ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

Τοῦ κ. W. ALLEN SPIVEY
Καθηγητοῦ Στατιστικῆς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Μίτσιγκαν

Κατὰ μετάφρασιν κ. ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
Ἀποφοίτου τῆς Α.Β.Σ.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 3)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2ον

ΤΙΝΑ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΜΗΤΡΩΝ

Πράξεις ἐπὶ μητρῶν

Ὁρίζομεν τὴν μήτραν ὡς ὀρθογώνιον διευθέτησιν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \dots \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}.$$

Ἡ μήτρα A ἔχει μ σειρὰς καὶ ν στήλας (ὅπου μ καὶ ν θετικοὶ ἀκέραιοι) καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἡ μήτρα καλεῖται τάξεως μ ἐπὶ ν. Οἱ ἀριθμοὶ α_{ij} οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται εἰς τὴν διευθέτησιν καλοῦνται στοιχεῖα τῆς μήτρας, καὶ τὰ στοιχεῖα $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\mu\nu}$ εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς κυρίας διαγωνίου αὐτῆς. Ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν σειρῶν καὶ στηλῶν εἶναι ἐμφανὴς ἐκ τῶν συμφραζομένων, ἡ μήτρα δύναται νὰ γραφῇ εἰς συνοπτικὴν μορφὴν (α_{ij}), τοῦ α_{ij} δηλοῦντος τὸ στοιχεῖον τῆς i σειρᾶς καὶ j στήλης τῆς μήτρας A.

Ὁ ὁρισμὸς περιλαμβάνει τετραγωνικὰς μήτρας ($\mu = \nu$), μήτρας μιᾶς σειρᾶς καὶ ν στηλῶν (1 ἐπὶ ν)

$$(1) \qquad (\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \dots \alpha_{1\nu}),$$

καὶ μήτρας μ σειρῶν καὶ μιᾶς στήλης (μ ἐπὶ 1)

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix}.$$

Μῆτραι τῆς μορφῆς (1) καὶ (2) καλοῦνται διάνυσμα - σειρὰ καὶ διάνυσμα - στήλη.

ἀντιστοίχως, καὶ ἀναφερόμεθα εἰς τὰς σειρὰς καὶ στήλας τῆς μήτρας Α ἀνωτέρω ὡς εἰς διανύσματα-σειρὰς καὶ διανύσματα-στήλας. Ἀφοῦ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\mu=\nu=1$, ὑπάρχει καὶ μήτρα 1 ἐπὶ 1 ἡ ὁποία εἶναι εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς ἢ ἓν μονομετρικὸν μέγεθος.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος μητρῶν εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκεῖνον τῆς ἰσότητος διανυσμάτων: αἱ μῆτραι Α καὶ Β λέγονται ἴσαι ἂν εἶναι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ ἕκαστον στοιχεῖον τῆς Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τῆς Β.

Ἂν Α μία μήτρα $\mu\times\nu$, τότε ἡ μήτρα $\nu\times\mu$ ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς Α ἂν αἱ σειραὶ γίνουν στῆλαι καὶ αἱ στῆλαι σειραὶ καλεῖται ***ἐνηλλαγμένη*** (transpose) τῆς Α καὶ δηλοῦται διὰ Α′. Π.χ. ἂν

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{bmatrix},$$

τότε

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{bmatrix}.$$

Σημειώσατε ἐπίσης ὅτι τὸ ἐνηλλαγμένον ἑνὸς διανύσματος-στήλης εἶναι διάνυσμα-σειρά, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἑπομένως, τὸ διάνυσμα-στήλη

$$X = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix}$$

δύναται νὰ γραφῇ $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)'$.

Ἔχομεν ἤδη προσδιορίσει τρεῖς πράξεις ἐπὶ τῶν διανυσμάτων: τὴν πρόσθεσιν (καὶ κατὰ συνέπειαν ἀφαίρεσιν), τὸν μονομετρικὸν πολλαπλασιασμόν, καὶ τὸν ἐσωτερικὸν πολλαπλασιασμόν. Ἀφοῦ τὰ διανύσματα-στῆλαι καὶ -σειραὶ εἶναι μῆτραι, θέλομεν τώρα νὰ προσδιορίσωμεν ἀντιστοίχους πράξεις ἐπὶ μητρῶν κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε νὰ ἔχουν ἰσχὺν αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν διανυσμάτων.

Διανύσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν συνιστωσῶν προστίθενται ἂν προστεθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι συνιστῶσαι αὐτῶν, οὕτως ὁρίζομεν τὴν πρόσθεσιν μητρῶν ὡς ἀκολούθως. Ἔστωσαν αἱ μῆτραι $A=(\alpha_{ij})$ καὶ $B=(\beta_{ij})$ ἀμφότεραι τάξεως $\mu\times\nu$. Τότε τὸ ***ἄθροισμα*** $A+B$ εἶναι ἡ μήτρα $(\alpha_{ij}+\beta_{ij})$ λαμβανομένη διὰ προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν Α καὶ Β. Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ ὅτι πρόσθεσις ὁρίζεται μόνον διὰ μήτρας τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἓν μονόμετρον ὁδηγεῖ εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου ἑνὸς μονομέτρου κ καὶ τῆς μήτρας $A = (\alpha_{\iota j})$: ἡ κA ὁρίζεται ὡς ἡ μήτρα ἡ λαμβανομένη ἐκ τῆς A ἂν ἕκαστον στοιχεῖον τῆς A πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ μονόμετρον κ,

$$\kappa A = \begin{bmatrix} \kappa\alpha_{11} & \kappa\alpha_{12} \ldots \kappa\alpha_{1\nu} \\ \kappa\alpha_{21} & \kappa\alpha_{22} \ldots \kappa\alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots \\ \kappa\alpha_{\mu 1} & \kappa\alpha_{\mu 2} \ldots \kappa\alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}.$$

Ἡ πρᾶξις πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν εἶναι ὀλίγον πολυπλοκωτέρα ἀλλὰ βασίζεται ἐπὶ τῆς πράξεως τοῦ «πολλαπλασιασμοῦ» διανυσμάτων. Τὰ διανύσματα «πολλαπλασιάζονται» διὰ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ των γινομένου, οὕτω θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν πρᾶξιν ταύτην διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Δι' εἰδικὸν παράδειγμα πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν, ἔστωσαν A μήτρα 2×3 καὶ B μήτρα 3×2. Τότε ἡ μήτρα γινομένου AB εἶναι

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32} \end{bmatrix}.$$

Ἡ μήτρα γινομένου εἶναι τάξεως 2×2, καὶ ἕκαστον στοιχεῖον τῆς AB εἶναι τὸ ***ἐσωτερικὸν γινόμενον*** μιᾶς τῶν σειρῶν τῆς A μὲ μίαν τῶν στηλῶν τῆς B. Ἂν ἡ AB παριστᾶται διὰ $(\gamma_{\iota j})$, τότε τὸ στοιχεῖον τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ πρώτης στήλης τῆς AB, γ_{11}, εἶναι ὁ ***ἀριθμὸς*** $\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31}$, τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης σειρᾶς τῆς A καὶ τῆς πρώτης στήλης τῆς B. Τὸ στοιχεῖον τῆς πρώτης σειρᾶς καὶ δευτέρας στήλης τῆς AB, γ_{12}, εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32}$, ἢ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης σειρᾶς τῆς A καὶ τῆς δευτέρας στήλης τῆς B. Ἐν ἄλλοις λόγοις, τὸ στοιχεῖον τῆς ι σειρᾶς καὶ j στήλης τῆς AB εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς ι σειρᾶς τῆς A καὶ τῆς j στήλης τῆς B. (Ὁ ἀναγνώστης πρέπει νὰ ἐλέγξῃ τοῦτο διὰ πᾶν στοιχεῖον τῆς AB).

Αἱ παρατηρήσεις αὗται εἶναι ὅ,τι χρειαζόμεθα διὰ νὰ δώσωμεν γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν. Ἔστωσαν αἱ μῆτραι $A = (\alpha_{\iota j})$ τάξεως $\mu\times\nu$, καὶ $B = (\beta_{\iota j})$ τάξεως $\nu\times\xi$. Τότε ἡ AB εἶναι ἡ μήτρα $(\gamma_{\iota j})$ τάξεως $\mu\times\xi$ τῆς ὁποίας στοιχεῖα εἶναι

$$\gamma_{\iota j} = (\alpha_{\iota 1} \quad \alpha_{\iota 2} \ldots \alpha_{\iota\nu}) \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{\nu j} \end{bmatrix} = \alpha_{\iota 1}\beta_{1j} + \alpha_{\iota 2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{\iota\nu}\beta_{\nu j}.$$

Πρέπει νὰ σημειωθοῦν μετὰ προσοχῆς τρία χαρακτηριστικὰ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου. Πρῶτον αἱ μῆτραι Α καὶ Β εἶναι, ἀντιστοίχως, τάξεως $\mu\times\nu$ καὶ $\nu\times\xi$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ νὰ πολλαπλαπλασιάσωμεν μήτρας ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς Α πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν σειρῶν τῆς Β. Οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ξ, πάντως, ὁ ἀριθμὸς τῶν σειρῶν τῆς πρώτης καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν στηλῶν τῆς δευτέρας, ἀντιστοίχως, δύνανται νὰ εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί. Δεύτερον, ἡ μήτρα ΑΒ εἶναι τάξεως $\mu\times\xi$· ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν σειρῶν μὲ τὴν Α καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στηλῶν μὲ τὴν Β. Τελικῶς, τὸ στοιχεῖον τῆς ι σειρᾶς καὶ j στήλης τῆς ΑΒ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς ι σειρᾶς τῆς Α καὶ j στήλης τῆς Β.

