτὸν σύνολον*** καὶ ἡμιχῶροι ὁριζόμενοι ὑπὸ αὐστηρῶν ἢ ἰσχυρῶν γραμμικῶν ἀνισοτήτων (τὰ σύνολα Α καὶ Β, π.χ.) καλοῦνται ***ἀνοικτοὶ ἡμιχῶροι*** [12].

Αἱ ἔννοιαι αὗται δύνανται νὰ ἀνακεφαλαιωθοῦν ὡς ἀκολούθως:

Ἀνοικτὸς ἡμιχῶρος εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ἐπαληθεῦον ἰσχυρὰν γραμμικὴν ἀνισότητα $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma < 0$ ἢ $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma > 0$· κλειστὸς ἡμιχῶρος εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ἐπαληθεῦον τὴν ἀσθενῆ ἀνισότητα $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma \leqq 0$ ἢ $\alpha\chi + \beta\psi + \gamma \geqq 0$ (ὅπου α, β, γ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ α, β ὄχι ἀμφότερα μηδενικά) [13].

Ἂς ἐξετάσωμεν δύο γραμμικὰς ἐξισώσεις τῶν ὁποίων τὰ διαγράμματα δὲν εἶναι συγγραμμικά,

(1) $$\chi + \psi - 5 = 0$$

(2) $$-\chi + \psi + 2 = 0.$$

Τότε ὑπάρχει ἓν διατεταγμένον ζεῦγος (χ, ψ) τὸ ὁποῖον ταυτοχρόνως θὰ ἐπαληθεύῃ τὰς δύο ἐξισώσεις, καὶ ἀπὸ τὸ διάγραμμα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν (σχ. 10(φαίνεται ὅτι τὸ διατεταγμένον ζεῦγος εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς (7/2, 3/2). Ἂν φ καὶ θ τὰ σύνολα τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ποὺ ἐπαληθεύουν τὰς (1) καὶ (2), ἀντιστοίχως, τότε τὸ σύνολον $\varphi \cap \theta$ εἶναι τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως τῶν δύο ἐξισώσεων, τὸ ὁποῖον εἰς τὴν ὑπὸ κρίσιν περίπτωσιν ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς σημείου (7/2, 3/2). Ὅταν $\varphi \cap \theta$ ἀποτελῆται ἐξ ἑνὸς μόνον σημείου, αἱ γραμμικαὶ ἐξισώσεις εἶναι ***ἀνεξάρτητοι***. Ἂν τὰ διαγράμματα τῶν δύο γραμμικῶν ἐξισώσεων εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι, τότε ἡ τομὴ εἶναι κενὸν σύνολον· δὲν ὑπάρχει ταυτόχρονος λύσις καὶ αἱ ἐξισώσεις εἶναι ***ἀσυμβίβαστοι***. Ἂν τὰ διαγράμματα δύο ἐξισώσεων εἶναι ἡ αὐτὴ εὐθεῖα (αἱ γραμμαὶ εἶναι συγγραμμικαί), τότε ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις (ἡ τομὴ ἔχει ἄπειρα σημεῖα) καὶ αἱ ἐξισώσεις εἶναι ***ἐξηρτημέναι***. Ὡς παράδειγμα τῆς περιπτώσεως ταύτης, θεωρήσατε τὴν ἐξίσωσιν (1) καὶ τὴν

(3) $$10\chi + 10\psi - 50 = 0.$$

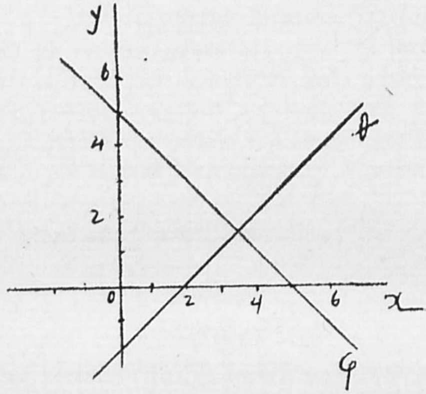
Τὸ διάγραμμα τῆς (3) εἶναι ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ἐκείνου τῆς (1)· ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἁπλῶς ἡ (1) πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ 10. Γενικώτερον, ἂν δύο γραμμικαὶ ἐξισώσεις εἶναι ἐξηρτημέναι, τότε ἡ μία εἶναι σταθερὸν πολλαπλάσιον τῆς ἄλλης.

---

12) Δύναται νὰ δειχθῇ ἀπὸ τὸ ἀμέσως ἀνωτέρω γραμμογράφημα ὅτι τὸ κλειστὸν σύνολον Δ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ ἀνοικτοῦ συνόλου Α καὶ ὅτι τὸ ἀνοικτὸν σύνολον Α εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ κλειστοῦ συνόλου Δ. Αὕτη εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις θεωρήματος (τὸ συμπλήρωμα ἀνοικτοῦ συνόλου εἶναι κλειστὸν καὶ ἀντιστρόφως), τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύεται εἰς τὴν Τοπολογίαν, κλάδον τῶν μαθηματικῶν εἰς τὸν ὁποῖον ἐξετάζονται αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν συνόλων καὶ μετασχηματισμῶν.

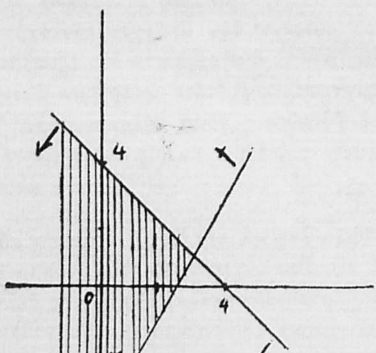
13) Οἱ ὁρισμοὶ οὗτοι ἀναφέρονται εἰς δισδιάστατον χῶρον· δύνανται νὰ γενικευθοῦν εἰς χώρους περισσοτέρων διαστάσεων.

Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἐξετάσωμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὸ ὁποῖον ταυτοχρόνως ἐπαληθεύει τὰς ἀντιστοίχους γραμμικὰς ἀνισότητας. Τὰ σύνολα λύσεως, ὡς ἐκεῖνα τῶν ἐξισώσεων καὶ ἀνισοτήτων, εἶναι τομαὶ συνόλων, ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ σύνολα εἶναι ἡμιχῶροι, οὐδέποτε ὑπάρχει μία μόνον λύσις—

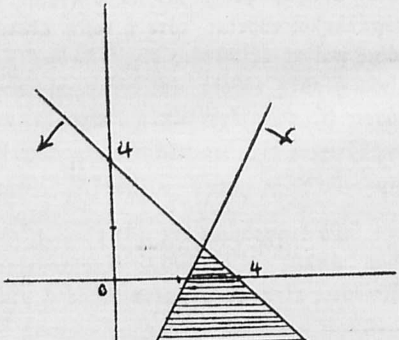


Σχῆμα 10

ἡ τομὴ εἶναι ἢ ἄπειρον ἢ κενὸν σύνολον. Αὕτη εἶναι σοβαρὰ διάκρισις μεταξὺ ζευγῶν ἐξισώσεων καὶ ἀνισοτήτων καὶ θὰ ἔπρεπε νὰ κατανοηθῇ καλῶς. Π.χ. θεωρήσατε δύο τεμνομένας ἐπὶ ἐπιπέδου εὐθείας. Ἡ ταυτόχρονος λύσις τῶν ἐξισώσεων εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς των, ἀλλὰ τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως τῶν ἀντι-



Σχῆμα 11α
Σύνολον λύσεως διὰ
$\chi+\psi-4<0$
$2\chi-\psi-5<0$



Σχῆμα 11β
Σύνολον λύσεως διὰ
$\chi+\psi-4<0$
$2\chi-\psi-5>0$

στοίχων ἀνισοτήτων εἶναι σφηνοειδὴς περιοχὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ σύνολον εἶναι ἀπειροσύνολον (Σχ. 11α καὶ 11β).

Ἐὰν ὅμως αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι (ἀλλ' ὄχι συγγραμμικαί) ὑπάρχουν τρεῖς δυνατότητες : αἱ ἀνισότητες ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν (τὰ σύμβολα ἀνισότητος δείχνουν πρὸς τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν), καὶ ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων εἶναι ἡμιχῶρος· αἱ ἀνισότητες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων εἶναι ἄπειρος «λωρὶς» εἰς τὸ ἐπίπεδον· αἱ ἀνισότητες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ ἡ τομὴ τῶν ἡμιχώρων εἶναι κενή. Παραδείγματα τινὰ θὰ μᾶς βοηθήσουν.

Ἔστωσαν αἱ ἐξισώσεις εὐθειῶν $\chi+2\psi-6=0$ καὶ $\chi+2\psi-10=0$.

Περίπτωσις 1η **:** Αἱ ἀνισότητες ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν. Ἔχομεν τὰς ἀνισότητας

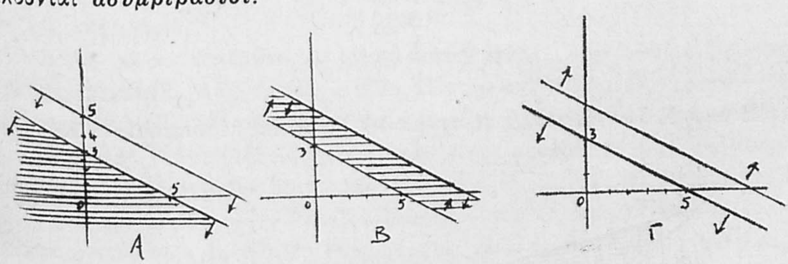
(4) $\quad \chi+2\psi-6 \leqq 0$

(5) $\quad \chi+2\psi-10 \leqq 0.$

Τὸ σημειοσύνολον τὸ ἱκανοποιοῦν ταυτοχρόνως τὰς δύο αὐτὰς ἀνισότητας εἶναι τὸ σημειοσύνολον τὸ ἱκανοποιοῦν τὴν πρώτην ἀνισότητα καὶ μόνον — εἶναι ὁ ὑπὸ τῆς (4) ὁριζόμενος ἡμιχῶρος. Ἐκ τούτου λέγομεν ὅτι ἡ (5) εἶναι ***πλεονάζουσα ἀνισότης*** (σχ. 12α).

Περίπτωσις 2α **:** αἱ ἀνισότητες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ ἡ τομὴ τῶν ἀντιστοίχων ἡμιχώρων εἶναι ἀπειροσύνολον σημείων μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν. Ἂς λάβωμεν $\chi+2\psi-6\geqq 0$ καὶ $\chi+2\psi-10\leqq 0$. Τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως εἶναι ἡ λωρὶς τοῦ σχ. 12β, ἐκτεινομένη πρὸς τὸ ἄπειρον ἄνω ἀριστερὰ καὶ κάτω δεξιά.

Περίπτωσις 3η : αἱ ἀνισότητες δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔννοιαν καὶ τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως εἶναι κενόν. Ἂς λάβωμεν τὰς ἀνισότητας $\chi+2\psi-6\leqq 0$ καὶ $\chi+2\psi-10\geqq 0$. Ἐμφανῶς, δὲν ὑπάρχουν σημεῖα ταυτοχρόνως ἱκανοποιοῦντα τὰς ἀπαιτήσεις ταύτας. Τὸ σύνολον λύσεως εἶναι κενὸν (σχ. 12γ) καὶ αἱ ἀνισότητες καλοῦνται ***ἀσυμβίβαστοι.***



Σχῆμα 12

Παραμένει μία δυνατότης δι᾽ ἀνισότητας. Δύο ἀνισότητες δυνατὸν νὰ ἔχουν οὕτως ὥστε ἡ μία νὰ εἶναι σταθερὸν πολλαπλάσιον τῆς ἄλλης. Ὁ ἀναγνώστης θὰ εὕρῃ διδακτικὴν τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων τῆς περιπτώσεως αὐτῆς· ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ἂν αἱ ἀνισότητες εἶναι ἰσχυραὶ ἢ ἀσθενεῖς ὡς καὶ ἐκ τῆς ἐννοίας τῶν ἀνισοτήτων.

Ἐξέτασις τοῦ ταυτοχρόνου συνόλου λύσεως τριῶν ἢ περισσοτέρων ἀνισοτήτων εἶναι ἐπέκτασις τῶν προηγηθεισῶν παρατηρήσεων· ἐν πάσῃ περιπτώσει, τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως εἶναι ἡ τομὴ τῶν ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων ὁριζομένων ἡμιχώρων.

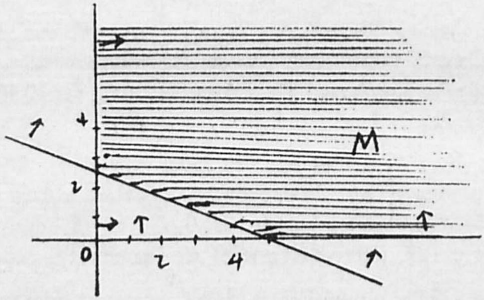
Ἔστωσαν

(6) $$\chi \geqq 0$$

(7) $$\psi \geqq 0$$

(8) $$\chi + 2\psi - 5 \geqq 0$$

Ἡ τομὴ M δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 13. Αὐτὸ εἶναι παράδειγμα ἀπεριορίστου συνόλου. Ἓν σημειοσύνολον εἰς τὸ ἐπίπεδον καλεῖται ***περιωρισμένον*** ἂν κεῖται ἐντὸς κύκλου μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ μὴ ἄπειρον ἀκτῖνα κ' ἄλλως καλεῖται ***ἀπεριόριστον***. Ἐνίοτε εἶναι χρήσιμον νὰ προσδιορίζωμεν τὴν κατεύθυνσιν ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ σύνολον εἶναι ἀπεριόριστον. Τὸ



Σχῆμα 13

σύνολον M τοῦ σχ. 13 εἶναι περιωρισμένον ἀριστερὰ ἢ ἐκ τῶν κάτω καὶ ἀπεριόριστον δεξιὰ ἢ ἐκ τῶν ἄνω.

Ἀκόμη ἓν σύνολον ἀνισοτήτων εἶναι

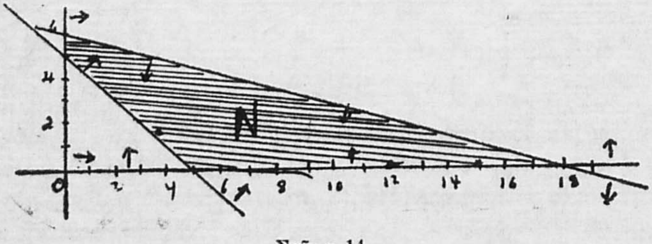
(9) $$\chi \geqq 0$$

(10) $$\psi \geqq 0$$

(11) $$\chi + \psi - 5 \geqq 0$$

(12) $$\chi + 3\psi - 18 \leqq 0$$

Ἡ τομὴ N δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 14· εἶναι καὶ περιωρισμένον καὶ κλειστὸν σύνολον.

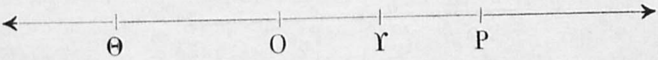


Σχῆμα 14

Συστήματα συντεταγμένων

Κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν θεμάτων τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὸ κεφάλαιον 3 θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ ἡ ὑπ' αὐτὸν γεωμετρία, οὕτω θὰ πρέπει νὰ γίνουν ὡρισμένα σχόλια ἐπὶ τῆς σχέσεως μεταξὺ γεωμετρίας καὶ ἀλγέβρας. Ὡς ἴσως ἀνεμένετο, ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστοιχίας ἓν πρὸς ἓν παρέχει τὸν σύνδεσμον μεταξὺ γεωμετρίας καὶ ἀλγέβρας, οὕτω θὰ θεωρήσωμεν γραφικῶς τὴν μέθοδον τῆς καθιδρύσεως τοιαύτης ἀντιστοιχίας διὰ τὴν πραγματικὴν γραμμὴν καὶ τὸ ἐπίπεδον.

Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν καθωρισμένην τινὰ εὐθεῖαν καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα, Ο καὶ Υ. Τὸ Ο καλεῖται ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ Υ τὸ σημεῖον μονάδος. Τὸ Ο διαιρεῖ τὴν εὐθεῖαν εἰς δύο ἀκτῖνας (εὐθείας ἐκτεινομένας εἰς τὸ ἄπειρον ὡς πρὸς μίαν μόνον κατεύθυνσιν). Ἡ ἀκτὶς ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Υ καλεῖται ἡ θετικὴ ἀκτίς, ἢ τὸ Υ εὑρίσκεται εἰς θετικὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ Ο· τὸ σημεῖον Θ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἀρνητικῆς ἀκτῖνος, ἢ τὸ Θ εὑρίσκεται εἰς ἀρνητικὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ Ο. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΥ χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς μετρήσεως

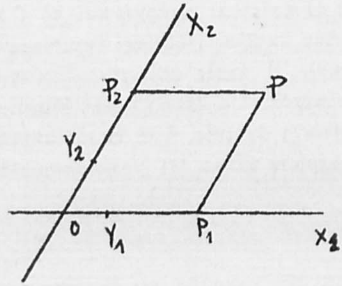


κατὰ τὴν μέτρησιν μηκῶν ἐπὶ τῆς γραμμῆς· εἰς ἕκαστον σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς θετικῆς ἀκτῖνος ὁρίζομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΡ, τοῦ μήκους ὄντος τῆς ἀναλογίας (σχέσεως μεταξὺ) τοῦ μήκους τοῦ ΟΡ πρὸς ἐκεῖνο τοῦ ΟΥ. Εἰς ἕκαστον σημεῖον Θ ἐπὶ τῆς ἀρνητικῆς ἀκτῖνος ὁρίζομεν τὸν ἀρνητικὸν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ μετροῦντος τὸ μῆκος ΟΘ. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ὡς ἀρχὴ ὁρίζεται τὸ Ο (ὁ ἀριθμὸς 0) καὶ ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Υ ὁρίζεται ὁ 1. Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι κατ' αὐτὴν τὴν μέθοδον τίθεται εἰς ἀντιστοιχίαν πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας μὲ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν καὶ ὅτι οὐδεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς τίθεται εἰς ἀντιστοιχίαν μὲ ἓν σημεῖον πλέον ἢ ἅπαξ· ὅταν ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἓν χρησιμοποιηθῇ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης μεταξὺ τῶν σημείων τῆς εὐθείας καὶ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, λέγομεν ὅτι μία (μονοδιάστατος) συντεταγμένη εἰσήχθη ἐπὶ τῆς εὐθείας.

Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν δισδιάστατον χῶρον λαμβάνοντες δύο τυχούσας τεμνομένας εὐθείας, καλουμένας ὁ ἄξων τῶν χ_1 καὶ ὁ ἄξων τῶν χ_2, ἐκλέγοντες θετικὴν κατεύθυνσιν ἐφ' ἑκάστου ἄξονος καὶ δημιουργοῦντες μονοδιάστατον σύστημα συντεταγμένων ἐφ' ἑκάστου ἄξονος μέσῳ ἐκλεγείσης μονάδος μήκους. Συγκεκριμένως, ἔστωσαν : Ο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν γραμμῶν, Υ_1 καὶ Υ_2 τὰ σημεῖα ἐπὶ τῶν ἀξόνων χ_1 καὶ χ_2, ἀντιστοίχως, ἕκαστον διάφορον τοῦ Ο, καὶ Υ_1 καὶ Υ_2 ἕκαστον εἰς θετικὴν κατεύθυνσιν ἐκ τοῦ Ο. Τότε δύναται νὰ εἰσαχθῇ σύστημα συντεταγμένων ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_1 μὲ ἀρχήν του τὸ Ο καὶ μονάδα μετρήσεως τὸ Υ_1, καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_2 μὲ Ο καὶ Υ_2 ὡς ἀρχὴν καὶ μονάδα μετρήσεως, ἀντιστοίχως. Πρέπει νὰ καταστῇ σαφὲς ὅτι αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εἶναι κάθετοι καὶ ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $\mathrm{O}\Upsilon_1$ καὶ $\mathrm{O}\Upsilon_2$ δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος.

Εἰς ἕκαστον σημεῖον Ρ εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον ἢ τὸ ἐπίπεδον δύναται νὰ ὁρισθῇ ἓν διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, καλουμένων «συντεταγμένων» τοῦ σημείου. Σύρατε δύο εὐθύγραμμα τμήματα ἐκ τοῦ Ρ, τὸ ἓν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ_1, τὸ ἕτερον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν χ_2, καὶ ὀνομάσατε τὰ σημεῖα τομῆς τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ τοὺς ἄξονας χ_1 καὶ

χ_2, P_1 καὶ P_2, ἀντιστοίχως. Ὁ εἰς τὸ P_1 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_1 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς καλεῖται ἡ χ_1 - συντεταγμένη ἢ *τετμημένη* τοῦ σημείου P, καὶ ὁ εἰς τὸ P_2 ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_2 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς καλεῖται ἡ χ_2 - συντεταγμένη ἢ *τεταγμένη* τοῦ P. Οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοί, χ_1 καὶ χ_2 ὁρίζονται ὡς αἱ συντεταγμέ-



Σχῆμα 15

ναι τοῦ σημείου P καὶ τὸ σημεῖον δηλοῦται ὑπὸ τοῦ συμβόλου (χ_1, χ_2). Ἡ μέθοδος αὕτη, ἑπομένως, ὁρίζει ἓν διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν δι᾽ ἕκαστον σημεῖον P εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ εἶναι ἐμφανὲς ὅτι, δοθέντος σημείου P, ἡ μέθοδος ἄγει εἰς ἓν μόνον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν χ_1 καὶ χ_2. Ἀντιστρόφως, δοθέντων δύο τυχόντων πραγματικῶν ἀριθμῶν χ_1 καὶ χ_2, δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον P ἔχον χ_1 καὶ χ_2 ὡς συντεταγμένας. Διότι βάσει τῶν μονοδιαστάτων συστημάτων συντεταγμένων τῶν εἰσαχθέντων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τῶν σχηματιζουσῶν τοὺς ἄξονας, ἂν ἔχωμεν τὰ χ_1 καὶ χ_2, θὰ ὑπάρχουν σημεῖα P_1 καὶ P_2 καὶ μόνον αὐτὰ ἔχοντα τοὺς ἀριθμοὺς ὡς τετμημένην καὶ τεταγμένην, ἀντιστοίχως. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἐκ τῶν P_1 καὶ P_2 τὰ παράλληλα πρὸς τοὺς ἄξονας θὰ συναντηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον P, καὶ τὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ χ_1 καὶ χ_2 ὡς πρώτην καὶ δευτέραν συντεταγμένην, καὶ διαισθητικῶς ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ὑπάρχει μόνον ἓν τοιοῦτον σημεῖον P. Ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἓν μεταξὺ τῶν σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ δημιουργηθῇ κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον, καὶ ὅταν τοῦτο συμβῇ λέγομεν ὅτι ἓν γραμμικὸν σύστημα συντεταγμένων εἰσήχθη εἰς τὸ ἐπίπεδον ἢ δισδιάστατον χῶρον.

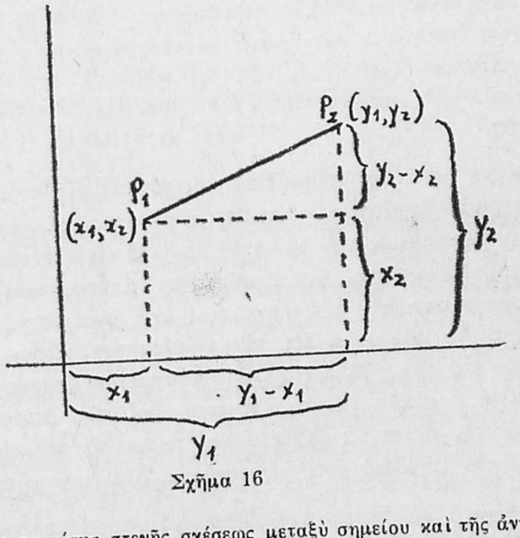
Ὁμοίως δυνάμεθα τὰ κατασκευάσωμεν τρισδιάστατον χῶρον. Λαμβάνομεν τρεῖς τεμνομένας εὐθείας, τυχούσας ἀλλὰ μὴ κειμένας ὅλας εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καλοῦμεν αὐτὰς τοὺς ἄξονας τῶν χ_1, χ_2, χ_3, ἐκλέγομεν θετικὴν κατεύθυνσιν ἐφ᾽ ἑκάστου ἄξονος, καὶ δημιουργοῦμεν μονοδιάστατον σύστημα συντεταγμένων ἐφ᾽ ἑκάστου ἄξονος. Τότε μία διατεταγμένη τριὰς (ordered triple) πραγματικῶν ἀριθμῶν, σχετίζεται πρὸς ἓν σημεῖον καὶ δύναται περαιτέρω νὰ δειχθῇ ὅτι, δοθείσης τυχούσης διατεταγμένης τριάδος πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ μέθοδος ἄγει εἰς ἓν καὶ μόνον ἓν ἐν συσχετισμῷ σημεῖον. Τοῦτο καθιδρύει ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἓν μεταξὺ σημείων καὶ διατεταγμένων τριάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ κατ᾽ αὐτὸν

τὸν τρόπον δύναται τὰ καθιδρυθῇ γραμμικὸν σύστημα συντεταγμένων εἰς τὸ τρισδιάστατον χῶρον ([14]).

Ἡ συσχέτισις μεταξὺ σημείου καὶ διατεταγμένης ὁμάδος πραγματικῶν ἀριθμῶν δηλοῖ ὅτι δυνάμεθα νὰ συσχετίσωμεν ἓν σημεῖον πρὸς μίαν ὁμάδα 7 πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἢ ἔτι γενικώτερον, πρὸς ὁμάδα ν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔνθα ν πᾶς θετικὸς ἀκέραιος. Δυνάμεθα τότε νὰ καθορίσωμεν ν-διάστατον χῶρον R_ν ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων νιάδων $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ πραγματικῶν ἀριθμῶν· ἑκάστη νιὰς καλεῖται σημεῖον τοῦ χώρου, καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ καλοῦνται ἡ πρώτη, δευτέρα, . . . , νιοστὴ συντεταγμένη τοῦ σημείου. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀντίστοιχος γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις διὰ $\nu \geqq 4$, ἡ χρησιμότης τῆς γενικεύσεως θὰ καταστῇ ἐμφανὴς εἰς πολλὰ σημεῖα τῆς ἀκολουθούσης ἀναλύσεως.

Ἀπόστασις

Ἂς θεωρήσωμεν δοθὲν μονοδιάστατον σύστημα συντεταγμένων εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ σημείου μονάδος ἐκλαμβάνεται ὡς ἡ μονὰς μήκους. Τότε ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι 5 μονάδες, καί, ἀντιλαμβανόμενοι ὅτι ἡ ἀπόστασις δὲν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἕως τὸ σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ συντεταγμένη εἶναι —5 εἶναι ἐπίσης 5 μονάδες. Ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἕως τὸ σημεῖον τοῦ ὁποίου ἡ συντεταγμένη εἶναι χ, καλεῖται ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πρα-



Σχῆμα 16

14) Ὑπαρχούσης τοιαύτης στενῆς σχέσεως μεταξὺ σημείου καὶ τῆς ἀντιστοίχου αὐτοῦ ἀριθμητικῆς ἀποδόσεως, δυνάμεθα νὰ κάμνωμεν χρῆσιν τοῦ ἑνὸς ἀντὶ τῆς ἄλλης καὶ ἀντιστρόφως ἄνευ ἀσαφείας, καὶ θὰ ἀναφερώμεθα ἐνίοτε εἰς τὸν μονοδιάστατον χῶρον ὡς εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἰς τὸν δισδιάστατον ὡς εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ εἰς τὸν τρισδιάστατον ὡς εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων τριάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν.

γματικοῦ ἀριθμοῦ χ καὶ δηλοῦται ὑπὸ $|\chi|$, εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς χ ἂν χ θετικὸς ἢ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $-\chi$ ἂν χ ἀρνητικός. Δύναται ἐπίσης νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν P καὶ T εἶναι τυχόντα σημεῖα ἔχοντα συντεταγμένας χ_1 καὶ ψ_1, ἀντιστοίχως, τότε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν σημείων εἶναι $|\psi_1 - \chi_1|$. Ἐνθυμούμενοι ὅτι ὅταν γράφωμεν $\beta = \sqrt{\alpha}$, $\alpha \geqq 0$, ἐννοοῦμεν τὸν ἀριθμὸν $\beta \geqq 0$ τοιοῦτον ὥστε $\beta^2 = \alpha$, ἕτερος τρόπος ἐκφράσεως τῆς ἀποστάσεως $|\psi_1 - \chi_1|$ μεταξὺ δύο σημείων εἶναι $\sqrt{(\psi_1-\chi_1)^2}$. Συχνάκις θὰ χρησιμοποιῆται ὁ συμβολισμὸς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης διὰ τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ δύο σημείων εἰς μονοδιάστατον χῶρον.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα δισδιάστατον χῶρον μὲ δοθὲν ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων ἔχον τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους ἐπὶ τῶν ἀξόνων. Τότε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο σημείων $P_1 = (\chi_1, \chi_2)$ καὶ $P_2 = (\psi_1\ \psi_2)$ δύναται νὰ ὁρισθῇ μέσῳ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ἀφοῦ ἡ ἀπόστασις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου. Τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος P_1P_2, ἢ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ P_1 ἕως P_2 εἶναι τότε

$$\delta = \sqrt{(\psi_1-\chi_1)^2+(\psi_2-\chi_2)^2}$$

Αὐτὸ δηλοῖ τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν. Ἔστωσαν $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ καὶ $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ σημεῖα εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον. Τότε ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν σημείων εἶναι

$$\delta = \sqrt{(\psi_1-\chi_1)^2+(\psi_2-\chi_2)^2+\ldots+(\psi_\nu-\chi_\nu)^2} \quad (^{15})$$

Δύο ἀπόψεις τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ πρέπει νὰ σημειωθοῦν. Ὅταν $\nu = 1$ καὶ $\nu = 2$, οἱ προηγουμένως δοθέντες ὁρισμοὶ ἀποστάσεως εἰς χῶρον μιᾶς καὶ δύο διαστάσεων ἐμφανίζονται ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις, καὶ ὁ ὁρισμὸς ἰσχύει μόνον διὰ χώρους ἔχοντας ὀρθογώνια συστήματα συντεταγμένων μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους ἐφ' ἑκάστου ἄξονος.

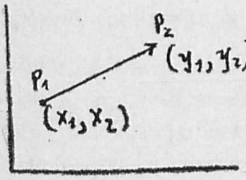
Διανύσματα

Ἡ ἀνάγκη νὰ δοθῇ μαθηματικὴ ἀπεικόνισις εἴς τινας φυσικὰς ποσότητας ὡς αἱ δυνάμεις καὶ ταχύτητες — ποσότητας ἐχούσας καὶ μέγεθος καὶ κατεύθυνσιν οὕτως ὥστε ἡ παρουσίασίς των ὑφ' ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἀνεπαρκὴς — ἐδημιούργησε τὴν μαθηματικὴν ἔννοιαν τοῦ διανύσματος, καὶ μαθηματικοὶ ὁρισμοὶ ἀναφερόμενοι εἰς τὰ διανύσματα συχνάκις αἰτιολογοῦνται ὑπὸ φυσικῶν ἢ γεωμετρικῶν ἀναλύσεων. Ὁρίζομεν ὅτι διάνυσμα εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον εἶναι διατεταγμένον ζεῦγος σημείων εἰς τὸν χῶρον (δηλ. διατεταγμένον ζεῦγος νιάδων). Τὸ πρῶτον σημεῖον καλεῖται *ἀρχικὸν* καὶ τὸ δεύτερον *τελικόν*. Δίδομεν κατεύθυνσιν εἰς ἓν διάνυσμα ὁρίζοντες ποῖον τὸ ἀρχικὸν καὶ ποῖον τὸ τελικὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἡ φυσικὴ ἔννοια τοῦ μεγέθους ἀντιπροσωπεύεται ὑπὸ τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος.

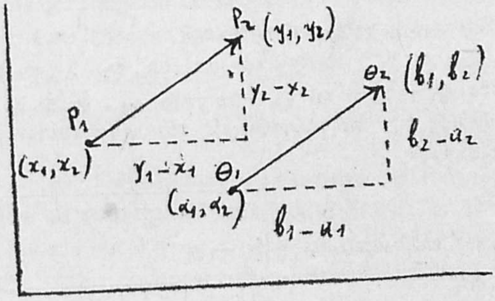
15) Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι οὗτος δὲν ἀποτελεῖ τὸν μόνον τρόπον προσδιορισμοῦ ἀποστάσεως. Εἰς πλέον προκεχωρημένα βιβλία μαθηματικῶν τόσον τὸ σύστημα συντεταγμένων ὅσον καὶ ἡ μονὰς μήκους εἶναι αὐθαίρετα, καὶ ἡ ἔννοια τῆς ἀποστάσεως γενικεύεται εἰς ἐκείνην τῆς συναρτήσεως, ἡ ὁποία ἔχει ὡρισμένας ἰδιότητας.

