Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ κ. κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

4. (Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΕΩΣ

7. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὑποανεπτυγμένης χώρας τὸ πρόβλημα τῆς παραγωγῆς καὶ κεφαλαιοποιήσεως παρουσιάζεται εἰς ἁπλουστέραν μορφὴν

Ἄς ἐξετάσωμεν χώραν μὲ ὑποανεπτυγμένην οἰκονομίαν, τῆς ὁποίας ἡ κυβέρνησις ἔχει καταστρώσει ἓν συστηματικὸν πρόγμαμμα ἀνοικοδομήσεως. Ἡ παραγωγὴ εἰς τὰς διαφόρους περιοχὰς τῆς χώρας ρυθμίζεται συμφώνως μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ συγκριτικοῦ κόστους. Ὅθεν, μία κοινότης εἰδικεύεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν παραγωγὴν τοῦ οἴνου, δεδομένου ὅτι κλιματολογικοὶ καὶ ἄλλοι φυσικοὶ λόγοι εὐνοοῦν τὴν καλλιέργειαν τῆς ἀμπέλου καὶ τὴν παραγωγὴν τοῦ οἴνου. Ὑποθέτομεν, ἀκόμη ὅτι οἱ παραγωγοὶ τῆς κοινότητος αὐτῆς συνασπίζονται εἰς ἕνα γεωργικὸν συνεταιρισμόν, ὅστις καὶ ἀγοράζει τὸ σύνολον τῶν κτημάτων ὅπου καλλιεργεῖται ἡ ἄμπελος, ὡς ἐπίσης καὶ τὰς ἀποθήκας εἰς τὰς ὁποίας ἀποθηκεύεται ὁ οἶνος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἐδάφους καὶ τῆς ἐργατικῆς δυνάμεως χρησιμοποιοῦνται μόνον διὰ μίαν βραχυπρόθεσμον χρονικὴν περίοδον, τὴν ὁποίαν ἐπιβάλλει ἡ καλλιέργεια καὶ ἡ μεταβολὴ τοῦ προϊόντος τῆς ἀμπέλου εἰς γλεῦκος. Ἡ ὡρίμανσις ὅμως τοῦ γλεύκους εἰς οἶνον εἶναι ἀποτέλεσμα φυσικῶν δυνάμεων καὶ δὲν ἀπαιτεῖται ἡ χρησιμοποίησις οὐδενὸς ἐκ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ κεφάλαιον χρησιμοποιεῖται διὰ μίαν χρονικὴν περίοδον, μόνον διὰ νὰ προφυλάξῃ καὶ διατηρήσῃ τὸ προϊὸν (τὰς ὑπηρεσίας) τῶν συντελεστῶν τοῦ ἐδάφους καὶ τῆς ἐργατικῆς δυνάμεως. Ἑπομένως, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ σύνολον τῆς χρησιμοποιηθείσης ἐργατικῆς δυνάμεως καὶ ἐδάφους, ἡ κεφαλαιοποίησις ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν χρονικὴν περίοδον τῆς ἀποθηκεύσεως τοῦ γλεύκους ἕως τὴν πώλησιν τοῦ οἴνου.

Εἶναι κοινῶς παραδεδεγμένον ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ οἴνου καθορίζεται ἀπὸ τὸν νόμον τῆς ζητήσεως καὶ προσφορᾶς εἰς τὴν ἀγορὰν ὁλοκλήρου τῆς χώρας, καὶ ἐπιπροσθέτως ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ οἴνου εἰς τὴν ἀγορὰν αὐτὴν αὐξάνει συνεχῶς (ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων) καθὼς αὐξάνει καὶ ἡ ἡλικία του. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἐναποθηκεύσεως τοῦ γλεύκους ἕως τὴν στιγμὴν τῆς πωλήσεως τοῦ οἴνου μόνον φυσικαὶ δυνάμεις ἐπιδροῦν διὰ τὴν αὔξησιν τῆς τιμῆς του. Δηλαδή, ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐναποθηκεύσεως τοῦ οἴνου, οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς (ἔδαφος, ἐργατικὴ δύναμις) παύουν νὰ συνεισφέρουν ὑπηρεσίας καὶ ἑπομένως ἡ κεφαλαιοποίησις διὰ τὸν συνεταιρισμὸν καὶ τὴν κοινότητα ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν χρονικὴν περίοδον τῆς ἀποθηκεύσεως. Ὅθεν, καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τῆς κεφαλαιοποιήσεως, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ καταλλήλου χρόνου κατὰ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πωληθῇ ὁ οἶνος εἰς τὴν ἀγοράν. Ἡ ποιοτικὴ βελτίωσις τοῦ οἴνου, ἥτις συνεπάγεται καὶ τὴν αὔξησιν τῆς τιμῆς του, εἶναι συνεχὴς ὡς πρὸς τὸν χρόνον. Ἑπομένως, ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐναποθηκεύσεως τοῦ οἴνου ἡ συνεχὴς ἄνοδος τῆς τιμῆς του εἶναι μία συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ μόνον αὐτοῦ. Ἀλλὰ γεννᾶται κατόπιν τὸ ἐρώτημα : εἴμεθα εἰς θέσιν, ἔχοντες ὑπ' ὄψει μας τὰ ἀνωτέρω, νὰ καθορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ οἴνου διὰ μίαν χρονικὴν περίοδον μετὰ τὴν ἐναποθήκευσιν του; Δηλαδή, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν (παροῦσαν ἀξίαν) τοῦ οἴνου λ.χ. δύο ἔτη μετὰ τὴν ἐναποθήκευσιν αὐτοῦ; Διὰ νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω ἐρωτήματα, κατὰ πρῶτον θὰ ἀναφέρωμεν συνοπτικῶς τὸ πρόβλημα τοῦ χρεολυσίου. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ποσὸν α δραχμῶν πρόκειται νὰ ἐξοφληθῇ εἰς περίοδον x ἐτῶν καὶ τὸ ἐπιτόκιον καθὼς καὶ ἡ ἀνατοκιστικὴ περίοδος εἶναι γνωστά. Τότε δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἐκεῖνο τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, τὸ ὁποῖον ἀνατοκιζόμενον θὰ μᾶς δώσῃ τὸ ποσὸν τῶν α δραχμῶν εἰς τὸ τέλος τῶν x ἐτῶν. Τὸ ποσὸν αὐτὸ ὀνομάζομεν παροῦσαν ἢ προεξοφλητικὴν ἀξίαν ἐν σχέσει μὲ τὸ ὀφειλόμενον ποσὸν τῶν α δραχμῶν, ἐξοφλητέον εἰς x ἔτη. Ἐὰν 100ε % εἶναι τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ ἀνατοκιστικὴ περίοδος εἶναι τὸ ἔτος, τότε ἐὰν ὀνομάσωμεν y τὴν παροῦσαν ἀξίαν θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν $y\,(1+\varepsilon)^x = \alpha$ (βλ. Κεφ. IV § 5).