Ἀκολουθοῦν παραδείγματα τῶν τριῶν ἐπὶ μητρῶν ὁρισθεισῶν πράξεων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 8 & 5 \\ -9 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$5\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & -7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 10 \\ 20 & -35 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 5 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & -9 \\ 10 & -8 \end{bmatrix}.$$

Μολονότι δὲν εἶναι σκοπός μας νὰ παρουσιάσωμεν ἐκτεταμένην μελέτην τῆς ἀλγέβρας μητρῶν, χρήσιμος θὰ ἦτο ἡ ἀναφορὰ ὡρισμένων ἰδιοτήτων τῶν πράξεων τὰς ὁποίας ἔχομεν προσδιορίσει ὁμοῦ μέ τινας τῶν ἐφαρμογῶν των. Δύναται νὰ ἀποδειχθῇ, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι ἡ πρόσθεσις μητρῶν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ καὶ ἀναλυτική, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς μητρῶν εἶναι ἐπιμεριστικὸς ἐν σχέσει μὲ τὴν πρόσθεσιν,

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma,$$

$$A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma,$$

διὰ μήτρας καταλλήλου τάξεως. Ἐπίσης, ἂν $A = (\alpha_{\iota j})$ εἶναι τάξεως $\mu\times\nu$ καὶ ἂν $\varkappa = -1$, τότε διὰ τοῦ μονομετρικοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν λαμβάνομεν

$$\varkappa A = (-1)A = \begin{bmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{12} \ldots & -\alpha_{1\nu} \\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} \ldots & -\alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ -\alpha_{\mu 1} & -\alpha_{\mu 2} \ldots & -\alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

οὕτω διὰ πᾶσαν μήτραν Α ὑπάρχει μία ἀρνητικὴ μήτρα $-A$ μὲ τὴν ἰδιότητα $A + (-A) = A - A = 0$, ἔνθα τὸ σύμβολον 0 δηλοῖ τὴν μηδενικὴν μήτραν - μήτρα πᾶν στοιχεῖον τῆς ὁποίας εἶναι μηδὲν (ἔχομεν ἐπίσης $A + 0 = 0 + A = A$ διὰ πᾶσαν μήτραν Α). Πάλιν, ὡς καὶ εἰς τὰ διανύσματα, ἡ ἀφαίρεσις μητρῶν ὁρίζεται μέσῳ τῆς προσθέσεως. Ἡ μήτρα $A - B$ ὁρίζεται ὡς ἡ μήτρα ἡ ὁποία ὅταν προστεθῇ εἰς τὴν B δίδει τὴν A, οὕτως ἔχομεν $A - B = A + (-B)$.

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν A εἶναι τάξεως $\mu \times \nu$, B $\nu \times \xi$, καὶ Γ $\xi \times \rho$, τότε

$$AB\Gamma = A(B\Gamma) = (AB)\Gamma\cdot$$

ὁ νόμος τῆς ἀναλύσεως ἰσχύει διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μητρῶν, ὡς ἴσως ἀνεμένετο, ἀλλ' ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δὲ ἰσχύει γενικῶς,

$$AB \neq BA$$

δι' ἁπάσας τὰς καταλλήλους μήτρας A, B. Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστωσαν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

τότε $$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

καὶ $$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Τῷ ὄντι, εἶναι δυνατὸν τὸ γινόμενον $X\Psi$ νὰ εἶναι καθωρισμένον καὶ τὸ ΨX νὰ εἶναι ἀκαθόριστον.

Ἂν $$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

τότε $$X\Psi = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ἀλλὰ τὸ ΨX δὲν εἶναι καθωρισμένον διότι αἱ τάξεις τῶν μητρῶν δὲν ἐπιτρέπουν πολλαπλασιασμόν.