Διάνυσμα εἰς χῶρον R_ν ($\nu \leqq 3$) δύναται νὰ παρασταθῇ γεωμετρικῶς ὑπὸ προσανατολισμένου εὐθυγράμμου τμήματος ἢ «βέλους» συνδέοντος τὰ διατεταγμένα ζεύγη τῶν σημείων.

Δύο διανύσματα καλοῦνται ἴσα ἂν εἶναι παράλληλα καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κατεύθυνσιν καὶ τὸ αὐτὸ μῆκος. Ἀφοῦ δύο διανύσματα δύνανται νὰ εἶναι ἴσα καὶ ἂν καταλαμβάνουν διαφορετικὰς θέσεις εἰς τὸν χῶρον, ἓν διάνυσμα δὲν ἔχει καθωρισμένην θέσιν (τὸ ἀρχικὸν σημεῖον δύναται νὰ ἐκλεγῇ αὐθαιρέτως) παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἔχει καὶ καθωρισμένην κατεύθυνσιν καὶ καθωρισμένον μῆκος. Αἱ συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος διανυσμάτων πρέπει νὰ κατανοηθοῦν σαφῶς. Ἔστωσαν τὰ P_1, P_2 καὶ Θ_1, Θ_2 ἴσα διανύσματα εἰς R_2, καὶ ἂς ἐξετάσωμεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ σχηματισθέντα εἰς τὸ σχ. 18. Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τῶν τριγώ-



Σχῆμα 17



Σχῆμα 18

νων εἶναι $\psi_1 - \chi_1$, $\psi_2 - \chi_2$, $\beta_1 - \alpha_1$, $\beta_2 - \alpha_2$. Ἀφοῦ τὰ διανύσματα εἶναι ἴσα, τὰ τρίγωνα ἔχουν τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὀξεῖαν γωνίαν, ἄρα εἶναι ἴσα. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ πλευραὶ εἶναι ἐπίσης ἴσαι,

$$\psi_1 - \chi_1 = \beta_1 - \alpha_1, \ \psi_2 - \chi_2 = \beta_2 - \alpha_2.$$

Ὁδηγούμεθα οὕτως εἰς τὸν γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος διανυσμάτων. Ἔστωσαν τὰ $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$, $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ καὶ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, $(\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_\nu)$ δύο διανύσματα εἰς R_ν ἐν σχέσει πρὸς καθωρισμένον σύστημα συντεταγμένων. Τότε τὰ διανύσματα εἶναι ἴσα ἂν $\psi_1 - \chi_1 = \beta_1 - \alpha_1$, $\psi_2 - \chi_2 = \beta_2 - \alpha_2, \ldots, \psi_\nu - \chi_\nu = \beta_\nu - \alpha_\nu$.

Ἀφοῦ ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀρχικοῦ σημείου διανύσματος εἶναι αὐθαίρετος, οἱ ἀριθμοὶ $\kappa_\iota = \psi_\iota - \chi_\iota$ εἶναι τὰ κριτήρια ἰσότητος διανυσμάτων. Διὰ πᾶν δοθὲν ἀρχικὸν σημεῖον $(\chi_1, \ldots, \chi_\nu)$, αἱ συντεταγμέναι τοῦ τελικοῦ σημείου εἶναι $\psi_1 = \chi_1 + \kappa_1$, $\psi_2 = \chi_2 + \kappa_2, \ldots, \psi_\nu = \chi_\nu + \kappa_\nu$. Τοῦτο εὐχερῶς φαίνεται εἰς R_2. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ἓν διάνυσμα (χ_1, χ_2), (ψ_1, ψ_2) καὶ ὅτι μετακινοῦμεν τὸ διάνυσμα αὐτὸ παραλλήλως πρὸς τὸν ἑαυτόν του σχηματίζοντες τὸ διάνυσμα (χ_1', χ_2'), (ψ_1', ψ_2'). Αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἀρχικοῦ σημείου καὶ τοῦ τελικοῦ τοιούτου ἤλλαξαν, ἀλλ' ἡ μεταβολὴ εἰς τὰς συντεταγμένας τῶν χ_1 καὶ χ_2 εἶναι ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ ὡς εἰς τὰς συντεταγμένας τῶν ψ_1, ψ_2. Ἑπομένως αἱ διαφοραὶ $\psi_\iota - \chi_\iota = \kappa_\iota$ παραμένουν ἀμετάβλητοι, καὶ οἱ ἀριθμοὶ κ_ι δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν πρὸς ἀναγνώρισιν παντὸς διανύσματος ὅταν δίδεται τὸ ἀρχικὸν σημεῖον ([16]). Ἐκ τούτου ἀγόμεθα νὰ καλέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $\varkappa_\iota$ ***τὰς συνιστώσας*** τοῦ διανύσματος $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$, $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ εἰς R_ν (ἢ παντὸς διανύσματος ἴσου πρὸς αὐτὸ) καὶ ἂν ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα διὰ P_1 καὶ P_2, ἀντιστοίχως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$P_1P_2 = [\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu].$$

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὸ διάνυσμα P_2P_1 — τὸ διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν σημεῖον P_2 καὶ τελικὸν P_1 — ἔχει ὡς συνιστώσας τοὺς ἀριθμοὺς $\chi_1-\psi_1, \chi_2-\psi_2, \ldots, \chi_\nu-\psi_\nu$. Ἀφοῦ $\varkappa_\iota = \psi_\iota - \chi_\iota$, ἔχομεν $\chi_\iota - \psi_\iota = -\varkappa_\iota$, οὕτως αἱ συνιστῶσαι τοῦ P_2P_1 εἶναι $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_\nu$, καὶ γράφομεν

$$P_2P_1 = [-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_\nu].$$

Τὸ μῆκος ἐντετοπισμένου διανύσματος εἰς ν-διάστατον χῶρον ὁρίζεται ὡς ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ τελικοῦ σημείου του. Εἰδικώτερον, ἔστωσαν $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ τὸ ἀρχικὸν καὶ $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ τὸ τελικὸν σημεῖον διανύσματος. Τότε $\psi_1 = \chi_1 + \varkappa_1$, $\psi_2 = \chi_2 + \varkappa_2, \ldots, \psi_\nu = \chi_\nu + \varkappa_\nu$· χρησιμοποιοῦντες τὸν ὁρισμόν μας τῆς ἀποστάσεως εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον, τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος εὑρίσκομεν

$$(13) \qquad \lambda = \sqrt{(\psi_1-\chi_1)^2 + (\psi_2-\chi_2)^2 + \ldots + (\psi_\nu - \chi_\nu)^2}$$

Ἀλλ' ἀφοῦ $\varkappa_\iota = \psi_\iota - \chi_\iota$

$$\lambda = \sqrt{\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \ldots + \varkappa_\nu^2}.$$

Τὸ μῆκος διανύσματος ἀποφασίζεται ἑπομένως ἀπὸ τὰς συνιστώσας του, οὕτως ἡ ἐκλογὴ ἀρχικοῦ σημείου διανύσματος δὲν ἐπηρεάζει τὸ μῆκος του. Παράδειγμα δίδεται ἀπὸ τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων P_1P_2 καὶ P_2P_1 ἀνωτέρω. Εἶναι, βεβαίως, ἴσα διὰ $(-\varkappa_\iota^2) = \varkappa_\iota^2$.

Ἔχομεν τώρα δύο εἴδη διατεταγμένων νιάδων πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὸ διάνυσμα $[\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\nu]$ καὶ τὸ σημεῖον εἰς τὸν χῶρον R_ν $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$. Μολονότι αἱ ἔννοιαι εἶναι διαφορετικαί, εἶναι ἁπλοῦν νὰ ταυτίσωμεν τὰ δύο καὶ οὕτως ἀποφύγωμεν τὴν πιθανότητα συγχύσεως. Δοθέντος σημείου $(\chi_1 \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$, ἁπλῶς καὶ μόνον θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν σημεῖον $O = (0, 0, \ldots, 0)$ καὶ τελικὸν $P = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$. Αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος OP εἶναι τότε $\chi_1 - O, \chi_2 - O, \ldots, \chi_\nu - O$, ἢ $OP = [\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu]$. Ἂν ἐγκαταλείψωμεν τὸν συμβολισμὸν δι' ἀγκυλῶν καὶ συμφωνήσωμεν νὰ χρησιμοποιῶμεν παρενθέσεις διὰ νὰ περικλείωμεν τὰς συνισταμένας διανυσμάτων τῶν ὁποίων ἀρχικὰ σημεῖα εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος, τότε ἡ διατεταγμένη νιὰς $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἢ ὡς σημεῖον εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον ἢ ὡς διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν

---

16) Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἴδῃ τὴν ἀλήθειαν αὐτοῦ. Σύρατε ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων εἰς χῶρον R_2 καὶ τὰ διανύσματα (3, 2), (10, 6) καὶ (—2, 4), (5, 8). Οἱ ἀριθμοὶ $\varkappa_\iota$ εἶναι οἱ αὐτοὶ διὰ τὰ δύο διανύσματα. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τρία διανύσματα ἔχοντα ἀρχικὰ σημεῖα (0, 5), (6, —1), (—3, —7) εἶναι ἴσα πρὸς τὸ διάνυσμα τὸ ἔχον (3, 2), (10, 6) ὡς ἀρχικὸν καὶ τελικὸν σημ., ἀντιστοίχως. Τότε ποῖα τὰ τελικὰ σημεῖα τῶν τριῶν διανυσμάτων;

σημεῖον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος καὶ τὸ σημεῖον αὐτὸ ὡς τελικὸν σημεῖον [17]. Πρέπει ἐπίσης νὰ κατανοηθῇ ὅτι αἱ λέξεις «συνιστῶσα» καὶ «συντεταγμένη» δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν συνωνύμως ἄνευ συγχύσεως διὰ πᾶν διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν σημεῖον τὴν ἀρχήν, καὶ ὅτι τὸ τοιοῦτον διάνυσμα προσδιορίζεται ἐπαρκῶς ἂν μόνον ὁρίσωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ τελικοῦ σημείου του. Ἐπὶ πλέον, δύο διανύσματα καλοῦνται ἴσα ἂν αἱ ἀντίστοιχοι συντεταγμέναι των — ὡς πρὸς δοθὲν σύστημα συντεταγμένων — εἶναι ἴσαι. Τελικῶς, θὰ συμφωνήσωμεν νὰ θεωρῶμεν τὸ σημεῖον $(0, 0, \ldots, 0)$ ὡς διάνυσμα : καλεῖται δὲ τοῦτο μηδενικὸν διάνυσμα, (zero ἢ null vector) [18].

Ἔστω P ἓν σημεῖον εἰς R_2. Ἔχομεν δείξει ὅτι τὸ προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα OP καλεῖται ἡ γεωμετρικὴ παρουσίασις τοῦ διανύσματος. Ἂν αἱ συντεταγμέναι τοῦ P εἶναι (χ_1, χ_2), τότε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ παρουσίασις τοῦ διανύσματος ἐν σχέσει πρὸς ἐκλεγὲν σύστημα συντεταγμένων εἶναι τὸ δεύτερον σκέλος τῆς ἐκφράσεως

$$\alpha = (\chi_1, \chi_2)$$

ὅπου α τὸ ἐν λόγῳ διάνυσμα.

Ὅλα τὰ διανύσματα εἰς R_ν, $\nu \leqq 3$, ἔχουν διττὴν ταυτότητα : ἀλγεβρικὴν καὶ γεωμετρικήν, καὶ εἶναι χρήσιμον νὰ τονίσωμεν ἀμφοτέρας, διότι μολονότι ἡ ἀλγεβρικὴ ἀπεικόνισις δύναται νὰ γενικευθῇ εἰς χώρους περισσοτέρων διαστάσεων καὶ συνεπῶς ἔχει μείζονα ἀναλυτικὴν ἰσχύν, ἡ γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις παρέχει καὶ αἰτιολόγησιν διὰ πολλὰς ἀφῃρημένας ἐννοίας καὶ διαισθητικῶς ἀποκαλυπτικὰς ἀπεικονίσεις αὐτῶν.

Πράξεις μὲ διανύσματα καὶ ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου

Ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως διανυσμάτων αἰτιολογεῖται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου τῶν δυνάμεων τῆς φυσικῆς. Δοθέντων δύο διανυσμάτων $\alpha = (\chi_1, \chi_2)$ καὶ $\beta = (\psi_1, \psi_2)$ εἰς R_2, τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta$ εἶναι τὸ ἐν σχήματι 19 δεικνυόμενον, καὶ ἡ ἀλγεβρική του ἔκφρασις εἶναι

$$\alpha + \beta = (\chi_1 + \psi_1, \chi_2 + \psi_2).$$

Ἀφοῦ τὰ διανύσματα προστίθενται διὰ προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων των συντεταγμένων, καὶ ἀφοῦ αἱ συντεταγμέναι εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως διανυσμάτων προέρχονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως

---

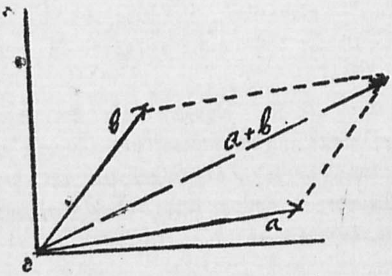
17) Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι τὸ μῆκος διανύσματος ἔχοντος τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος ὡς ἀρχικὸν σημεῖον εἶναι

$$\lambda = \sqrt{(\chi_1 - O)^2 + (\chi_2 - O)^2 + \ldots + (\chi_\nu - O)^2} = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \ldots + \chi_\nu^2}.$$

18) Διανύσματα μὲ αὐθαίρετα ἀρχικὰ σημεῖα θὰ καλοῦνται *ἐλεύθερα διανύσματα*, καὶ θὰ γίνεται χρῆσις τοῦ ὅρου «διάνυσμα» μόνον διὰ τὰ ἔχοντα ὡς ἀρχικὸν σημεῖον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Ἐπίσης, ὁ συμβολισμὸς δι' ἀγκυλῶν θὰ διατηρηθῇ δι' ἐλεύθερα διανύσματα. Τελικῶς, δοθὲν διάνυσμα μὲ ἀρχικὸν σημεῖον ἕτερον ἢ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος θὰ καλῆται *ἐντετοπισμένον διάνυσμα*.

εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ πρόσθεσις διανυσμάτων εἶναι ἑπομένως ἀντιμεταθετικὴ καὶ ἀναλυτική,

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$$



Σχῆμα 19

καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν διανυσμάτων εἰς R_2 περικλείεται ὑπὸ τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων, διότι ἂν α καὶ β εἶναι διανύσματα τοῦ R_2, τότε $\alpha+\beta \in R_2$[19] .

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι $-\alpha$ εἶναι τὸ διάνυσμα ἴσον ὡς πρὸς τὸ μῆκος ἀλλ' ἀντίθετον πρὸς τὴν φορὰν τοῦ α (γνωρίζομεν ὅτι ἂν α εἶναι τυχὸν διάνυσμα εἰς R_2, $-\alpha$ εἶναι εἰς R_2 διότι οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι συντεταγμέναι τοῦ $-\alpha$ εὑρίσκονται εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν).

Ὑποτεθείσθω ὅτι τὰ α, $-\alpha$, καὶ β εἶναι ὡς δεικνύονται εἰς τὸ σχ. 20. Ἂν περιστρέψωμεν τὸ β περὶ τὸ μηδὲν ἕως ὅτου συμπέσῃ μὲ τὸ $-\alpha$, τότε τὸ μῆκος τοῦ $\alpha+\beta$ πρέπει νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην $\beta = -\alpha$, καὶ ἔχομεν $\alpha+\beta = \alpha+(-\alpha) = 0$. Ἐκ τούτου, ἂν α τυχὸν διάνυσμα εἰς R_2, τότε ὑπάρχει διάνυσμα $\beta \in R_2$ τοιοῦτον ὥστε $\alpha+\beta=0$. Τὸ διάνυσμα β εἶναι, φυσικά, τὸ $-\alpha$. Συμπεραίνομεν ἐπίσης ὅτι ἂν α καὶ δ τυχόντα διανύσματα εἰς R_2, τότε

---

19) Μεταξὺ τῶν αἰτημάτων ἢ ἀξιωμάτων τὰ ὁποῖα ἐκλαμβάνομεν ὡς ἰσχύοντα εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι τὰ κάτωθι, ἔνθα α, β, γ πραγματικοὶ ἀριθμοί :

Περιληπτικὴ ἰδιότης : $\alpha, \beta \in R$, τότε $\alpha+\beta \in R$ καὶ $\alpha\beta \in R$.