ἢ
$$y = \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^x}$$

Ὁμοίως ὡς καὶ προηγουμένως, ἐὰν ὁ τόκος, προστίθεται ν φορὰς κατ' ἔτος θὰ ἔχωμεν (βλ. Κεφ. IV § 5).

$$y = \frac{\alpha}{\left(1+\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\nu x}}$$

Τελικῶς, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ τόκος προστίθεται συνεχῶς, τότε τὸ ὅριον τῆς συναρτήσεως $\left(1+\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\nu x}$ ὅταν τὸ $\nu \rightarrow \infty$ εἶναι ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις $e^{\varepsilon x}$

καὶ
$$ye^{\varepsilon x} = \alpha$$
ἢ
$$y = \alpha e^{-\varepsilon x}$$

Ἡ παροῦσα ἀξία y διὰ τὴν ἐξόφλησιν τοῦ ποσοῦ α, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς παραμέτρους ε καὶ ν, δηλαδὴ ἀπὸ τὸ ἐπιτόκιον καὶ τὴν συχνότητα τῆς ἀνατοκιστικῆς περιόδου. Ὅσον τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ συχνότης τῆς ἀνατοκιστικῆς περιόδου εἶναι μεγαλύτεραι, τόσο ἡ παροῦσα ἀξία y εἶναι μικροτέρα. Κατόπιν τῆς συνοπτικῆς αὐτῆς ἀναλύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ χρεολυσίου, δυνάμεθα νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω ἐρωτήματα τοῦ προβλήματός μας, ἀλλ' ἀφ' οὗ προηγουμένως ἐξηγήσωμεν ὅτι χρησιμοποιοῦμεν τὴν «Ἔννοιαν τοῦ Λόγου τοῦ Κέρδους» ὡς ἔννοιαν παράλληλον τοῦ ἐπιτοκίου, ὅταν ἡ μεταβολὴ τοῦ χρόνου εἶναι συνεχὴς (βλ. Κεφ. IV, § 5) καὶ ὅταν ἀπὸ οἰκονομικῆς πλευρᾶς διαπραγματευόμεθα μετὰ τῶν στοιχείων τῆς παραγωγῆς, τῆς διανομῆς καὶ τῆς καταναλώσεως, οὐχὶ δὲ μὲ τὸν χρηματιστικὸν τομέα τῆς οἰκονομίας.

Τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ἐναποθηκεύεται τὸ γλεῦκος εἰς τὰς ἀποθήκας τοῦ συνεταιρισμοῦ τῆς κοινότητος, ἡ ἀξία του εἶναι γνωστή. Τὴν στιγμὴν αὐτὴν λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν μετρήσεως τοῦ χρόνου $(t = 0)$ καὶ ἀπὸ τῆς στιγμῆς αὐτῆς ἡ ἀξία τοῦ οἴνου, κατὰ μονάδα, εἶναι μία συνεχῶς αὔξουσα συνάρτησις τοῦ χρόνου, ἡ ὁποία ὑποθέτομεν ὅτι μᾶς εἶναι γνωστή. Τὴν συνάρτησιν αὐτὴν ὀνομάζομεν $f(t)$.

Ὑποθέτομεν ἀκόμη ὅτι ὁ ***λόγος τοῦ κέρδους*** εἰς τὴν ἀγορὰν διὰ τὸ προϊὸν τῆς κοινότητος εἶναι γνωστός, δεδομένου ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ προϊόντος καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἰδίαν τὴν ἀγοράν, ἀναλόγως τῆς ἡλικίας του, καὶ ὅτι τὸ κέρδος προστίθεται συνεχῶς, συμφώνως μὲ τὸν σταθερὸν λόγον τοῦ κέρδους εἰς τὴν ἀγοράν.

Ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία y τῆς μονάδος, ὅταν ὁ οἶνος πωληθῇ μετὰ t ἔτη θὰ εἶναι :

$$y = f(t)\, e^{-\varepsilon t}$$

ὅπου ε παριστᾷ τὸν λόγον τοῦ κέρδους εἰς τὴν ἀγοράν. Ἀπομένει τώρα νὰ καθορίσωμεν τὸ χρονικὸν ἐκεῖνο διάστημα τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖται νὰ μεσολαβήσῃ ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἐναποθηκεύσεως τοῦ γλεύκους ἕως τὴν πώλησιν τοῦ οἴνου διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῆς μεγίστης δυνατῆς κεφαλαιοποιήσεως, διὰ τὸν συνεταιρισμὸν καὶ τὴν κοινότητα. Ὥστε πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ t, ἡ ὁποία καθιστᾷ μεγίστην τὴν παροῦσαν ἀξίαν : δηλαδὴ τὴν τιμὴν τοῦ t, ἡ ὁποία εἶναι τοιαύτη ὥστε νὰ συναληθεύουν αἱ δύο συνθῆκαι :

$$\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} < 0 \qquad (\text{βλ. } 5.\ 8.\ \Gamma)$$

$$\frac{dy}{dt} = [\, f'(t) - \varepsilon f(t) \,]\, e^{-\varepsilon t}$$

καὶ ἑπομένως ἡ πρώτη συνθήκη πληροῦται ὅταν $\frac{f'(t)}{f(t)} = \varepsilon$. Ἤτοι κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς πωλήσεως, ὁ λόγος τοῦ κέρδους πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς διαφορικῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν.

Ἡ διαπίστωσις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ λόγου τοῦ κέρδους εἶναι ἔννοια διαφορικὴ καὶ ὅτι ἑπομένως ἡ κεφαλαιοποίησις διὰ τὴν κοινότητα καὶ τὸν συνεταιρισμὸν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διαφορικὴν μεταβολήν. Ἐκ τῆς δευτέρας συνθήκης :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = [\, f''(t) - x\,\varepsilon f'(t) + \varepsilon^2 f(t) \,]\, e^{-\varepsilon t}$$

ἢ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[f''(t) - 2\,\frac{f'^2(t)}{f(t)} + \frac{f'^2(t)\, f(t)}{f^2(t)} \right] e^{-\varepsilon t}$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ε ἐκ τῆς πρώτης :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[f''(t) - \frac{f'^2(t)}{f(t)} \right] e^{-\varepsilon t}$$

ἄρα

$$f''(t)\, \frac{-f'(t)}{f(t)} < 0$$

ἢ

$$\frac{f''(t)\, f(t) - f'^2(t)}{f(t)} < 0$$

ἢ

$$\frac{f''(t)\, f(t) = f'^2(t)}{[\, f(t)\,]^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{f'(t)}{f(t)} \right] = < 0$$

