ΜΙΑ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΙΣ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

ΥΠΟ ΤΟΥ κ. Δ. Σ. ΚΟΝΙΔΑΡΗ

Ἡ παροῦσα μικρὰ ἔκθεσις σκοπὸν ἔχει νὰ παρουσιάσῃ εἰς τοὺς ἕλληνας στατιστικοὺς μίαν σκέψιν σχετιζομένην μὲ τὸ δειγματοληπτικὸν πρόβλημα. Εἶναι γνωστόν, ἂν καὶ διὰ τὸ πρόβλημα ἔχουν γραφῆ ἀρκετοὶ τόμοι, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ἀκόμη ὅτι ἐτελείωσεν ἡ συζήτησίς του. Ἡ κατωτέρω λοιπὸν σπουδὴ δὲν προσφέρεται ὡς λύσις, ἀλλ' ἁπλῶς ὡς θέμα πρὸς συζήτησιν. Κατ' ἀρχὴν θὰ γεννηθῇ ἡ ἐντύπωσις ὅτι δὲν εἶναι εἰμὴ ἡ «sequential analysis», ἡ προσεκτικὴ ὅμως ἀνάγνωσίς του θὰ δείξῃ ὅτι πολὺ ἀπέχει ἐκείνου.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι προτιθέμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν μέσῳ μιᾶς δειγματοληψίας τὸ πλῆθος τῶν ἀτόμων ἑνὸς συνόλου (Ν) τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν μίαν ὡρισμένην ἰδιότητα (Τ). Μέσῳ μιᾶς ὡρισμένης μεθόδου ἐπιλογῆς τυχαίου δείγματος ἀποχωρίζομεν τὸ θεωρηθὲν ὡς ἀντιπροσωπευτικὸν δεῖγμα (ν) καὶ προχωροῦμεν διὰ τὴν ἐκτίμησιν ὡς ἀκολούθως:

Τοποθετοῦμεν τὰ ἄτομα τοῦ δείγματος κατὰ τὴν σειρὰν τῆς λήψεώς των.

Ἀποσπῶμεν τὰ α πρῶτα κατὰ σειρὰν ἄτομα τοῦ δείγματος.

Εὑρίσκομεν πόσα ἐκ τῶν α κέκτηνται τὴν ἰδιότητα (Τ) ἡ ὁποία μᾶς ἐνδιαφέρει.

Ἔστω ὅτι εὕρομεν y_α τοιαῦτα.

Λαμβάνομεν τὸ ἑπόμενον ἄτομον τοῦ δείγματος τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ κέκτηται τὴν ἰδιότητα, δυνατὸν ὅμως ὄχι. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ἐκ τῶν $\alpha + 1$ ἀτόμων

νομαστοῦ, τῆς διαφορᾶς διαιρουμένης διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ παρανομαστοῦ.

Τύπος 6'

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{du}{dx}$$

Ἡ παράγωγος τοῦ πηλίκου μιᾶς συναρτήσεως διὰ μιᾶς σταθερᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ πηλῖκον τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς σταθερᾶς.

Τύπος 7ος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Ἐὰν y εἶναι συνάρτησις τοῦ v καὶ v εἶναι συνάρτησις τοῦ x τότε ἡ παράγωγος τῆς y ὡς πρὸς x ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου τῆς y ὡς πρὸς v ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς v ὡς πρὸς x.

Τύπος 8ος

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως y ὡς πρὸς **x** ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον τῆς παραγώγου τῆς **x** ὡς πρὸς y.

(Συνεχίζεται)

$y_{\alpha+1}$ ἄτομα μὲ τὴν ἰδιότητα (T), ὅπου

$$y_{\alpha+1} = y_\alpha + 1 \qquad \text{ἢ} \qquad y_{\alpha+1} = y_\alpha$$

Θὰ γράφωμεν
$$y_{\alpha+1} \geqslant y_\alpha$$

Συνεχίζομεν αὐτὴν τὴν πρᾶξιν μέχρις ὅτου ἐξαντλήσωμεν ὅλα τὰ ν ἄτομα τοῦ δείγματος. Θὰ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ἐπαναλήψεων π.χ. τὴν

$$y_\alpha \ , \ y_{\alpha+1} \ , \ . \ . \ . \ , \ y_\nu \tag{1}$$

διὰ τὴν ὁποίαν θὰ ὑπάρχουν αἱ σχέσεις :

$$y_\alpha \leqslant y_{\alpha+1} \leqslant \ . \ . \ . \ \leqslant y_\nu \tag{2}$$