Ἀντιμεταθέσεως : $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\alpha\beta=\beta\alpha$·

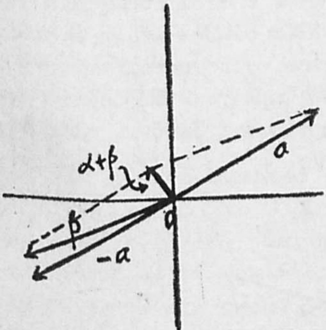
Ἀναλυτική : $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$, $\alpha(\beta\gamma)=(\sigma\beta)\gamma$·

Ἐπιμεριστική : $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$·

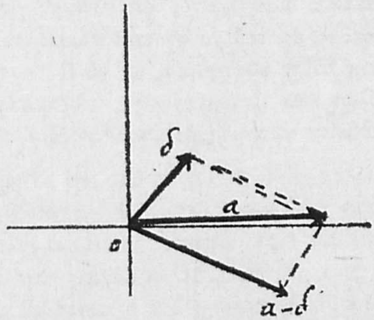
Μηδενικὰ καὶ μοναδιαῖα στοιχεῖα : τὸ R περιέχει στοιχεῖα 0 καὶ 1 ($\neq 0$) τοιαῦτα ὥστε $\alpha+0=\alpha$ καὶ $1\alpha=\alpha$ διὰ πᾶν $\alpha \in R$.

Ἐκ τούτου δεικνύοντες ὅτι $\alpha+(\beta+\delta)=(\alpha+\beta)+\delta$, δεικνύομεν ὅτι τὰ διανύσματα εἶναι ἴσα συντεταγμένην πρὸς συντεταγμένην ἐπιστρέφοντες εἰς τὰς ἰδιότητας τοῦ ὑποκειμένου συστήματος πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι παράδειγα γενικωτέρου ἀλγεβρικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται *πεδίον*. Εἰς πλέον προκεχωρημένας ἀναλύσεις διανυσματικῶν χώρων, τὰ διανύσματα ὁρίζονται ἐπὶ πεδίου, ὅπερ σημαίνει ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ πεδίου — καλούμενα *μονομετρικὰ μεγέθη* ἢ *μονόμετρα* (scalars) — εἶναι αἱ βασικαὶ μονάδες σχηματισμοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου. Ὅλα τὰ ἐδῶ θεωρούμενα διαν ύσματα θὰ ὁρίζωνται ἐπὶ τοῦ πεδίου πραγματικῶν ἀριθμῶν.

τὸ διάνυσμα $\alpha+(-\delta)$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ $\alpha-\delta$. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν διαφορὰν $\alpha-\delta$ δύο διανυσμάτων μέσῳ τῆς πράξεως τῆς προσθέσεως· τὸ $\alpha-\delta$ εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ὁποῖον ὅταν προστίθεται εἰς τὸ διάνυσμα δ δίδει τὸ διάνυσμα α. Εἰς τὸ σχ. 21, τὸ $\alpha-\delta$ εἶναι τὸ προσανατολισμένον εὐθύγραμμον



Σχῆμα 20



Σχῆμα 21

τμῆμα τὸ σχηματίζον μίαν πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ δ ὡς μίαν πλευρὰν καὶ α ὡς διαγώνιον, καὶ ἂν $\alpha=(\chi_1, \chi_2)$ καὶ $\delta=(\psi_1, \psi_2)$, γράφομεν $\alpha-\delta=(\chi_1-\psi_1, \chi_2-\psi_2)$. Σημειώσατε ὅτι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ἔχει τὴν ἰδιότητα $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$ διὰ πᾶν διάνυσμα $\alpha\in R_2$ [20].

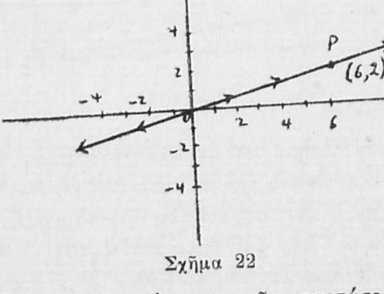
Ἔστω κ εἷς θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμός. Τότε διὰ τοῦ κα ἐννοοῦμεν τὸ διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ φορὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην τοῦ α καὶ τὸ μῆκος κ φορὰς τὸ μῆκος τοῦ α. Ἂν κ ἀρνητικὸς πραγματικὸς ἀριθμός, τότε διὰ τοῦ κα ἐννοοῦμεν $|\kappa|(-\alpha)$ ἢ $(|\kappa|\alpha)$, τοῦ διανύσματος ἔχοντος φορὰν ἀντίθετον ἐκείνης τοῦ α καὶ καὶ μῆκος $|\kappa|\alpha$. Ἂν $\kappa=0$, τότε κα εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα. Τώρα ἔστω κ πᾶς πραγματικὸς ἀριθμός. Τότε ὁρίζομεν τὸ κα ὡς μονομετρικὸν γινόμενον ἢ ***μονομετρικὸν πολλαπλάσιον*** τοῦ α. Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς κ καλεῖται μονομετρικὸν μέγεθος καὶ δὲν πρέπει νὰ συγχέεται μὲ τὴν ἔννοιαν τοῦ διανύσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ μῆκος καὶ φοράν. Ἡ ἐξέτασις τοῦ θέματος γεωμετρικῶς θὰ ὁδηγήσῃ πάλιν εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν παρουσίασίν του, διότι δύναται νὰ δειχθῇ διὰ τῆς χρήσεως τῶν ὁμοίων τριγώνων ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κα εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ α ἑκάστη πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ κ,

$$\kappa\alpha=\kappa(\chi_1, \chi_2)=(\kappa\chi_1, \kappa\chi_2).$$

Ἐπὶ παραδείγματι, ἂς λάβωμεν $\alpha=(6, 2)$. Ἂν κ εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος πρὸς τὸ μηδέν, τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν μονομετρικῶν πολλαπλασίων κα καλύπτει τὴν ἀκτῖνα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τοῦ α. Ἂν $0\leqq\kappa\leqq 1$, ἔχομεν ὅλα τὰ διανύσματα, τῶν ὁποίων αἱ φοραὶ εἶναι αἱ αὐταὶ ἐκείνης τοῦ α καὶ τὰ μήκη ποικίλλουν ἀπὸ 0 μέχρις ἐκείνου τοῦ α· τὸ μονομετρικὸν γινόμενον εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς καλύ-

20) Χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον 0 διὰ νὰ δηλώσωμεν τόσον τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ὅσον καὶ τὸν ἀριθμὸν (μονομετρικὸν μέγεθος) 0 (μηδέν)· ποῖον τῶν δύο δηλοῦται θὰ γίνεται κατανοητὸν ἐκ τῶν συμφραζομένων.

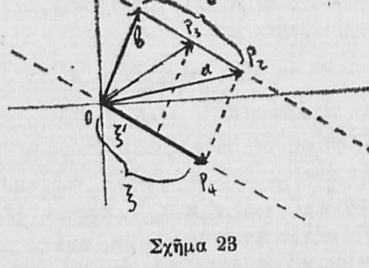
πτει ὅλα τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος OP. Ἂν $\kappa > 1$, τὸ μονομετρικὸν γινόμενον καλύπτει ὅλα τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ τμήματος πέραν τοῦ P (ἄνω δεξιὰ τοῦ P). Ἂν τὸ κ ποικίλλῃ ὑπὲρ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε τὸ κα εἶναι ἡ ἀκτὶς ἡ ἐκτεινομένη ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος μὲ φορὰν ἀντίθετον ἐκείνης τοῦ α. Οὕτω βλέπομεν ὅτι μολονότι ὑπάρχει διαφορὰ μεταξὺ διανύσματος καὶ εὐθείας γραμμῆς — τὸ πρῶτον εἶναι διατεταγμένη νιὰς καὶ ὡς ἐκ τούτου στοιχεῖον συνόλου, ἐνῶ ἡ δευτέρα εἶναι σύνολον καὶ ὡς ἐκ τούτου τῆς ἰδίας κατηγορίας ὡς τὸ R_ν — ὑπάρχει διαισθητικὴ σχέσις μεταξὺ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν μονομετρικῶν πολλαπλασίων δοθέντος μὴ μηδενικοῦ διανύσματος καὶ εὐθείας γραμμῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος. Τῷ ὄντι, τοῦτο ἀποτελεῖ ἁπλῶς καὶ μόνον εἰδικὴν περίπτωσιν τῆς προτάσεως τῆς ἐπιπεδομετρίας



Σχῆμα 22

ὅτι δύο σημεῖα ὁρίζουν εὐθεῖαν, καθ᾽ ὅσον, ἂν δοθοῦν ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος καὶ ἓν διάνυσμα α διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ σύνολον ὅλων τῶν μονομετρικῶν πολλαπλασίων ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν τὴν περιέχουσαν τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ σημεῖον πέρατος τοῦ α.

Εὐχερὲς εἶναι νὰ γενικεύσωμεν τὰ σχόλια ταῦτα καὶ δείξωμεν διὰ τῆς χρήσεως τόσον τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅσον καὶ τῆς προσθέσεως διανυσμάτων ὅτι ἂν δοθοῦν δύο σημεῖα οὐδὲν τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος συντεταγμένων δυνάμεθα νὰ καλύψωμεν τὴν εὐθεῖαν τὴν περιέχουσαν τὰ δύο ταῦτα σημεῖα. Ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἐντετοπισμένον διάνυσμα P_1P_2· δυνάμεθα νὰ καλέσω-



Σχῆμα 23

μεν αὐτὸ τὸ διάνυσμα δ ἔχον P_1 καὶ P_2 ὡς σημεῖα ἀρχῆς καὶ πέρατος, ἀντιστοίχως. Τότε α εἶναι ἡ διαγώνιος παραλληλογράμμου καὶ ἡ ἀπέναντι τοῦ δ πλευρὰ σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ διανύσματος ξ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος ὡς ἀρχικὸν σημεῖον, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 23. Τότε $\delta=\xi$, καὶ ἀφοῦ $\beta+\xi=\alpha$, ἔχομεν $\beta+\delta=\alpha$ ἢ $\delta=\alpha-\beta$. Ἔστω τώρα σημεῖον P_3 μεταξὺ P_1 καὶ P_2. Τότε τὸ ἐντετοπισμένον διάνυσμα P_1P_3 εἶναι ἴσον πρὸς τὸ διάνυσμα ξ', ἔνθα $\xi' = \varkappa\xi$, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$. Ἑπομένως $P_1P_3=\varkappa\xi=\xi\delta$. Ἐπίσης OP_3 εἶναι ἡ διαγώνιος νέου παραλληλογράμμου, καὶ ἔχομεν $OP_3=\beta+\varkappa\xi=\beta+\varkappa\delta$. Ἀλλ' ἔχομεν ἴδει ὅτι $\delta=\alpha-\beta$, οὕτω λαμβάνομεν δι' ἀντικαταστάσεως,

$$OP_3 = \beta + \varkappa(\alpha - \beta) = \varkappa\alpha + (1 - \varkappa)\beta, \ 0 \leqq \varkappa \leqq 1.$$

Ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν πᾶν σημεῖον ἐπὶ τοῦ τμήματος P_1P_2 ἁπλῶς δι' ἐκλογῆς τοῦ κ, ὅπου $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, καὶ δι' ἅπαντα τὰ τοιαῦτα κ καλύπτομεν τὸ τμῆμα P_1P_2 (ἢ OP_4). Ἐπίσης, ἂν $\varkappa > 1$ καλύπτομεν τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας δεξιὰ τοῦ P_2 (ἢ τὰ σημεῖα δεξιὰ τοῦ P_4 ἐπὶ τοῦ τμήματος OP_4) καὶ ἂν $\varkappa < 0$ καλύπτομεν ὅλα τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀριστερὰ τοῦ P_1. Διασαφηνίζομεν περαιτέρω :

Ἔστωσαν $\alpha = (8, 2)$, $\beta = (2, 6)$, καὶ $\varkappa = 1/4$. Τότε

$$\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta = 1/4\,(8, 2) + 3/4\,(2, 6) = (3\,{}^1/_2, 5).$$

Ἂν $\varkappa = 1/2$, τότε

$$\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta = 1/2\,(8, 2) + 1/2\,(2, 6) = (5, 4),$$

ἤτοι τὸ μέσον (τὸ σημεῖον εἰς τὸ μέσον) τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος P_1P_2. Διὰ $\varkappa = 2/3$, $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta = (6, 3\,{}^1/_3)$. Βλέπομεν καὶ ὅτι μία συλλογὴ κ, $0\leqq\varkappa\leqq 1$, διαιρεῖ τὸ τμῆμα P_1P_2 κατὰ τὸν λόγον $\varkappa : 1-\varkappa$, καὶ ὅτι ὡς τὸ κ ποικίλλει ἀπὸ 0 ἕως 1, τὸ σημεῖον πέρατος τοῦ διανύσματος $\varkappa\alpha+(1-\varkappa)\beta$ κινεῖται ἐκ τοῦ P_1 πρὸς τὸ P_2. Διὰ $\varkappa = -1/4$ καὶ $\varkappa = 2$ ἔχομεν, ἀντιστοίχως, τὰ σημεῖα (1/2, 7) καὶ (14, —2). Διὰ νὰ ἀνακεφαλαιώσωμεν : δοθέντων δύο τυχόντων σημείων (χ_1, χ_2) καὶ (ψ_1, ψ_2), ἡ περιέχουσα ταῦτα εὐθεῖα ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ἀθροισμάτων τῶν μονομετρικῶν πολλαπλασίων τῶν διανυσμάτων $\alpha=(\chi_1, \chi_2)$, $\beta=(\psi_1, \psi_2)$ τῆς μορφῆς $\varkappa\alpha+(1-\varkappa)\beta$, ὅπου τὸ κ ποικίλλει ὑπὲρ τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ([21]).

Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς πράξεως τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ προέρχονται ἐξ ἐκείνων τὰς ὁποίας παρουσιάζουν αἱ πράξεις εἰς τὸ ὑποκείμενον σύστημα πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἂν $\alpha \in R_2$ τότε $\varkappa\alpha \in R_2$ — περιληπτικὴ ἰδιότης τοῦ R_2 μὲ ἰσχὺν εἰς τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν. Δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν καὶ τὰ κάτωθι, ἐξ ἄλλου : $\varkappa(\alpha+\beta) = \varkappa\alpha + \varkappa\beta$, $(\gamma+\varkappa)\alpha = \gamma\alpha+\varkappa\alpha$, $(\gamma\varkappa)\alpha = \gamma(\varkappa\alpha)$, καὶ $1\alpha = \alpha$.

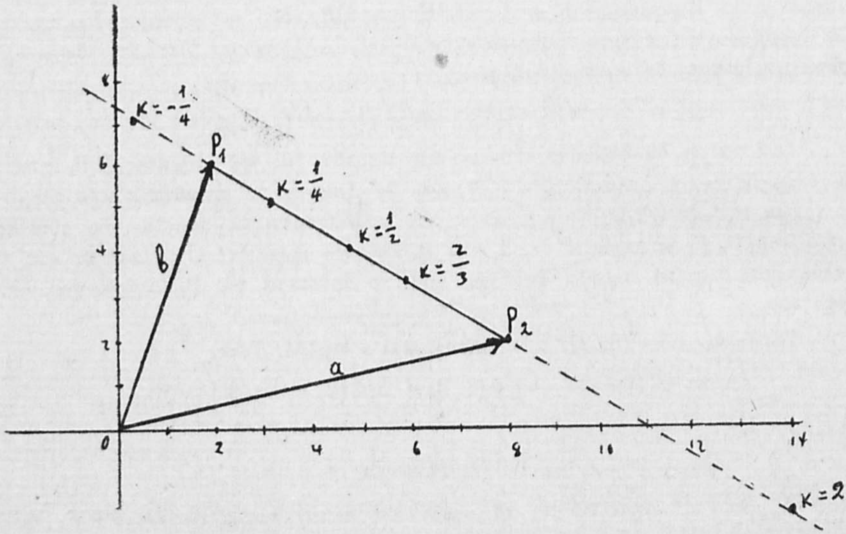
Ἡ γεωμετρία ὑποδεικνύει ἑτέραν μίαν πρᾶξιν, σημαντικῆς σπουδαιότητος, τὸν ***ἐσωτερικὸν πολλαπλασιασμόν***. Ἂν $\alpha = (\chi_1, \chi_2)$ καὶ $\beta = (\psi_1, \psi_2)$ εἶναι

21) Θὰ δειχθῇ κατωτέρω ὅτι αἱ ἁπλαῖ αὗται γεωμετρικαὶ θεωρήσεις εἶναι βασικῆς σπουδαιότητος εἰς τὴν γεωμετρίαν τῶν κυρτῶν συνόλων.