Δηλαδή, ὁ λόγος τῆς διαφορικῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς πωλήσεως, θὰ πρέπει νὰ ἐλαττοῦται. Ἡ ἀνωτέρω μαθηματικὴ καὶ οἰκονομικὴ ἐπεξεργασία τοῦ προβλήματος τῆς παραγωγῆς καὶ κεφαλαιοποιήσεως εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ οἴνου ἐβασίσθη ἐπὶ ὡρισμένων ὑποθέσεων, αἵτινες δὲν ἀπέχουν καὶ πολὺ τῆς πραγματικότητος. Π.χ. ἡ συνεχὴς βελτίωσις τοῦ οἴνου ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐναποθηκεύσεως τοῦ γλεύκους καὶ κατόπιν, ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν πραγματικότητα ἐντὸς ὡρισμένων ὁρίων (χρόνου) καὶ ἡ λύσις του θὰ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τῶν ὁρίων αὐτῶν. Ὅθεν, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις προσεγγίζει τὴν πραγματικότητα. Τὴν γραφικὴν λύσιν τοῦ προβλήματος θὰ δώσωμεν μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν λογαριθμικῶν κλιμάκων.

Ἡ ἀνάλυσις ἐπὶ τοῦ προβλήματος τούτου ἐβασίσθη ἐπὶ τῶν ἐργασιῶν τοῦ Wicksell: Lectures in Political Economy, Vol. I p. 174—184, Fisher: The Theory of Interest 161—165 καὶ Allen: Mathematical Analysis for Economists 248—250.

8. Γενίκευσις τοῦ προβλήματος καὶ ἄλλαι εἰδικαὶ περιπτώσεις

Ἐὰν γράψωμεν τὴν πρώτην συνθήκην ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f'(x) = \varepsilon f(x),$$

τότε βλέπομεν ὅτι ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς παρισταμένης ὑπὸ τῆς συναρτήσεως ποσότητος εἶναι ἀνάλογος, εἰς ἑκάστην δεδομένην στιγμήν, τῆς παρούσης ποσότητος $f(x)$ κατὰ τὴν στιγμὴν ταύτην. Πολλαὶ ζῶσαι ποσότητες αὐξάνουν συμφώνως μὲ τὸν νόμον αὐτόν, ὅπως π.χ. ὁ πληθυσμὸς μιᾶς χώρας, τὰ κύτταρα ἑνὸς ὀργανισμοῦ κλπ. Δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸν νόμον αὐτὸν ἀκολουθοῦν εἰς τὴν πορείαν τῆς αὐξήσεώς των καὶ ὡρισμέναι οἰκονομικαὶ ποσότητες. Ἰδιαιτέραν σημασίαν ἐνέχει ὁ νόμος αὐτὸς διὰ τὴν συστηματικὴν παρακολούθησιν τῆς ἀναπτύξεως τοῦ φυσικοῦ πλούτου μιᾶς χώρας. Αἱ συναρτήσεις αἵτινες ἐπαληθεύουν τὸν νόμον αὐτὸν εἶναι ἐκθετικαὶ συναρτήσεις τῆς μορφῆς $Ce^{\varepsilon t}$, ὅπου C καὶ ε εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί, αἱ δὲ τιμαί των προσδιορίζονται ἀναλόγως τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος. (Ὑπάρχουν φυσικαὶ ποσότητες αἵτινες φθίνουν σύμφωνα μὲ τὸν νόμον αὐτὸν π.χ. ὀρυκτὰ καὶ ἡ μαθηματικὴ μελέτη των γίνεται ὡς ἡ ἀνωτέρω).

Παράλληλον μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ οἴνου εἶναι καὶ τὸ κατωτέρω, τὸ ὁποῖον καὶ δεικνύει τὴν σπουδαιότητα τὴν ὁποίαν ἐνέχει ἡ ἐκμετάλλευσις τοῦ φυσικοῦ πλούτου, ἰδιαιτέρως διὰ κράτη μὲ ὑποανεπτυγμένας οἰκονομίας. Ἐπὶ παραδείγματι ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ κυβέρνησις χώρας τινὸς μὲ ὑποανεπτυγμένην οἰκονομίαν ἀποφασίζει τὴν ἀναδάσωσιν μιᾶς ἐκτεταμένης ὀρεινῆς περιοχῆς, μὲ ἀντικειμενικὸν σκοπὸν τὴν παραγωγὴν ξυλείας. Ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ οἴνου, γίνεται φανερὸν ὅτι ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναδασώσεως καὶ μετέπειτα, οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς δὲν προσφέρουν καμμίαν ὑπηρεσίαν εἰς τὴν αὔξησιν τοῦ ἐθνικοῦ κεφαλαίου τοῦ προερχομένου ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τοῦ δάσους. Ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἀναδασώσεως, ἡ μετατροπὴ τῆς ὀρεινῆς περιοχῆς εἰς δάσος ἐπαφίεται εἰς τὰς φυσικὰς δυνάμεις. Διὰ τὴν Κυβέρνησιν ἀπομένει μόνον νὰ καθορίσῃ τὴν περίοδον ὑλοτομήσεως, διὰ νὰ ἔχῃ τὴν μεγίστην ἀπόδοσιν.

Ἡ ἐργασία διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τοῦ προβλήματος τοῦ οἴνου. Δηλαδή, θὰ πρέπει νὰ προσδιορισθῇ μία συνάρτησις $f(t)$, ἡ ὁποία νὰ ἐκφράζῃ τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος τῆς ὑπὸ παραγωγὴν ξυλείας. Μία ἄλλη περίπτωσις γενικωτέρου χαρακτῆρος τοῦ προβλήματος τῆς παραγωγῆς καὶ κεφαλαιοποιήσεως, εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς προσφέρουν τὰς ὑπηρεσίας των καθ' ὅλην τὴν πορείαν τῆς παραγωγῆς ὡρισμένου τινὸς προϊόντος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ παραγωγὴ εἶναι συνάρτησις ὄχι μόνον τοῦ χρόνου ἀλλὰ καὶ τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμὰς προβλημάτων τῆς γραφικῆς - ἀριθμητικῆς μεθόδου

Πρόβλημα 1ον) Πλανόδιος πωλητὴς αὐγῶν εἰς τι χωρίον ἔχει μόνον 5 πελάτας. Ἡ ἀτομικὴ ζήτησις ἑνὸς ἑκάστου τῶν πελατῶν εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς τὰς ὁποίας οὗτος προσφέρει τὰ αὐγὰ ἔχει ὡς ἑξῆς :

Π ί ν α ξ 8 Β

Τιμὴ αὐγῶν (εἰς χιλ. δρχ. κατὰ δωδεκάδα)	Δωδεκάδες αὐγῶν ἀγοραζόμεναι ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν					Συνολικὴ ζήτησις
	Α	Β	Γ	Δ	Ε	
60	0	1	0	2	0	
50	1	2	0	2	1	
40	2	2	0	2	1	
30	3	3	1	3	1	
20	3	4	1	3	2	

Ζητεῖται : α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνολικὴ ζήτησις διὰ τὰ αὐγὰ τοῦ πλανοδίου πωλητοῦ εἰς τὸ χωρίον.