Ἂν ἦτο δυνατὸν τώρα ὁ ἀριθμὸς ν νὰ αὐξάνῃ συνεχῶς τείνων πρὸς τὸν N θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ μὴ φθίνουσα —μὲ πεπερασμένον τὸ πλῆθος ὅρους— ἀκολουθία (1) θὰ τείνῃ πρὸς ἕνα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος θὰ παριστᾷ τὸ σύνολον τῶν ἀτόμων τοῦ N τὰ ὁποῖα θὰ ἔχουν τὴν ἰδιότητα (T). Ἔχοντες λοιπὸν εἰς τὴν διάθεσίν μας τὸ δεῖγμα, δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν μίαν ἀκολουθίαν τοῦ τύπου (1) περιέχουσαν ν τὸ πολὺ ὅρους, ἐὰν εἶναι α=1, οἱ ὁποῖοι θὰ παρουσιάζουν κατὰ τὴν μέσην ὅδευσίν των τὴν «τάσιν» μὲ τὴν ὁποίαν τὸ μέγεθος τῆς ἰδιότητος χωρεῖ μέσῳ τῶν διαρκῶς αὐξανομένων δειγμάτων. Ἕκαστον νέον ἄτομον ἐκ τοῦ δείγματος προβάλλει ὡς «ἀπειροστὴ» πληροφορία διὰ τὸ σύνολον καὶ ἡ ἀλληλουχία τῶν πληροφοριῶν αὐτῶν θὰ δημιουργήσῃ τὴν συνάρτησιν ἥτις θὰ ὑφίσταται μεταξὺ μεγέθους δείγματος καὶ βαθμοῦ ἰδιότητος εἰς τὸ δεῖγμα.

Μετὰ τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως :

1. Χωρίζομεν εἰς $\nu - \alpha - \kappa + 2$ ὁμάδας διαδοχικῶν ἐπαναλήψεων τῆς ἰδιότητος (T) ἐκ τῆς εὑρεθείσης σειρᾶς (1). Δηλαδὴ σχηματίζομεν τὰς ὁμάδας :

$$\begin{array}{l} y_\alpha \ , \ y_{\alpha+1} \ , \ . \ . \ . \ , \ y_{\alpha+\kappa-1} \\ y_{\alpha+1} \ , \ y_{\alpha+2} \ , \ . \ . \ . \ , \ y_{\alpha+\kappa} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ y_{\nu-\kappa+1} \ , \ y_{\nu-\kappa+2} \ , \ . \ . \ . \ , \ y_\nu \end{array}$$

ἑκάστην περιέχουσαν κ διαδοχικὰς ἐπαναλήψεις. Ἀναφέρομεν ἐδῶ ὅτι διὰ τὸν ἀριθμὸν κ θὰ γίνῃ ἕνα σχόλιον.

2. Δι' ἑκάστην ὁμάδα προσδιορίζομεν μίαν τάσιν, πρὸς τὸ παρὸν εὐθύγραμμον, διὰ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{j=i}^{j=i+\kappa-1} (\alpha x_j + 6 - y_j)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial 6} \sum_{j=i}^{j=i+\kappa-1} (\alpha n_j + 6 - y_j)^2 = 0$$

3. Εὑρίσκομεν τὴν διανομὴν τῶν σημείων τομῆς τῶν τάσεων αὐτῶν μετὰ τῆς εὐθείας $x = N$ καὶ ὀνομάζομεν ω_i τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου τὸ ὁποῖον προέκυψεν ἀπὸ τὴν i τάξεως τάσιν.

4. Σταθμίζομεν ἑκάστην τεταγμένην ω_i δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ μ_i ὅπου

$$\mu_i = \varphi(i)$$

καὶ φ μία πρὸς προσδιορισμὸν συνάρτησις. Ἐν συνεχείᾳ δὲ θέτομεν

$$\mu_i \; \omega_i = \Omega_i \, .$$

5. Διαιροῦμεν τὸ διάστημα $\omega_{max} - \omega_{min}$ εἰς ἓν πλῆθος διαστημάτων ἄνω τῶν 10 καὶ κάτω τῶν 30 συναρτήσει τοῦ μεγέθους Κ.

6. Σχηματίζομεν τὴν κατανομὴν τῶν Ω_i καὶ εὑρίσκομεν τὴν μέσην τιμὴν της $\bar{\Omega}$, καὶ τὴν διασποράν της σ.

7. Λαμβάνομεν τὴν $\bar{\Omega}$ ὡς τὴν πιθανωτέραν τιμὴν τῆς ἰδιότητος (Τ) εἰς τὸ σύνολον Ν καὶ τὸν ἀριθμὸν

$$\frac{\sigma\,(\omega_{max} - \omega_{min})}{(\nu-\alpha)\,(\nu-\alpha-\kappa+2)}$$

ὡς μέτρον σημαντικότητος τῆς τάσεως.