διανύσματα ὡς πρὸς ὡρισμένον ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων, τότε τὸ ***ἐσωτερικὸν γινόμενον*** $\alpha \cdot \beta$ ὁρίζεται νὰ εἶναι

$$\alpha \cdot \beta = \chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2. \tag{14}$$

Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἶναι οὕτως ἀριθμὸς ἢ μονομετρι-



Σχῆμα 24

κὸν μέγεθος καὶ ὄχι διάνυσμα. Δύναται νὰ δειχθῇ ἐκ τῆς χρήσεως τοῦ νόμου τῶν συνημιτόνων ὅτι ἂν θ ἡ γωνία μεταξὺ δύο διανυσμάτων, $0 \leqq \theta \leqq 180$, τότε

$$\text{συνημ. } \theta = \frac{\chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2}{\sqrt{\chi_1^2+\chi_2^2}\,\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2}} \tag{15}$$

Ὁ παρονομαστὴς τῆς ἐκφράσεως ταύτης εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος α ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος β. Ἐκ τούτου

$$\alpha \cdot \beta = \chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2 = |\alpha|\,|\beta| \text{ συνημ. } \theta, \tag{16}$$

οὕτως ὥστε τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο διανυσμάτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς μεταξὺ αὐτῶν γωνίας.

Χρήσιμος εἶναι ἡ παρατήρησις ὅτι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του,

$$\alpha \cdot \alpha = \chi_1^2 + \chi_2^2,$$

εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\alpha \cdot \alpha = |\alpha|^2$. Χρήσιμος εἶναι ἐπίσης καὶ ἡ παρατήρησις τῆς σπουδαιότητος τοῦ σημείου τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου. Ἂς λάβωμεν δύο μὴ μηδενικὰ διανύσματα α, β εἰς R_2· ταῦτα γίνονται κανονικὰ ἂν ἕκαστον πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἓν μονόμετρον τοιοῦτον ὥστε τὸ προκῦπτον διάνυσμα νὰ ἔχῃ μῆκος 1. Διὰ πᾶν μὴ μηδενικὸν διάνυσμα α τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ διανύσματος ἐπὶ τὸ μονόμετρον $1 / |\alpha|$· τότε ἔχομεν διὰ τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος

$$\left| \frac{1}{|\alpha|} \alpha \right| = \left| \frac{\alpha}{\alpha} \right| = 1 .$$

Ἂς ὀνομάσωμεν α' καὶ $6'$ τὰ κανονικὰ ἐκ τῶν α καὶ 6 προκύψαντα διανύσματα. Τότε ἂν θ ἡ μεταξὺ α' καὶ $6'$ γωνία ἔχομεν ἐκ τῆς (15)

$$\text{συνημ. } \theta = \frac{\alpha' \cdot 6'}{|\alpha'|\,|6'|} = \alpha' \cdot 6',$$

ἀφοῦ ἕκαστον τῶν διανυσμάτων ἔχει μῆκος 1, καὶ τὸ συνημ θ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον. Τότε ἂν συνημ $\theta = \alpha' \cdot 6' = 0$, γνωρίζομεν ὅτι $\theta = 90^0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι α' καὶ $6'$ εἶναι ὀρθογώνια. Ἂν συνημ $\theta = \alpha' \cdot \beta' > 0$, τότε θ εἶναι ὀξεῖα γωνία καὶ ἂν συνημ $\theta = \alpha' \cdot 6' < 0$, τότε θ εἶναι ἀμβλεῖα. Ἐπειδὴ ἡ θ εἶναι καὶ ἡ γωνία μεταξὺ α καὶ 6 (μόνον τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων ἀλλάσσουν κατὰ τὴν «κανονικοποίησιν») δύνανται νὰ γίνουν ἀκριβῶς ἀνάλογοι σκέψεις διὰ τὴν σπουδαιότητα τοῦ σημείου τοῦ $\alpha \cdot 6$. Ἁπλῆ εἶναι ἐπίσης καὶ ἡ ἑξῆς ἐπαλήθευσις, διὰ τῆς χρήσεως τῆς (14) καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν : $\alpha \cdot \alpha \geqq 0$, ἡ ἰσότης ἰσχύει διὰ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα μόνον, $\alpha \cdot 6 = 6 \cdot \alpha$, $\alpha \cdot (\kappa 6) = \kappa(\alpha \cdot 6)$ καὶ $\alpha \cdot (6 + \delta) = \alpha \cdot 6 + \alpha \cdot \delta$.

Γενικεύομεν τώρα τοὺς ὁρισμοὺς τῆς προσθέσεως διανυσμάτων καὶ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον. Ἂν $\alpha = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ καὶ $\beta = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ διανύσματα εἰς χῶρον ν διαστάσεων, καὶ ἂν κ πραγματικὸς ἀριθμός, ὁρίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων

$$\alpha + 6 = (\chi_1 + \psi_1, \chi_2 + \psi_2, \ldots, \chi_3 + \psi_3),$$

καὶ τὸ μονομετρικὸν γινόμενον

$$\kappa\alpha = (\kappa\chi_1, \kappa\chi_2, \ldots, \kappa\chi_\nu)$$

Χρήσιμον ἄσκησιν θὰ ἀπετέλει ἡ ἀπόδειξις ὅτι οἱ κάτωθι νόμοι, οἱ ὁποῖοι εἶναι γενικεύσεις τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν εἰς χώρους δύο καὶ τριῶν διαστάσεων, ἰσχύουν ἐπίσης διὰ διανύσματα εἰς ν-διάστατον χῶρον.

Πρόσθεσις διανυσμάτων

(Π1) Συμπερίληψις : ἂν α καὶ 6 εἶναι εἰς τὸν χῶρον, τότε ὑπάρχει διάνυσμα $\alpha + 6$ εἰς τὸν χῶρον, καλούμενον τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ 6.

(Π2) Ἀντιμετάθεσις : $\alpha + 6 = 6 + \alpha$.

(Π3) Ἀνάλυσις : $\alpha + (6 + \delta) = (\alpha + 6) + \delta$

(Π4) Μηδενικὸν διάνυσμα : ὑπάρχει εἰς τὸν χῶρον διάνυσμα Ο τοιοῦτον ὥστε $\alpha + O = O + \alpha = \alpha$.

(Π5) Ἀρνητικὸν διανύσματος : διὰ πᾶν α, ὑπάρχει διάνυσμα 6 τοιοῦτον ὥστε $\alpha + 6 = 6 + \alpha = 0$. Τὸ 6 γράφεται συνήθως $-\alpha$.

Μονομετρικὸς πολλαπλασιασμὸς

(Μ1) Ἂν α εἶναι εἰς τὸν χῶρον καὶ $\varkappa$ εἶναι μονόμετρον, τότε $\varkappa\alpha$ εἶναι εἰς τὸν χῶρον.

(Μ2) $(\gamma\varkappa)\alpha = \gamma(\varkappa\alpha)$

(Μ3) $\varkappa(\alpha+\beta) = \varkappa\alpha + \varkappa\beta$

(Μ4) $(\gamma+\varkappa)\alpha = \gamma\alpha + \varkappa\alpha$

(Μ5) Ἂν α εἶναι εἰς τὸν χῶρον, τότε $0\alpha = 0$, $1\alpha = \alpha$, $(-1)\alpha = -\alpha$.

Αἱ πράξεις αὗται, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον δοθέντων τῶν ὁρισμῶν τῆς προσθέσεως διανυσμάτων καὶ τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λαμβάνονται ὡς ***ἀξιώματα*** διὰ μαθηματικὸν σύστημα γενικώτερον τοῦ ν-διαστάτου χώρου, τοῦ συστήματος τοῦ ***διανυσματικοῦ χώρου***. Διανυσματικὸς χῶρος V ὑπὲρ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ὁρίζεται ὡς μὴ κενὸν σύνολον στοιχείων, τὰ ὁποῖα καλοῦνται διανύσματα, ὁμοῦ μὲ δύο πράξεις, τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν, ἱκανοποιουμένης τῆς (Π1) μέσῳ τῆς (Π5) καὶ τῆς (Μ1) μέσῳ τῆς (Μ5) ἀνωτέρω (ἔνθα διὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι α, β εἶναι τυχόντα διανύσματα εἰς χῶρον V καὶ γ, $\varkappa$ μονομετρικὰ μεγέθη). Τότε ὁ ν-διάστατος χῶρος καθίσταται εἰδικὴ περίπτωσις διανυσματικοῦ χώρου καὶ θὰ ἀναφερώμεθα εἰς αὐτὸν ὡς V_ν εἰς τὸ ἑξῆς.

Ἡ ἔννοια τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου δύναται ἐπίσης νὰ γενικευθῇ εἰς ν-χῶρον. Ἂν $\alpha = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ καὶ $\beta = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$ δύο διανύσματα εἰς ν-χῶρον (ἔνθα ὁ χῶρος λαμβάνεται ἔχων ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων καὶ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους ἐφ' ἑκάστου ἄξονος), τότε τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ὁρίζεται $\chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2 + \ldots + \chi_\nu\psi_\nu$, καὶ οἱ ἀκόλουθοι κανόνες, οἱ ὁποῖοι θεωροῦνται πάλιν γενικεύσεις γεωμετρικῶν σχέσεων εἰς χώρους δύο καὶ τριῶν διαστάσεων, δύνανται νὰ ἐπαληθευθοῦν εἰς τὸν ν-χῶρον.

Ἐσωτερικὸς πολλαπλασιασμὸς

(Ε1) $\alpha \cdot \alpha \geqq 0$ διὰ πᾶν διάνυσμα α καὶ ἡ ἰσότης ἱκανοποιεῖται διὰ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα μόνον,

(Ε2) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,

(Ε3) $\alpha \cdot (\varkappa\beta) = \varkappa(\alpha \cdot \beta)$,

(Ε4) $\alpha \cdot (\beta + \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta$.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου ἑνὸς ζεύγους διανυσμάτων μᾶς λέγει κάτι διὰ τὴν μεταξὺ αὐτῶν γωνίαν, ὁδηγούμεθα φυσικῷ τῷ λόγῳ νὰ ἐρωτήσωμεν ἂν τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἰς ν-χῶρον ἔχῃ ἀντίστοιχον γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ γενικεύσωμεν τὴν χρήσιμον ἔννοιαν τῆς γωνίας εἰς τὸν ν-χῶρον. Ἀλλὰ τὸ θέμα εἶναι, πῶς ὁρίζομεν γωνίαν εἰς τὸν ν-χῶρον; Ὁρίζομεν γωνίαν μεταξὺ δύο μὴ μηδενικῶν διανυσμάτων α καὶ β εἰς τὸν ν-χῶρον μέσῳ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς, καὶ λαμβάνομεν

$$\text{(17)} \qquad \text{συνημ}\ \theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha|\,|\beta|}, \quad 0^0 \leqq \theta \leqq 180^0.$$

Τώρα εἰς R_2 καὶ R_3 τὸ συνημ θ ποικίλλει ἀπὸ 1 μέχρι 0 μέχρι -1, οὕτω πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι, δοθέντος τοῦ ὁρισμοῦ (17), τὸ συνημ θ ἐπίσης ποικίλλει ἀπὸ $+1$ ἕως -1. Ἐὰν τοῦτο εἶναι ἀληθές, τότε τὸ ν-διάστατον ἀνάλογον θὰ ἔχῃ τὰς ζητουμένας ἰδιότητας καὶ θὰ εἶναι συμβιβαστὸν πρὸς τὴν γνωστήν μας ἤδη γεωμετρίαν. Τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ (17) ποικίλλει ἀπὸ $+1$ ἕως -1 εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ νὰ γράψωμεν ὅτι

$$\left| \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha|\,|\beta|} \right| \leqslant 1 .$$

Ἡ ἐξέτασίς μας ποιεῖ χρῆσιν μιᾶς περιφήμου ἀνισότητος εἰς τὰ μαθηματικά, ἡ ὁποία καλεῖται ἀνισότης Σβάρτς (Schwartz inequality) καὶ λέγει ὅτι διὰ τυχόντα διανύσματα α καὶ β εἰς ἕνα χῶρον,

$$|\alpha \cdot \beta| \leqslant |\alpha|\,|\beta| . \tag{18}$$

Ἐπειδὴ τὰ α καὶ β ἐλήφθησαν μὴ μηδενικά, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (18) μὲ τὸν ἀριθμὸν $|\alpha|\,|\beta|$, καὶ νὰ λάβωμεν

$$\frac{|\alpha \cdot \beta|}{|\alpha|\,|\beta|} \leqslant 1$$

Ἀφοῦ τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων δὲν δύνανται ποτὲ νὰ εἶναι ἀρνητικὰ

$$\frac{|\alpha \cdot \beta|}{|\alpha|\,|\beta|} = \left| \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha|\,|\beta|} \right| ,$$

οὕτως ὥστε τὸ συνημ θ ποικίλλει ἀπὸ $+1$ ἕως -1 εἰς τὸν ν-χῶρον.

Ἂν εἷς διανυσματικὸς χῶρος ληφθῇ ὡς ἱκανοποιῶν τὴν (Ε1) μέσῳ τῆς (Ε4), καλεῖται Εὐκλείδιος διανυσματικὸς χῶρος, ἢ βραχύτερον ***Εὐκλείδιος χῶρος***. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἔννοια διανυσματικοῦ χώρου εἶναι γενικωτέρα ἐκείνης τοῦ Εὐκλειδίου χώρου, διότι εἷς διανυσματικὸς χῶρος δὲν εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην Εὐκλείδιος χῶρος. Ὅταν θέλωμεν κατωτέρω νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου εἰς διανυσματικὸν χῶρον, θὰ δηλοῦται σαφῶς ὅτι ὁ διανυσματικὸς χῶρος εἶναι Εὐκλείδιος· ἄλλως οἱ ὑπὸ ἐξέτασιν διανυσματικοὶ χῶροι θὰ εἶναι οἱ γενικώτεροι τοιοῦτοι ἱκανοποιοῦντες τὴν (Π1) μέσῳ τῆς (Π5) καὶ τὴν (Μ1) μέσῳ τῆς (Μ5) μόνον.

Πλείονα ἐπὶ τῶν διανυσματικῶν χώρων

Μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἀναφερθέντων ἀξιωμάτων τοῦ ἀνυσματικοῦ χώρου ὑπάρχουν καὶ τὰ τοιαῦτα τῆς «συμπεριλήψεως» ὑπὸ τὰς πράξεις τῆς προσθέσως διανυσμάτων καὶ τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι αἱ πράξεις δὲν καταλήγουν εἰς διάνυσμα «ἔξωθεν» τοῦ χώρου. Χρήσιμον ἄσκησιν, ἀποτελεῖ ἡ ἀπόδειξις ὅτι ἂν ἓν σύνολον διανυσμάτων ὑπὲρ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς περιλαμβάνεται ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμὸν τότε ἀποτελεῖ διανυσματικὸν χῶρον, δηλ., αἱ (Π1)–(Π5) καὶ (Μ1)–(Μ5) ἱκανοποιοῦνται διὰ τὸ σύνολον διανυσμάτων. Ὡς συνέπεια τούτου ἔχομεν τὸ ἑξῆς· ἂν ἓν σύνολον διανυσμάτων περιλαμβάνεται ἀναφορικῶς εἰς τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν, καλεῖται διανυσματικὸς χῶρος ὑπὲρ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς.