β) Νὰ συμπληρωθῇ ὁ πίναξ καὶ νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς καμπύλης τῆς ζητήσεως διὰ τὰ αὐγά.

Πρόβλημα 2ον) Ὑποτιθεμένου ὅτι εἴς τινα ἀγορὰν λειτουργοῦσαν ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, ἡ ζήτησις καὶ προσφορὰ τῆς ζακχάρεως κατ' ὀκᾶν εἶναι ὡς δεικνύεται εἰς τὸν πίνακα 8 Γ τῆς ἑπομένης σελίδος :

Ζητεῖται : α) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν καμπυλῶν τῆς ζητήσεως καὶ τῆς προσφορᾶς καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγοράν.

β) Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μὲν προσφορὰ παραμένει ἡ αὐτὴ ἡ δὲ ζήτησις διπλασιάζεται, ποία εἶναι ἡ τιμὴ ἰσορροπίας (τ) εἰς τὴν ἀγοράν ;

Πρόβλημα 3ον) Ἐὰν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ὑποθέσωμεν :

α) ὅτι ἡ μὲν ζήτησις παραμένῃ ἡ αὐτὴ (ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὸν πίνακα) ἡ

Πίναξ 8Γ

Τιμὴ ζακχάρεως (Κατ' ὀκᾶν εἰς χιλ. δραχμάς)	Ζήτησις (εἰς ὀκάδας)	Προσφορὰ (εἰς ὀκάδας)
20	10 400	2 000
24	8 400	2 400
28	7 200	4 000
32	5 800	5 600
36	5 000	6 400
40	4 400	7 200
44	3 800	8 000
48	3 000	8 600
52	2 400	9 200
56	2 000	9 600

δὲ προσφορὰ ὑποβιβάζεται εἰς τὸ ἥμισυ, νὰ εὑρεθῇ τὸ νέον σημεῖον ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγοράν.

β) Ὅταν τόσον ἡ ζήτησις ὅσον καὶ ἡ προσφορὰ διπλασιάζονται, νὰ εὑρεθῇ τὸ νέον σημεῖον τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν ἀγοράν.

Πρόβλημα 4ον) Ἡ παραγωγὴ καὶ ἡ ὁλικὴ πρόσοδος ἐπιχειρήσεώς τινος εἶναι ὡς δεικνύεται εἰς τὸν πίνακα 8 Δ τῆς ἑπομένης σελίδος:

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁριακὴ πρόσοδος καὶ νὰ συμπληρωθῇ ὁ πίναξ.

Πρόβλημα 5ον) Ἡ παραγωγὴ καὶ τὸ ὁλικὸν κόστος αὐτῆς ἔν τινι ἐπιχειρήσει εἶναι ὡς δεικνύεται εἰς τὸν πίνακα 8 Ε τῆς μεθεπομένης σελίδος:

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁριακὸν κόστος κατὰ μονάδα, καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ ὁριακὸν κόστος ἐπὶ ὅλων τῶν ἐπιπροσθέτων μονάδων ἀπὸ τὸ ἓν ἐπίπεδον τῆς παραγωγῆς εἰς τὸ ἄλλο καὶ νὰ συμπληρωθῇ ὁ πίναξ.

Πρόβλημα 6ον) Ἡ παραγωγή, τὸ ὁλικὸν κόστος αὐτῆς καὶ ἡ μέση πρόσοδος ἐπιχειρήσεώς τινος εἶναι ὡς δεικνύεται εἰς τὸν πίνακα 8 ΣΤ τῆς σελ. 64:

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ καὶ καθαρὰ πρόσοδος (κέρδος) καὶ νὰ συμπληρωθῇ ὁ πίναξ.

Ὁμὰς Δευτέρα

Πρόβλημα 7ον) Ἐὰν p εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μονάδος εἰς τὴν ὁποίαν πωλοῦνται x μονάδες ἑνὸς ἀγαθοῦ εἰς μίαν ἀγορὰν καὶ θεωρήσωμεν τὸ p ὡς συνάρτησιν

Πίναξ 8Δ

Παραγωγή	Ὁλικὴ Πρόσοδος	Ὁριακὴ Πρόσοδος
100	180,00	
350	630,00	
702	1 263,60	
1 152	2 073,60	
1 700	3 060,00	
2 190	3 942,00	
2 604	4 987,20	
2 908	5 234,40	
3 114	5 605,20	
3 240	5 832,00	
3 300	5 940,00	
3 350	6 030,00	
3 395	6 111,00	
3 435	6 183,00	

τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x τότε ἡ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς εἶναι ἡ καμπύλη τῆς ζητήσεως. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ περιορισμοί, ἐὰν ὑπάρχουν, διὰ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x, ὑπὸ τοὺς ὁποίους αἱ κάτωθι συναρτήσεις δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συναρτήσεις ζητήσεως καὶ νὰ γίνουν αἱ γραφικαὶ αὐτῶν παραστάσεις.

1) $p = \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ 2) $p = \sqrt{225 - 9x}$ 3) $p = \frac{640}{x+9} - 40$

Πρόβλημα 8ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\alpha^x + 6\,\alpha^{x-1} = 1$

Εἰς ποίαν ταχύτητα διπλασιάζεται ἡ «μᾶζα ἠρεμίας» ἑνὸς ἀτομικοῦ σωματείου ὅταν

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

ὅπου m_0 = μᾶζα ἠρεμίας, m = μᾶζα εἰς ταχύτητα v καὶ c = ταχύτης τοῦ φωτός.

