ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

Τοῦ κ. W. ALLEN SPIVEY
Καθηγητοῦ Στατιστικῆς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Μίτσιγκαν

Κατὰ μετάφρασιν κ. ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
᾿Αποφοίτου τῆς Α.Β.Σ.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 4)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 3ον

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

Γραμμικὸς Προγραμματισμὸς εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον

Δυνάμενοι σαφῶς νὰ παρουσιάσωμεν πολλὰς τῶν βασικῶν ἐννοιῶν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, θὰ ἐξετάσωμεν κατ' ἀρχὰς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἰς τὸν χῶρον τῶν δύο διαστάσεων πρὸ τῆς γενικῆς αὐτοῦ ἐξετάσεως γεωμετρικῶς καὶ ἀλγεβρικῶς. Θὰ λάβωμεν ἅπαντας τοὺς ὑπὸ ἐξέτασιν χώρους Εὐκλειδίους - δηλαδὴ θὰ θεωρήσωμεν τοὺς ἄξονας καθέτους καὶ ἕκαστον ἄξονα ἔχοντα τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους.

῎Ας ἐξετάσωμεν λοιπὸν τὸ κάτωθι πρόβλημα : νὰ εὑρεθοῦν χ καὶ ψ τοιαῦτα ὥστε νὰ καθιστοῦν τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως τῆς ὁποίας κανὼν εἶναι

$$\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi$$

ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέραν, ἔνθα χ καὶ ψ δὲν εἶναι τυχόντα ἀλλ' ὑπακούουν εἰς τοὺς κάτωθι περιορισμούς :

(1) $5\chi + 6\psi \leqq 30$
(2) $3\chi + 2\psi \leqq 12$
(3) $\chi \geqq 0$
(4) $\psi \geqq 0.$

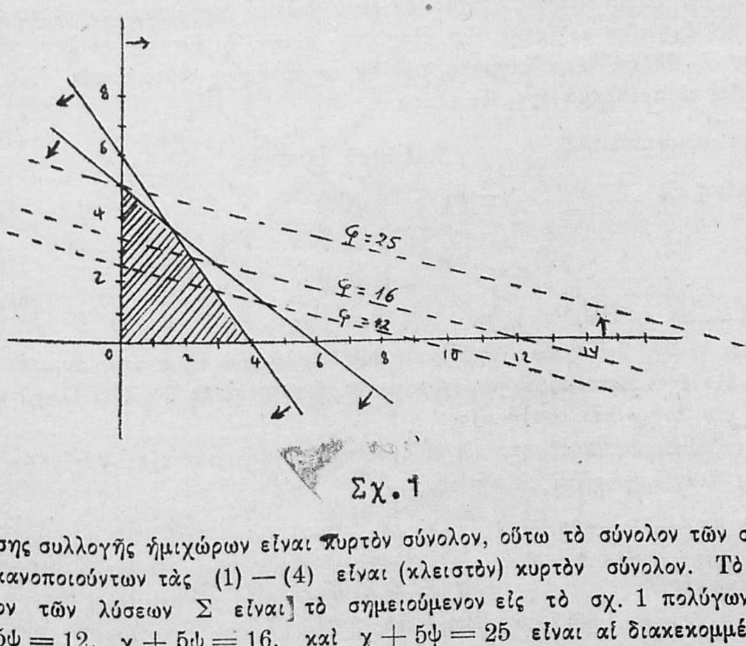
῎Ας ἐπιχειρήσωμεν ἐκλέγοντες διαφόρους τιμὰς διὰ χ καὶ ψ καὶ παρατηροῦντες πόσον μεγάλην δύνανται αὗται νὰ καταστήσουν τὴν τιμὴν $\varphi(\chi,\psi)=\chi+5\psi$ (1). ᾿Εκλέγομεν πρῶτον $\chi = 2$ καὶ $\psi = 2$. Δι' ἀντικαταστάσεως ἑκάστης τούτων εἰς τὰς (1) — (4) βλέπομεν ὅτι ἕκαστος περιορισμὸς ἱκανοποιεῖται (π.χ. ἀντικατάστασις εἰς τὴν (1) δίδει $5(2) + 6(2) = 22 \leqq 30$).Κατόπιν ὑπολογίζομεν $\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi = 2 + 5(2) = 12$. ῎Αν ἐκλέξωμεν ἕτερον ζεῦγος τιμῶν, ἄς εἴπωμεν

1) Ἡ ἐξίσωσις $\varphi(\chi,\psi) = \chi + 5\psi$ ὁρίζει ὁμάδα εὐθειῶν εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, ἕκαστον μέλος τῆς ὁποίας κτᾶται ἂν θέσωμεν $\varphi(\chi,\psi)$ ἴσον πρὸς κάποιον πραγματικὸν ἀριθμόν. Π.χ., $\chi + 5\psi = -10$, $\chi + 5\psi = 2$, $\chi + 5\psi = 47$: τρεῖς ἐξισώσεις ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ὁποίων δίδει παραλλήλους εὐθείας ἀνηκούσας εἰς τὴν ὁμάδα.

$\chi = 1$ καὶ $\psi = 3$ (οἱ περιορισμοὶ (3) καὶ (4) ἀπαγορεύουν τὴν ἐκλογὴν ἀρνητικῶν τιμῶν διὰ τὰ χ καὶ ψ), τότε δι' ἀντικαταστάσεως τούτων εἰς τὰς (1) — (4) εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι ἑκάστη αὐτῶν ἱκανοποιεῖται. Διὰ τὸ ζεῦγος τοῦτο τιμῶν $\varphi(\chi,\psi) = 1 + 5\,(3) = 16$· τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (1,3) δίδει μεγαλυτέραν τιμὴν διὰ $\varphi(\chi,\psi)$ ἢ τὸ (2,2). Ἂς ἐκλέξωμεν ἕτερον ἓν ζεῦγος τιμῶν, $\chi = 2$ καὶ $\psi = 4$. Ἀντικατάστασις εἰς τὴν (1) δεικνύει ὅτι ὁ περιορισμὸς δὲν ἱκανοποιεῖται, οὕτω δὲν εἶναι ἐπιτρεπτὴ ἡ ἐκλογὴ τοῦ διετεταγμένου ζεύγους (2,4). Ἂς λάβωμεν $\chi = 0$ καὶ $\psi = 5$. Οἱ περιορισμοὶ ἱκανοποιοῦνται καὶ ἔχομεν $\varphi(\chi,\psi) = 0 + 5\,(5) = 25$, τὴν μεγίστην ἕως τώρα τιμὴν τῆς συναρτήσεως.

Ἐγείρεται τώρα τὸ ἐρώτημα ἕως πότε θὰ ἐξακολουθῇ ἡ μέθοδος αὕτη. Θεωρητικῶς ὑπάρχουν ἄπειρα διατεταγμένα ζεύγη ἱκανοποιοῦντα τοὺς περιορισμούς, οὕτω χρειαζόμεθα ἄλλας μεθόδους πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἀντὶ τῆς μεθόδου ταύτης. Εὐτυχῶς ὑπάρχουν θεωρήματα τινὰ ἁπλοποιοῦντα μεγάλως τὴν μέθοδον λύσεως προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, καὶ κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῆς ὑπ' αὐτὰ γεωμετρίας θὰ χρησιμοποιήσωμεν πολλὰς τῶν παρουσιασθεισῶν εἰς τὸ κεφάλαιον 1 γεωμετρικῶν ἐννοιῶν.

Ἂς ἐξετάσωμεν τὴν γεωμετρίαν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος· ἑκάστη περιοριστικὴ ἀνισότης (1) — (4) ὁρίζει ἡμιχῶρον καὶ τὸ σημειοσύνολον (χ,ψ) τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ ταυτοχρόνως τὰς ἀνισότητας εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἀντιστοίχων ἡμιχώρων. Ἤδη γνωρίζομεν ὅτι ὁ ἡμιχῶρος εἶναι κυρτὸν σύνολον, καὶ ὅτι ἡ τομὴ



Σχ. 1

τυχούσης συλλογῆς ἡμιχώρων εἶναι κυρτὸν σύνολον, οὕτω τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ἱκανοποιούντων τὰς (1) — (4) εἶναι (κλειστὸν) κυρτὸν σύνολον. Τὸ κυρτὸν σύνολον τῶν λύσεων Σ εἶναι τὸ σημειούμενον εἰς τὸ σχ. 1 πολύγωνον. Αἱ $\chi + 5\psi = 12$, $\chi + 5\psi = 16$, καὶ $\chi + 5\psi = 25$ εἶναι αἱ διακεκομμέναι εὐθεῖαι, ἔνθα 12, 16, καὶ 25 εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως διὰ τὰ διατεταγμένα ζεύγη (2,2), (1,3), (0,5), ἀντιστοίχως. Γεωμετρικῶς, ἡ μεγιστοποίησις τῆς

$\varphi(\chi,\psi)=\chi+5\psi$ ὡς ὑπόκειται εἰς τοὺς περιορισμοὺς (1)—(4) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μετακίνησις τῆς ὑπὸ τῆς $\varphi(\chi,\psi)=\chi+5\psi$ ὁριζομένης εὐθείας κατὰ πλάτος τοῦ κυρτοῦ συνόλου Σ ἕως ὅτου φθάσῃ αὕτη εἰς σημεῖον τοῦ Σ κείμενον ἐπὶ τῆς πλέον ἀπομεμακρυσμένης τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος εὐθείας. Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τούτου θὰ δώσουν τότε μεγίστην τιμὴν διὰ $\varphi(\chi,\psi)$. Εἶναι φανερὸν ὅτι τοιοῦτον σημεῖον εἶναι τὸ (0,5) — ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ. Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως δύναται νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα τοῦ 25 ἂν ἡ εὐθεῖα κινηθῇ πρὸς τὰ ἄνω, τοῦτο δὲ θὰ μᾶς ἔφερεν ἔξωθεν τοῦ συνόλου Σ. Ἄν, ἐξ ἄλλου, ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς συναρτήσεως ὡς ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς (1) — (4) θὰ ἐζητούσαμεν τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας $\varphi(\chi,\psi)=\chi+5\psi$ κείμενον σημεῖον ἐκεῖνο τοῦ Σ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται τὸ πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὸ σημεῖον εἶναι προφανῶς ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος (ἐπίσης ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ) καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς συναρτήσεως ὡς ὑπὸ τοὺς περιορισμοὺς εἶναι $\varphi(\chi,\psi)=0+5(0)=0$.

Τὸ κυρτὸν σύνολον Σ καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ***πραγματοποιησίμων λύσεων*** τοῦ δοθέντος προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ αἱ πραγματοποιήσιμοι λύσεις, αἱ μεγιστοποιοῦσαι ἢ ἐλαχιστοποιοῦσαι τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν καλοῦνται ***ἄρισται πραγματοποιήσιμοι λύσεις***.

Τὸ σχ. 1 ὑποδηλοῖ ὅτι μία γραμμικὴ συνάρτησις θὰ λάβῃ τὴν μεγίστην ἢ ἐλαχίστην τιμὴν εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον τοῦ κυρτοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων. Τοῦτο ὅμως δὲν ἰσχύει ἐν γένει διότι ἡ γραμμικὴ συνάρτησις δύναται νὰ μὴ ἔχῃ οὔτε μεγίστην οὔτε ἐλαχίστην τιμήν, ἢ δύναται νὰ ἔχῃ τὴν μίαν καὶ ὄχι τὴν ἄλλην. Παραδείγματα τινὰ θὰ καταστήσουν τοῦτο σαφές. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει ὡς ἑξῆς :

νὰ μεγιστοποιηθῇ $\qquad \varphi(\chi,\psi)=3\chi+2\psi$

ὑποκειμένη εἰς
$$\begin{aligned} -2\chi+3\psi &\leqq 9\\ -\chi+5\psi &\leqq 20\\ \chi &\geqq 0\\ \psi &\geqq 0\,. \end{aligned}$$

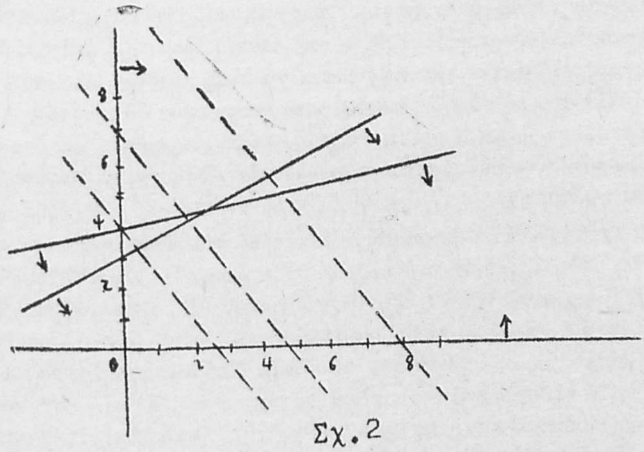
Ὡς τὸ σχ. 2 δεικνύει, τὸ κυρτὸν σύνολον λύσεων εἶναι ἀπεριόριστον καὶ ἡ $\varphi(\chi,\psi)$ δὲν ἔχει πεπερασμένην μεγίστην, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἔχει ἐλαχίστην τιμὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος.

Διαζευκτικῶς, πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις ἔχει μεγίστην τιμὴν ἀλλ' ὄχι ἐλαχίστην εἶναι τὸ κάτωθι :

νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $\qquad \varphi(\chi,\psi)=2\chi+9\psi$

ὑποκειμένη εἰς
$$\begin{aligned} -\chi+\psi &\leqq 5\\ 2\chi+3\psi &\leqq 24\\ \chi &> 0\\ \psi &> 0\,. \end{aligned}$$

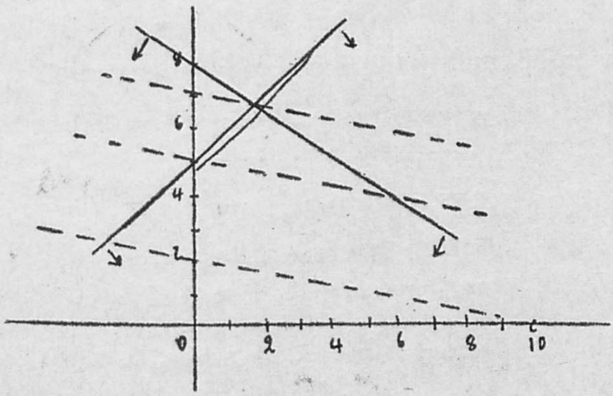
Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σύνολον λύσεων Σ εἶναι περιωρισμένον ἀλλ' ὄχι κλειστόν· ἡ συνάρτησις λαμβάνει τιμὰς τεινούσας πρὸς τὸ μηδὲν καθὼς τὰ χ καὶ τὰ ψ τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει ἐλαχίστη τιμὴ διὰ τὴν συνάρτησιν διὰ $(\chi,\psi) \in \Sigma$. Ὑπάρχει, ὅμως, μεγίστη τιμὴ διὰ τὴν συνάρτησιν ὑπὲρ τὸ σύνο-



Σχ. 2

λον. Ἂν τὸ Σ ἦτο κλειστὸν (δηλ. ἂν οἱ περιορισμοὶ ἦσαν $\chi \geqq 0$, $\psi \geqq 0$ ἀντὶ τῶν ἀντιστοίχων αὐστηρῶν ἀνισοτήτων) τότε ἡ συνάρτησις θὰ εἶχεν ἐλαχίστην τιμὴν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος.