«Σχόλια». Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ καλυτέρου Κ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Σχηματίζομεν ὁμάδας στοιχείων μὲ Κ τυχαῖον καὶ ὀνομάζομεν ϑ_κ τὸ μέτρον σημαντικότητος τῆς τάσεως, τὸ ἀντίστοιχον εἰς τάσεις ὁμάδων τῶν Κ στοιχείων. Θέτομεν δηλαδή:

$$\vartheta_\kappa = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})\,\sigma_\kappa}{(\nu-\alpha)\,(\nu-\alpha-\kappa+2)}$$

Ἐξετάζομεν κατόπιν τὰς ἀκολουθίας

$$\vartheta_\kappa\,,\ \vartheta_{\kappa+1}\,,\ \vartheta_{\kappa+2}\,,\ \vartheta_{\kappa+3}\,,\ \ldots \qquad (1)$$

$$\vartheta_\kappa\,,\ \vartheta_{\kappa-1}\,,\ \vartheta_{\kappa-2}\,,\ \vartheta_{\kappa-3}\,,\ \ldots \qquad (2)$$

Εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθοῦν αἱ ἑξῆς περιπτώσεις:

I. $\vartheta_\kappa \geqslant \vartheta_{\kappa+1} \geqslant \vartheta_{\kappa+2} \geqslant \vartheta_{\kappa+3} \geqslant \ldots \geqslant \vartheta_{\kappa+\lambda} \leqslant \vartheta_{\kappa+\lambda+1} \leqslant \ldots$

Ἐκλέγομεν τότε ὁμάδας στοιχείων μὲ $\kappa + \lambda$ ἄτομα.

II. $\vartheta_\kappa \leqslant \vartheta_{\kappa+1} \leqslant \vartheta_{\kappa+2} \leqslant \vartheta_{\kappa+3} \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_{\kappa+\lambda} \geqslant \vartheta_{\kappa+\lambda+1} \geqslant \ldots$

Ἀρχίζοντες ἀπὸ τοῦ $\kappa+\lambda$ τώρα ἐξετάζομεν τὴν ἀκολουθίαν ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν I.

III. $\vartheta_\kappa \leqslant \vartheta_{\kappa+1} \leqslant \vartheta_{\kappa+2} \leqslant \vartheta_{\kappa+3} \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_{\kappa+\lambda} \leqslant \vartheta_{\kappa+\lambda+1} \leqslant \ldots$

Λαμβάνομεν τότε τὴν (2) καὶ ἐξετάζομεν κατὰ πόσον ὑφίστανται αἱ περιπτώσεις (I) καὶ (II) εἰς αὐτήν. Ἄλλως ἐὰν παρουσιασθῇ περίπτωσις ἀνάλογος τῆς III δηλ. ἡ

$$\vartheta_\kappa \leqslant \vartheta_{\kappa-1} \leqslant \vartheta_{\kappa-2} \leqslant {}_{\kappa-3} \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_{\kappa-\lambda} \leqslant \ldots$$

τότε ἐκλέγομεν ὁμάδας τῶν Κ στοιχείων. Τὰ αὐτὰ ὡς ἄνω κριτήρια δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν, προφανῶς, καὶ διὰ τὴν ἐκλογὴν τῆς μορφῆς τῆς προσαρμοζομένης ὡς τάσεως καμπύλης.

Ὅσον ἀφορᾷ τώρα τὴν συνάρτησιν φ (i), παρατηροῦμεν ὅτι θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι μία μὴ ἀρνητικὴ καὶ αὔξουσα μὲ τὴν στενὴν σημασίαν τῆς λέξεως συνάρτησις δεδομένου ὅτι αἱ διαδοχικαὶ τάσεις, χρησιμοποιοῦσαι συνεχῶς πλέον ἀξιοπίστους πληροφορίας, θὰ πρέπῃ νὰ βαρυκεντρισθοῦν ἀναλόγως τῆς αὐξήσεως τῆς ἀξιοπιστίας.

Τὴν προσφορωτέραν ἀναλυτικὴν μορφὴν αὐτῆς θὰ προσδιωρίσουν τὰ πειράματα. Ἔχομεν τὴν ὑποψίαν ὅτι ἡ πλέον πρόσφορος θὰ εἶναι ἡ συνάρτησις $m\,e^{i}$ μὲ τὸ m πρὸς προσδιορισμόν.