Πρόβλημα 9ον) Ἐὰν μία νέα κλωστοϋφαντικὴ μηχανὴ ἐκτελεῖ ὡρισμένον

Πίναξ 8Ε

Παραγωγή	Ὁλικὸν Κόστος	Ὁριακὸν Κόστος κατὰ μονάδα	Ὁριακὸν Κόστος (ὅλων τῶν ἐπιπροσθέτων μονάδων)
100	1 100		
350	1 200		
702	1 300		
1,152	1 400		
1,700	1 500		
2,190	1 600		
2,604	1 700		
2,908	1 800		
3,114	1 900		
3,240	2 000		
3,300	2 100		
3,350	2 200		
3,395	2 300		
3,435	2 400		

ἔργον κατὰ 2 1/2 ὥρας ταχύτερον ἄλλης παλαιᾶς μηχανῆς καὶ αἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμεναι ἐκτελοῦν τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 3/4 τῆς ὥρας, νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ὥραν ἑκάστη μηχανὴ ἐκτελεῖ μόνη της, τὸ αὐτὸ ἔργον ;

Πρόβλημα 10ον) Ἐμπορός τις ἠγόρασε ἀριθμὸν ραδιοφώνων ἀντὶ 4550 δολλ. Κατὰ τὴν μεταφορὰν κατεστράφησαν 15 ἐξ αὐτῶν. Ἕκαστον τῶν ὑπολοίπων ἐπωλήθη μὲ κέρδος 22 δολλ. Ἐὰν ὁ ἔμπορος ἐκέρδισε ἐν ὅλῳ 2 530 δολλ., πόσα ραδιόφωνα ἠγόρασε καὶ εἰς ποίαν τιμήν ;

Πρόβλημα 11ον) Ἐὰν ἔμπορός τις ἐλαττώσῃ τὴν ἀξίαν τοῦ στατῆρος ἑνὸς ἐμπορεύματος κατὰ 1 000 δρ. θὰ πωλήσῃ 10 στατῆρας περισσότερον ἢ προηγουμένως. Ἐὰν ἡ ὁλικὴ πρόσοδος εἶναι 200 000 καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις νὰ εὑρεθῇ ποία εἶναι ἡ ἀρχικὴ τιμὴ πωλήσεως.

Πρόβλημα 12ον) Τεμάχιον ὑφάσματος σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλο-

Πίναξ 8 ΣΤ

Παραγωγὴ	Ὁλικὸν Κόστος	Μέση Πρόσοδος	Ὁλικὴ Πρόσοδος	Καθαρὰ Πρόσοδος
100	1 100	1,80		
350	1 200	1,80		
702	1 300	1,80		
1 152	1 400	1,80		
1 700	1 500	1,80		
2 190	1 600	1,80		
2 604	1 700	1,80		
2 908	1 800	1,80		
3 114	1 900	1,80		
3 240	2 000	1,80		
3 300	2 100	1,80		
3 350	2 200	1,80		
3 395	2 300	1,80		
3 435	2 400	1,80		

γράμμου κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς βαφῆς μαζεύει 3 $^{0}/_{0}$ κατὰ πλάτος καὶ 5 $^{0}/_{0}$ κατὰ μῆκος. Ἐὰν ἡ ὁλικὴ ἀπώλεια εἰς περίμετρον εἶναι 1 μέτρ. καὶ ἡ ὁλικὴ ἀπώλεια εἰς ἐμβαδὸν εἶναι 8 τετρ. μέτρ. νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀρχικαὶ διαστάσεις τοῦ ὑφάσματος.

Πρόβλημα 13ον) Αἱ τιμαὶ τοῦ σίτου καὶ τῆς κριθῆς κατ᾿ ὀκᾶν εἴς τινα ἀγορὰν εἶναι x_1 καὶ x_2 ἀντιστοίχως. Ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως τοῦ σίτου εἰς τὴν ἀγορὰν αὐτὴν εἶναι : $p_1 = 5-9x_1+5x_2$, τῆς δὲ κριθῆς : $p_2 = 7+4x_1-3x_2$. Ἡ συνάρτησις τῆς προσφορᾶς τοῦ σίτου εἰς τὴν ἰδίαν ἀγορὰν εἶναι :

$s_1 = 8+2x_1-3x_2$, τῆς δὲ κριθῆς : $s_2 = -23 = 4x_1+4x_2$.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ζεῦγος ἐκεῖνο τῶν τιμῶν τὸ ὁποῖον ἐξισώνει τὴν ζήτησιν καὶ προσφορὰν διὰ τὰ δύο εἴδη.

Πρόβλημα 14ον) Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ Κυβέρνησις φορολογεῖ τοὺς παραγωγοὺς τοῦ σίτου μὲ τ_1 δραχ. κατ᾿ ὀκᾶν καὶ τὴν κριθὴν μὲ τ_2 : Νὰ εὑρεθῇ τὸ νέον ζεῦγος τιμῶν τὸ ὁποῖον ἐξισώνει τὴν ζήτησιν καὶ προσφορὰν διὰ τὰ δύο εἴδη. (Καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ φορολογία θὰ ἐπηρεάσῃ τὴν πλευρὰν τῆς προσφορᾶς εἰς τὴν ἀγοράν, δηλαδὴ αἱ νέαι ἐξισώσεις εὑρίσκονται ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x_1 μὲ $x_1 = \tau_1$ καὶ τὸ x_2 μὲ $x_2 - \tau_2$).

Πρόβλημα 15ον) Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων :

α) Δείξατε ὅτι ἡ μὲν τιμὴ τοῦ σίτου αὐξάνει κατόπιν τῆς φορολογίας κατὰ $\frac{1}{3}(9\tau_2 - \tau_1)$, τῆς δὲ κριθῆς κατὰ $\frac{1}{13}(14\tau_2 - 3\tau_1)$.

β) Δείξατε ὅτι μία φορολογία μόνον ἐπὶ τοῦ σίτου ἐλαττώνει τὰς δύο τιμάς ;

γ) Δείξατε ὅτι μία φορολογία μόνον ἐπὶ τῆς κριθῆς αὐξάνει καὶ τὰς δύο τιμάς ; Δείξατε ὅτι ἡ αὔξησις τῆς κριθῆς εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ φόρου. (Βλ. Hotelling : Edgeworth's Taxation Paradox, Journal of Political Economy, 1932, σελ. 602—3, καὶ Allen: Mathematical Analysis for Economists σελ. 60).

Πρόβλημα 16ον) Νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ἀριθ. 4 Κεφ. IV § 6, ὅταν $\tau_1 = \tau_2$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαχωριστικὴ γραμμὴ εἶναι ὁ ἄξων y.

Πρόβλημα 17ον) Ἐὰν τὰ δύο ἐργοστάσια τῆς αὐτῆς ἐπιχειρήσεως (πρόβλ. 4, Κεφ. IV, § 6) ἀπέχουν 2γ χιλ. καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ ὁμοιογενοῦς προϊόντος εἶναι p_1, p_2, εἰς τὸν τόπον τῆς παραγωγῆς, καὶ ἐπίσης τὰ μεταφορικὰ εἶναι τ κατὰ μονάδα κατὰ μίλλιον, δείξατε ὅτι ἡ γραμμὴ ἡ διαχωρίζουσα τοὺς καταναλωτὰς ἔχει ἐξίσωσιν $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\gamma^2} = 1$ ὅπου $\alpha = \frac{p_2 - p_1}{2\tau}$ καὶ $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$. Σχεδιάσατε τὴν καμπύλην ὅταν $\tau = 1$ καὶ $2\gamma = 18$ χιλ.