Τὰ παραδείγματα ταῦτα ὑποδηλοῦν ὅτι μία γραμμικὴ συνάρτησις θὰ ἔχῃ



Σχ. 3

μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν ὑπὲρ ἓν σύνολον λύσεων ἂν τὸ σύνολον εἶναι περιωρισμένον καὶ ταυτοχρόνως κλειστόν. Τῷ ὄντι τοῦτο ἀποτελεῖ εἰδικὴν περίπτωσιν γενικοῦ θεωρήματος ἐπὶ τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ὀφειλομένου εἰς τὸν Weierstrass : ἂν φ μία συνεχὴς συνάρτησις ὁριζομένη ἐπὶ κλειστοῦ καὶ περιὡρισμένου συνόλου, τότε ἡ φ λαμβάνει μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν τουλάχιστον ἅπαξ ὑπὲρ τὸ σύνολον. Τὸ ἀξιοσημείωτον τοῦτο θεώρημα, πρέπει νὰ σημειωθῇ, ἰσχύει διὰ πᾶσαν συνεχῆ συνάρτησιν, ὄχι μόνον διὰ γραμμικὴν τοιαύτην.

Χρήσιμον ἀποτελεῖ ἄσκησιν ἡ ἀπόδειξις διὰ παραδειγμάτων ὅτι ἂν τὸ Σ, τὸ σύνολον λύσεων, εἶναι ἀπεριόριστον, ἡ γραμμικὴ συνάρτησις δύναται ἀκόμη νὰ ἔχῃ τόσον πεπερασμένην μεγίστην ὅσον καὶ ἐλαχίστην τιμὴν ὑπὲρ τὸ σύνολον καὶ ὅτι μέγισται καὶ ἐλάχισται τιμαὶ δύνανται νὰ ὑπάρχουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σύνολον δὲν εἶναι κλειστόν. Ἀμφότεραι αἱ δυνατότητες αὗται ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς σχέσεως μεταξὺ τῆς κλίσεως τῶν ὑπὸ τῆς φ (χ,ψ) ὁριζομένων εὐθειῶν καὶ τῶν κλίσεων τῶν εὐθειῶν τῶν σχηματιζουσῶν τὰ σύνορα τῶν σχετικῶν ἡμιχώρων.

Τὸ θεώρημα Weierstrass δὲν ἀναφέρει ποῦ ἐπιτυγχάνεται ἡ μεγίστη ἢ ἐλαχίστη τιμὴ ὑπὲρ κλειστὸν καὶ περιωρισμένον σύνολον, οὔτε πόσας φορὰς λαμβάνει ἡ συνάρτησις μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν (αἱ τιμαὶ αὗται δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν ὑπὲρ ἓν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἢ εἰς τὸ σύνορον, καὶ δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν ὑπὲρ ἄπειρα σημεῖα τοῦ συνόλου). Κατὰ ἓν θεώρημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἂν ἡ συνάρτησις εἶναι γραμμικὴ καὶ ἂν οἱ περιορισμοὶ εἶναι (ἀσθενεῖς) γραμμικαὶ ἀνισότητες, τότε αἱ μεγίστη καὶ ἐλαχίστη τιμαὶ θὰ ἐπιτευχθοῦν εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον τοῦ περιωρισμένου κυρτοῦ συνόλου τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων. Τοῦτο ἁπλοποιεῖ μεγάλως τὸ πρόβλημα τῆς λύσεως προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διότι τώρα ὑπάρχει ἡ μόνη ἀνάγκη τῆς ἐξετάσεως τῶν ἄκρων σημείων πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀρίστων λύσεων, ὑπάρχει δὲ πεπερασμένος ἀριθμὸς τούτων ἀφοῦ ὑπάρχει πεπερασμένος ἀριθμὸς περιορισμῶν (ὁ ἀριθμὸς τῶν ἄκρων σημείων δύναται, παρὰ ταῦτα, νὰ εἶναι ἐντελῶς μέγας).

Τὸ γενικὸν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ

Τὸ πρόβλημα τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχει ὡς ἀκολούθως : νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ γραμμικὴ συνάρτησις

(5) $$\varphi = \gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2 + \ldots + \gamma_\nu \chi_\nu ,$$

ὑποκειμένη εἰς

(6) $$\begin{aligned} &\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu \leqq \beta_1 \\ &\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu \leqq \beta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu \leqq \beta_\mu \end{aligned}$$

(7) $$\chi_\iota = 0, \ (\iota = 1, \ldots, \nu),$$

ἔνθα τὰ $\alpha_{\iota j}$, β_ι καὶ γ_j εἶναι γνωσταὶ σταθεραί. Αὕτη εἶναι γενικωτέρα διατύπωσις ἀπ' ὅ,τι ἴσως φαίνεται, διότι ἂν μία (ἀσθενὴς) ἀνισότης δὲν ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὡς ἐκεῖναι τῆς (6), τότε ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς ἀνισότητος ἐπὶ — 1 θὰ τὴν μετατρέψῃ εἰς τὴν μορφὴν ταύτην. Ἡ διατύπωσις ἐπιτρέπει τὴν ὕπαρξιν ἰσότητος, οὕτως εἰς περιορισμὸς δύναται νὰ εἶναι ἰσότης, καὶ περιγράφει πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως, ἐπίσης, διότι ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς - φ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὴν μεγιστοποίησιν τῆς φ. Αἱ ἀνισότητες (6) καὶ (7) ὁρίζουν κλειστὸν σύνολον· ἂν ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι καὶ περιωρισμένον, τότε βάσει τοῦ θεωρήματος Weierstrass ἡ συνάρτησις λαμβάνει καὶ μεγίστην καὶ ἐλαχίστην τιμὴν ὑπὲρ τὸ σύνολον, καὶ θὰ ὑπάρχουν ἄρισται πραγματοποιήσιμοι λύσεις εἰς τὸ πρόβλημα. Ἐπὶ πλέον, ἀφοῦ τὸ πρόβλημα εἶναι γραμμικόν, γνωρίζομεν ὅτι αἱ ἄρισται πραγματοποιήσιμοι λύσεις θὰ εἶναι ἄκρα σημεῖα τοῦ κυρτοῦ συνόλου λύσεων.

Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ παρουσίασις τῆς γενικῆς διατυπώσεως εἶναι κάπως ἀντιπαθητική, δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν γεωμετρίαν τοῦ προηγηθέντος κεφαλαίου διὰ τὴν σαφεστέραν ἀντίληψιν τοῦ προβλήματος. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ ἁπλούστερον πρόβλημα, ἑκάστη ἀνισότης εἰς (6) καὶ (7) ὁρίζει κλειστὸν ἡμιχῶρον εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον. Τὸ ταυτόχρονον σύνολον λύσεων εἶναι κυρτὸν σύνολον εἰς τὸν ν χῶρον, καὶ ἡ εἰς ἑκάστην ἀνισότητα ἀντιστοιχοῦσα ἰσότης ὁρίζει ἓν ὑπερεπίπεδον εἰς τὸν ν-χῶρον. Τὸ ὑπερεπίπεδον εἶναι οὐσιωδῶς γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς εὐθείας γραμμῆς· ὑπερεπίπεδον εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ὡς εἶναι ἓν ἐπίπεδον εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον (ἡ ἔννοια τοῦ ὑπερεπιπέδου θὰ ἐξετασθῇ πληρέστερον κατωτέρω). Ἡ ἐξίσωσις $\varphi = \gamma_1 \chi_1 + \gamma_2 \chi_2 + \ldots + \gamma_\nu \chi_\nu$ ὁρίζει ὁμάδα ὑπερεπιπέδων εἰς τὸν ν-χῶρον, καὶ ἡ μεγιστοποίησις τῆς φ ὑποκειμένης εἰς (6) καὶ (7) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μετακίνησις τοῦ ὑπερεπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (5) κατὰ πλάτος τοῦ κυρτοῦ συνόλου Σ τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων μέχρις ὅτου ἐπιτευχθῇ τὸ πλέον ἀπομεμακρυσμένον τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος καὶ κείμενον ἐπὶ τοῦ ὑπερεπιπέδου σημεῖον τοῦ Σ Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ δώσῃ μεγίστην τιμὴν διὰ τὴν φ, καὶ τὸ περὶ τῶν ἄκρων σημείων θεώρημα μᾶς διαβεβαιοῖ ὅτι ἡ φ θὰ λάβῃ τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ ἂν τὸ Σ εἶναι περιωρισμένον. Παρόμοιαι παρατηρήσεις δύνανται νὰ γίνουν ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς φ.

Διαζευκτικαὶ διατυπώσεις τοῦ γενικοῦ προβλήματος ποιοῦν χρῆσιν τοῦ ἀθροιστικοῦ συμβόλου καὶ τῆς ἀλγέβρας μητρῶν. Δυνάμεθα νὰ καταγράψωμεν τὸ πρόβλημα εἰς τὴν συνοπτικὴν μορφήν,

νὰ μεγιστοποιηθῇ

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \chi_j ,$$

ὑποκειμένη εἰς

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\iota j} \chi_j \leqq \beta_\iota \qquad (\iota = 1, \ldots, \mu)$$

$$\chi_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \ldots, \nu),$$

καὶ ἂν γράψωμεν τὰ διανύσματα ὡς διανύσματα - στήλας καὶ δηλώσωμεν τὰ διανύσματα - σειρὰς ὡς ἀντίστροφα τῶν διανυσμάτων-στηλῶν, τότε τὸ πρόβλημα δύναται νὰ γραφῇ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον : νὰ εὑρεθῇ διάνυσμα X μεγιστοποιοῦν τὴν $\varphi = \Gamma' X$ ὑποκειμένην εἰς

$$AX \leqq B$$
$$X \geqq 0 ,$$

ὅπου διὰ $X \geqq 0$ ἐννοοῦμεν $\chi_\iota \geqq 0$ διὰ $\iota = 1, \ldots, \nu$, καὶ αἱ μῆτραι A καὶ B εἶναι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν διανυσμάτων στηλῶν τῶν σταθερῶν ὅρων τῆς (6), ἀντιστοίχως.

Συστήματα γραμμικῶν ἀνισοτήτων καὶ σχετικὰ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων

Τὰ θεωρήματα καὶ αἱ τεχνικαὶ λύσεως γενικῶν προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἐκφράζονται συνήθως μέσῳ σχετικοῦ συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων μᾶλλον ἢ μέσῳ ἀνισοτήτων. Ἑκάστη ἀνισότης εἰς (6) μετατρέπεται εἰς ἐξίσωσιν διὰ τῆς χρήσεως μιᾶς «χαλαρᾶς» μεταβλητῆς. Θεωρήσατε, π.χ., τὴν πρώτην ἀνισότητα τοῦ συστήματος (6),

$$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu \leqq \beta_1. \tag{8}$$

Αὕτη δηλοῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν β_1. Κατ᾽ ἄλλον τρόπον ἐκφράσεως, ἡ (8) δηλοῖ ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς $\chi_{\nu+1} \geqq 0$, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριστεροῦ σκέλους, μετατρέπει ταύτην εἰς ἐξίσωσιν,

$$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots \alpha_{1\nu}\chi_\nu + \chi_{\nu+1} = \beta_1.$$

Παρόμοιαι παρατηρήσεις ἰσχύουν διὰ τὰς ἄλλας τῆς (6) ἀνισότητας. Ἀφοῦ ὑπάρχουν μ ἀνισότητες εἰς (6), εἰσάγονται μ «χαλαραὶ» μεταβληταὶ (ἂν ὁ περιορισμὸς εἶναι ἰσότης οὐδεμία χαλαρὰ μεταβλητὴ εἰσάγεται), καὶ τὸ προκῦπτον γραμμικὸν σύστημα ἐξισώσεων εἶναι

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu + \chi_{\nu+1} & & & = \beta_1 \\
\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu & + \chi_{\nu+2} & & = \beta_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
\alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu & & + \chi_{\nu+\mu} & = \beta_\mu ,
\end{array} \tag{9}$$

$$\chi_\iota \geqq 0 \quad (\iota = 1, \ldots, \nu + \mu). \tag{10}$$

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἑκάστη ἐξίσωσις εἰς (9) περιέχει $\nu+\mu$ μεταβλητάς. Εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν αἱ μεταβληταὶ $\chi_{\nu+2}, \ldots, \chi_{\nu+\mu}$ ἔχουν μηδενικοὺς συντελεστάς, εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν αἱ μεταβληταὶ $\chi_{\nu+1}, \chi_{\nu+3}, \ldots, \chi_{\nu+\mu}$ ἔχουν μηδενικοὺς συντελεστάς, κ.ο.κ. οὕτως ἡ (9) δύναται νὰ ἐννοηθῇ ὡς σύστημα μ μὴ ὁμογενῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων μὲ $\nu+\mu$ ἀγνώστους. Τότε τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ τὸ περικλεῖον ἐξισώσεις ἀντιστοιχούσας εἰς (5) — (7) δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἀκολούθως :

νὰ μεγιστοποιηθῇ

$$\varphi = \gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2 + \ldots + \gamma_\nu\chi_\nu + 0\chi_{\nu+1} + \ldots + 0\chi_{\nu+\mu}, \tag{11}$$

ὑποκειμένη εἰς

$$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + \ldots + \alpha_{1\nu+\mu}\chi_{\nu+\mu} = \beta_1$$
$$\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \ldots + \alpha_{2\nu+\mu}\chi_{\nu+\mu} = \beta_2$$
(12) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{\mu 1}\chi_1 + \alpha_{\mu 2}\chi_2 + \ldots + \alpha_{\mu\nu+\mu}\chi_{\nu+\mu} = \beta_\mu$$

(13) $$\chi_\iota \geqq 0 \quad (\iota = 1, \ldots, \nu + \mu).$$

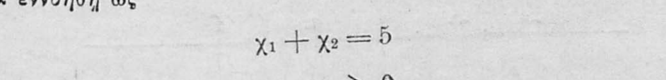
Σημειώσατε ὅτι παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι αἱ χαλαραὶ μεταβληταὶ δυνατὸν ν' ἀποτελοῦν σπουδαῖον τμῆμα τῆς τελικῆς λύσεως δὲν δύνανται διὰ τῆς (11) νὰ συνεισφέρουν εἰς τὴν φ.