Ἐπίσης, λέγοντες ὑποχῶρος τοῦ V ἐννοοῦμεν τὸ ὑποσύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ V τὸ ἀποτελοῦν ἐξ ἰδίων διανυσματικὸν χῶρον· ἤ, ποιοῦντες χρῆσιν τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρω ἀποτελέσματος, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἓν ὑποσύνολον διανυσμάτων εἶναι ***ὑποχῶρος*** ἂν περιλαμβάνεται ὑπὸ τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν. Οὕτως, ὁ τρισδιάστατος χῶρος, τὸν ὁποῖον τώρα θὰ γράφωμεν V_3, εἶναι ὑποχῶρος τοῦ V, ὡς εἶναι καὶ ὁ δισδιάστατος, V_2

Ἔστω τώρα ἓν σύνολον διανυσμάτων εἰς V, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$. Τότε τὸ ***διάνυσμα*** $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots + \gamma_\kappa\alpha_\kappa$, τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν πράξεων τῆς διανυσματικῆς προσθέσεως καὶ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καλεῖται ***γραμμικὸς συνδυασμὸς*** τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ (22). Εὐχερῶς δεικνύομεν ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν δοθέντος συνόλου διανυσμάτων ἀποτελεῖ διανυσματικὸν χῶρον. Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι β_1 καὶ β_2 εἶναι δύο διανύσματα εἰς τὸ σύνολον τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν,

$$\beta_1 = \varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots + \varepsilon_\kappa\alpha_\kappa$$

$$\beta_2 = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots + \gamma_\kappa\alpha_\kappa,$$

τότε

$$\beta_1 + \beta_2 = (\varepsilon_1+\gamma_1)\alpha_1 + (\varepsilon_2+\gamma_2)\alpha_2 + \ldots + (\varepsilon_\kappa + \gamma_\kappa)\alpha_\kappa$$

καὶ

$$\delta\beta_1 = (\delta\varepsilon_1)\alpha_1 + (\delta\varepsilon_2)\alpha_2 + \ldots + (\delta\varepsilon_\kappa)\alpha_\kappa,$$

(ἔνθα ε, γ, δ μονόμετρα), εἶναι ἐπίσης γραμμικοὶ συνδυασμοὶ τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$. Τὸ σύνολον (χῶρος) ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν δοθέντος συνόλου διανυσμάτων καλεῖται χῶρος ***ζευχθεὶς*** (spanned) ὑπὸ τοῦ δοθέντος συνόλου διανυσμάτων, καὶ τὸ σύνολον διανυσμάτων καλεῖται ***σύνολον ζεύξεως*** τοῦ χώρου.

Διὰ παραδείγματα τινὰ τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν, ἔστωσαν $\alpha_1 = (3, 4, 1)$ καὶ $\alpha_2 = (1, 6, 7)$. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι ἐπίπεδον V_2 εἰς V_3 περιέχον τὰ διανύσματα καὶ τέμνον τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ τὸ σύνολον $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ εἶναι σύνολον ζεύξεως καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ συνόλου ζευγνύμενος χῶρος εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο διαστάσεων. Ἔστωσαν τώρα $\beta_1 = (6/7, 2)$, $\beta_2 = (-2, 1)$· τότε ὁ χῶρος ὁ ζευγνύμενος ὑπὸ β_1 καὶ β_2 εἶναι V_2 καὶ ὁ χῶρος ὁ ζευγνύμενος ὑπὸ μόνου τοῦ β_1 εἶναι γραμμὴ (μονοδιάστατος χῶρος) διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος, ἡ ὁποία περιέχει τὸ διάνυσμα β_1. Ἔστω $\beta_3 = (1, 7)$ καὶ θεωρήσατε τὸ σύνολον ζεύξεως $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$· ὁ ὑπὸ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν ζευγνύμενος χῶρος εἶναι πάλιν V_2. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ «ἰσχὺς ζεύξεως» τῶν τριῶν διανυσμάτων $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ δὲν εἶναι μεγαλυτέρα ἐκείνης δύο τυχόντων διανυσμάτων ἐκ τῶν τριῶν καί, ἀφ' ἑτέρου, ὅτι τὸ V_2 δὲν δύναται

22) Μολονότι ἡ πρόσθεσις ὡρίσθη διὰ ζεύγη διανυσμάτων μόνον, ἀποτελεῖ συνέπειαν τοῦ γενικευθέντος νόμου τῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὅτι τὸ ἄθροισμα $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots + \gamma_\kappa\alpha_\kappa$ εἶναι σαφὲς καὶ ἀναμφίβολον.

τὰ ζευχθῇ ὑπὸ ὀλιγωτέρων τῶν δύο ἐκ τῶν διανυσμάτων τούτων.

Ἂν τὰ διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ἱκανοποιοῦν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \ldots + \gamma_r\alpha_r = 0 \tag{19}$$

καὶ τὰ μονόμετρα γ_ι δὲν εἶναι πάντα μηδενικά, τότε τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ καλεῖται ***γραμμικῶς ἐξηρτημένον*** (λέγομεν ἐπίσης ἐνίοτε ὅτι τὰ διανύσματα εἰς τὸ σύνολον εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα) ([23]) Ἡ ἐξίσωσις (19) ἱκανοποιεῖται, φυσικά, διὰ πᾶν σύνολον r διανυσμάτων ὅταν $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_r = 0$· ἂν τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων ἔχῃ τὴν ἰδιότητα ἡ (19) νὰ ἱκανοποιῆται *μόνον* διὰ $\gamma_\iota = 0$, $\iota = 1, \ldots, r$, τότε τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων καλεῖται ***γραμμικῶς ἀνεξάρτητον***, καὶ λέγομεν ἐνίοτε ὅταν τὰ διανύσματα καθ' ἑαυτὰ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

Παραδείγματα **:** Τὰ διανύσματα $\alpha_1 = (2, 1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (4, 5, 3)$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα ἀφοῦ $2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0$. Τὰ διανύσματα $\beta_1 = (1, 0, 0)$, $\beta_2 = (0, 12, 0)$, καὶ $\beta_3 = (0, 0, 72)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, διότι ἂς ἐξετάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν διανυσμάτων $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0$. Τότε $\gamma_1(1, 0, 0) + \gamma_2(0, 12, 0) + \gamma_3(0, 0, 72) = (\gamma_1, 12\gamma_2, 72\gamma_3)$, διάνυσμα μηδενικὸν μόνον ἐν περιπτώσει $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$.

Ἡ ἔννοια τῆς ἐξαρτήσεως ἔχει ἁπλῆν γεωμετρικὴν παρουσίασιν. Ὑποτεθείσθω ὅτι γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (19) ἱκανοποιεῖται διά τι σύνολον μονομετρικῶν μεγεθῶν γ_ι ὄχι ὅλων μηδενικῶν καὶ ὅτι, ἂς εἴπωμεν, τὸ γ_1 εἶναι ἓν τῶν μονομέτρων τῶν διαφόρων τοῦ μηδενός. Τότε δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς α_1, λαμβάνοντες

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\alpha_2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1}\alpha_3 - \ldots - \frac{\gamma_r}{\gamma_1}\alpha_r,$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι τὸ α_1 εὑρίσκεται εἰς τὸν ὑπὸ τῶν $r-1$ διανυσμάτων $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ζευχθέντα χῶρον, καὶ τὸ α_1 εἶναι ὡς ἐκ τούτου ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ συνόλου αὐτοῦ. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ α_1 οὐδόλως προσθέτει ἰσχὺν ζεύξεως εἰς τὸ σύνολον $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$· τὸ α_1 εἶναι οὐσιωδῶς πλεονάζον ὑπὸ τὴν ἄποψιν ταύτην. Ἡ ἔννοια τοῦ πλεονασμοῦ εἶναι κατ' οὐσίαν ἐκείνη τῆς ἐξαρτήσεως. Ἂν ἡ ἐξίσωσις (19) ἱκανοποιῆται διά τι σύνολον μονομέτρων γ_ι ὄχι ὅλων μηδενικῶν, γνωρίζομεν ὅτι κάποιο διάνυσμα εἰς τὸ σύνολον πρέπει νὰ εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν παραμενόντων διανυσμάτων εἰς τὸ σύνολον. Ἐκτὸς τούτου, ἀληθὲς εἶναι καὶ τὸ ἀντίστροφον· ἂν β ἓν διάνυσμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων $\beta_1, \ldots, \beta_\rho$, ἂς εἴπωμεν,

$$\beta = \delta_1\beta_1 + \ldots + \delta_\rho\beta_\rho,$$

---

23) Λέγομεν ἐπίσης ὅτι ἓν διάνυσμα β εἶναι ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ μὴ κενοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων Σ ἂν ὑπάρχουν εἰς Σ διανύσματα $\alpha_1, \ldots, \alpha\kappa$ τοιαῦτα ὥστε

$$\beta = \gamma_1\alpha_1 + \ldots + \gamma\kappa\,\alpha\kappa,$$

καὶ ὅτι τὸ σύνολον T εἶναι ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ Σ ἂν πᾶν διάνυσμα εἰς T εἶναι ἐξηρτημένον ἐκ τοῦ Σ.

ἔνθα $\rho > 1$, τότε

$$\beta - \delta_1\beta_1 - \ldots - \delta_\rho\beta_\rho = 0.$$

Τινὲς ἢ ἅπαντες τῶν συντελεστῶν δ_i δύνανται νὰ εἶναι μηδέν, ἀλλ' ὁ συντελεστὴς τοῦ β εἶναι 1, οὕτως ἔχομεν ἐξίσωσιν ἀνάλογον πρὸς τὴν (19) εἰς τὴν ὁποίαν δὲν εἶναι ἅπαντες οἱ συντελεσταὶ μηδέν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων $\{\beta, \beta_1, \ldots, \beta_\rho\}$ εἶναι ἐξηρτημένον.

Ὁ γενικὸς ὁρισμὸς τῆς βάσεως καὶ διαστάσεως διανυσματικοῦ χώρου ἐπίσης συμπίπτει μὲ τὴν διαισθητικὴν ἀντίληψιν τὴν λαμβανομένην ἐκ τοῦ δισδιαστάτου χώρου:

Ἔστω V εἷς διανυσματικὸς χῶρος περιέχων τὰ διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$. Τότε τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa$ εἶναι βάσις (κατ' οὐσίαν σύστημα συντεταγμένων) διὰ τὸν V ἂν καὶ μόνον ἂν

1. τὰ διανύσματα α_i ζευγνύουν τὸν V,
2. τὰ διανύσματα α_i εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Οὕτω βάσις διά τινα χῶρον εἶναι ἓν «οἰκονομικὸν» ἢ «τὸ μικρότερον» σύνολον ζεύξεως διὰ τὸν χῶρον. Ἡ διάστασις διανυσματικοῦ χώρου εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων περιεχομένων εἰς τὸν χῶρον.

Εἶναι διδακτικὸν νὰ ἐπανεξετάσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐπὶ τῶν συστημάτων συντεταγμένων συζήτησιν εἰς τὸ φῶς τῶν ὁρισμῶν τῆς ***βάσεως*** καὶ τῆς ***διαστάσεως***. Ἡ ἐκλογὴ μονάδων μήκους καὶ ἡ κατασκευὴ συστημάτων συντεταγμένων εἰς χῶρον μιᾶς, δύο καὶ τριῶν διαστάσεων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ μέθοδος ἐκλογῆς βάσεως διὰ τὸ χῶρον καὶ σχηματισμοῦ κατόπιν τοῦ συνόλου ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν διανυσμάτων βάσεως, λαμβανομένου κατὰ συνέπειαν τοῦ δοθέντος χώρου. Ἐπὶ παραδείγματι, θεωρήσατε τὸν δισδιάστατον χῶρον, V_2. Ἡ ἀρχὴ πρότερον ἐγίνετο διὰ τῆς ἐκλογῆς δύο μὴ συγγραμμικῶν ἀξόνων, καὶ ἐν συνεχείᾳ προεβαίνομεν εἰς καθίδρυσιν ἀντιστοιχίας ἓν πρὸς ἓν μεταξὺ σημείων καὶ διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἰσοδύναμος μέθοδος εἶναι ἡ ἀκόλουθος: Ὑποτεθείσθω ὅτι ἐκλέγομεν δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα εἰς V_2, ἔστωσαν $\alpha_1 = (1, 0)$ καὶ $\alpha_2 = (0, 1)$. Τότε τὸ V_2 εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν $\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2$ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν βάσεως. Διότι ἔστω (χ_1, χ_2) τυχὸν σημεῖον ἢ διάνυσμα εἰς τὸν χῶρον. Τότε $\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 = \chi_1(1, 0) + \chi_2(0, 1) = (\chi_1, \chi_2)$ καὶ τὸ διάνυσμα ἐκφράζεται μέσῳ τῶν α_1 καὶ α_2. Εἰδικώτερον, λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν χ_1 ὑποθέτοντες $\chi_2 = 0$ καὶ χ_1 νὰ ποικίλλῃ ὑπὲρ R, τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καὶ τὸν ἄξονα τῶν χ_2 ὑποθέτοντες $\chi_1 = 0$ καὶ χ_2 νὰ ποικίλλῃ ὑπὲρ R. Σημεῖα ἢ διανύσματα μὴ εὑρισκόμενα ἐπὶ τῶν ἀξόνων λαμβάνονται, βεβαίως, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι χ_1 καὶ χ_2 ποικίλλουν ὑπὲρ τοὺς μὴ μηδενικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Βλέπομεν πάλιν ὅτι τὰ διανύσματα βάσεως δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην κάθετα· δύο τυχόντα γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα εἰς V_2 ζευγνύουν τὸν χῶρον.

Διαισθητικῶς ἀναμένομεν ὅτι ἡ διάστασις τοῦ V_2 θὰ εἶναι 2, καὶ ὁ γενικὸς ὁρισμὸς δηλοῖ ὅτι ἡ διάστασις εἶναι 2 ἂν 2 εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς τὸν χῶρον. Προφανῶς ἓν διάνυσμα δὲν δύναται νὰ ζεύξῃ τὸν V_2. Ἂς θεωρήσωμεν τὰ τρία διανύσματα α_1, α_2 (ὡς ὡρίσθησαν ἀνωτέρω) καὶ $\alpha_3 = (\chi_1, \chi_2)$, ὅπου α_3 τυχὸν μὴ μηδενικὸν διάνυσμα εἰς V_2. Τότε

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \tag{20}$$

καὶ ἀφοῦ οἱ συντελεσταὶ τῶν διανυσμάτων εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένον (σημειώσατε ἐπίσης ὅτι ἂν ἡ (20) λυθῇ ὡς πρὸς α_3, θὰ λάβωμεν τὸ α_3 ἐκπεφρασμένον ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων βάσεως α_1 καὶ α_2). Ἕτερος τρόπος ἐκφράσεως τούτου εἶναι νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα α_3 οὐδόλως προσθέτει εἰς τὴν ἰσχὺν ζεύξεως τῶν α_1 καὶ α_2.

Ἔχομεν δείξει ὅτι τὰ τρία διανύσματα α_1, α_2 καὶ α_3 εἰς V_2 εἶναι ἐξηρτημένα, ἀλλὰ πῶς γνωρίζομεν ὅτι *τυχὸν* σύνολον τριῶν, τεσσάρων, πέντε, ..., ν διανυσμάτων εἰς V_2 θὰ εἶναι ἐπίσης γραμμικῶς ἐξηρτημένον (ἢ ἄλλως, ὅτι δύο εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς V_2); Τὸ ἀκόλουθον θεώρημα, ἀποδεικνυόμενον εἰς πλεῖστα κείμενα γραμμικῆς ἀλγέβρας, δίδει τὴν ἀπάντησιν: τυχὸν σύνολον κ διανυσμάτων εἰς V_ν εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένον ἂν $\kappa > \nu$.

Παρόμοια σχόλια ἰσχύουν διὰ τὸν τρισδιάστατον χῶρον, V_3. Ἡ διάστασις εἶναι 3, καὶ ἡ βάσις δύναται νὰ ληφθῇ οὖσα τρία γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα (τρία τυχόντα διανύσματα μὴ κείμενα ἅπαντα εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον). Ὑποτεθείσθω ὅτι ἐκλέγομεν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα ὡς βάσιν μας, $\alpha_1 = (1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)$, καὶ $\alpha_3 = (0, 0, 1)$. Τότε τὸ V_3 εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῆς μορφῆς

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \chi_3\alpha_3 = (\chi_1, \chi_2, \chi_3).$$

Ἐνδιαφέρον (καὶ ἰσχυρὸν) χαρακτηριστικὸν βάσεως ἑνὸς χώρου εἶναι τὸ ἑξῆς: ὄχι μόνον δύναται πᾶν διάνυσμα τοῦ χώρου νὰ ἐκφρασθῇ μέσῳ τῶν διανυσμάτων βάσεως, ἀλλ' ἐπίσης ἡ παρουσίασις εἶναι μοναδική — δοθὲν διάνυσμα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μόνον κατὰ ἕνα τρόπον μέσῳ δοθείσης βάσεως. Πρέπει, ὁπωσδήποτε, νὰ γίνῃ κατανοητὸν ἐκ τῶν σχολίων μας ὅτι ἡ βάσις *δὲν* εἶναι μοναδική· ἓν θεώρημα λέγει ὅτι ἂν V εἶναι διανυσματικὸς χῶρος πεπερασμένων διαστάσεων ν, τότε τυχὸν σύνολον ν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἶναι βάσις διὰ V. Ἡ αὐθαιρεσία εἰς τὴν ἐκλογὴν βάσεως διά τινα χῶρον πρέπει νὰ ἀντιδιασταλῇ τῆς μοναδικότητος παρουσιάσεως διανύσματος εἰς τὸν χῶρον ἅπαξ ἐκλεγῇ δοθεῖσα βάσις.