Ἡ μήτρα $\nu \times \nu$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix}$$

ἡ ὁποία ἔχει μονάδας εἰς τὴν κυρίαν αὐτῆς διαγώνιον, καλεῖται ἡ ***μοναδιαία*** ἢ ***ταυτοτικὴ*** μήτρα, διότι παίζει τὸν αὐτὸν ρόλον εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν μητρῶν ὁποῖον ὁ ἀριθμὸς 1 εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἂν A τυχοῦσα μήτρα ἔχομεν

$$AI = IA = A.$$

Παρατηρήσατε ὅτι ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ἓν μόνον μοναδιαῖον στοιχεῖον ἢ ἀριθμός, ὑπάρχει ταυτοτικὴ μήτρα I διὰ πᾶν ν. Ἐπίσης ὁ ρόλος τοῦ μηδενὸς παίζεται ὑπὸ τῶν μητρῶν ἕκαστον στοιχεῖον τῶν ὁποίων εἶναι μηδέν. Αὗται καλοῦνται, βεβαίως, μηδενικαὶ μῆτραι, ἔχομεν δὲ μηδενικὴν μήτραν διὰ πᾶσαν ἐκλογὴν μ καὶ ν.

Ἐπιθυμοῦμεν ἐνίοτε νὰ θεωρήσωμεν τινά, ὄχι ὅμως ὅλα, τῶν στοιχείων τῆς μήτρας. Ἂν A μία μήτρα, τότε ***ὑπομήτρα*** τῆς A εἶναι ἡ ἀπομένουσα μετὰ τὴν διαγραφὴν ὡρισμένων σειρῶν ἢ στηλῶν τῆς δοθείσης. Π.χ., ἂν A εἶναι ἡ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

τότε αἱ κάτωθι εἶναι ὑπομῆτραι

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν εἶναι ἐπίσης χρήσιμος διὰ τὴν γραφὴν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων εἰς συνοπτικὴν μορφήν. Π.χ. τὸ σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} 2\chi_1 + 8\chi_2 + 6\chi_3 &= 2 \\ 2\chi_1 + 5\chi_2 + 4\chi_3 &= 4 \\ -\chi_1 + 3\chi_2 + 2\chi_3 &= -5 \end{aligned}$$

δύναται νὰ γραφῇ

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Τοῦτο, βεβαίως, δύναται νὰ γενικευθῇ· τὸ σύστημα μ μὴ ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu &= \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu &= \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu &= \beta_\mu \end{aligned}$$

δύναται νὰ γραφῇ

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

ἢ ἔτι βραχύτερον

$$AX = B,$$

ἔνθα $A = (\alpha_{ij})$ ἡ μήτρα $\mu \times \nu$ τῶν συντελεστῶν τῶν μεταβλητῶν εἰς τὰς ἐξισώσεις, X τὸ $\nu \times 1$ διάνυσμα - στήλη τῶν ἀγνώστων, καὶ B τὸ $\mu \times 1$ διάνυσμα-στήλη τῶν σταθερῶν ὅρων.

Βαθμὸς μήτρας

Ἔστω A τυχοῦσα μήτρα τάξεως $\mu \times \nu$. Τότε ὁ μέγιστος ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων - σειρῶν εἰς τὴν A καλεῖται ὁ βαθμὸς σειρῶν τῆς A, καὶ ὁ μέγιστος ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων - στηλῶν καλεῖται ὁ βαθμὸς στηλῶν τῆς A. Ὑπάρχει ἐπίσης ἓν θεώρημα εἰς τὴν γραμμικὴν ἄλγεβραν κατὰ τὸ ὁποῖον ὁ βαθμὸς σειρῶν μήτρας εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν βαθμὸν στηλῶν αὐτῆς· τοῦτο σημαίνει, βεβαίως, ὅτι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων - σειρῶν εἶναι πάντοτε ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μέγιστον ἀριθμὸν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων - στηλῶν μιᾶς μήτρας. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ὁρίζομεν τὸν ***βαθμὸν*** μιᾶς μήτρας ὡς τὸν μέγιστον ἀριθμὸν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων - σειρῶν ἢ - στηλῶν τῆς μήτρας.

Ὁ βαθμὸς τῆς μήτρας μεγάλην ἐπέχει σπουδαιότητα εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμόν, πρὸς καθορισμὸν τῆς ὑπάρξεως λύσεων συστημάτων ταυτοχρόνων γραμμικῶν ἐξισώσεων, καὶ εἰς τινας ἀκόμη ἀπόψεις τῆς ἀλγέβρας μητρῶν. Δοθείσης μήτρας A, συχνάκις ἐπιθυμοῦμεν νὰ γνωρίζωμεν τὸν βαθμόν της. Δυσχερὲς ἴσως θὰ ἐφαίνετο τὸ ἔργον τοῦ προσδιορισμοῦ τοῦ μεγίστου ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων, ἃς εἴπωμεν, διανυσμάτων - σειρῶν μιᾶς μήτρας. Εὐτυχῶς δύναται κατὰ πολὺ νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ ἔργον τοῦτο, ἂν γίνουν στοιχειώδεις μετασχηματισμοὶ σειρῶν ὡς ἀκολούθως ὁρίζεται :

α — ἂν πολλαπλασιασθῇ τυχοῦσα σειρὰ τῆς μήτρας μὲ ἓν μὴ μηδενικὸν μονομετρικὸν μέγεθος,

β — ἂν προστεθῇ ἓν μονομετρικὸν πολλαπλάσιον τυχούσης σειρᾶς εἰς ἑτέραν σειρὰν τῆς μήτρας,

γ — ἂν μεταβληθῇ ἡ θέσις τυχουσῶν δύο σειρῶν τῆς μήτρας.