Μολονότι ἴσως νομισθῇ ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι τὰ δύο προβλήματα εἶναι διαφορετικὰ κατὰ τὸ ὅτι ἡ (12) ἀναφέρεται εἰς τομὴν ὑπερεπιπέδων εἰς χῶρον $\nu+\mu$ διαστάσεων ἐνῷ τὸ σύστημα ἀνισοτήτων (6) καὶ (7) ἀναφέρεται εἰς τομὴν ἡμιχώρων εἰς χῶρον ν διαστάσεων, αἱ διατυπώσεις εἶναι ἀλγεβρικῶς ἰσοδύναμοι διότι μία πραγματοποιήσιμος λύσις εἰς τὸ ἓν πρόβλημα ἀποτελεῖ πραγματοποιήσιμον λύσιν καὶ εἰς τὸ ἕτερον. Διὰ νὰ κατανοηθῇ πλήρως ἡ ἰσοδυναμία αὕτη, θὰ ἐξετάσωμεν πρῶτον τὰς γεωμετρικὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας τὸ σύνολον λύσεων τῶν 12) καὶ (13) εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὑπὸ τῶν (6) καὶ (7) ὁριζόμενον κυρτὸν σύνολον καὶ θὰ προβῶμεν μετὰ ταῦτα εἰς τὴν ἐξέτασιν περαιτέρω γεωμετρίας σχέσιν ἐχούσης πρὸς τὰς ἀρίστας λύσεις εἰς τὰς δύο διατυπώσεις.

Ἂς ἀρχίσωμεν διὰ τῆς ἐξετάσεως τῆς ἀνισότητος

(14) $$\chi_1 \leqq 5\,,$$

ἥτις ὁρίζει σύνολον εἰς τὸν μονοδιάστατον χῶρον, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ κλειστὸν καὶ κυρτόν:

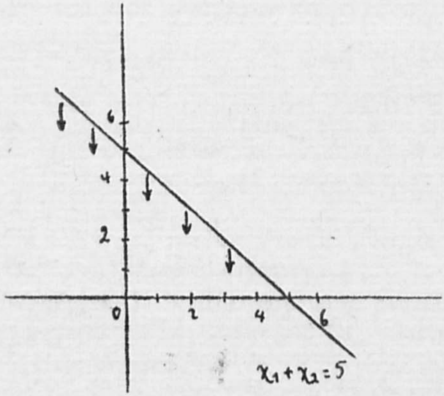


Ἡ ἀνισότης $\chi_1 \leqq 5$ δηλοῖ ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις χ_2, μὴ ἀρνητικός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν χ_1 ἰσοῦται πρὸς 5 (ἂν χ_1 εἶναι —12, π.χ., χ_2 θὰ ἦτο 17· ἀφοῦ χ_1 εἶναι μεταβλητή, χ_2 εἶναι μεταβλητή, ἐπίσης). Ἑπομένως ἡ ἀνισότης (14) δύναται νὰ ἐννοηθῇ ὡς

(15) $$\chi_1 + \chi_2 = 5$$

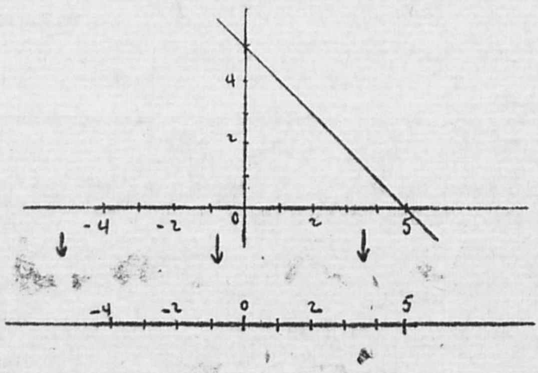
(16) $$\chi_1 \geqq 0\,.$$

Τὸ ἐρώτημα τώρα εἶναι, ὑπὸ ποίας συνθήκας αἱ (15) καὶ (16) ὁρίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον ὡς ἡ (14); Διαγραμματικῶς ἡ (15) δεικνύει ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (χ_1, χ_2) ἱκανοποιούντων τὴν (15) καὶ τὴν (16) εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀριστερὰ καὶ ἄνω τοῦ σημείου τομῆς μὲ τὸν ἄξονα τοῦ χ_1. Τὸ σύνολον τοῦτο, βεβαίως, δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ἀνισότητος $\chi_1 \leqq 5$. Αἱ (15) καὶ (16), ὅμως, θὰ ὁρίσουν τὸ αὐτὸ σύνολον ὡς ἡ (14) ἂν ἐννοηθοῦν ὡς ἀκολούθως. Ἂς θεωρήσωμεν ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ_1 μόνου εἰς τὰ ἱκανοποιοῦντα τὰς (15) καὶ (16) διατεταγμένα ζεύγη. Τὸ σύνολον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ «προβολὴ» ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ_1 τῶν τιμῶν τοῦ χ_1 εἰς τὰ διατεταγμένα ζεύγη (χ_1, χ_2) τὰ ἱκανοποιοῦντα τὰς (15) καὶ (16)· εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς μορφῆς $(\chi_1, 0)$. Ἐπει-



Σχ. 4

δὴ τὸ σύνολον τοῦτο τῶν σημείων εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον δὲν εἶναι, κατ' αὐστηρὰν θεώρησιν, τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς $\chi_1 \leqq 5$ εἰς τὸν μοναδιάστατον χῶρον σύνολον, σχετίζομεν περαιτέρω ἕκαστον σημεῖον εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον ἔχον συντεταγμένας $(\chi_1, 0)$, $\chi_1 \leqq 5$, μὲ ἓν σημεῖον εἰς τὸν μονοδιά-



Σχ. 5

στατον χῶρον ἔχον συντεταγμένην $\chi_1 \leqq 5$. Τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν τιμῶν χ_1 εἰς τὰ διατεταγμένα ζεύγη τὸ ἱκανοποιοῦν τὰς (15) καὶ (16), ὑπ' αὐτὴν τὴν ἔννοιαν, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς (14) ὁριζόμενον σύνολον. Διαγραμματικῶς παρουσιάζεται εἰς τὸ σχ. 5.

Δι' ἓν ἐπὶ πλέον παράδειγμα, θεωρήσατε τὰς ἀνισότητας

$$\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 \leqq \beta \tag{17}$$

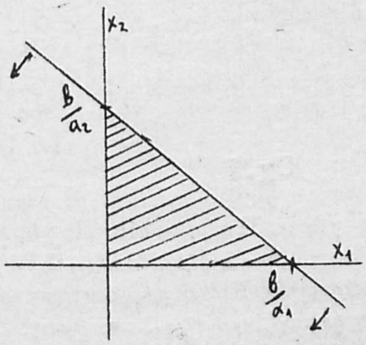
$$\chi_1 , \chi_2 \geqq 0 , \tag{18}$$

ὅπου θὰ λάβωμεν ἐπίσης ὅτι α_1 καὶ α_2 εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί. Τότε ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 = \beta$ εὐθεῖα θὰ ἔχῃ ἀρνητικὴν κλίσιν καὶ ἡ τομὴ τῶν ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων ὁριζομένων ἡμιχώρων εἶναι τὸ κυρτὸν σύνολον ὡς δεικνύεται κατωτέρω. Πάλιν, $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 \leqq \beta$ δηλοῖ ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις $\chi_3 \geqq 0$ τοιοῦτος ὥστε

$$\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \chi_3 = \beta \tag{19}$$

$$\chi_1, \chi_2 , \chi_3 \geqq 0 . \tag{20}$$

Τὸ διάγραμμα τῆς (19) εἶναι ἐπίπεδον εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον καὶ αἱ ἀνισότητες (20) περιορίζουν τὰς ἱκανοποιούσας τὴν (19) διατεταγμένας τριάδας



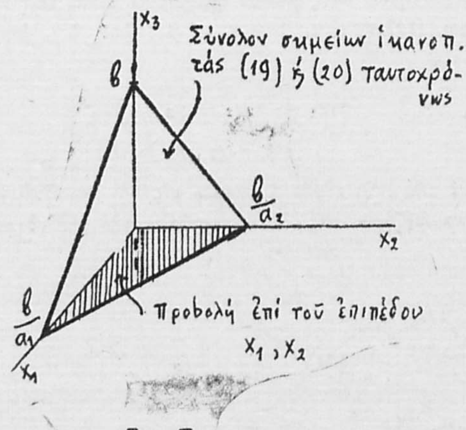
Σχ.6

εἰς τὸ πρῶτον «ὄγδοον». Τὰ διαγράμματα τῶν (19) καὶ (20) ἐμφανίζονται κατωτέρω. Βλέπομεν πάλιν ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων τριάδων (χ_1, χ_2, χ_3) τῶν ἱκανοποιουσῶν τὰς (19) καὶ (20) δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ σύνολον ὡς τὸ ὑπὸ τῶν (17) καὶ (18) ὁριζόμενον. Δύναται ὅμως ἡ προβολὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν χ_1 καὶ χ_2, ἢ αἱ διατεταγμέναι ἐκεῖναι τριάδες $(\chi_1, \chi_2, 0)$, ἔνθα (χ_1, χ_2, χ_3) ἱκανοποιοῦν τὰς (19) καὶ (20), νὰ συσχετισθῇ μὲ τὸ σύνολον εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα ἱκανοποιοῦν τὰς (17) καὶ (18) κατὰ τρόπον ἀνάλογον ἐκείνου εἰς τὸ προηγηθὲν παράδειγμα. Συσχετίζομεν ἁπλῶς τὰ σημεῖα $(\chi_1, \chi_2, 0)$ εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν χ_1, χ_2 εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον μὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα (χ_1, χ_2) εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην αἱ (19) καὶ (20) ὁρίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον ὡς αἱ (17) καὶ (18). Καθίσταται φανερὸν ἐκ τῶν σχημάτων 6 καὶ 7 ὅτι ἡ ἀντιστοιχία

$$(\chi_1 , \chi_2 , 0) \rightarrow (\chi_1 , \chi_2)$$

θὰ φέρῃ εἰς συσχέτισιν σημεῖα εἰς τὸ σύνολον λύσεων τοῦ σχ. 7 μὲ σημεῖα εἰς τὸ σύνολον λύσεως τοῦ σχ. 6.

Παρομοία προβολὴ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς συσχέτισιν τοῦ συνόλου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῆς τομῆς τῶν ὑπερεπιπέδων εἰς τὴν γενικὴν διατύπωσιν (12) καὶ (13) ἀνωτέρω μὲ τὸ σύνολον τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῆς τομῆς τῶν ἡμιχώρων εἰς (6) καὶ (7). Ἑκάστη ἐξίσωσις εἰς τὴν (12), παρετηρήσαμεν, ὁρίζει



Σχ. 7

ὑπερεπίπεδον εἰς $\nu + \mu$ χῶρον. Ὑπερεπίπεδον εἰς χῶρον ρ διαστάσεων ὁρίζεται ὡς γραμμικὴ πολλαπλότης $\rho - 1$ διαστάσεων, ἔνθα γραμμικὴ πολλαπλότης εἶναι ὁ χῶρος ὁ ἔχων ἁπάσας τὰς ἰδιότητας διανυσματικοῦ χώρου ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἡ ἀρχὴ τοῦ συστήματος συντεταγμένων τοῦ διανυσματικοῦ χώρου δὲν ἀπαιτεῖται νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν γραμμικὴν πολλαπλότητα. Διὰ τοὺς σκοπούς μας χρειαζόμεθα μόνον τὴν γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν ὅτι γραμμικὴ πολλαπλότης εἶναι διανυσματικὸς χῶρος, ὁ ὁποῖος ἔχει μετατοπισθῇ διὰ τῆς προσθέσεως εἰς ἕκαστον διάνυσμα ἐν τῷ χώρῳ ἑνὸς σταθεροῦ διανύσματος. Διὰ παραδείγματα τινά, εἰς V_2 γραμμικὴ πολλαπλότης εἶναι τὸ διάγραμμα εὐθείας γραμμῆς ὁριζομένης ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 = \beta$, ἔνθα τὰ α_1 καὶ α_2 δὲν εἶναι ἀμφότερα μηδενικά. Ἂν $\beta = 0$, τότε ἡ γραμμικὴ πολλαπλότης περιέχει τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ γραμμικὴ πολλαπλότης εἶναι ἐπίσης διανυσματικὸς χῶρος. Παρόμοια σχόλια ἔχουν ἰσχὺν καὶ εἰς V_3. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha_1 \chi_1 + \alpha_2 \chi_2 + \alpha_3 \chi_3 = \beta$ ὁρίζει ἓν ἐπίπεδον ἢ γραμμικὴν πολλαπλότητα εἰς V_3 καὶ ἡ διάστασις τῆς πολλαπλότητος εἶναι $\rho - 1 = 3 - 1 = 2$. Πάλιν, ἂν $\beta = 0$, ἡ πολλαπλότης περιέχει τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων καὶ εἶναι διανυσματικὸς χῶρος. Ἂν $\beta \neq 0$, ἡ ἀρχὴ δὲν περιέχεται εἰς τὴν γραμμικὴν πολλαπλότητα καὶ δὲν εἶναι αὕτη διανυσματικὸς χῶρος.

Ἡ τομὴ δύο ὑπερεπιπέδων, ἑκάστου ἔχοντος διάστασιν $\rho - 1$ εἰς χῶρον ρ, εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης διαστάσεως $\rho - 2$, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἑνὸς ὑπερεπιπέδου δὲν εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τοῦ ἑτέρου. Διὰ εἰδικὴν τούτου περίπτωσιν ἂς θεωρήσωμεν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον. Ἡ τομὴ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον, ἢ μονοδιάστατος γραμμικὴ πολλαπλότης. Τὰ σχόλια ταῦτα δύνανται νὰ γενικευθοῦν. Ἂν ἔχωμεν κ τεμνόμενα ὑπερεπίπεδα εἰς χῶρον ρ καὶ ἂν ἡ ἐξίσωσις ἑκάστου ὑπερεπιπέδου δὲν εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἑτέρων, τότε δύο τῶν ὑπερεπιπέδων τέμνονται εἰς γραμμικὴν πολλαπλότητα διαστάσεως $\rho - 2$, τρία τῶν ὑπερεπιπέδων τέμνονται εἰς γραμμικὴν πολλαπλότητα διαστάσεως $\rho - 3$, καὶ ἡ τομὴ κ ὑπερεπιπέδων εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης ἔχουσα διάστασιν $\rho - \kappa$.