Ἐξάρτησις καὶ σημαντικαὶ λύσεις εἰς ὁμογενῆ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων

Εἴδομεν εἰς προηγηθὲν παράδειγμα ὅτι τὰ διανύσματα $\beta_1 = (1, 0, 0)$, $\beta_2 = (0\ 12, 0)$, $\beta_3 = (0, 0, 73)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (δηλ. ὅτι $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0$ ἱκανοποιεῖται μόνον διὰ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$). Ἂς γράψωμεν τὰ διανύσματα ὑπὸ μορφὴν στηλῶν ἀντὶ σειρῶν,

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 73 \end{bmatrix}.$$

Τότε ἡ ἐξίσωσις διανυσμάτων

$$\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0 \tag{21}$$

δύναται νὰ γραφῇ

$$\gamma_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

ἢ

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 12\gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 73\gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Ἀφοῦ τὰ διανύσματα προστίθενται κατὰ τὰ ἀντίθετα στοιχεῖα, ἡ (21) ἢ ἡ (23) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα μονομετρικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \gamma_1 + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 12\gamma_2 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 73\gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα γενικωτέραν κατάστασιν. Ἔχομεν τὴν διανυσματικὴν ἐξίσωσιν

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \ldots + \chi_r\alpha_r = 0, \tag{24}$$

ἔνθα τὰ α_i εἶναι διανύσματα-στῆλαι ἐκφραζόμενα

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 1} \end{bmatrix}, \ldots, \alpha_r = \begin{bmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa r} \end{bmatrix}$$

Τότε ἡ (24) δύναται νὰ γραφῇ

$$\chi_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 1} \end{bmatrix} + \chi_2 \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 2} \end{bmatrix} + \ldots + \chi_r \begin{bmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Διὰ τῆς χρήσεως μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὕτη γίνεται

$$(26)\quad \begin{bmatrix} \alpha_{11}\chi_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 1}\chi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{12}\chi_2 \\ \alpha_{22}\chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa 2}\chi_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \alpha_{1r}\chi_r \\ \alpha_{2r}\chi_r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\kappa r}\chi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ἂν τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων τῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως πρέπει νὰ εἶναι μηδέν, ἕκαστον στοιχεῖον εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων πρέπει νὰ εἶναι μηδέν, οὕτως ἡ (26) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα κ μονομετρικῶν ἐξισώσεων μὲ r ἀγνώστους,

$$(27)\quad \begin{array}{l} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \dots + \alpha_{1r}\chi_r = 0 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \dots + \alpha_{2r}\chi_r = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{\kappa 1}\chi_1 + \alpha_{\kappa 2}\chi_2 + \dots + \alpha_{\kappa r}\chi_r = 0. \end{array}$$

Ἓν τοιοῦτον σύστημα ἐξισώσεων, ὅπου τὰ α_{ij} εἶναι γνωσταὶ σταθεραί, καλεῖται ***ὁμογενὲς*** σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων. Ἐπίσης ἂν $\chi_1 = \gamma_1$, $\chi_2 = \gamma_2$, $\dots$, $\chi_r = \gamma_r$ λύσις τοῦ συστήματος (27), τότε τὸ διάνυσμα $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ καλεῖται ***διάνυσμα λύσεως*** τοῦ (27). Ἂν $\gamma_\iota = 0$, $\iota = 1, \dots, r$, ἡ μόνη λύσις τοῦ (27), τὸ διάνυσμα λύσεως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καλεῖται ***ἀσήμαντος*** λύσις καὶ λέγομεν ὅτι ἡ (27) ἱκανοποιεῖται ἀσημάντως. Ἂν κάποιο γ_ι εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς εἰς τὸ διάνυσμα λύσεως, τότε λέγομεν ὅτι ἡ (27) ἔχει ***σημαντικὴν*** λύσιν.

Ἡ στενὴ σχέσις μεταξὺ τῆς ὑπάρξεως σημαντικῶν λύσεων τῆς (27) καὶ γραμμικῆς ἐξαρτήσεως τοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ καθίσταται τώρα σαφής. Ἐὰν ὑπάρχουν σημαντικαὶ λύσεις τῆς (27) τότε ἡ ἐξίσωσις διανυσμάτων (24), $\chi_1\alpha_1 + \dots + \chi_r\alpha_r = 0$, ἱκανοποιεῖται διά τινα χ_ι ὄχι ἅπαντα μηδέν. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι τὰ διανύσματα $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα, ἰσχύει δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον: ἂν τὰ $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ εἶναι ἐξηρτημένα, τότε τὸ ἀντίστοιχον σύστημα ἐξισώσεων (27) πρέπει νὰ ἔχῃ σημαντικὴν λύσιν. Ἀφ' ἑτέρου, ἂν ἡ (27) ἔχῃ μόνον τὴν ἀσήμαντον λύσιν, τότε ἡ (24) ἱκανοποιεῖται μόνον διὰ συντελεστὰς ἅπαντας μηδέν· τὰ διανύσματα $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον, βεβαίως). Ὑπάρχει θεώρημα κατὰ τὸ ὁποῖον πᾶν σύνολον κ ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ r ἀγνώστους ἔχει σημαντικὰς λύσεις ἂν $\kappa < r$, δηλ., ἂν ὑπάρχουν ὀλιγώτεραι ἐξισώσεις ἢ ἄγνωστοι.

Ἕτερον σοβαρὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ συστήματος (27) εἶναι ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διανυσμάτων λύσεως σχηματίζει διανυσματικὸν χῶρον. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι καὶ ἁπλῆ καὶ διδακτική, οὕτω θὰ προβῶμεν τώρα εἰς τὴν ἐξέτασίν της. Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων λύσεως δὲν εἶναι κενόν, διότι ἡ (27) ἔχει τουλάχιστον μίαν λύσιν, $\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_r = 0$.

Ἔστω τώρα ἓν διάνυσμα λύσεως $\alpha = (\chi_1, \ldots, \chi_r)$· τότε ἡ

$$\varkappa\alpha = (\varkappa\chi_1, \ldots, \varkappa\chi_r)$$

εἶναι λύσις ἀφοῦ ἡ

$$(\varkappa\chi_1)\alpha_1 + (\varkappa\chi_2)\alpha_2 + \ldots + (\varkappa\chi_r)\alpha_r = 0$$

ἱκανοποιῆται. Ἐπίσης ἂν $6 = (\psi_1, \ldots, \psi_r)$ ἕτερον διάνυσμα λύσεως, τότε

$$\psi_1\alpha_1 + \ldots + \psi_r\alpha_r = 0 \tag{28}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν (28) καὶ (24) ἱκανοποιεῖ τὴν

$$(\chi_1 + \psi_1)\,\alpha_1 + \ldots + (\chi_r + \psi_r)\,\alpha_r = 0 \tag{29}$$

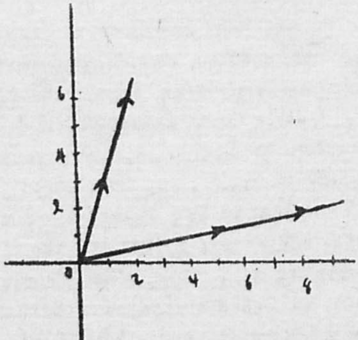
καὶ κατὰ συνέπειαν ἀποτελεῖ λύσιν. Τοῦτο δεικνύει ὅτι τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων λύσεως περικλείεται ὑπὸ τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων καὶ εἶναι κατὰ συνέπειαν διανυσματικὸς χῶρος.

Κυρτότης

Εἴδομεν ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῆς μορφῆς $\varkappa_1\alpha_1 + \varkappa_2\alpha_2$ δύο γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς V_2 πληροῖ τὸν δισδιάστατον χῶρον. Οἱ συντελεσταὶ εἰς τοὺς συνδυασμοὺς αὐτούς, βεβαίως, δύνανται νὰ εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί, θετικοί, ἀρνητικοί, ἢ μηδέν. Ἂς ἐξετάσωμεν τοὺς συνδυασμοὺς τοὺς ἔχοντας μόνον μὴ ἀρνητικοὺς συντελεστάς, τοὺς συνδυασμοὺς

$$\varkappa_1\alpha_1 + \varkappa_2\alpha_2,\ \varkappa_1,\ \varkappa_2 \geqq 0.$$

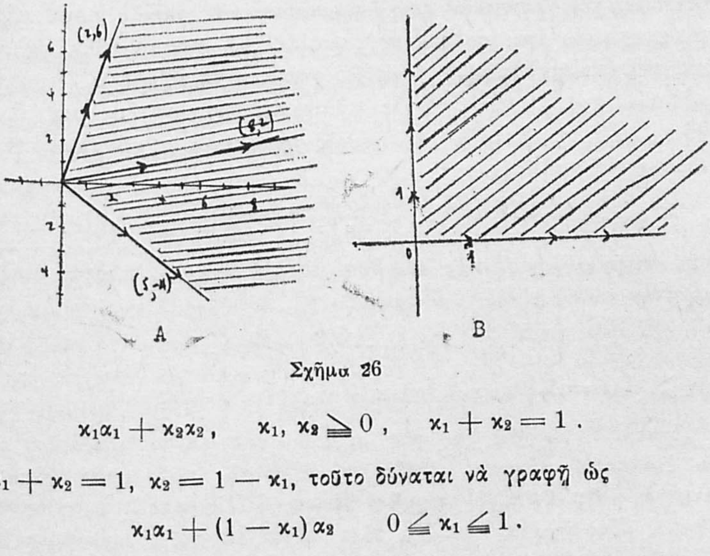
τότε τὸ ὑποσύνολον τὸ ζευγνύμενον ὑπὸ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι σημειοσύνολον καλούμενον ***κῶνος***. Π.χ., ἔστωσαν $\alpha_1 = (8, 2)$, $\alpha_2 = (2, 6)$. Ἂν $\varkappa_1 = 0$



Σχῆμα 25

καὶ $\varkappa_2$ ποικίλλῃ ὑπὲρ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν· λαμβάνομεν τὴν ἀκτῖνα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ διὰ τοῦ σημείου (2, 6) μέρος τῆς ὁποίας δεικνύεται ὑπὸ εὐθυγράμμου τμήματος εἰς τὸ σχῆμα. Ἂν $\varkappa_1$ ποικίλλῃ ὑπὲρ τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ $\varkappa_2 = 0$, πληροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος διὰ τοῦ σημείου πέρατος τοῦ διανύσματος α_1. Δι᾽ ἁπάσας τὰς ἑτέρας ἐπιτρεπτὰς τιμὰς τῶν $\varkappa_1$ καὶ $\varkappa_2$ τὰ διανύσματα θὰ κεῖνται εἰς τὸν κῶνον τὸν περικλειόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἀκτίνων. Διὰ πρόσθετα παραδείγματα, ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν α_1 καὶ α_2 ὡς ἀνωτέρω καὶ $\alpha_3 = (5, -4)$. Τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν αὐτῶν τῶν διανυσμάτων σχηματίζει ἐπίσης κῶνον ὡς δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 26α (σημειώσατε ὅτι τὰ διανύσματα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα· ὁ ὑπὸ τῶν τριῶν διανυσμάτων ζευγνύμενος κῶνος εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ζευγνύμενον ὑπὸ τῶν διανυσμάτων α_1 καὶ α_2). Διαζευκτικῶς, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τὰ διανύσματα εἶναι μοναδιαῖα, $\beta_1 = (1, 0)$ καὶ $\beta_2 = (0, 1)$. Ὁ κῶνος ἐν περιπτώσει ταύτῃ εἶναι τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, ὡς δεικνύεται ὑπὸ τοῦ σχήματος 26β.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ εἰς τοὺς γραμμικοὺς συνδυασμοὺς ὄχι μόνον εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ ἀλλ᾽ ἔχουν ἄθροισμα 1, δηλ. ἂν α_1, καὶ α_2 εἶναι ὡς ἀνωτέρω ὡρίσθησαν, ἔχομεν



Σχῆμα 26

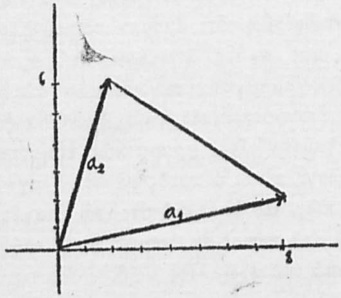
$$\varkappa_1\alpha_1 + \varkappa_2\alpha_2\,, \qquad \varkappa_1,\ \varkappa_2 \geqq 0\,, \qquad \varkappa_1 + \varkappa_2 = 1\,.$$

Ἀφοῦ ἂν $\varkappa_1 + \varkappa_2 = 1$, $\varkappa_2 = 1 - \varkappa_1$, τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς

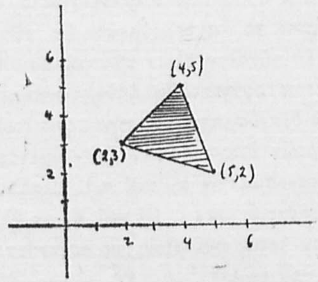
$$\varkappa_1\alpha_1 + (1 - \varkappa_1)\,\alpha_2 \qquad 0 \leqq \varkappa_1 \leqq 1\,.$$

Οὗτος καλεῖται ***κυρτὸς γραμμικὸς συνδυασμός***, καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν κυρτῶν συνδυασμῶν τῶν διανυσμάτων α_1 καὶ α_2 εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ περιέχον τὰ σημεῖα πέρατος τῶν εἰς τὸ σχ. 27α δεικνυομένων διανυσμάτων. Ἂν $\beta_1=(5,2)$, $\beta_2=(2, 3)$, $\beta_3=(4, 5)$, τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν κυρτῶν συνδυασμῶν $\varkappa_1\beta_1+\varkappa_2\beta_2+\varkappa_3\beta_3$ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι τὸ τρίγωνον τοῦ σχ. 27β. Ἂν $\varkappa_3=0$, τότε οἱ κυρτοὶ συνδυασμοὶ τῆς μορφῆς $\varkappa_1\beta_1 + \varkappa_2\beta_2$ πληροῦν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ περιέχον τὰ σημεῖα (2, 3) καὶ (5, 2)· ἂν $\varkappa_2 = 0$, οἱ κυρτοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\varkappa_1\beta_1$ καὶ $\varkappa_3\beta_3$ πληροῦν τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τὴν περιέχουσαν τὰ σημεῖα πέρατος τῶν β_1

καὶ β_3· καὶ ἂν $\varkappa_1 = 0$, οἱ κυρτοὶ συνδυασμοὶ $\varkappa_2\beta_2 + \varkappa_3\beta_3$ πληροῦν τὴν ἀπομείνασαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. Σημεῖα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου λαμβάνονται ἂν τὰ ἐπιτρεπτὰ $\varkappa_\iota$, $\iota = 1, 2, 3$, λάβουν τιμὰς διαφόρους τοῦ μηδενός.



A



B

Σχῆμα 27

Ἐπειδὴ οἱ μὴ ἀρνητικοὶ καὶ κυρτοὶ συνδυασμοὶ διανυσμάτων εἶναι σπουδαιότατοι εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν καὶ ἐπειδὴ μέγα μέρος τοῦ ὑπολοίπου κεφαλαίου ἔχει σχέσιν πρὸς αὐτούς, θὰ χρειασθῶμεν τὰς γενικευμένας ἐννοίας, τὰς ὁποίας ἔδειξεν ἡ ἀνωτέρω γεωμετρικὴ ἐξέτασις.

Ἔστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ σύνολον διανυσμάτων, καὶ ἔστωσαν τὰ μονομετρικὰ μεγέθη $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$. Τότε ***μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς*** τῶν διανυσμάτων τούτων εἶναι τὸ διάνυσμα

$$\varkappa_1 \alpha_1 + \varkappa_2 \alpha_2 + \ldots + \varkappa_r \alpha_r, \quad \varkappa_\iota \geqq 0, \quad \iota = 1, \ldots, r.$$

Ἐπίσης ***κυρτὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς*** (ἢ βραχέως, κυρτὸς συνδυασμὸς) τῶν διανυσμάτων αὐτῶν εἶναι τὸ διάνυσμα

$$\varkappa_1 \alpha_1 + \ldots + \varkappa_r \alpha_r,$$

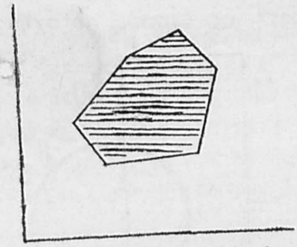
ἔνθα $\varkappa_\iota \geqq 0$, $\iota = 1, \ldots r$, καὶ $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_r = 1$.

Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἑνώνει δύο σημεῖα εἰς V_ν εἶναι κυρτὸς σύνδυασμὸς τῶν σημείων (διανυσμάτων) καὶ ὅτι ἂν τυχὸν σημεῖον δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς κυρτὸς συνδυασμὸς δύο σημείων εἰς V_ν τότε κεῖται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὰ δύο σημεῖα. Δυνάμεθα μετὰ τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα νὰ δώσωμεν ἀκριβῆ ὁρισμὸν τῆς γεωμετρικῆς ἐννοίας τοῦ ***κυρτοῦ συνόλου.*** Γεωμετρικῶς, ἓν σύνολον εἶναι κυρτὸν ἄν, δοθέντων δύο τυχόντων σημείων εἰς αὐτό, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὰ σημεῖα κεῖται ἐντὸς τοῦ συνόλου. Ἀκριβέστερον:

Ἓν σύνολον Σ εἶναι ***κυρτὸν*** ἂν α καὶ β εἶναι διανύσματα (σημεῖα) εἰς Σ, καὶ $\varkappa\alpha + (1 - \varkappa)\,\beta \in \Sigma$ διὰ πᾶν κ τοιοῦτον ὥστε $0 \leqq \varkappa \leqq 1$.

Παραδείγματα τοῦ κυρτοῦ συνόλου εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου, τοῦ τετραγώνου, τοῦ τριγώνου˙ ὅλος ὁ χῶρος˙ τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων εὐθυγράμμου τμήματος. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου δὲν εἶναι κυρτὸν σύνολον, οὔτε εἶναι κυρτὸν τὸ σύνολον τῶν τριῶν σημείων—κορυφῶν τοῦ τριγώνου.

Ἂς ἐξετάσωμεν δοθὲν κυρτὸν σύνολον εἰς τὸ ἐπίπεδον. Τὰ σημεῖα τὰ περικλείοντα τὰς γωνίας τοῦ συνόλου καλοῦνται ***ἄκρα σημεῖα***, δηλ., ἓν σημεῖον εἰς κυρτὸν σύνολον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ἑνώνει δύο ***ἕτερα*** σημεῖα εἰς τὸ σύνολον καλεῖται ἄκρον σημεῖον (ἢ ἓν σημεῖον εἶναι ἄκρον ἂν δὲν ἀποτελῇ κυρτὸν συνδυασμὸν δύο ἄλλων σημείων εἰς τὸ σύν-



Σχῆμα 28

ολον). Τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ἀποτελούμενον ἐκ τῶν ἓξ ἄκρων σημείων καὶ μόνον εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα δὲν εἶναι, βεβαίως, κυρτὸν σύνολον. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι πληροῦμεν τὸ ἀνωτέρω κυρτὸν σύνολον, λαμβάνοντες ὅλους τοὺς κυρτοὺς συνδυασμοὺς τῶν ἓξ διανυσμάτων τῶν ἐχόντων τὰ ἄκρα σημεῖα ὡς σημεῖα πέρατός των. Τὸ οὕτω πληρούμενον κυρτὸν σύνολον ἔχει εἰδικὴν ὀνομασίαν : καλεῖται ἡ ***κυρτὴ θήκη*** (convex hull) τοῦ δοθέντος σημειοσυνόλου:

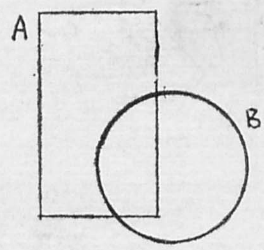
Ἔστω σημειοσύνολον Α. Τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν κυρτῶν συνδυασμῶν τῶν σημείων τοῦ Α καλεῖται ***κυρτὴ θήκη*** τοῦ συνόλου Α. Ἡ κυρτὴ θήκη δύο τυχόντων σημείων εἰς V_ν εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἑνώνει τὰ σημεῖα, ἡ κυρτὴ θήκη τριῶν τυχόντων διαφόρων ἀλλήλων καὶ μὴ ὅλων κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον εἶναι τρίγωνον, καὶ ἡ κυρτὴ θήκη τοῦ συνόλου τῶν σημείων ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι ὁ ἔχων ὡς σύνορον τὴν περιφέρειαν στερεὸς δίσκος (σημειώσατε ὅτι πᾶν σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ κυρτοῦ συνόλου). Ἡ κυρτὴ θήκη δοθέντος συνόλου δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐπίσης ὡς τὸ μικρότερον κυρτὸν σύνολον περιέχον τὸ δοθὲν σύνολον.

Τὸ κυρτὸν σύνολον τοῦ ἀνωτέρω διαγράμματος εἶναι παράδειγμα ***κυρτοῦ πολυέδρου***, σύνολον ὁριζόμενον ὡς ἀκολούθως : ἂν Μ πεπερασμένον σημειοσύνολον, τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν κυρτῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν σημείων τοῦ Μ καλεῖται ***κυρτὸν πολύεδρον*** (ἤ, ἐν ἄλλοις λόγοις, κυρτὸν πολύεδρον εἶναι ἡ κυρτὴ θήκη πεπερασμένου σημειοσυνόλου).

Δυνάμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν μετὰ προσοχῆς καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ κώνου. Ἓν μὴ κενὸν σύνολον διανυσμάτων Τ καλεῖται κῶνος ἄν, διὰ πᾶν διάνυσμα $\alpha \in T$ τὸ διάνυσμα $\kappa\alpha \in T$ διὰ πᾶν $\kappa \geqq 0$. Οὕτω τὰ σύνολα εἰς τὰ σχήματα 26Α καὶ B ἀνωτέρω εἶναι κῶνοι, ὡς κῶνος ἐπίσης εἶναι καὶ ἅπας ὁ χῶρος. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι εἷς κῶνος περιέχει τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων ἀφοῦ κ δύναται νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

Κῶνος, ὁ ὁποῖος εἶναι ἐπίσης κυρτὸν σύνολον καλεῖται κυρτὸς κῶνος (οἱ κῶνοι τῶν σχημάτων 26A καὶ B εἶναι κυρτοὶ κῶνοι)· ὁ κυρτὸς κῶνος δύναται ἐπίσης νὰ ὁρισθῇ ὡς τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν πεπερασμένου συνόλου διανυσμάτων.

Ὑπάρχει ἓν θεώρημα κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ τομὴ τυχούσης συλλογῆς κυρτῶν συνόλων εἶναι κυρτὸν σύνολον, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἕνωσις δύο κυρτῶν συνόλων δὲν εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην κυρτὴ ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα 29 ([24]). Δύναται ἐπίσης νὰ



Σχῆμα 29
Τὰ σύνολα A, B εἶναι κυρτά· $A \cup B$ δὲν εἶναι κυρτή.

δειχθῇ ὅτι ὁ ἡμιχῶρος εἶναι κυρτὸν σύνολον. Αὐτό, ὁμοῦ μετὰ τοῦ θεωρήματος περὶ τῆς κυρτότητος τῆς τομῆς κυρτῶν συνόλων, μᾶς διαβεβαιοῖ ὅτι ἡ τομὴ τυχόντος ἀριθμοῦ ἡμιχώρων εἶναι κυρτὸν σύνολον. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεως συστήματος γραμμικῶν ἀνισοτήτων εἶναι κυρτὸν σύνολον—ἀποτέλεσμα βασικῆς σπουδαιότητος εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμόν.

Τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον

Ἀθροίσματα πολλῶν ὅρων ἀθρόως ἀπαντῶνται εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν ὡς καὶ εἰς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν, καὶ εἶναι συχνάκις ἐξυπηρετικὸν νὰ παρουσιάζωμεν τὰ ἀθροίσματα ταῦτα διὰ συγκεντρωτικοῦ συμβολισμοῦ περιέχοντος τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον. Τὸ σύμβολον τοῦτο δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ νὰ δηλώσῃ τὸ ἄθροισμα οἱωνδήποτε εἰς σειρὰν τεθεισῶν ποσοτήτων,

---

24) Ἀποδεικνύομεν αὐτὸ διὰ δύο κυρτὰ σύνολα Σ καὶ T. Ἂν $\Sigma \cap T$ εἶναι τὸ μηδενικὸν σύνολον ἢ σύνολον περιέχον ἓν στοιχεῖον, τότε εἶναι κυρτὸν (εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτάς, ὁ μαθηματικὸς θὰ ἔλεγεν ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῆς κυρτότητος ἱκανοποιεῖται «κατ' ἀνόητον τρόπον»). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\Sigma \cap T$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεῖα α καὶ β. Ἐξ ὁρισμοῦ τῆς τομῆς συνόλων ἔπεται ὅτι $\alpha, \beta \in \Sigma$ καὶ $\alpha, \beta \in T$. Ἂν $\alpha, \beta \in \Sigma$, τότε $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta \in \Sigma$, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$, ἀφοῦ τὸ Σ εἶναι κυρτόν. Ἐπίσης, ἂν $\alpha, \beta \in T$, τότε $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta \in T$, διότι τὸ T εἶναι κυρτόν. Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta \in (\Sigma \cap T)$. Ἐδείξαμεν ὅτι $\alpha, \beta \in (\Sigma \cap T)$ καὶ $\varkappa\alpha + (1-\varkappa)\beta \in (\Sigma \cap T)$, $0 \leqq \varkappa \leqq 1$. οὕτως ἡ $\Sigma \cap T$ εἶναι κυρτὸν σύνολον.

αἱ ὁποῖαι ὑπόκεινται εἰς κοινοὺς νόμους, ὡς οἱ ἀριθμοὶ καὶ τὰ διανύσματα. Διὰ τῆς χρήσεως τούτου, ἐπὶ παραδείγματι, τὸ ἄθροισμα

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6$$

δύναται νὰ γραφῇ εἰς τὴν συνοπτικὴν μορφὴν

$$\sum_{\iota=1}^{6} \chi_\iota .$$

Ἕκαστος ὅρος ἢ ποσότης εἰς ἓν ἄθροισμα καλεῖται προσθετέος, οὗτος δὲ δύναται νὰ εἶναι τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ὅρων, ὡς π.χ. εἰς τὸ ἄθροισμα

$$\chi_1 \psi_1 + \chi_2 \psi_2 + \ldots + \chi_\nu \psi_\nu = \sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota \psi_\iota .$$

Τὸ γράμμα ι καλεῖται ὁ δείκτης τοῦ ἀθροίσματος· τὸ πρῶτον καὶ τελευταῖον ὑπόσημα τῶν ὅρων εἰς τὸ ἄθροισμα γράφονται συνήθως κάτωθεν καὶ ἄνωθεν τοῦ ἀθροιστικοῦ συμβόλου, ἀντιστοίχως, διὰ νὰ δηλώσουν τὰ ὅρια τοῦ ἀθροίσματος ἀλλ' ἐνίοτε παραλείπονται εἰς περιπτώσεις ἔνθα ταῦτα εἶναι ἐμφανῆ ἐκ τῶν συμφραζομένων.

Πρέπει νὰ κατανοηθῇ ὅτι δοθὲν ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ εἰδικοῦ δείκτου ἐν χρήσει,

$$\sum_{\iota=1}^{5} \chi_\iota = \sum_{j=1}^{5} \chi_j = \sum_{\kappa=1}^{5} \chi_\kappa = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5 ,$$

καὶ οἱ ἀκόλουθοι κανόνες, τὸ κῦρος τῶν ὁποίων δύναται νὰ φανῇ διὰ τῆς καταγραφῆς τῶν δηλουμένων ἀθροισμάτων, ἰσχύουν διὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον. Ὡς συνέπεια τῶν νόμων ἀντιμεταθέσεως καὶ ἀναλύσεως διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὸ ἄθροισμα δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σειρᾶς καὶ συνθέσεως τῶν προσθετέων,

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_\iota + \sum_{\iota=1}^{\nu} \beta_\iota = \sum_{\iota=1}^{\nu} (\alpha_\iota + \beta_\iota),$$

ἢ γενικῶς,

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} \alpha_\iota + \sum_{\iota=1}^{\nu} \beta_\iota + \ldots + \sum_{\iota=1}^{\nu} \zeta_\iota = \sum_{\iota=1}^{\nu} (\alpha_\iota + \beta_\iota + \ldots + \zeta_\iota),$$

καὶ ὑπάρχει ἐπιμεριστικὸς νόμος διὰ τὰ ἀθροίσματα,

$$\sum_{\iota=1}^{\nu} \kappa \chi_\iota = \kappa \sum_{\iota=1}^{\nu} \chi_\iota ,$$

ἔνθα κ τυχοῦσα σταθερά.

Τὸ ἀθροιστικὸν σύμβολον δύναται ἐπίσης νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν παρουσίασιν συστημάτων ἐξισώσεων εἰς συνοπτικὴν μορφήν. Θεωρήσατε τὸ σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων,

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \alpha_{13}\chi_3 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \alpha_{23}\chi_3 &= \beta_2 \\ \alpha_{31}\chi_1 + \alpha_{32}\chi_2 + \alpha_{33}\chi_3 &= \beta_3 \end{aligned} \qquad (30)$$

(ἐνθυμούμεθα ὅτι τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι ὁμογενὲς γραμμικὸν ἂν $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$· ἂν τουλάχιστον ἓν $\beta_\iota \neq 0$ τότε τὸ σύστημα καλεῖται μὴ ὁμογενὲς γραμμικὸν σύστημα). Αἱ ἐξισώσεις αὗται δύνανται νὰ γραφοῦν ἀντιστοίχως ὡς

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{1j}\,\chi_j = \beta_1$$

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{2j}\,\chi_j = \beta_2$$

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{3j}\,\chi_j = \beta_3 ,$$

ὅπερ ἔτι περαιτέρω συμπτύσσεται εἰς

$$(31) \qquad \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\iota j}\,\chi_j = \beta_\iota \qquad (\iota = 1, 2, 3)$$

Διὰ νὰ ἀντιπροσωπευθῇ ἡ (30) ὑπὸ τῆς (31), ἀθροίσματα τῆς μορφῆς (31) πρέπει νὰ ἑρμηνεύωνται κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Πρῶτον λαμβάνομεν $\iota = 1$ καὶ καταγράφομεν τὸ ἄθροισμα ὡς τὸ j κυμαίνεται μεταξὺ 1 καὶ 3. Κατόπιν λαμβάνομεν $\iota = 2$ καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν μέθοδον. Τελικῶς, λαμβάνομεν $\iota = 3$ καὶ καταγράφομεν τὸ δηλούμενον ἄθροισμα. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι, βεβαίως, τὸ σύστημα (30). Αἱ κατευθύνσεις αὗται δύνανται νὰ γενικευθοῦν καὶ κατὰ παρόμοιον τρόπον τὰ ἀθροίσματα

$$(32) \qquad \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\iota j}\,\chi_j = \beta_\iota \qquad (\iota = 1, \ldots, \mu)$$

δύνανται νὰ παρουσιάσουν μεταγραφόμενα τὸ σύστημα μ γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους,

$$(33) \qquad \begin{array}{l} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu = \beta_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu = \beta_\mu . \end{array}$$

Εἰδικῶς, ἔστω $\iota=1$ εἰς τὴν (32), καὶ τὸ ἄθροισμα ὡς τὸ j ποικίλλει ἀπὸ 1 ἕως ν εἶναι ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ (33)· ἔστω $\iota=2$, ἡ μέθοδος ἐπαναλαμβάνεται, καὶ τὸ προκῦπτον ἄθροισμα εἶναι ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (33), κ.ο.κ.

(Συνεχίζεται)