Δυναμένου νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοὶ δὲν μεταβάλλουν τὸν βαθμὸν τῆς μήτρας, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν μήτραν A, μετασχηματίσωμεν αὐτὴν εἰς ἁπλουστέραν μήτραν, τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ οὕτω προσδιορισθῇ, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εὕρωμεν τὸν βαθμὸν τῆς A. Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστω A ἡ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν ταύτην εἰς τὴν ταυτοτικὴν μήτραν I διὰ τῆς ἀκολούθου σειρᾶς στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 2 ἐπὶ 1/2.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 3 ἐπὶ 1/2 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 2.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 2 ἐπὶ —1 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 1 ἐπὶ 1/2.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 3 ἐπὶ —1 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 1.

Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἡ ταυτοτικὴ μήτρα ὡς ἦτο ἐπιθυμητόν.

Δύναται ἐπίσης νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἡ A ἔχῃ βαθμὸν ρ, τότε δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν μήτραν

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ 0 & 1\ldots0 & 0\ldots0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0\ldots1 & 0\ldots0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \end{bmatrix},$$

ἡ ὁποία ἔχει τὰ πρῶτα ρ στοιχεῖα εἰς τὴν κυρίαν διαγώνιον ἴσα πρὸς τὴν μονάδα καὶ μηδενικὰ ὅλα τὰ ἄλλα αὐτῆς στοιχεῖα (δὲν χρειάζεται νὰ εἴπωμεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν βαθμὸν μιᾶς μήτρας, δυνάμεθα ἁπλῶς νὰ εὕρωμεν μήτραν ἁπλουστέρας μορφῆς, τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ οὕτω προσδιορισθῇ, καὶ δυνάμεθα συχνάκις νὰ σταματήσωμεν ὅταν λάβωμεν μήτραν τοῦ τύπου B ἀνωτέρω).

Ἡ ἀντίστροφος τετραγωνικῆς μήτρας

Ἔστωσαν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β, $\alpha \neq 0$, καὶ ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha\chi = \beta.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην ὡς πρὸς χ διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως διὰ α, λαμβάνοντες, βεβαίως, $\chi = \beta/\alpha$. Τυπικώτερον ἡ μέθοδος αὕτη δύναται νὰ περιγραφῇ ὡς ἀκολούθως. Ὁ ἀριθμὸς α ἔχει ἓν ἀντίστροφον στοιχεῖον δηλούμενον διὰ α^{-1} καὶ τὴν ἰδιότητα $\alpha^{-1}\alpha = 1$. Τὸ ἀντίστροφον εὐχερῶς ἐξευρίσκεται ἀφοῦ δι' ἕκαστον μὴ μηδενικὸν ἀριθμὸν α, $\alpha^{-1} = 1/\alpha$, τὸ ἀντίστροφον τοῦ α.

Ὅταν τὸ ἀντίστροφον ἔχῃ προσδιορισθῇ, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπ' αὐτό, λαμβάνοντες

$$\alpha^{-1}\alpha\chi = \alpha^{-1}\beta$$
$$1\chi = \alpha^{-1}\beta$$
$$\chi = \alpha^{-1}\beta = (1/\alpha)\beta = \beta/\alpha.$$

Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν ἐξίσωσιν μητρῶν τῆς μορφῆς

$$AX = B,$$

ἔνθα A τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως ν, X τάξεως $\nu \times 1$ καὶ B τάξεως $\nu \times 1$. Ἀναλογικῶς πρὸς τὰ προηγούμενα, θὰ ἀνεμένομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν μητρῶν διὰ προσδιορισμοῦ ἑνὸς στοιχείου ἢ μιᾶς μήτρας ἀντιστρόφου τῆς A, τῆς A^{-1} ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἰδιότητα $A^{-1}A = I$, ἀφοῦ ἡ ταυτοτικὴ μήτρα I παίζει τὸν ρόλον τῆς μονάδος διὰ τὰς μήτρας. Τότε