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὰς γενικὰς διατυπώσεις προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἂς ἐξετάσωμεν τὰς (6) καὶ (7) ὡς καὶ τὰς (12) καὶ (13) εἰς τὸ φῶς τῶν ἀνωτέρω ἐπὶ τῶν γραμμικῶν πολλαπλοτήτων λαβόντων χώραν σχολίων. Ἕκαστον τῶν ὑπερεπιπέδων εἰς (12) εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης διαστάσεως $\nu + \mu - 1$· ἡ τομὴ μ ἐξ αὐτῶν τῶν ὑπερεπιπέδων εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης διαστάσεως $\nu + \mu - \mu = \nu$ [2]. Τὸ ὑπὸ τῆς (6) ὁριζόμενον κυρτὸν σύνολον εἶναι ἐπίσης χῶρος ν διαστάσεων, καὶ ἀφοῦ εἰς ἀμφοτέρας τὰς διατυπώσεις περιοριζώμεθα εἰς μὴ ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν, αἱ τιμαὶ ὁρίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀληθὲς ἂν ἀκολουθηθῇ ἡ ἀνωτέρω ἐξετασθεῖσα μέθοδος ἡ ἀφορῶσα εἰς συσχετισμὸν μέσῳ δεούσης καταλλήλου προβολῆς.

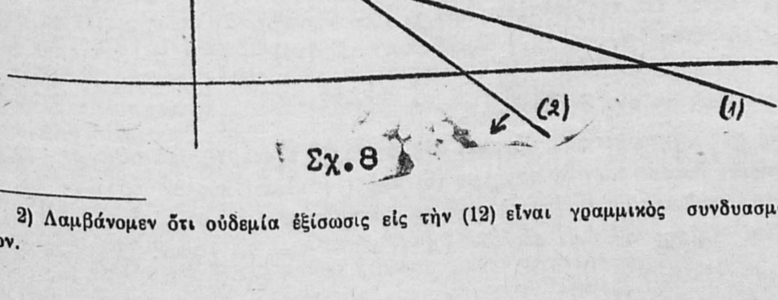
Ἓν ἁπλοῦν παράδειγμα θὰ διασαφίσῃ τὰ σχόλια ταῦτα. Ὑποτεθείσθω ὅτι θέλομεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν $\varphi = \gamma_1\chi_1 + \gamma_2\chi_2$ ὑποκειμένην εἰς

(21) $$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 = \beta_1$$

(22) $$\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 = \beta_2$$

(23) $$\chi_1\,,\ \chi_2 \geqq 0\,,$$

ὅπου διὰ λόγους ἁπλότητος δεχόμεθα περαιτέρω ὅτι ἕκαστον $\alpha_{ij} > 0$. Τὸ διάγραμμα τῆς (21) εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ (1) εἰς τὸ σχ. 8 καὶ τὸ σύνορον τοῦ ἡμιχώ-



Σχ. 8

2) Λαμβάνομεν ὅτι οὐδεμία ἐξίσωσις εἰς τὴν (12) εἶναι γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἄλλων.

ρου (22) εἶναι ἡ εὐθεῖα (2). Τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων τοῦ προβλήματος εἶναι τὸ δεικνυόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα.

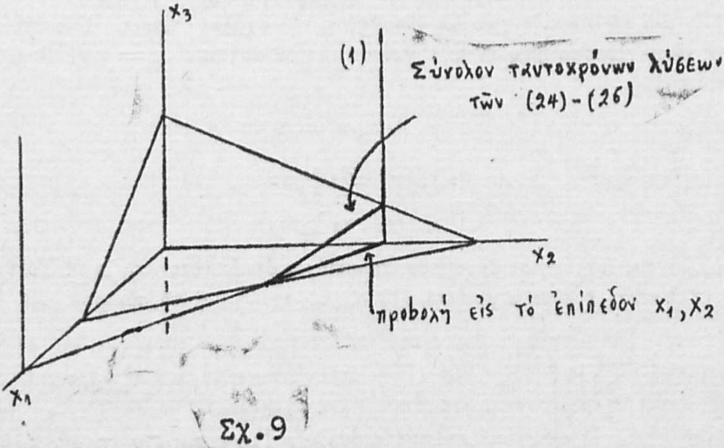
Διὰ τῆς χρήσεως χαλαρῶν μεταβλητῶν λαμβάνομεν τὸ σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων

(24) $$\alpha_{11}\chi_1 + \alpha_{12}\chi_2 + 0\chi_3 = \beta_1$$

(25) $$\alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2 + \chi_3 = \beta_2$$

(26) $$\chi_\iota \geqq 0 \qquad (\iota = 1, 2, 3),$$

εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἐξισώσεις προσδιορίζουν ὑπερεπίπεδα εἰς τὸν τρισδιάστατον χῶρον. Διαγράμματα τῶν ἐξισώσεων ἐμφανίζονται κατωτέρω, ὅπου διὰ λόγους ἁπλότητος δεικνύονται μόνον αἱ τιμαὶ ἐκεῖναι τῶν μεταβλητῶν αἱ ἱκανοποιοῦσαι τὰς (24) καὶ (25), αἱ ὁποῖαι (τιμαὶ) εἶναι ἐπίσης μὴ ἀρνητικαί. Τὸ ἐπίπεδον (1) εἶναι τὸ διάγραμμα τῆς (24)· ἀφοῦ ἡ (24) ἔχει μηδενικὸν συντελεστὴν διὰ χ_3 τυχοῦσα τιμὴ τοῦ χ_3 θὰ ἱκανοποιήσῃ τὴν ἐξίσωσιν, οὕτως ἔχομεν τὸ ἐπίπεδον (1) μέρος τοῦ ὁποίου δεικνύεται εἰς τὸ σχ. 9. Τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι



Σχ. 9

γμέναι ἱκανοποιοῦν τὴν (25) σχηματίζει εἰς τὸ ἐπίπεδον τὴν τριγωνικὴν «φέτα» ἡ ὁποία φαίνεται ἐπίσης εἰς τὸ σχ. 9. Τὸ ταυτοχρόνως ἱκανοποιοῦν τὰς (24) — (26) σημειοσύνολον εἶναι τὸ δηλούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα. Ἂν προβάλωμεν τὸ σύνολον αὐτὸ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν χ_1, χ_2, δηλαδή, ἂν θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα $(\chi_1, \chi_2, 0)$ ἔνθα (χ_1, χ_2, χ_3) ἱκανοποιοῦν τὰς (24) — (26), καὶ κατόπιν συσχετίσωμεν αὐτὰ μὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα (χ_1, χ_2) εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, θὰ λάβωμεν τὸ εἰς τὸ σχ. 8 σύνολον.

Ἡ γενικὴ περίπτωσις δύναται ἀναλόγως νὰ ἐξετασθῇ. Τὸ σύνολον πραγματοποιησίμων λύσεων τῶν ἀνισοτήτων (6) καὶ (7) εἶναι κυρτὸν σύνολον εἰς τὸν χῶρον τῶν ν διαστάσεων καὶ τὸ σύνολον πραγματοποιησίμων λύσεων τῶν (12) καὶ (13) εἶναι ἐπίσης σύνολον εἰς τὸν $(\nu + \mu) - \mu = \nu$ - χῶρον. Τὰ δύο σύνολα πραγματοποιησίμων λύσεων θὰ εἶναι τὰ αὐτὰ ἂν προβάλωμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἱκανοποιοῦν τὰς (12) καὶ (13), δηλαδὴ τὸ σύνολον $(\chi_1, \ldots, \chi_\nu, \ldots, \chi_{\nu+\mu})$, ἐπὶ τοῦ γραμμικοῦ ὑποχώρου τῶν σημείων $(\chi_1, \ldots, \chi_\nu, 0, \ldots, 0)$ καὶ κατόπιν συσχετίσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα μὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu)$ εἰς τὸν ν-διάστατον χῶρον.

Χῶροι λύσεων καὶ χῶροι ἀπαιτήσεων εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν

Ἡ διατύπωσις (11), (12) καὶ (13) ἔχει ἑτέραν μίαν ἑρμηνείαν. Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι αἱ μονομετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (12) δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς μία ἐξίσωσις διανυσμάτων ἂν οἱ συντελεσταὶ α_{ij} ἑκάστης μεταβλητῆς θεωρηθοῦν ὡς διάνυσμα—στήλη. Ἡ ἐξίσωσις διανυσμάτων, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν (12) εἶναι

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix} \chi_1 + \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu 2} \end{bmatrix} \chi_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu+\mu} \\ \alpha_{2\nu+\mu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu\nu+\mu} \end{bmatrix} \chi_{\nu+\mu} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix},$$

ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ, ἂν $P_\iota = \begin{bmatrix} \alpha_{1\iota} \\ \alpha_{2\iota} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu\iota} \end{bmatrix}$ καὶ P_0 ἀντιπροσωπεύῃ τὸ διάνυσμα—στήλη τῶν σταθερῶν β_ι, ὡς

$$P_1\chi_1 + P_2\chi_2 + \cdots + P_{\nu+\mu}\chi_{\nu+\mu} = P_0 . \tag{27}$$

Ὁ ἔχων $\mu + \nu$ διαστάσεις χῶρος σημείων $(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu+\mu})$ καλεῖται ὁ ***χῶρος λύσεων*** (solution space) διότι σημεῖα τοῦ χώρου τούτου παριστάνουν λύσεις τοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ ἐξίσωσις διανυσμάτων (27), ἀφ᾽ ἑτέρου, ἀναφέρεται εἰς χῶρον μ διαστάσεων, ἑκάστου τῶν διανυσμάτων P_ι ἀποτελουμένου ἐκ μ συνιστωσῶν. Ὁ χῶρος μ διαστάσεων καλεῖται ὁ ***χῶρος ἀπαιτήσεων*** (requirements space) διότι τινὰ τῶν σημείων του προέρχονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων τῶν περιορισμῶν, οἱ ὁποῖοι καθορίζουν τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος. Σημειώσατε ὅτι παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{\nu+\mu})$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου εἰς τὸν χῶρον λύσεων, εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων δὲν ἀντιπροσωπεύουν σημεῖον ἀλλὰ συλλογὴν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται ὡς συντελεσταὶ διανυσμάτων εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων.

Ἂν τὸ P_0 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων P_ι, τότε οἱ συντελεσταὶ χ_ι εἰς τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν θὰ ἱκανοποιοῦν ἀμφοτέρας τὰς (12) καὶ (13), καὶ τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ συντελεσταὶ θὰ εἶναι αἱ συντεταγμέναι σημείου εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων εἰς τὸν χῶρον $\nu + \mu$ (τὸν χῶρον λύσεων)[3]. Ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον $(\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_{\nu+\mu})$ εἰς τὸ σύνολον πραγματοποιησίμων λύσεων δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων ὡς τρόπος ἐκφράσεως τοῦ P_0 ὡς γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διανυσμάτων $P_1, \cdots, P_{\nu+\mu}$ μὴ ἀρνητικοῦ. Τελικῶς, ἂν τὸ P_0 εἶναι μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν $P_1, \cdots, P_{\nu+\mu}$, τότε τὸ P_0 κεῖται ἐντὸς τοῦ ὑπὸ τῶν P_ι ζευγνυμένου κώνου· ἐξ ἄλλου, ἂν τὸ P_0 δὲν εὑρίσκεται εἰς τὸν κῶνον, τότε ὁ μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν P_ι θὰ δώσῃ P_0 καὶ τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ δὲν ἔχει πραγματοποιήσιμον λύσιν.

Ἓν ἁπλοῦν παράδειγμα θὰ ἦτο χρήσιμον εἰς τὸ σημεῖον αὐτό. Ὑποτεθείσθω ὅτι τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς $\varphi(\chi_1,\chi_2) = 2\chi_1 + 5\chi_2$ ὑποκειμένης εἰς

$$\chi_1 + 4\chi_2 \leqq 24 \tag{28}$$

$$3\chi_1 + \chi_2 \leqq 21 \tag{29}$$

$$\chi_1 + \chi_2 \leqq 9 \tag{30}$$

$$\chi_1, \chi_2 \geqq 0 . \tag{31}$$

Αἱ ἀνισότητες ὁρίζουν κυρτὸν σύνολον Σ εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον. Αἱ σχηματίζουσαι τὰ σύνορα τῶν σχετικῶν ἡμιχώρων εὐθεῖαι εἰς τὸ κατωτέρω διάγραμμα ἔχουν τοὺς αὐτοὺς ἀριθμοὺς μὲ τὰς ἀνωτέρω ἀντιστοίχους ἀνισότητας. Δεικνύεται ἐπίσης ἡ γραμμικὴ συνάρτησις, καὶ τὸ σημεῖον τοῦ Σ διὰ τὸ ὁποῖον ἡ $\varphi(\chi_1, \chi_2)$ ἐπιτυγχάνει μεγίστην τιμὴν εἶναι τὸ σημεῖον (4,5) διὰ τὸ ὁποῖον $\varphi(\chi_1, \chi_2) = 2\chi_1 + 5\chi_2 = 2(4) + 5(5) = 33$. Ὁ χῶρος ὁ περιέχων τὴν τομὴν τῶν ἡμιχώρων τῶν προσδιοριζομένων ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων εἰς τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος καλεῖται ὁ ***ἀρχικὸς χῶρος***. Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτό, ὁ ἀρχικὸς χῶρος εἶναι δισδιάστατος.

Εἰσάγονται τώρα χαλαραὶ μεταβληταί, μία δι' ἑκάστην τῶν ἀνισοτήτων (28) — (30), καὶ ἡ ἰσοδύναμος διατύπωσις τοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς $\varphi(\chi_1, \chi_2) = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5$ ὑποκειμένης εἰς

$$\chi_1 + 4\chi_2 + \chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 = 24 \tag{32}$$

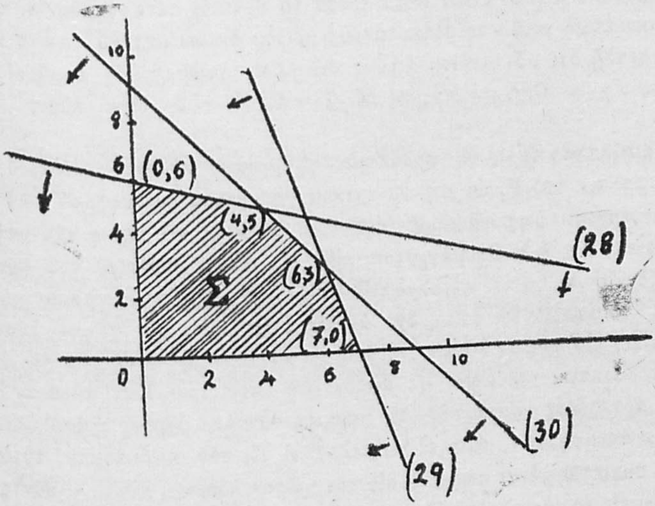
$$3\chi_1 + \chi_2 + 0\chi_3 + \chi_4 + 0\chi_5 = 21 \tag{33}$$

$$\chi_1 + \chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + \chi_5 = 9 \tag{34}$$

$$\chi_\iota \geqq 0 \qquad (\iota = 1, \cdots, 5) . \tag{35}$$

3) Πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς ἐξετάσεως ταύτης, ὅταν ὁμιλῶμεν διὰ τὸ σύνολον λύσεων θὰ γίνεται κατανοητὸν ὅτι ἔχει γίνει κατάλληλος προβολὴ τῶν σημείων $(\chi_1, \ldots, \chi_{\nu+\mu})$ ἐπὶ τοῦ γραμμικοῦ ὑποχώρου τῶν σημείων $(\chi_1, \ldots, \chi_\nu, 0, \ldots, 0)$.

Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τούτων ὁρίζει ὑπερεπίπεδον τεσσάρων διαστάσεων εἰς χῶρον πέντε διαστάσεων. Ἡ τομὴ τῶν τριῶν ὑπερεπιπέδων εἶναι γραμμικὴ πολλαπλότης διαστάσεως $5-3=2$. Ἂν προβάλωμεν τὸ σύνολον λύσεων (χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5,) τῶν (32) — (35) ἐπὶ τοῦ γραμμικοῦ ὑποχώρου (χ_1, χ_2, 0, 0, 0) καὶ ταυτίσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα μὲ τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ δισδιαστάτου χώρου (χ_1, χ_2), τότε τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων τῶν (32) καὶ (35) δύνα-



Σχ. 10

ται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ αὐτὸ σύνολον μὲ τὸ κυρτὸν Σ εἰς τὸ σχ. 10 δεικνυόμενον τοιοῦτον.

Ἂς γράψωμεν τώρα τὰ συστήματα (32) — (35) εἰς τὴν μορφὴν διανυσμάτων,

$$\text{(36)}\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_1 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_5 = \begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{(37)}\qquad \chi_\iota \geqq 0 \quad (\iota = 1, \cdots, 5).$$

Διὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο ὁ χῶρος λύσεων εἶναι πέντε διαστάσεων καὶ αἱ πραγματοποιήσιμοι λύσεις τοῦ προβλήματος εἶναι τῆς μορφῆς (χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5). Ἂς λεχθῇ ἐνταῦθα ὅτι ἡ μόνη καταγραφὴ τῆς ἐξισώσεως εἰς τὴν μορφὴν ταύτην δηλοῖ δυνατὴν λύσιν : ($\chi_1=0, \chi_2=0, \chi_3=24, \chi_4=21, \chi_5=9$. Δὲν εἶναι ὅμως αὕτη ἀρίστη λύσις διότι διὰ τὸ σημεῖον αὐτὸ

$$\varphi(\chi_1, \chi_2) = 2\chi_1 + 5\chi_2 = 2(0) + 5(0) = 0 .$$

Ὁ χῶρος ἀπαιτήσεων εἶναι τρισδιάστατος, ὡς δεικνύει ἓν βλέμμα εἰς τὰ διανύσματα—στήλας τῆς (36). Εἰς τὴν εἰδικὴν ταύτην περίπτωσιν, δυνάμεθα νὰ εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστον μία δυνατὴ λύσις ἀφοῦ τὸ διάνυσμα $\begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}$ κεῖται εἰς τὸ θετικὸν τεταρτημόριον καὶ τὸ σύνολον ὅλων τῶν μὴ ἀρνητικῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τῆς ἐξισώσεως εὑρισκομένων διανυσμάτων τῆς (36) εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ θετικὸν τεταρτημόριον, τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων τοῦ τρισδιαστάτου χώρου ὄντων μεταξὺ τῶν διανυσμάτων αὐτῶν. Ἄς λεχθῇ ὅτι αὕτη εἶναι ἁπλῶς καὶ μόνον γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῆς διατυπώσεως ὅτι $\chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 24, \chi_4 = 21, \chi_5 = 9$ εἶναι λύσις πραγματοποιήσιμος.

Διὰ νὰ λύσωμεν ὅμως τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, θέλομεν ὄχι μόνον ἔκφρασιν τοῦ P_0 ὡς μὴ ἀρνητικοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν P_i, ἀλλὰ μὴ ἀρνητικὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν ὁ ὁποῖος θὰ δώσῃ εἰς τὴν φ τὴν μεγίστην τιμήν. Γνωρίζοντες ὅτι ἡ φ θὰ μεγιστοποιηθῇ εἰς ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων, χρειαζόμεθα ἓν μέσον πειραματισμοῦ μὲ μὴ ἀρνητικοὺς γραμμικοὺς συνδυασμοὺς τῶν P_i τὸ ὁποῖον θὰ δώσῃ ὄχι ἁπλῶς σημεῖα εἰς τὸν χῶρον λύσεων ἀλλὰ ἄκρα σημεῖα εἰς τὸν χῶρον λύσεων. Ὑπάρχει ἐνταῦθα ἓν θεώρημα τὸ ὁποῖον θὰ διατυπωθῇ προσεκτικώτερον καὶ θὰ ἀποδειχθῇ κατωτέρω. Κατ' αὐτὸ ἂν P_0 ἐκφράζεται ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς συνόλου ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων, τότε οἱ συντελεσταὶ εἰς τὸν συνδυασμὸν αὐτόν, ἑρμηνευόμενοι ὡς συντεταγμέναι σημείου εἰς τὸν χῶρον λύσεων, εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἄκρου σημείου εἰς τὸ κυρτὸν σύνολον τῶν δυνατῶν λύσεων. Τοῦ χώρου ἀπαιτήσεων ὄντος τρισδιαστάτου εἰς τὸ παράδειγμα, οὐδὲν σύνολον περιέχον πλείονα τῶν τριῶν διανυσμάτων εἶναι ἀνεξάρτητον γραμμικῶς, οὕτως οἱ γραμμικοὶ συνδυασμοί, οἱ ὁποῖοι θὰ καταλήξουν εἰς ἄκρα σημεῖα εἰς τὸν χῶρον λύσεων δύνανται νὰ ἔχουν τὸ πλεῖστον τρεῖς θετικοὺς συντελεστὰς εἰς τὸ παράδειγμα αὐτό. Τὸ σημεῖον (0,0,24,21,9) τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω ἐξετασθείσης λύσεως εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου τῶν δυνατῶν λύσεων εἰς χῶρον πέντε διαστάσεων.

Ἔχοντες τώρα προσδιορίσει ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων, ἀναπτύσσομεν ἓν μέσον μετακινήσεως ἐξ ἑνὸς ἄκρου σημείου εἰς παρακείμενον ἄκρον σημεῖον, τὸ ὁποῖον δίδει τουλάχιστον τὴν αὐτὴν μεγάλην τιμὴν εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν φ. Ἀρχίζομεν μὲ τὴν ἀνωτέρω ὑπολογισθεῖσαν λύσιν διὰ τὴν ὁποίαν $\varphi(\chi_1, \chi_2) = 0$,

$$(38) \qquad P_0 = 0\,P_1 + 0P_2 + 24\,P_3 = 21\,P_4 = 9\,P_5\,.$$

Ἀφοῦ ἐπιθυμοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἕτερον ἄκρον σημεῖον, καὶ ἀφοῦ δὲν δύνανται νὰ ὑπάρξουν πλείονα τῶν τριῶν ἐκ τῶν πέντε διανυσμάτων ἔχοντα θετικοὺς συντελεστάς, πρέπει νὰ ἐξαιρέσωμεν τοῦ συνδυασμοῦ ἓν τῶν διανυσμάτων P_3, P_4, P_5 (ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι θὰ ἔχῃ συντελεστὴν μηδὲν) ἂν πρέπει νὰ δώσωμεν συντελεστὴν διάφορον τοῦ μηδενὸς εἰς ἓν τῶν διανυσμάτων P_1, P_2. Δίδοντες θετικὸν συντελεστὴν εἰς ἓν ἢ ἀμφότερα τὰ P_1, P_2, δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν τὴν φ (χ_1, χ_2) μεγαλυτέραν ἢ εἶναι αὕτη ἐκ τῆς ἀνωτέρω λύσεως. Ἄς ἐκλέξωμεν τὸ

P_1 ὡς τὸ διάνυσμα ποὺ θὰ λάβῃ τὸν μὴ μηδενικὸν συντελεστὴν (δυνάμεθα ὁμοίως νὰ ἐκλέξωμεν καὶ τὸ P_2 ὡς τὸ ἀρχικὸν διάνυσμα). Τότε τὰ P_3, P_4, ἢ P_5, πρέπει νὰ λάβουν συντελεστὴν μηδέν. Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὰς ὅτι τὸ P_1 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν P_3, P_4, P_5, ἀφοῦ τὰ τελευταῖα διανύσματα εἶναι βάσις διὰ τὸν τρισδιάστατον χῶρον. Περαιτέρω, ἡ ἀντιπροσώπευσις τοῦ P_1 μέσῳ τῶν P_3, P_4, P_5 εἶναι μοναδική, ὡς εἴδομεν εἰς τὸ κεφάλαιον 1. Ἀφοῦ $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, ἔχομεν

$$P_1 = 1P_3 + 3P_4 + 1P_5 .$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ σκέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ $\tau > 0$, λαμβάνομεν

(39) $$\tau P_1 = \tau P_3 + 3\tau P_4 + \tau P_5 .$$

Αὐτὸ ἰσχύει διὰ πᾶν τ, περιορίζομεν ὅμως τὸ τ νὰ εἶναι θετικὸν διότι ἐπιθυμοῦμεν τὸ διάνυσμα P_1 νὰ ἔχῃ θετικὸν συντελεστήν. Προσθέτομεν τώρα τP_1 εἰς τὸ δεύτερον σκέλος τῆς (38), καὶ πρὸς διατήρησιν τῆς ἰσότητος ἀφαιροῦμεν τὸ δεύτερον σκέλος τῆς (39) ἀπὸ τὸ δεύτερον σκέλος τῆς (38),

$$P_0 = 0P_1 + 0P_2 + 24P_3 + 21P_4 + 9P_5 + \tau P_1 - \tau P_3 - 3\tau P_4 \ \tau P_5 .$$

Αὕτη γίνεται

(40) $$P_0 = \tau P_1 + 0P_2 + (24 - \tau) P_3 + (21 - 3\tau)P_4 + (9 - \tau)P_5 .$$

Ἐπιθυμοῦμεν τὸ τ νὰ εἶναι τὸ μεγαλύτερον δυνατόν, ὄχι ὅμως τόσον μέγα ὥστε νὰ ἔχῃ διάνυσμα τι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἀρνητικὸν συντελεστήν. Ἐξέτασις τῆς ἐξισώσεως θὰ δείξῃ ὅτι $\tau = 7$ εἶναι ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ τ, διότι ἂν $\tau > 7$, ὁ συντελεστὴς τοῦ P_4 καθίσταται ἀρνητικός. Ἀντικαθιστῶντες $\tau = 7$ εἰς τὴν (40) λαμβάνομεν

(41) $$P_0 = 7P_1 + 0P_2 + 17P_3 + 0P_4 + 2P_5 .$$

Τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον εἰς τὸ σύνολον λύσεων εἶναι (7, 0, 17, 0, 2) τὸ ὁποῖον εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου δυνατῶν λύσεων εἰς χῶρον πέντε διαστάσεων. Διὰ τὴν λύσιν ταύτην,

(42) $$\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 ,$$
$$\varphi = 2(7) + 5(0) = 14 ,$$

ὅπερ δηλοῖ ὅτι ἡ τιμὴ τῆς φ ἐβελτιώθη ὡς πρὸς τὴν προηγηθεῖσαν λύσιν, καὶ ὑπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν $(7, 0, 17, 0, 2) \rightarrow (7, 0, 0, 0, 0) \rightarrow (7, 0)$, λαμβάνομεν ἄκρον σημεῖον τοῦ κυρτοῦ συνόλου Σ εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον (ἴδε σχ. 10). Σημειώσατε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία $(7, 0, 17, 0, 2) \rightarrow (7, 0, 0, 0, 0)$ ἐγκαθίσταται ὑπὸ τῶν μηδενικῶν συντελεστῶν τῶν χαλαρῶν μεταβλητῶν εἰς (42).

Ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον ἐκ νέου, δίδοντες τώρα μὴ μηδενικὸν συντελεστὴν εἰς τὸ P_2. Πρῶτον ἐκφράζομεν τὸ P_2 ὡς γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων τῶν ἐχόντων συντελεστὰς διαφόρους τοῦ μηδενὸς εἰς (41). Τὰ διανύσματα ταῦτα ἀποτελοῦν βάσιν διὰ τρισδιάστατον χῶρον, καὶ ἐκ τῆς λύσεως καταλλήλου συστήματος ταυτοχρόνων γραμμικῶν ἐξισώσεων, λαμβάνομεν

$$P_2 = 1/3P_1 + 11/3P_3 + 2/3P_5 .$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ σκέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἐπὶ $\kappa > 0$ καὶ ἐπαναλαμβάνοντες τὴν ἀνωτέρω μέθοδον, λαμβάνομεν

$$(43)\qquad P_0 = (7-1/3\kappa)P_1 + \kappa P_2 + (17 - 11/3\kappa)P_3 + 0P_4 + (2 - 2/3\kappa)P_5 .$$

Ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ κ ἂν ὅλοι οἱ συντελεσταὶ εἶναι μὴ ἀρνητικοὶ εἶναι 3. Ἀντικαθιστῶντες $\kappa = 3$ εἰς τὴν (43) ἔχομεν

$$(44)\qquad P_0 = 6P_1 + 3P_2 + 6P_3 + 0P_4 + 0P_5 .$$

Τὸ σημεῖον εἰς τὸν χῶρον λύσεων εἶναι (6, 3, 6, 0, 0) δίδον τὸ σημεῖον (6,3) εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ἄκρον σημεῖον τὸ παρακείμενον τοῦ κατὰ τὸ προηγούμενον στάδιον ληφθέντος ἄκρου σημείου (ἴδε σχ. 10), καὶ δι' αὐτὸ ἔχομεν

$$\varphi = 2(6) + 5(3) = 27$$

ὁποία εἶναι ἔτι μεγαλυτέρα τιμὴ διὰ τὴν φ.

Πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ παραδείγματος ἐπαναλαμβάνομεν τὴν διαδικασίαν. Ἐπιθυμοῦμεν νὰ αὐξήσωμεν τὸν συντελεστὴν ἑνὸς τῶν διανυσμάτων P_1, P_2, οὕτω θὰ δώσωμεν εἰς ἓν τῶν διανυσμάτων P_4, P_5 μὴ μηδενικὸν συντελεστήν. Ἐκλέγομεν τὸ P_4 καὶ ἐκφράζομεν αὐτὸ ὡς συνδυασμὸν τῶν διανυσμάτων εἰς τὴν (44) τὰ ὁποῖα ἔχουν συντελεστὰς διαφόρους τοῦ μηδενός, δηλαδὴ τῶν P_1, P_2 καὶ P_3 Δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι

$$P_4 = 1/2P_1 - 1/2P_2 + 3/2P_3 .$$

Ἂν $\alpha > 0$, τότε

$$\alpha P_4 = 1/2\alpha P_1 - 1/2\alpha P_2 + 3/2\alpha P_3 .$$

Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὴν (44), λαμβάνομεν τελικῶς,

$$P_0 = (6 - 1/2\alpha)P_1 + (3 + 1/2\alpha)P_2 + (6 - 3/2\alpha)P_3 + \alpha P_4 + 0P_5 .$$

Ἡ μεγίστη ἐπιτρεπτὴ τιμὴ διὰ τὸ α εἶναι 4. Ἀντικαθιστῶντες,

$$P_0 = 4P_1 + 5P_2 + 0P_3 + 4P_4 + 0P_5 .$$

Τὸ εἰς τὸν χῶρον λύσεων ἀντιστοιχοῦν σημεῖον εἶναι (4, 5, 0, 4, 0). Ἡ γραμμικὴ συνάρτησις προβάλλει τοῦτο ἐπὶ τοῦ σημείου (4, 5, 0, 0, 0) καὶ ἔχομεν $\varphi = 2(4) + 5(5) + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 = 33$.

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὸ σχ. 10 βλέπομεν ὅτι αὕτη εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ διὰ φ καὶ βλέπομεν ἐπίσης ὅτι ἡ μέθοδός μας λύσεως ἤρχισε μὲ ἓν ἄκρον σημεῖον καὶ μετεκινήθη εἰς παρακείμενον ἄκρον σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔδωκεν εἰς τὴν φ τὴν αὐτὴν τουλάχιστον τιμήν.

Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι κατ' οὐσίαν ἐκείνη τῆς μεθόδου simplex διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἡ μέθοδος simplex εἶναι ἐξευγενισμένη τεχνικὴ διενεργείας τῶν χειρισμῶν αὐτῶν καὶ θὰ ἐξετασθῇ λεπτομερῶς εἰς ἑπόμενα κεφάλαια.

Οὕτω, συμπληρώνεται ἡ ἐξέτασίς μας τῆς γεωμετρίας τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Ἐν κατακλεῖδι πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ὑπάρχουν τρεῖς χῶροι σχέσιν ἔχοντες πρὸς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Πρῶτον, ὁ χῶρος εἰς τὸν ὁποῖον ἡ τομὴ τῶν ἀνισοτήτων εἰς τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὁρίζει κυρτὸν σύνολον. Καλούμενος ὁ ἀρχικὸς χῶρος, ἦτο οὗτος δισδιάστατος εἰς τὸ παράδειγμά μας. Κατόπιν, μετὰ τὴν εἴσοδον τῶν καταλλήλων χαλαρῶν μεταβλητῶν, ἔχομεν τὸν χῶρον λύσεων (χῶρον πέντε διαστάσεων εἰς τὸ παράδειγμά μας). Μετ' αὐτὸν ὁ χῶρος ἀπαιτήσεων εἶναι ὁ περιέχων τὰ διανύσματα—στήλας τῶν σταθερῶν ὅρων (τρισδιάστατος εἰς τὸ παράδειγμα). Σημειώσατε ὅτι παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ χῶροι λύσεων καὶ ἀπαιτήσεων δύνανται νὰ εἶναι τῆς αὐτῆς διαστάσεως, πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωνται ὡς ξεχωριστοὶ χῶροι κατὰ τὴν μελέτην προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Πρέπει ὁμοίως νὰ σημειωθῇ ἓν σπουδαῖον χαρακτηριστικὸν τῆς ἀρίστης λύσεως. Ἡ ἀρίστη λύσις εἶναι τὸ σημεῖον (4, 5, 0, 4, 0), ἔνθα ἓν χαλαρὸν διάνυσμα, τὸ P_4, ἔχει συντελεστὴν διάφορον τοῦ μηδενός. Τοῦτο δὲν δημιουργεῖ περιπλοκάς, διότι ἡ μορφὴ τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ μορφὴν γραμμικῆς ἐξισώσεως,

$$\varphi = 4\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5$$

διαβεβαιοῖ ὅτι τὸ εἰς τὸν πέντε διαστάσεων χῶρον σημεῖον θὰ προβληθῇ ἐπὶ τοῦ σημείου (4, 5, 0, 0, 0). Συσχετίζοντες περαιτέρω $(4, 5, 0, 0, 0) \rightarrow (4, 5)$ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον εἰς τὸ σχ. 10 τὸ ὁποῖον, ὡς εἴδομεν γραφικῶς ἐπέφερε τὴν ἀρίστην λύσιν εἰς τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος.

Λύσις προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ

Ἀφοῦ ἡ συνάρτησις, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν εἶναι γραμμικὴ καὶ ἀφοῦ τὸ σύνολον τῶν πραγματοποιησίμων λύσεων εἶναι κυρτόν, πρέπει νὰ κατανοηθῇ ὅτι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς φ, ἂν ὑπάρχῃ, πρέπει νὰ ληφθῇ ὡς ἓν τουλάχιστον ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων. Ἡ μέθοδος Simplex, ἀναπτυχθεῖσα ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ George Dantzig, εἶναι ἐπαρκὴς ἀλγόριθμος ἢ σύνολον διαδικασιῶν πρὸς εὕρεσιν ἄκρων σημείων, οὕτω θὰ ἐξετάσωμεν κατὰ πρῶτον θεωρήματα τινά, τὰ ὁποῖα θὰ ἐξυπηρετήσουν εἰς τὸν χαρακτηρισμὸν ἄκρων σημείων εἰς τὸν χῶρον λύσεων.

Εἴδομεν ὅτι ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ περιέχον ἀνισότητας δύναται νὰ μετατραπῇ διὰ τῆς χρήσεως χαλαρῶν μεταβλητῶν εἰς πρόβλημα περιέχον γραμμικὰς ἐξισώσεις εἰς μεταβλητὰς μὴ ἀρνητικάς. Διατυπώνομεν ἐνταῦθα ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ μετατραπὲν οὕτω καὶ εἰς τὰ θεωρήματα τοῦ κεφαλαίου τούτου θὰ ἀντιλαμβανώμεθα ὅτι ἀναφερόμεθα εἰς τὸ πρόβλημα τῆς ἑξῆς μορφῆς :

Νὰ μεγιστοποιηθῇ $\varphi = \gamma_1 \chi_1 + \ldots + \gamma_\nu \chi_\nu$

ὑποκειμένη εἰς

$$
\begin{array}{c}
\alpha_{11}\chi_1 + \ldots + \alpha_{1\nu}\chi_\nu = \beta_1 \\
\alpha_{21}\chi_1 + \ldots + \alpha_{2\nu}\chi_\nu = \beta_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{\mu 1}\chi_1 + \ldots + \alpha_{\mu\nu}\chi_\nu = \beta_\mu
\end{array} \tag{45}
$$

$$\chi_j \geqq 0 \quad (j = 1, \ldots, \nu), \tag{46}$$

ἔνθα α_{ij} , β_i , γ_j εἶναι γνωσταὶ σταθεραὶ καὶ $\mu < \nu$. Δι' ἔμφασιν ἐπαναγράφομεν τοὺς περιορισμοὺς (45) ὑπὸ μορφὴν διανυσμάτων

$$\chi_1 P_1 + \ldots + \chi_\nu P_\nu = P_0 , \tag{47}$$

ἔνθα

$$P_j = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\mu j} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad P_0 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\mu \end{bmatrix} .$$

Γίνεται ἐπίσης ἡ ἀκόλουθος ὑπόθεσις (καλουμένη ***μὴ ἐκφυλισμένη ὑπόθεσις)*** : τὸ διάνυσμα P_0 εἰς τὴν (47) δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς ὀλιγωτέρων τῶν ρ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων P_j , ἔνθα ρ ὁ βαθμὸς τῆς μήτρας εἰς (45).

Θεώρημα 1. Ἂν ὑπάρχουν ρ γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα $P_1, \ldots P_\rho$ (εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων) τοιαῦτα ὥστε

$$\chi_1 P_1 + \chi_2 P_2 + \cdots + \chi_\rho P_\rho = P_0 ,$$

τότε τὸ σημεῖον

$$X = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\rho \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

εἰς τὸν χῶρον λύσεων ἔχον ρ θετικὰς συντεταγμένας καὶ ν — ρ μηδενικὰς συντεταγμένας εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου δυνατῶν λύσεων Σ τοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ X δὲν εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ. Τότε εἶναι κυρτὸς συνδυασμὸς δύο ἄλλων σημείων τοῦ Σ, ἂς εἴπωμεν τῶν X_1 καὶ X_2, διαφόρων ἀλλήλων,

$$X = \varkappa X_1 + (1-\varkappa)X_2, \qquad 0 \leqq \varkappa \leqq 1 .$$

Αἱ συντεταγμέναι τῶν X_1 καὶ X_2 εἶναι μὴ ἀρνητικαὶ ὡς εἶναι καὶ τὰ μονόμετρα κ καὶ (1—κ) καὶ ἀφοῦ αἱ τελευταῖαι ν—ρ συντεταγμέναι τοῦ X εἶναι μηδέν, μηδὲν εἶναι αὗται κα διὰ X_1 καὶ X_2,

$$X_1 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\rho, 0, \cdots, 0)',$$
$$X_2 = (\beta_1, \cdots, \beta_\rho, 0, \cdots, 0)'.$$

Ἀφοῦ αὗται εἶναι δυναταὶ λύσεις καὶ τῆς (45) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$AX_1 = B$$
$$AX_2 = B ,$$

ἔνθα A ἡ μ×ν μήτρα καὶ B δηλοῖ τὸ διάνυσμα—στήλη τῶν σταθερῶν ὅρων, ἀντιστοίχως, εἰς (45). Αἱ ἐξισώσεις αὗται μητρῶν δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἐξισώσεις διανυσμάτων ὡς ἑξῆς,

$$\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_\rho P_\rho = P_0$$
$$\beta_1 P_1 + \cdots + \beta_\rho P_\rho = P_0 .$$

Ἂν ἀφαιρεθῇ ἡ δευτέρα ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν

$$(\alpha_1 - \beta_1)P_1 + \cdots + (\alpha_\rho - \beta_\rho)P_\rho = 0 .$$

Τὰ $P_1, \cdots, P_\rho$ ὅμως εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, οὕτω δι' ἕκαστον j, $\alpha_j - \beta_j = 0$, ἤτοι, $\alpha_j = \beta_j$ διὰ $j = 1, \cdots, \rho$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον διότι ἀρχικῶς ἐλάβομεν ὅτι τὰ X_1 καὶ X_2 εἶναι σημεῖα τοῦ Σ διάφορα ἀλλήλων. Ἐπομένως τὸ X πρέπει νὰ εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ.

Θεώρημα 2. Ἂν $X = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\rho \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$ εἶναι ἄκρον σημεῖον τοῦ Σ, τότε τὰ διανύσματα P_ι εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων τὰ σχετιζόμενα μὲ $\chi_\iota > 0$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα,

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν θετικοὶ οἱ πρῶτοι ρ συντελεσταί. Τότε

$$\chi_1 P_1 + \cdots + \chi_\rho P_\rho = P_0 \qquad \chi_\iota > 0,\ \iota = 1, \cdots, \rho . \tag{48}$$

Ἂς λάβωμεν τώρα τὰ διανύσματα $P_1, \cdots, P_\rho$ ἐξηρτημένα. Τότε ὑπάρχουν ἀριθμοὶ ψ_ι ὄχι ἅπαντες μηδὲν ὥστε

$$\psi_1 P_1 + \cdots + \psi_\rho P_\rho = 0 .$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπὶ $\tau > 0$, προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὴν (48) καὶ λαμβάνομεν τὰ διανύσματα

$$X_1 = (\chi_1 + \tau\psi_1)P_1 + \cdots + (\chi_\rho + \tau\psi_\rho)P_\rho$$

$$X_2 = (\chi_1 - \tau\psi_1)P_1 + \cdots + (\chi_\rho - \tau\psi_\rho)P_\rho .$$

Τὰ X_1 καὶ X_2 ἐμφανῶς εἶναι μὴ πραγματοποιήσιμα διανύσματα διά τινας ἐκλογὰς τοῦ τ. Ἀφοῦ ὅμως ἕκαστον χ_ι εἶναι αὐστηρῶς θετικόν, δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν τ τοιοῦτον ὥστε $(\chi_\iota \pm \tau\psi_\iota) \geqq 0$. Διὰ τοιαύτας ἐκλογὰς τοῦ τ λαμβάνομεν πραγματοποιησίμους λύσεις. Ἔστω τ' μία τοιαύτη λύσις καὶ τὰ προκύπτοντα δυνατὰ διανύσματα

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \chi_1 + \tau'\psi_1 \\ \chi_2 + \tau'\psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\rho + \tau'\psi_\rho \end{bmatrix}, \qquad \Psi_2 = \begin{bmatrix} \chi_1 - \tau'\psi_1 \\ \chi_2 - \tau'\psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\rho + \tau'\psi_\rho \end{bmatrix}.$$

Ἀλλὰ $X = 1/2\Psi_1 + 1/2\Psi_2$, ὅπερ δηλοῖ ὅτι τὸ X δὲν εἶναι ἄκρον σημεῖον, οὕτως ἔχομεν ἄτοπον καὶ τὰ διανύσματα P_ι δὲν δύνανται νὰ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Κατὰ τὴν λύσιν προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἑπομένως, πρέπει νὰ ἐξετάζωμεν μόνον ἐκείνους τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς γραμμικοὺς συνδυασμοὺς (47) εἰς τοὺς ὁποίους τὰ γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα λαμβάνουν θετικοὺς συντελεστὰς καὶ τὰ μένοντα διανύσματα λαμβάνουν μηδενικοὺς συντελεστάς.