Πρόβλημα 18ον) Ἐπιχείρησίς τις παράγει ραδιόφωνα. Τὰς μὲν συσκευὰς λήψεως κατασκευάζει εἰς τὸ ἐργοστάσιον A τὰ δὲ κυτία εἰς τὸ ἐργοστάσιον B. Ἡ ἀξία ἑκάστης συσκευῆς λήψεως εἶναι p_1 καὶ ἡ ἀξία τοῦ κυτίου p_2. Ἡ συναρμολόγησις γίνεται εἰς τὸν τόπον τῆς καταναλώσεως. Τὰ ἔξοδα μεταφορᾶς κατὰ μονάδα προϊόντος κατὰ μίλλιον (συσκευαὶ ἢ κυτία) εἶναι τ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος καταναλώσεως ὅταν ἡ τιμὴ τῆς πλήρους συσκευασίας εἶναι α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κατανομὴ τῶν τόπων καταναλώσεως εἰς τὴν χώραν, ἐν σχέσει μὲ τὴν τιμὴν α.

Πρόβλημα 19ον) Ὁ πληθυσμὸς τῆς Μητροπολιτικῆς Νέας Ὑόρκης εἶναι 6 000 000. Ἐὰν αἱ γεννήσεις εἶναι 3 % κατ' ἔτος καὶ οἱ θάνατοι 2 %, νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ αὐξηθῇ ὁ πληθυσμὸς εἰς τὰ ἑπόμενα 50 ἔτη ἐὰν τὰ ποσοστὰ γεννήσεων καὶ θανάτων ἐξακολουθοῦν νὰ εἶναι τὰ ἴδια.

Πρόβλημα 20ον) Εἰς πόσα ἔτη διπλασιάζεται ποσὸν α δρ. ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 3 % καὶ ἡ συχνότης τοῦ ἀνατοκισμοῦ εἶναι α) ἐτησία β) τριμηνιαία γ) συνεχής.

Πρόβλημα 21ον) Ἐὰν κεφάλαιόν τι ἀποφέρῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν ὅταν ἀνατοκίζεται μὲ 100 ε % ἐτησίως καὶ ὅταν ἀνατοκίζεται μὲ 100 σ % ν φορὰς ἐτησίως νὰ δειχθῇ ὅτι $\varepsilon = \left(1 + \frac{\sigma}{\nu}\right)^{\nu} - 1$. Ὅταν σ εἶναι μικρὸν καὶ $\nu = 6$ νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν ἡ διαφορὰ μεταξὺ ε καὶ σ.

Πρόβλημα 22ον) Ἐὰν κεφάλαιον ἀποφέρῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν ὅταν ἀνατοκίζεται μὲ 100 ε % ἐτησίως καὶ ὅταν ἀνατοκίζεται συνεχῶς μὲ 100 ρ % νὰ δειχθῇ ὅτι $\rho = \lambda\gamma(1 + \varepsilon)$. Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς νὰ δειχθῇ γραφικῶς ὅτι τὸ ρ εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ ε καὶ ὅτι εἶναι σχεδὸν ἴσα ὅταν τὸ ε εἶναι ἀρκετὰ μικρόν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

V. 1) Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς παραγώγου

Ὁ τρόπος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ μεταβάλλεται, ἀποτελεῖ τὸ βασικὸν πρόβλημα τοῦ κλάδου ἐκείνου τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ὁ ὁποῖος καλεῖται ***Διαφορικὸς Λογισμός***. Οὐσιαστικῶς, ἡ μελέτη τοῦ προβλήματος τούτου ὡδήγησε τοὺς Newton — Leibnitz εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ὅστις μέχρι σήμερον ἀποτελεῖ μίαν ἀπὸ τὰς ἰσχυροτέρας μεθόδους τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης εἰς τὴν λύσιν πρακτικῶν προβλημάτων.

Αὔξησις καὶ ἐλάττωσις τῆς συναρτήσεως

Ἡ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως εὑρίσκεται ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὴν δευτέραν τιμὴν ἀπὸ τὴν πρώτην. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὴν χρῆσιν τῶν δύο λέξεων «***αὔξησις***» καὶ «***ἐλάττωσις***», θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν λέξιν «***μεταβολή***», ὑπὸ ἀλγεβρικὴν ἔννοιαν. Δηλαδή, ὅταν ἡ μεταβολὴ εἶναι θετική, ἔχομεν αὔξησιν καὶ ὅταν ἡ μεταβολὴ εἶναι ἀρνητική, ἔχομεν ἐλάττωσιν. Πάντως, εἶναι γεγονὸς ὅτι, εἰς τὰς ἀκολούθους σελίδας εἰς τὰς ὁποίας γίνεται χρῆσις μόνον τῆς λέξεως αὔξησις, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν λέξιν αὔξησις διὰ τῆς λέξεως ἐλάττωσις χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἔννοια τῶν προτάσεων.

Τὴν μεταβολὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x παριστῶμεν μὲ τὸ Δx τὴν δὲ μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως μὲ Δy ἐὰν y παριστᾷ τὴν συνάρτησιν.
ἢ μὲ $\Delta \varphi$ » φ » » »
ἢ μὲ Δf » f » » »

Ἡ μεταβολὴ Δy τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς μίαν αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς Δx θὰ ὑπολογίζεται πάντοτε ἐπὶ τῇ βάσει μιᾶς ἀρχικῆς ὡρισμένης δοθείσης ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως. Π.χ. ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν

$$y = x^2$$

καὶ ἂς θεωρήσωμεν ὡς ἀρχικὴν τιμὴν $x = 8$. Ὑποθέτοντες ὅτι τὸ **x** αὐξάνει εἰς $x = 10$ δηλαδὴ $\Delta x = 2$ ἔχομεν αὔξησιν τοῦ y εἰς $y = 100$ καὶ $\Delta y = 36$. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸ **x** εἰς $x = 7$ δηλαδὴ $\Delta x = -1$, τότε τὸ y ἐλαττώνεται εἰς 49 καὶ $\Delta y = -15$. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως $y = x^2$ αἱ μεταβολαὶ Δx καὶ Δy εἶναι ὁμόσημοι, δηλαδὴ ὅταν αὐξάνεται τὸ x τότε αὐξάνεται καὶ τὸ y καὶ ὅταν ἐλαττώνεται τὸ **x** τότε ἐλαττώνεται καὶ τὸ y. Ἀλλὰ εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ συμβαίνῃ καὶ τὸ ἀντίθετον, δηλαδὴ ὅταν αὐξάνεται τὸ x νὰ ἐλαττοῦται τὸ y καὶ τανάπαλιν· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ μεταβολαὶ εἶναι ἑτερόσημοι. Ἐὰν ζητήσωμεν τώρα νὰ συγκρίνωμεν τὰς δύο μεταβολάς, δηλαδὴ τὸν λόγον τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, συμβολικῶς θὰ ζητήσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα μὲ ἀρχικὴν τιμὴν 3 διὰ τὴν συνάρτησιν καὶ μεταβολὰς διὰ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν ὡς φαίνεται εἰς τὸν πίνακα 9.