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B.$$

Δίδομεν τώρα κάποιαν ἔννοιαν εἰς τὴν ἀναλογίαν ταύτην εἰς τὰς μήτρας. Ἂν A εἶναι τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως ν καὶ ὑπάρχῃ ἑτέρα τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως ν τοιαύτη ὥστε

$$BA = I,$$

τότε καλοῦμεν τὴν B ***ἀντίστροφον*** τῆς A, καὶ δηλοῦμεν αὐτὴν διὰ A^{-1}. Διὰ παράδειγμα, ἔστωσαν

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & -1/10 \\ -7/45 & 2/9 & 1/45 \\ 1/45 & 1/9 & 19/90 \end{bmatrix},$$

καὶ

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & -1/10 \\ -7/45 & 2/9 & 1/45 \\ 1/45 & 1/9 & 19/90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Ἰσχύει ἐπίσης διὰ πᾶσαν μήτραν ἔχουσαν ἀντίστροφον,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὴν θεώρησιν τῶν ἀναλογιῶν μὲ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, ἐνθυμούμεθα ὅτι πᾶς διάφορος τοῦ μηδενὸς ἀριθμὸς ἔχει ἓν καὶ μόνον ἓν ἀντίστροφον στοιχεῖον.᾿Εκ τούτου ἐγείρεται τὸ ἐρώτημα : ἂν ἡ A ἔχῃ ἀντίστροφον, εἶναι αὕτη ἡ μοναδική ; ἡ ἀπάντησις εἶναι καταφατική, διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ A ἔχει δύο ἀντιστρόφους A^{-1} καὶ B. Τότε $BA = I$ καὶ $AA^{-1} = I$· ἐπίσης

$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$$

ὑπάρχει ἑπομένως μόνον μία ἀντίστροφος μήτρα τῆς A.

Σημειώσατε ὅτι ἀντίστροφος ὁρίζεται μόνον διὰ τετραγωνικὰς μήτρας A, οὕτω μὴ τετραγωνικαὶ μῆτραι δὲν ἔχουν ἀντίστροφον. Ἴσως τώρα ἐγερθῇ τὸ ἐρώτημα : ἂν μία μήτρα εἶναι τετραγωνική, ἔχει ἀντίστροφον ; Ἡ ἀπάντησις εἶναι ὄχι κατ᾿ ἀνάγκην. Ἐπὶ παραδείγματι, ἔστωσαν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

καὶ δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι διὰ δύο *τυχούσας* διαφόρους τῆς μηδενικῆς μήτρας ἐχούσας τὴν ἰδιότητα $AB = 0$, οὔτε ἡ μία οὔτε ἡ ἄλλη δύναται νὰ ἔχῃ ἀντίστροφον. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι αἱ A καὶ B εἶναι δύο μὴ μηδενικαὶ μῆτραι τοιαῦται ὥστε $AB = 0$ καὶ ὅτι ἡ A ἔχει ἀντίστροφον. Τότε

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0,$$

ὅπερ ἀποτελεῖ ἀντίφασιν ἀφοῦ ἡ B ὑπετέθη ἀρχικῶς ὡς μὴ μηδενικὴ μήτρα. Ἀντίστοιχον ἐπιχείρημα δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ ν᾿ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ B δὲν ἔχει ἀντίστροφον.

Παρετηρήσαμεν προηγουμένως ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀντιστρόφου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ μηδενὸς ἀποτελεῖ ἁπλοῦν θέμα ἀφοῦ α^{-1} εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ α. Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς ἀντιστρόφου τετραγωνικῆς μήτρας (ἂν ὑπάρχῃ) εἶναι βεβαίως δυσχερέστερος, καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν αὐτὸν εἰσάγομεν τὸ κάτωθι θεώρημα.

Θεώρημα. Ἔστω A τετραγωνικὴ μήτρα τάξεως ν· διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $(A \mid I)$ ἐννοοῦμεν τὴν $\nu \times 2\nu$ μήτραν, τῆς ὁποίας αἱ πρῶται ν σειραὶ καὶ πρῶται ν στῆλαι ἀποτελοῦνται ἐκ τῆς μήτρας A καὶ τῆς ὁποίας αἱ ἀπομένουσαι σειραὶ καὶ στῆλαι σχηματίζουν τὴν ταυτοτικὴν μήτραν τάξεως ν. Τότε ἡ μήτρα A ἔχει ἀντίστροφον ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἡ μήτρα

$$(A \mid I)$$

δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς τὴν μήτραν

$$(I \mid A^{-1})$$

διὰ στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν σειρῶν.