Ὑπάρχει ὅμως ἀνάγκη ἑτέρου ἑνὸς θεωρήματος διὰ τὴν γενικὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου simplex. Ὑποτεθείσθω ὅτι ἔχομεν λύσιν εἰς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχουσαν κ, ἂς εἴπωμεν, θετικὰς συντεταγμένας, ποῦ ἔχομεν $\kappa > \rho$; Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἔχομεν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ συνόλου λύσεων. Δυνάμεθα νὰ κινηθῶμεν ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον καὶ ἀρχίσωμεν ἐν συνεχείᾳ τὴν διαδικασίαν λύσεως simplex; Ἀπάντησιν εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο δίδει τὸ θεώρημα 3. Ἂς προηγηθῇ ὅμως εἷς ὁρισμός:

Ἓν διάνυσμα λύσεως X τοῦ ὁποίου οἱ θετικοὶ συντελεσταὶ σχετίζονται μὲ γραμμικῶς ἀνεξάρτητα διανύσματα εἰς τὸν χῶρον τῶν ἀπαιτήσεων καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ἀπομένοντες συντελεσταὶ εἶναι μηδὲν καλεῖται ***βασικὴ λύσις*** (basic solution).

Θεώρημα 3. Ἂν ἡ (47) ἔχῃ δυνατὴν λύσιν, τότε ἔχει βασικὴν λύσιν.

Ἀπόδειξις. Ἂς λάβωμεν τὰ $P_1, \ldots, P_\kappa$ ἐξηρτημένα (ἂν δὲν εἶναι, ἤδη ἔχομεν βασικὴν λύσιν). Τότε ὑπάρχουν ἀριθμοὶ ψ_ι ὄχι ἅπαντες μηδενικοὶ τοιοῦτοι ὥστε

$$\psi_1 P_1 + \cdots + \psi_\kappa P_\kappa = 0. \tag{49}$$

Ὑποτεθείσθω ὅτι $\psi_\iota > 0$ διά τινα ι (ἂν ὄχι, πολλαπλασιάζομεν τὴν (49) ἐπὶ -1), καὶ ὅτι ἡ δυνατὴ λύσις εἶναι

$$\chi_1 P_1 + \cdots + \chi_\kappa P_\kappa = P_0. \tag{50}$$

Τώρα ἂς ἐκλέξωμεν ἀριθμὸν θ, ἔνθα

$$\theta = \underset{\iota}{\text{μέγιστον}} \frac{\psi_\iota}{\chi_\iota} = \frac{\psi_\pi}{\chi_\pi}$$

διά τινα ὡρισμένον ἀκέραιον π. Ἀφοῦ $\psi_\iota > 0$, $\chi_\iota > 0$, ἔχομεν $\theta > 0$. Πολλαπλασιάζομεν τὴν (49) ἐπὶ $1/\theta$ καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ ἀποτέλεσμα ἐκ τῆς (50),

$$\left(\chi_1 - \frac{\psi_1}{\theta}\right) P_1 + \cdots + \left(\chi_\kappa - \frac{\psi_\kappa}{\theta}\right) P_\kappa = P_0. \tag{51}$$

Οὕτως ἔχομεν πραγματοποιήσιμον λύσιν, διότι ἐκ κατασκευῆς

$$\theta \geq \frac{\psi_\iota}{\chi_\iota}$$

ἢ

$$\chi_\iota - \frac{\psi_\iota}{\theta} \geq 0.$$

Διὰ τὸν π-ιοστὸν συντελεστὴν εἰς (51) ἔχομεν ἐπίσης

$$\chi_\pi - \frac{\psi_\pi}{\theta} = \chi_\pi - \frac{\psi_\pi}{\frac{\psi_\pi}{\chi_\pi}} = \chi_\pi - \chi_\pi = 0\,.$$

Οὕτως ἔχομεν εἰς τὴν (51) τὸ P_0 ἐκφραζόμενον ὡς μὴ ἀρνητικὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν $\kappa - 1$ διανυσμάτων. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν διαδικασίαν ταύτην μέχρις ὅτου λάβωμεν βασικὴν λύσιν.

Ἐπιστρέφοντες τώρα εἰς τὴν μέθοδον simplex, παρατηροῦμεν ὅτι πρωταρχικῶς συνίσταται ἐκ συνόλου πράξεων, αἱ ὁποῖαι θὰ μετακινήσουν τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν ἐξ ἑνὸς ἄκρου σημείου τοῦ κυρτοῦ συνόλου τῶν δυνατῶν λύσεων εἰς ἓν παρακείμενον ἄκρον σημεῖον, τὸ ὁποῖον δίδει εἰς τὴν φ τιμὴν τουλάχιστον τὴν αὐτήν. Ἂν ὑπάρχουν ἄρισται λύσεις καὶ ἂν ἱκανοποιῆται ἡ μὴ ἐκφυλισμένη ὑπόθεσις, ἡ διαδικασία θὰ μετακινήσῃ τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν εἰς ἄκρον σημεῖον πλέον ἀπομεμακρυσμένον τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων (ἢ εἰς ἄκρον σημεῖον πλησιέστερον πρὸς τὴν ἀρχὴν εἰς τὰ προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως), καὶ τὸ ἄκρον τοῦτο σημεῖον θὰ δώσῃ τιμὴν διὰ τὴν φ μεγίστην (ἢ ἐλαχίστην).

Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ μέθοδος θὰ διασαφισθῇ δι' ἑνὸς ἁπλοῦ προβλήματος τοῦ ὁποίου ἡ ἀρίστη λύσις εἶναι ἐμφανὴς ἐκ τῆς καταλλήλου γεωμετρίας εἰς τὸν δισδιάστατον χῶρον, τὸ μέγιστον μέρος τῆς χρησιμοποιηθησομένης τεχνικῆς κατὰ τὴν λύσιν μακροσκελεστέρων προβλημάτων δύναται νὰ παρουσιασθῇ εἰς τὸ ἁπλοῦν τοῦτο σχῆμα καὶ ἀπαιτοῦνται δύο μόνον ἐπαναλήψεις τῆς μεθόδου πρὸς ἐπίτευξιν ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ πρόβλημα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς $\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2$ ὑποκειμένης εἰς

$$\begin{aligned} \chi_1 &\leqq 4 \\ \chi_2 &\leqq 6 \\ \chi_1 + \chi_2 &\leqq 8 \\ \chi_\iota &\geqq 0 \qquad (\iota = 1,2) \end{aligned}$$

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς χαλαρῶν μεταβλητῶν λαμβάνομεν τὸ σύστημα ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_3 &= 4 \\ \chi_2 + \chi_4 &= 6 \\ \chi_1 + \chi_2 + \chi_5 &= 8, \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ἐξισώσεως διανυσμάτων,

$$\underset{P_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \chi_1 + \underset{P_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \chi_2 + \underset{P_3}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \chi_3 + \underset{P_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \chi_4 + \underset{P_5}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \chi_5 = \underset{P_0}{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}}.$$

Τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι τότε ἡ μεγιστοποίησις τῆς

$$\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 \tag{52}$$

ὑποκειμένης εἰς

$$\begin{aligned} P_1\chi_1 + P_2\chi_2 + P_3\chi_3 + P_4\chi_4 + P_5\chi_5 &= P_0. \\ \chi_\iota &\geqq 0 \qquad (\iota = 1, \cdots, 5). \end{aligned} \tag{53}$$

Θεωρήσατε τὸν πίνακα simplex τῆς ἑπομένης σελίδος. Τὰ διανύσματα $P_1, \cdots, P_5$, καὶ P_0 ἐμφανίζονται εἰς τὸ πρῶτον στάδιον, ἡ σειρὰ ὅμως ἐμφανίσεώς των ἔχει ἀλλάξει. Πρῶτον ἐμφανίζεται τὸ P_0 ἀκολουθούμενον ἀπὸ τὰ διανύσματα βάσεως P_3, P_4, P_5. Τότε εἰσέρχονται τὰ ἐκτὸς βάσεως διανύσματα P_1 καὶ P_2. Αἱ τιμαὶ γ_j εἰς τὴν πρώτην σειρὰν τοῦ πίνακος εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν μεταβλητῶν εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν (52) τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν. Τὸ ζ_j εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τοῦ διανύσματος εἰς τὴν γ_j στήλην εἰς τ' ἀριστερὰ τοῦ πίνακος ἐπὶ τὸ j διάνυσμα ἐντὸς τοῦ πίνακος. Οὕτω, τὸ ζ_0, τὸ στοιχεῖον εἰς τὴν ζ_j σειρὰν διὰ τὴν στήλην τῶν P_0 εἶναι $0.4 + 0.6 + 0.8 = 0$.

Ἀφοῦ εἰς τὸ πρῶτον στάδιον τὸ διάνυσμα εἰς τὴν στήλην τῶν γ_j εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα, ἡ σειρὰ τῶν ζ_j ἀποτελεῖται ἀπὸ μηδενικὰ καὶ μόνον. Ἐπίσης, τὰ στοιχεῖα εἰς τὸ πρῶτον στάδιον τοῦ πίνακος, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται εἰς τὴν τομὴν τῆς σειρᾶς τῶν P_i καὶ τῆς στήλης τῶν P_j θὰ δηλοῦνται α_{ij}. Π.χ. τὸ α_{30} δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν 4 ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὴν τομὴν τῆς σειρᾶς τῶν P_3 καὶ τῆς στήλης τῶν P_0 καὶ α_{51} δηλοῖ τὸν ἀριθμὸν 1 κείμενον εἰς τὴν τομὴν τῆς σειρᾶς τῶν P_5 καὶ τῆς στήλης τῶν P_1.

Πίναξ Simplex

γ_j		0	0	0	0	2	5
	Διάνυσμα	P_0	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2
0	P_3	4	1	0	0	1	0
$0 \leftarrow$	P_4	6	0	1	0	0	1
0	P_5	8	0	0	1	1	1
ζ_j		0	0	0	0	0	0
$\zeta_j - \gamma_j$		0	0	0	0	-2	-5
0	P_3	4	1	0	0	1	0
$5 \rightarrow$	P_2	6	0	1	0	0	1
$0 \leftarrow$	P_5	2	0	-1	1	1	0
ζ_j		30	0	5	0	0	5
$\zeta_j - \gamma_j$		30	0	5	0	-2	0
0	P_3	2	1	1	-1	0	0
5	P_2	6	0	1	0	0	1
$2 \rightarrow$	P_1	2	0	-1	1	1	0
ζ_j		34	0	3	2	2	5
$\zeta_j - \gamma_j$		34	0	3	2	0	0

Ἡ καταγραφὴ καὶ μόνον τῶν διανυσμάτων κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν παρέχει δυνατὴν λύσιν, διότι ὅλα τὰ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πίνακος ἐμφανιζόμενα διανύσματα ἔχουν ἐκφρασθῆ μέσῳ τῶν εἰς τὴν πλευρὰν ἐμφανιζομένων διανυσμάτων, καὶ τὸ P_0 εἶναι θετικόν. Ἂν $\chi_3 = 4, \chi_4 = 6, \chi_5 = 8$, τότε διὰ νὰ ἱκανοποιηθῇ ἡ (53), τὰ χ_1 καὶ χ_2 πρέπει νὰ εἶναι ἀμφότερα μηδενικά. Ἐκ τούτου, ἡ $(0,0)'$ ἀποτελεῖ λύσιν πραγματοποιήσιμον καὶ ἔχομεν διὰ τὸ σημεῖον αὐτὸ $\varphi = 2(0) + 5(0) + 0 + 0 + 0 = 0$.

Διὰ νὰ ἴδωμεν κατὰ πόσον ἡ λύσις εἶναι ἡ ἀρίστη δυνατή, ἂν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προχωρήσωμεν ἢ ἂν δὲν ὑπάρχῃ πεπερασμένη λύσις, χρησιμοποιοῦμεν τὸν κάτωθι ἔλεγχον:

1. Ἂν ὅλα τὰ $\zeta_j - \gamma_j \geq 0$, ἔχομεν λάβει ἀρίστην λύσιν.
2. Ἂν $\zeta_j - \gamma_j < 0$ διὰ τινα στήλην, τότε ἓν τῶν δύο συμβαίνει:

α. ἂν οὐδὲν α_{ij} εἰς τὴν στήλην ταύτην εἶναι θετικόν, ἡ λύσις εἶναι ἄπειρος (ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις)·

β. ἂν $\alpha_{ij} > 0$ διά τινα ι εἰς τὴν στήλην ταύτην, ἀπαιτοῦνται περαιτέρω ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας.

Ἂν πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὴν διαδικασίαν, προχωροῦμεν ὡς ἑξῆς. Ἓν διάνυσμα ἐκτὸς τῆς βάσεως θὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς ἀντικατάστασιν διανύσματος βάσεως, οὕτως ἔχομεν διάνυσμα «ἀντικαθιστὸν» (μὲ ὑπόσημον κ) καὶ διάνυσμα «ἀντικαθιστάμενον» (μὲ ὑπόσημον ρ). Τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα θὰ εἶναι τὸ διάνυσμα ἐκεῖνο ἐκτὸς βάσεως μὲ τὴν μεγίστην ἀρνητικὴν τιμὴν $\zeta_j - \gamma_j$. Εἰς τὸ πρῶτον στάδιον τοῦ πίνακος, παραδείγματος χάριν, θὰ ἐκλέξωμεν ὡς ἀντικαθιστὸν διάνυσμα τὸ P_2 ἀφοῦ διὰ P_2 ἔχομεν $\zeta_j - \gamma_j = -5$.

Τὸ ἀντικαθιστάμενον διάνυσμα P_ρ ὁρίζεται μέσῳ τοῦ κανόνος.

$$(55) \qquad \theta = \underset{\iota}{\text{ἐλάχιστον}} \; \frac{\alpha_{\iota 0}}{\alpha_{\iota\kappa}}, \; \alpha_{\iota\kappa} > 0, \qquad (\iota = 3,\ 4,\ 5),$$

ἔνθα τὸ ι ἀναφέρεται εἰς τὰ ὑπόσημα τῶν διανυσμάτων βάσεως εἰς τὸ δοθὲν στάδιον. Τοῦτο μᾶς λέγει νὰ διαιρέσωμεν δι' ἑκάστης τῶν συνιστωσῶν τοῦ ἀντικαθιστῶντος διανύσματος P_2 τὰς ἀντιστοίχους συντεταγμένας τοῦ διανύσματος P_0 (δηλουμένας διὰ $\alpha_{\iota 0}$). Τὸ σχετιζόμενον μὲ τὸν μικρότερον λόγον διάνυσμα εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ. Εἰς τὸ πρῶτον στάδιον ἔχομεν διὰ τοὺς τρεῖς λόγους

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_{32}} \text{ μὴ ὡρισμένον}\cdot \ (\alpha_{32} = 0) \qquad \frac{\alpha_{40}}{\alpha_{42}} = \frac{6}{1} = 6\cdot \qquad \frac{\alpha_{50}}{\alpha_{52}} = \frac{8}{1} = 8.$$

Ἑπομένως τὸ P_4 ἐκλέγεται διὰ ν' ἀντικατασταθῇ (τοῦτο δηλοῦται διὰ βέλους μὲ φορὰν ἔξωθεν τοῦ πίνακος).