Πίναξ 9

Ἀρχικὴ τιμὴ τοῦ x	Νέα τιμὴ τοῦ x	Αὔξησις Δx	Ἀρχικὴ τιμὴ τοῦ y	Νέα τιμὴ τοῦ y	Αὔξησις Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
3	4	1.0	9	16	7	7
3	3.9	0.9	9	15.21	6.21	6.9
3	3.7	0.7	9	13.69	4.69	6.7
3	3 5	0.5	9	12.25	3.25	6.5
3	3.3	0.3	9	10.89	1.89	6.3
3	3.1	0.1	9	9.61	0.61	6.1
3	3.01	0.01	9	9.0601	0.0601	6.01

Ἐκ τοῦ πίνακος αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι τὸ Δy ἐλαττοῦται ὅταν τὸ Δx ἐλαττοῦται. Ἀλλὰ ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ λαμβάνει τὰς διαδοχικὰς τιμὰς 7, 6.9, 6.7, 6.5, 6.3, 6.1, 6.01... τὸ ὁποῖον δεικνύει ὅτι συνεχῶς πλησιάζει τὴν τιμὴν 6.

Ἑπομένως, τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ὅταν $\Delta x \to 0$ εἶναι 6.

Ἐὰν μεταβάλωμεν τὴν ἀρχικὴν τιμὴν τοῦ x ἀπὸ 3 εἰς 4, τὸ ὅριον τοῦ λόγου μεταβάλλεται ἀπὸ 6 εἰς 8. Οὕτω, τὸ ὅριον τοῦ λόγου εἶναι μία συνάρτησις τῆς ἀρχικῆς τιμῆς τοῦ x. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν συνάρτησιν αὐτὴν ἐκ τῆς ἀρχικῶς δοθείσης συναρτήσεως, δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις αὐτὴ ὑπάρχει.

Ὁρισμὸς τῆς παραγώγου. Τὸ ὅριον τοῦ λόγου τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἐὰν ὑπάρχῃ τοιοῦτον καὶ εἶναι ὡρισμένον, ὅταν ἡ μεταβολὴ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὀνομάζεται ***παράγωγος τῆς συναρτήσεως.***

Ὅταν τὸ ὅριον τοῦ λόγου ὑπάρχῃ ἡ συνάρτησις λέγεται ***παραγωγήσιμος ἢ διαφορήσιμος.*** Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς ἔχει τὴν ἀκόλουθον συμβολικὴν ἀνάλυσιν διὰ τὴν συνάρτησιν

$$y = f(x) \tag{1}$$

τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν παραγωγήσιμον δι᾽ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἔστω Δy ἡ ἀντιστοιχοῦσα μεταβολὴ τῆς $y = f(x)$ εἰς τὴν μεταβολὴν Δx. Ἡ νέα τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι :

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \tag{2}$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (1) ἀπὸ τὴν (2) λαμβάνομεν

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{3}$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς (3) διὰ Δx λαμβάνομεν

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Ἑπομένως, ἐὰν λάβωμεν τὰ ὅρια τῶν μελῶν τῆς (4) ὅταν $\Delta x \to 0$, τὸ ὅριον τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν διὰ τοῦ $\frac{dy}{dx}$. Ἑπομένως

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4'}$$

Ἡ (4') ὁρίζει τὴν παράγωγον τῆς y ὡς πρὸς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x. Ἐπίσης ἀπὸ τὴν (4) καὶ (4') δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ὁμοίως ἐν u παριστᾷ τὴν συνάρτησιν καὶ t τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν

$$\frac{du}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{ὁρ.}} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

εἶναι ἡ παράγωγος τῆς u ὡς πρὸς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν t.

Σύμβολα πρὸς παράστασιν τῆς παραγώγου

Αἱ μεταβολαὶ Δy καὶ Δx εἶναι ὡρισμέναι καὶ πεπερασμέναι, ὁ δὲ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα ἕνα ὡρισμένον κλάσμα. Τὸ σύμβολον $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ κλάσματος αὐτοῦ καὶ εἶναι «ἑνιαῖον», δηλαδὴ πρὸς τὸ παρὸν δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα. Εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, τὸ σύμβολον $\frac{dy}{dx}$ ἔχει κλασματικὰς ἰδιότητας καὶ δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς κλάσμα, ἀφοῦ δώσωμεν ἔννοιαν εἰς τὰ dx, dy (Βλ. Γενικὰ Μαθημ. Ν. Σακελλαρίου, Κεφ. περὶ Διαφορικῶν). Πρὸς τὸ παρὸν θὰ τὸ θεωρῶμεν ἑνιαῖον.

Ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως τοῦ x εἶναι ἐν γένει συνάρτησις τοῦ x : ὡς ἐκ τούτου, παριστῶμεν τὴν παράγωγον πολλάκις διὰ τοῦ συμβόλου $f'(x)$ ἢ συντομώτερον διὰ τοῦ y'. Πολλοὶ συγγραφεῖς χρησιμοποιοῦν τὸν συμβολισμὸν D_x. Ἑπομένως, διὰ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως ἔχομεν τὰς συμβολικὰς ἰσότητας $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D_x f(x)$.

Οὕτως, ἐὰν $y = x^3 + 3x^2$ τότε $\frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2)$ παριστᾷ τὴν παράγωγον τῆς $x^3 + 3x^2$ ὡς πρὸς x.

Ἡ ἐργασία εὑρέσεως τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως λέγεται ***παραγώ-***

γισις τῆς συναρτήσεως. Θὰ πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁρίου ὅταν $\Delta x \to 0$ ἡ μεταβλητὴ εἶναι τὸ Δx καὶ ὄχι τὸ x.

Τὸ x ἔχει ὡρισμένην τιμὴν ἔστω $x = x_0$ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἀπαραιτήτων πράξεων πρὸς εὕρεσιν τῆς παραγώγου. Διὰ νὰ τονίσωμεν ἀκόμη περισσότερον αὐτὸ τὸ σημεῖον γράφομεν τὴν (4΄) διὰ $x = x_0$ ὡς

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x^0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς παραγώγου δοθείσης τινὸς συναρτήσεως ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν :

α) Ἀντικαθιστῶμεν τὸ x μὲ $x + \Delta x$ καὶ εὑρίσκομεν τὴν νέαν τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

β) Ἀφαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς συναρτήσεως ἀπὸ τὴν νέαν τιμὴν καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὸ Δy (δηλαδὴ τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως).

γ) Διαιροῦμεν τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως Δy διὰ τῆς μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς Δx.