Διὰ παράδειγμα, ἂς λάβωμεν τὴν μήτραν A τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου καὶ ἂς προσκολλήσωμεν ταύτην εἰς τὴν ταυτοτικὴν μήτραν, λαμβάνοντες

$$(A \mid I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ὁ σκοπός μας εἶναι νὰ προβῶμεν εἰς στοιχειώδεις πράξεις ἐπὶ τῶν σειρῶν τῆς μήτρας ταύτης οὕτως ὥστε νὰ καταλήξωμεν μὲ ταυτοτικὴν μήτραν εἰς τὰς πρώτας τρεῖς στήλας. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα λοιπὸν λέγει ὅτι ἡ ὑπομήτρα ἡ καταλαμβάνουσα τὰς τελευταίας τρεῖς στήλας θὰ εἶναι ἡ A^{-1}. Διὰ νὰ ἴδωμεν αὐτό, ἂς προβῶμεν ἐπὶ τῆς μήτρας $(A \mid I)$ εἰς τοὺς αὐτοὺς μετασχηματισμοὺς σειρῶν εἰς τοὺς ὁποίους προέβημεν ἐνωρίτερον διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὴν μήτραν A εἰς τὴν ταυτοτικὴν μήτραν. Ἀρχίζομεν πολλαπλασιάζοντες τὴν σειρὰν 3 ἐπὶ 1/2 καὶ προσθέτοντες τὴν σειρὰν 3 εἰς τὴν σειρὰν 2, καὶ αἱ ἄλλαι πράξεις φαίνονται κατωτέρω.

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 2 ἐπὶ 1/2.
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 3 ἐπὶ 1/2 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 2.
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 2 ἐπὶ —1 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 1.
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 1 ἐπὶ 1/2.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν σειρὰν 3 μὲ —1 καὶ προσθέτομεν εἰς τὴν σειρὰν 1.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I \mid A^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἡ μήτρα εἰς τὰς τελευταίας τρεῖς στήλας εἶναι ἡ A^{-1}, ἀφοῦ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -5/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσατε ὅτι τὸ θεώρημα περιέχει ἀναγκαίαν καὶ ἐπαρκῆ συνθήκην («ἐὰν καὶ μόνον ἐάν»). Ἂν ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην εἰς τετραγωνικὴν μήτραν πρέπει ἢ νὰ λάβωμεν τὴν ἀντίστροφον ἢ ἔνδειξιν ὅτι ἡ μήτρα δὲν ἔχει ἀντίστροφον. Ἂν συμβαίνῃ τὸ δεύτερον, τότε κάποια ἀλληλουχία πράξεων ἐπὶ τῶν σειρῶν θὰ δώσῃ σειρὰν εἰς τὴν ἐκ τῆς (A | I) μετασχηματισθεῖσαν μήτραν, τὰ τρία πρῶτα στοιχεῖα τῆς ὁποίας θὰ εἶναι μηδέν. Ὅταν τοῦτο συμβῇ, δὲν δυνάμεθα ποτὲ νὰ λάβωμεν ταυτοτικὴν μήτραν δεούσης τάξεως εἰς τὴν ἀριστερὰν θέσιν τῆς ἐπηυξημένης μήτρας καὶ ἡ ἀρχικὴ μήτρα δὲν ἔχει ἀντίστροφον.

Χρήσεις τῆς ἀντιστρόφου μήτρας

Μία σπουδαία χρῆσις τῆς ἀντιστρόφου μήτρας ἐδείχθη εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον — ἡ λύσις συστημάτων ἐξισώσεων. Παραδείγματος χάριν, ἂς θεωρήσωμεν σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων,

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 &= 3 \\ \chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 &= 4 \\ 2\chi_1 + 2\chi_2 + 4\chi_3 &= 5, \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν μητρῶν

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι ἂν ἡ A ἔχῃ ἀντίστροφον, τότε

$$X = A^{-1} B.$$

Τώρα διὰ τὴν A τοῦ ἀνωτέρω συστήματος ἔχομεν

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

οὕτω

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = A^{-1} B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Χρήσιμον ἰδιότητα τῆς ἀντιστρόφου μήτρας ἀποτελεῖ ἡ ἱκανότης αὐτῆς νὰ λύῃ διάφορα συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων ἔχοντα τὴν αὐτὴν μήτραν συντελεστῶν. Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἐξισώσεων τὸ διάνυσμα B ἦτο (3, 4, 5)'· δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν τὸ διάνυσμα τοῦτο καὶ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀντίστροφον μήτραν πρὸς λύσιν τοῦ ἀπορρέοντος νέου συστήματος. Π. χ., ἂν τὸ σύστημα γίνῃ

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 &= 6 \\ \chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 &= -1 \\ 2\chi_1 + 2\chi_2 + 4\chi_3 &= 7 \end{aligned}$$

τότε

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ἐκ τούτου λαμβάνομεν $\chi_1 = 31/2$, $\chi_2 = -7$, $\chi_3 = -5/2$.