Ἐπίσης πρέπει νὰ σχολιασθῇ ἐδῶ τὸ ἑπόμενον παράδοξον, τὸ ὁποῖον ἴσως κατ' ἀρχὴν παρουσιάζεται : πῶς εἶναι δυνατὸν τὸ ἑπόμενον ἄτομον, τοῦ α+ρ ἐπὶ παραδείγματι, νὰ προσαρτηθῇ εἰς τὸν προηγούμενον πληθυσμὸν διὰ τὴν ἐξαγωγὴν νέας πληροφορίας ἀφοῦ ἤδη ἐκεῖνος ἐχρησιμοποιήθη ; Τοῦτο ὅμως δυνάμεθα νὰ ἐξηγήσωμεν μὲ τὸ ἀκόλουθον σχῆμα :

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι διαθέτομεν ν — α + 1 πλήρη ἀντίγραφα τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν πληθυσμοῦ τῶν Ν ἀτόμων, διατεταγμένα κατὰ τὴν σειρὰν τῶν ἀτόμων τοῦ ὑπάρχοντος πληθυσμοῦ —φέροντα ἀρίθμησιν— καὶ τοποθετημένα εἰς ν—α+1 θαλάμους μεθ' ἑνὸς δειγματολήπτου.

Ἓν ἄτομον Α ἐκτὸς τῶν θαλάμων, «ἀνασύρῃ» ἀριθμοὺς ἐκ μιᾶς κληρωτίδος περιεχούσης τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι καὶ τοῦ Ν καὶ ἀπαγγέλλει τούτους εἰς ἐπήκοον ὅλων. Ἕκαστος τῶν δειγματοληπτῶν ἀνασύρει ἐκ τοῦ πρὸ αὐτοῦ συνόλου τὸ ἄτομον τὸ φέρον ἀρίθμησιν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸν ἀπαγγελθέντα ἀριθμόν.

Μόλις ὁ Α ἀπαγγείλῃ τὸν ἀριθμὸν α τάξεως, ὁ δειγματολήπτης τοῦ θαλάμου 1 σταματᾷ τὸ «τράβηγμα» καὶ καταμετρεῖ πόσα ἄτομα ἐκ τῶν ἐξαχθέντων ἔχουν τὴν ἰδιότητα ἡ ὁποία μᾶς ἐνδιαφέρει. Ὁμοίως μόλις ὁ Α ἀπαγγείλῃ τὸν ἀριθμὸν α+1 τάξεως ὁ δειγματολήπτης τοῦ δευτέρου θαλάμου σταματᾷ τὸ τράβηγμα καὶ ἐπαναλαμβάνει τὴν προηγουμένην ἐργασίαν, ὁμοίως δὲ μέχρι καὶ τοῦ ν—α+1 δειγματολήπτου. Οἱ δειγματολῆπται αὐτοί, ἐρωτώμενοι ὁ εἷς μετὰ τὸν ἄλλον θὰ δώσουν ἐν γένει ἀπαντήσεις διαφόρους ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἔκτασιν τῆς ἰδιότητος, ἀπὸ ἀπόψεως ποσοστοῦ, εἰς τὰ ληφθέντα ὑπ' αὐτῶν δείγματα. Οὐδεὶς ὅμως ἐξ αὐτῶν θὰ ἔχει πλησιάσει —πιθανώτατα— τὴν πραγματικότητα. Δεδομένου ὅμως ὅτι —κατὰ τὴν κοινὴν λογικὴν τουλάχιστον— ὅσον πλησιάζομεν πρὸς τοὺς θαλάμους τοὺς ἐγγὺς τοῦ ν—α+1 αἱ πληροφορίαι παρουσιάζουν μίαν αἰώρησιν ἀπὸ τῆς πραγματικότητος, συνεχῶς ἐλαττουμένην, εἴμεθα κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον βέβαιοι ὅτι, ἐὰν κάμωμεν μίαν προεκβολὴν τῆς τάσεως αὐτῶν τῶν πληροφοριῶν, θὰ ἐπιτύχωμεν τὴν πραγματικότητα μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν.

Ὥστε τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ἐξηγεῖ καὶ δικαιολογεῖ τὸν ἀκόλουθον ἰσχυρισμόν:

«Διὰ νὰ ἔχω πληροφορίας σχετικὰς μὲ τὴν ἔκτασιν μιᾶς ἰδιότητος (Τ) εἰς ἕνα πληθυσμὸν Ν ἀτόμων ἐκτελῶ τὴν ἀκόλουθον σειρὰν ἐργασιῶν, δεχόμενος τὸ ἀξίωμα :

Τὸ κατὰ μονάδα μεγαλύτερον δεῖγμα α+1 εἶναι πληροφοριακῶς ἰσχυρότερον τοῦ α.

Ἐργασία 1. Ἐπισυνάπτω εἰς τὸν πληθυσμὸν μίαν ἀρίθμησιν, (π.χ. ἐὰν πρόκειται περὶ ἀπογραφικῶν δελτίων, ἀριθμῶ αὐτὰ κατὰ τὴν σειρὰν εἰς τὴν ὁποίαν εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς εὑρέθησαν).

Ἐργασία 2. Ἐκ μιᾶς κληρωτίδος περιεχούσης ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 1 ἕως τοῦ