δ) Εὑρίσκομεν τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου ὅταν τὸ Δx τείνει εἰς τὸ μηδέν· τὸ ὅριον αὐτὸ εἶναι ἡ παράγωγος.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

Παράδειγμα 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $y = x^2$ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x.

α) Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x εἶναι $y = x^2$. Ἡ νέα τιμὴ τῆς συναρτήσεως διὰ $x + \Delta x$ εἶναι :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

β)
$$\begin{aligned} y + \Delta y &= x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 \\ y \quad &= x^2 \\ \hline \Delta y &= 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

γ)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + (\Delta x)$$

δ)
$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}}\ (2x + \Delta x) = 2x$$

Ἐπομένως, ἡ παράγωγος εἶναι $y' = 2x$. Διὰ $x = 3$, $y' = 6$ εὑρέθη ἐκ τοῦ πίνακος.

Παράδειγμα 2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = x^3 - 3x + 7$ 1) Διὰ τὴν τιμὴν $x = 0$ καὶ 2) δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ x.

1. α) $f(0) = 7$, $f(0 + \Delta x) = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x) + 7$

β) $\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x) + 7 - 7 = (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)$

γ)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^3 - 3(\Delta x)}{\Delta x} = (\Delta x)^3 - 3$$

δ)
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}}\ [\,(\Delta x)^2 - 3\,] = -3$$

2. α) $y = x^3 - 3x + 7, \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) + 7$

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x + 7$$

β) $$\begin{array}{rl} y + \Delta y = & x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x + 7 \\ y \quad = & x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 3x \qquad\quad + 7 \\ \hline \Delta y = & 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x \end{array}$$

γ) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3$$

δ) $$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}} \left[\, 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 3 \,\right] = 3x^2 - 3$$

καὶ ἑπομένως $y' = f(x) = 3x^2 - 3$. Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ παράγωγος διὰ $x = 0$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῆς $f'(x)$ διὰ $x = 0$.

Παράδειγμα 3ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $y = 4x + \frac{1}{x}$

α) $y = 4x + \frac{1}{x}, \qquad y + \Delta y = 4(x + \Delta x) + \frac{1}{x + \Delta x}$

β) $$\begin{array}{rl} y + \Delta y = & 4x + 4\Delta x + \dfrac{1}{x + \Delta x} \\ y \quad = & 4x \qquad\quad + \dfrac{1}{x} \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta y = 4\Delta x + \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{4x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 - \Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

γ) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x^2 + 4x\,\Delta x - 1}{x(x + \Delta x)}$$

δ) $$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}} \frac{4x^2 + 4x\,\Delta x - 1}{x(x + \Delta x)} = \frac{4x^2 - 1}{x^2} = 4 - \frac{1}{x^2}$$

Εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν ὁρίων καὶ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγώγου ὅτι ἐὰν ἡ παράγωγος συναρτήσεώς τινος ὑπάρχῃ διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν τοῦ x, τότε ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν. Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει πάντοτε· δηλαδή, ὑπάρχουν συνεχεῖς συναρτήσεις αἵτινες δὲν ἔχουν παράγωγον. Ἡ μελέτη τῶν συναρτήσεων αὐτῶν ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τοῦ παρόντος βιβλίου. Δεδομένου ἐξ ἄλλου ὅτι τοιαῦται συναρτήσεις δὲν συναντῶνται γενικῶς εἰς τὰ οἰκονομικὰ μαθηματικὰ εἰμὴ εἰς ἐλαχίστας μελέτας, θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον μὲ συναρτήσεις παραγωγησίμους δι' ὅλας τὰς τιμάς, ἐκτὸς ὡρισμένων τοιούτων τὰς ὁποίας θὰ ὀνομάζωμεν ***μεμονωμένας***.

V. 2) Παραγώγισις τῶν ἀλγεβρικῶν συναρτήσεων

Εἰς τὴν παράγραφον αὐτὴν θὰ ὑποδείξωμεν 11 τύπους χρησίμους εἰς τὴν παραγώγισιν τῶν ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Ἀλλαχοῦ δὲ θὰ προσθέσωμεν ἑτέραν ὁμάδα διὰ τὰς παραγώγους τῶν ἐκθετικῶν καὶ ὑπερβατικῶν συναρτήσεων. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ κατωτέρω συναρτήσεις εἶναι παραγωγήσιμοι, ἔχοντες ὑπ' ὄψει ὅτι εἰς τοὺς ἑπομένους τύπους u, v εἶναι συναρτήσεις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ ὅτι c, μ εἶναι ἀριθμοὶ σταθεροί.

Τ ύ π ο ι

Τύπος 1ος
$$\frac{dc}{dx} = 0$$

Ἡ παράγωγος μιᾶς σταθερᾶς συναρτήσεως εἶναι μηδέν.

Τύπος 2ος
$$\frac{dx}{dx} = 1$$

Ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως (μεταβλητῆς) ὡς πρὸς τὴν ἰδίαν συνάρτησιν (μεταβλητὴν) εἶναι 1.

Τύπος 3ος
$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος δύο συναρτήσεων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων. Ἡ πρότασις αὐτὴ ἰσχύει δι' ὁσασδήποτε συναρτήσεις πεπερασμένας τὸ πλῆθος.

Τύπος 4ος
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου δύο συναρτήσεων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς δευτέρας σὺν τῷ γινομένῳ τῆς δευτέρας ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς πρώτης.

Τύπος 4'
$$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}$$

Ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου μιᾶς σταθερᾶς ἐπὶ μίαν συνάρτησιν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως. Ὁ τύπος αὐτὸς ἀποτελεῖ μερικὴν περίπτωσιν τοῦ τύπου (4).

Τύπος 5ος
$$\frac{d}{dx}v^{\mu} = \mu\, v^{\mu-1}\frac{dv}{dx}$$

Ἡ παράγωγος τῆς μυοστῆς δυνάμεως μιᾶς συναρτήσεως ἰσοῦται μὲ τὴν (μ—1)οστὴν δύναμιν τῆς συναρτήσεως ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως ἐπὶ μ.

Τύπος 5'
$$\frac{d}{dx}x^{\mu} = \mu\, x^{\mu-1}$$

Ἡ παράγωγος τῆς μυοστῆς δυνάμεως τοῦ x ἰσοῦται μὲ τὸ μ ἐπὶ τὴν (μ—1)οστὴν δύναμιν τοῦ x. Ἐπίσης ὁ τύπος αὐτὸς ἀποτελεῖ μερικὴν περίπτωσιν τοῦ τύπου (5).

Τύπος 6ος
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Ἡ παράγωγος τοῦ πηλίκου δύο συναρτήσεων ἰσοῦται μὲ τὸν παρανομαστὴν ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ ἀριθμητοῦ μεῖον τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ παρα-