Μία ἐφαρμογὴ τῆς ἀντιστρόφου μήτρας

Τὸ βασικὸν ὑπόδειγμα εἰσροῶν - ἐκροῶν (στατικὸν) ἀναπτυχθὲν ὑπὸ τοῦ Leontieff καὶ τῶν συνεργατῶν αὐτοῦ καὶ ἐπεξεργασθὲν ὑπὸ τῶν Chenery καὶ Clark ἀναφέρεται εἰς τὴν παραγωγὴν ἐντὸς ἁπλοποιημένης οἰκονομίας λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν κάτωθι ὑποθέσεων.

1. Σταθερὰ ἀπόδοσις κλίμακος.
2. Ὑπάρχουν ν παραγωγικοὶ κλάδοι, καὶ εἶναι ἀδύνατος πᾶσα ὑποκατάστασις μεταξὺ εἰσροῶν εἰς τὴν παραγωγὴν παντὸς ἀγαθοῦ ἢ ὑπηρεσίας — δηλ. χρησιμοποιεῖται μία καὶ μόνον μία μέθοδος πρὸς παραγωγὴν ἑκάστου ἀγαθοῦ καὶ ὑπηρεσίας.
3. Αἱ ροαὶ ἐξετάζονται μόνον βραχυχρονίως—τὰ προβλήματα τοῦ κεφαλαίου καὶ τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος ἀγνοοῦνται.

Ἔστω χ_ι = ποσότης προϊόντος τοῦ ι κλάδου, διὰ $\iota = 1, \ldots, \nu$. Τὸ προϊὸν ἑκάστου κλάδου δύναται νὰ κατευθυνθῇ πρὸς ἄλλους κλάδους (περίπτωσις καθ' ἣν τὸ προϊὸν κατατάσσεται εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν διαμέσων ἀγαθῶν) ἢ πρὸς τὸν καταναλωτήν. Ἔστωσαν

(3) ψ_ι = ἐκροὴ τοῦ ι κλάδου πρὸς τὴν κατανάλωσιν,

(4) $\chi_{\iota j}$ = ποσότης ἐκροῆς τοῦ ι κλάδου πρὸς τὸν j κλάδον.

Τότε δι' ἕκαστον κλάδον ι ἔχομεν

$$\chi_\iota = \psi_\iota + \sum_{j=1}^{\nu} {}_{\iota j} \qquad (\iota = 1, \ldots, \nu). \tag{5}$$

Πλέον τούτου, λαμβάνονται ὡς γνωσταὶ αἱ τεχνολογικαὶ συνθῆκαι παραγωγῆς,

$$\chi_{\iota j} = \alpha_{\iota j}\, \chi_j\,, \tag{6}$$

ἔνθα $\alpha_{\iota j}$ τὸ ποσὸν ἐκροῆς τοῦ κλάδου ι τὸ χρησιμοποιούμενον πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος ὑπὸ τοῦ κλάδου j. Τὰ $\alpha_{\iota j}$ καλοῦνται οἱ «τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ παραγωγῆς» καὶ ἡ μήτρα $A = (\alpha_{ij})$ καλεῖται ἡ ***τεχνολογικὴ μήτρα***. Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς (6) εἰς τὴν (5) λαμβάνομεν δι' ἕκαστον κλάδον ι,

$$(7) \qquad \chi_\iota = \psi_\iota + \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\iota j}\chi_j ,$$

καὶ δι' ἅπαντας τοὺς κλάδους

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \alpha_{1\nu} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \end{vmatrix} .$$

Ἡ (8) γράφεται ὑπὸ μορφὴν μητρῶν,

$$X = \Psi + AX$$

Ἐπίσης

$$X - AX = \Psi,$$

$$(I - A)\,X = \Psi.$$

Ἂν δοθῇ ἓν διάνυσμα τελικῆς ζητήσεως Ψ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ διάνυσμα παραγωγῆς X τὸ ὁποῖον θὰ ἱκανοποιοῦσε τὴν ζήτησιν Ψ διὰ κατανάλωσιν ὡς καὶ διὰ διάμεσα ἀγαθά, τότε θὰ πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀντίστροφον τῆς μήτρας $(I - A)$, λαμβάνοντες

$$X = (I - A)^{-1}\,\Psi,$$

καὶ θὰ ἠδυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν αὐτὴν ἀντίστροφον πρὸς μελέτην τῶν συνθηκῶν παραγωγῆς διὰ ποικίλα διάφορα μεταξὺ των διανύσματα τελικῆς ζητήσεως Ψ.

(Συνεχίζεται)