Τὸ δεύτερον στάδιον τοῦ πίνακος ἔχει τώρα σχηματισθῆ πρὸς ἀντανάκλασιν τῶν μεταβολῶν αὐτῶν. Γράφομεν πρῶτον εἰς τὴν δευτέραν στήλην τὰ νέα διανύσματα βάσεως P_3, P_2, P_5, καὶ εἰς τὰ ἀριστερὰ ἑκάστου τοποθετοῦμεν εἰς τὴν στήλην τῶν γ_j ἕνα κατάλληλον συντελεστὴν ληφθέντα ἐκ τῆς (52). Προσδιορίζομεν ἐν συνεχείᾳ τὰ στοιχεῖα τὰ εἰσερχόμενα εἰς τὴν ἔναντι σειρὰν τοῦ νέου διανύσματος βάσεως P_2. Ταῦτα λαμβάνονται μέσῳ τῆς ἐκφράσεως

$$(56) \qquad \alpha'_{\kappa j} = \frac{\alpha_{\rho j}}{\alpha_{\rho\kappa}}.$$

Ἔχομεν τώρα, $\rho = 4$ καὶ $\kappa = 2$, ἀφοῦ τὸ ἀντικατασταθὲν διάνυσμα ἦτο P_4 καὶ τὸ ἀντικαταστῆσαν P_2. Οὕτως $\alpha_{\rho\kappa} = \alpha_{42} = 1$. Ὁ κανὼν κατόπιν μᾶς λέγει νὰ θέσωμεν ὡς στοιχεῖα εἰς τὴν νέαν σειρὰν τὰ στοιχεῖα τῆς αὐτῆς σειρᾶς τοῦ προηγηθέντος σταδίου διῃρημένα διὰ 1 (εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ κανὼν μόνον δηλοῖ ὅτι πρέπει νὰ θέσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης σειρᾶς εἰς τὴν ἔναντι τοῦ P_2 σειρὰν τοῦ δευτέρου σταδίου). Τὰ στοιχεῖα εἰς τὰς μενούσας σειρᾶς προσδιορίζονται ὑπὸ τοῦ κανόνος

$$(57) \qquad \alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{p\kappa}} \alpha_{i\kappa} = \alpha_{ij} - (\alpha'_{\kappa j})(\alpha_{i\kappa}).$$

Διὰ παράδειγμα προσδιορίζομεν τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ τεθῇ εἰς τὴν τομὴν τῆς σειρᾶς τῶν P_3 καὶ τῆς στήλης τῶν P_0 εἰς τὸ δεύτερον στάδιον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, $\iota = 3$, $j = 0$, καὶ ἔχομεν ἤδη, $\rho = 4$ καὶ $\kappa = 2$. Ἐκ τούτου, διὰ τὸ στοιχεῖον αὐτὸ ὁ κανὼν δηλοῖ

$$\alpha'_{30} = \alpha_{30} - (\alpha'_{20})(\alpha_{32}) = 4 - 6(0) = 4.$$

Πρὸς προσδιορισμὸν τοῦ ἑπομένου στοιχείου εἰς τὴν αὐτὴν σειράν, α'_{33}, ὁ κανὼς δηλοῖ, ἀφοῦ $\iota = 3$ καὶ $j = 3$,

$$\alpha'_{33} = \alpha_{33} - (\alpha'_{23})(\alpha_{32}) = 1 - (0)(0) = 1 .$$

Τελικῶς, πρὸς προσδιορισμὸν τῶν στοιχείων εἰς τὴν ζ_j σειράν, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον στοιχεῖον εἰς ἑκάστην στήλην ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον εἰς τὴν στήλην τῶν γ_j τοῦ σταδίου τούτου καὶ προσθέτομεν ἐν συνεχείᾳ τὰ γινόμενα (σχηματιζομένου οὕτως ἐσωτερικοῦ γινομένου εἰς ἑκάστην περίπτωσιν). Ἐπὶ παραδείγματι, τὰ στοιχεῖα εἰς τὴν στήλην P_0 τοῦ δευτέρου σταδίου εἶναι 4, 6, 2. Πολλαπλασιάζοντες ἕκαστον τούτων ἐπὶ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα εἰς τὴν στήλην τῶν γ_j καὶ προσθέτοντες κατόπιν, λαμβάνομεν $0.4 + 5.6 + 0.2 = 30$, τὸ πρῶτον στοιχεῖον εἰς τὴν σειρὰν ζ_j.

Συμπληρώνομεν τὰ στοιχεῖα εἰς τὴν σειρὰν $\zeta_j - \gamma_j$ διὰ τὸ δεύτερον στάδιον δι' ἀφαιρέσεως ἐξ ἑκάστου στοιχείου εἰς τὴν σειρὰν ζ_j τοῦ ἀντιστοίχου στοιχείου εἰς τὴν σειρὰν γ_j εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πίνακος. Παρατηροῦμεν ἐκ νέου ὅτι $\zeta_j - \gamma_j < 0$ διά τινα στήλην, οὕτω πρέπει νὰ προβῶμεν εἰς ἑτέραν μίαν ἐπανάληψιν. Ἐπαναλαμβάνομεν τὰς ἀνωτέρω διαδικασίας, ἔνθα τώρα α_{ij} δηλοῖ στοιχεῖον εἰς τὸ δεύτερον στάδιον τοῦ πίνακος καὶ α'_{ij} δηλοῖ στοιχεῖον εἰς τὸ τρίτον στάδιον τοῦ πίνακος.

Εἰς τὸ τρίτον στάδιον τοῦ πίνακος ἕκαστον $\zeta_j - \gamma_j \geqq 0$, οὕτω διὰ τοῦ κριτηρίου simplex ἔχομεν φθάσει εἰς ἀρίστην λύσιν. Τὸ ἐρώτημα τώρα εἶναι, πῶς ἀναγνωρίζομεν τὴν ἀρίστην λύσιν εἰς τὸν πίνακα ; Παρετηρήσαμεν προηγουμένως ὅτι τὰ διανύσματα εἰς τὴν στήλην ὑπὸ τὸν τίτλον «Διάνυσμα» εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ πίνακος ἐκφράζονται μέσῳ τῶν διανυσμάτων εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ πίνακος δι' ἕκαστον στάδιον. Ἐπὶ πλέον, ἡ μέθοδος simplex τοποθετεῖ ἓν ἀνεξάρτητον σύνολον διανυσμάτων εἰς τὴν πλευρὰν ἑκάστου σταδίου, καὶ ἀφοῦ ὁ ἀριθμὸς τῶν τοποθετουμένων διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὰς διαστάσεις τοῦ χώρου ἀπαιτήσεων, ὡς ἔχομεν λάβει, τὰ εἰς τὴν πλευρὰν διανύσματα περικλείουν βάσιν διὰ τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων. Τῷ ὄντι, ἡ μέθοδος simplex διὰ τῶν μετασχηματισμῶν (56) καὶ (57) μετατοπίζει ἐκ μιᾶς βάσεως εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων εἰς ἑτέραν καὶ ἐκ τῶν θεωρημάτων 1 καὶ 2 γνωρίζομεν ὅτι ἑκάστη βάσις θὰ δώσῃ γραμμικοὺς συνδυασμούς, τῶν ὁποίων οἱ συντελεσταὶ μὲ τὴν σειράν των ὁδηγοῦν εἰς ἄκρα σημεῖα τοῦ συνόλου λύσεων εἰς τὸν χῶρον λύσεων. Περαιτέρω, ἡ μέθοδος simplex μᾶς διαβεβαιοῖ ὅτι μετὰ μετατόπισιν τινὰ εἰς τὴν βάσιν ἡ τιμὴ τῆς φ θὰ εἶναι τουλάχιστον τόσον μεγάλη ὅσον ἦτο προηγουμένως.

Πᾶν διάνυσμα εἰς τὸν χῶρον ἀπαιτήσεων δύναται νὰ ἐκφρασθῇ μόνον ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν διανυσμάτων βάσεως δι' ἕκαστον στάδιον. Τοῦτο ἰσχύει, εἰδικώτερον, διὰ τὰ εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ πίνακος διανύσματα, καὶ τὸ σπουδαῖον σημεῖον εἶναι ὅτι αἱ ἐγγραφαὶ εἰς αὐτὸν τοῦτον τὸν πίνακα παρέχουν τοὺς συντελεστὰς εἰς τοὺς γραμμικοὺς αὐτοὺς συνδυασμούς. Παραδείγματα τινὰ θὰ διασαφίσουν τοῦτο.

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ δεύτερον στάδιον τοῦ ἀνωτέρω πίνακος. Ἡ βάσις εἶναι $\{P_3, P_2, P_5\}$. Ὑπὸ τὴν στήλην τῶν P_0 βλέπομεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 6, 2 ἐμφανιζομένους κάτωθι ἀλλήλων. Αἱ ἐγγραφαὶ αὗται μᾶς λέγουν τίνι τρόπῳ τὸ P_0 δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς τῆς βάσεως,

$$P_0 = 4P_3 + 6P_2 + 2P_5$$

$$P_0 = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Παρομοίως, αἱ ἐγγραφαὶ εἰς τὸ δεύτερον στάδιον ὑπὸ τὴν στήλην τῶν P_4 δεικνύουν τίνι τρόπῳ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ τὸ P_4 μέσῳ τῆς βάσεως ταύτης,

$$P_4 = 0P_3 + P_2 - P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Εἰς τὸ τρίτον στάδιον ἡ βάσις εἶναι τὸ σύνολον $\{P_3, P_2, P_1\}$, καὶ μέσῳ τῆς βάσεως ταύτης τὸ διάνυσμα P_0 ἐκφράζεται ὡς ἀκολούθως,

$$P_0 = 2P_3 + 6P_2 + 2P_1 .$$

Παρόμοια σχόλια ἰσχύουν διὰ τὰ διανύσματα $P_1, \cdots, P_5$. Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ ἐπίσης ὅτι εἰς ἕκαστον τῶν γραμμικῶν τούτων συνδυασμῶν τὰ ἐκτὸς βάσεως διανύσματα ἐμφανίζονται καὶ αὐτά, ἕκαστον ὅμως ἔχει συντελεστὴν μηδέν. Ἡ ἀμέσως ἀνωτέρω ἐξίσωσις, ἐπὶ παραδείγματι, εἶναι σύντμησις τῆς

$$P_0 = 2P_3 + 6P_2 + 2P_1 + 0P_4 + 0P_5 .$$

Ὡς συνήθως, ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου δυνατῶν λύσεων εἰς τὸν χῶρον λύσεων, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς διευθετήσεως τῶν ὑποσήμων εἰς τὰ διανύσματα τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ. Οὕτω $\chi_1 = 2$, $\chi_2 = 6$, $\chi_3 = 2$, $\chi_4 = 0$, $\chi_5 = 0$, καὶ τὸ ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων εἶναι

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (52) λαμβάνομεν

$$\varphi = 2(2) + 6(5) + 0(2) + 0(0) = 34\,.$$

Ἀνακεφαλαιώνοντες λέγομεν ὅτι ἡ ἀρίστη λύσις ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἐγγραφῶν εἰς τὴν στήλην τῶν P_0 εἰς τὸ τελευταῖον στάδιον τοῦ πίνακος, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς σειρᾶς τῶν διανυσμάτων εἰς τὸν κατάλληλον γραμμικὸν συνδυασμὸν καὶ μὲ καταλλήλους μηδενικὰς συντεταγμένας προσηρτημένας καθ' ὃν τρόπον ἀνωτέρω ἐδείχθη.

Περαιτέρω ἀνάλυσις

Εἰς τὸ προηγηθὲν κεφάλαιον, ἑκάστη ἀνισότης εἰς τὴν ἀρχικὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος (ἐκτὸς τῶν ὑποθέσεων περὶ μὴ ἀρνητικότητος) ἀπετέλει περιορισμὸν ἔχοντα τὸ σύμβολον $\leqslant$. Τῷ ὄντι τοῦτο δὲν μᾶς περιορίζει διότι δυνάμεθα νὰ λύσωμεν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχον ἀρίστην λύσιν διὰ τῆς μεθόδου simplex καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ περιορισμοὶ εἶναι μαζὶ (1) περιορισμοὶ ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $\leqslant$, (2) ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $\geqslant$, (3) ὑπὸ τὴν ἔννοιαν $=$. Διὰ τὸν πρῶτον ἐξ αὐτῶν, εἴδομεν ἤδη ὅτι περιορισμὸς τῆς μορφῆς ταύτης δύναται νὰ γίνῃ ἐξίσωσις διὰ τῆς προσθέσεως μιᾶς μὴ ἀρνητικῆς χαλαρᾶς μεταβλητῆς. Διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν, εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μετατροπὴ εἰς περιορισμὸν ἐξισώσεως διὰ τῆς χρήσεως ***πλεοναζούσης μεταβλητῆς*** (surplus variable). Π.χ., ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα ἀνισοτήτων

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &\geqslant 2 \\ 2\chi_1 + \chi_3 &\geqslant 5 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, 3,), \end{aligned}$$

δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν μὴ ἀρνητικὰς πλεοναζούσας μεταβλητὰς χ_4 καὶ χ_5, λαμβάνοντες τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 - \chi_4 &= 2 \\ 2\chi_1 + \chi_3 - \chi_5 &= 5 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1, \cdots, 5)\,. \end{aligned}$$

Ὡς συμβαίνει καὶ μὲ τὰς χαλαρὰς μεταβλητάς, αἱ πλεονάζουσαι μεταβλητα εἰσέρχονται εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν μὲ μηδενικοὺς συντελεστάς.

Ἀφοῦ ἡ περιοριστικὴ ἐξίσωσις δὲν χρειάζεται τροποποίησιν, δυνάμεθα τώρα νὰ μετατρέψωμεν πᾶν σύστημα γραμμικῶν ἀνισοτήτων εἰς ἀντίστοιχον σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τούτου, ὑποτεθείσθω ὅτι ἐπιθυμοῦμεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν $\varphi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$ ὑποκειμένην εἰς

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &\geqq 2 \\ 2\chi_1 + \chi_3 &\leqq 5 \\ \chi_2 + 2\chi_3 &= 6 \\ \chi_j &\geqq 0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3). \end{aligned}$$

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ γίνεται : νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ

$$\varphi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5$$

ὑποκειμένη εἰς

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 - \chi_4 &= 2 \\ 2\chi_1 + \chi_3 + \chi_5 &= 5 \\ \chi_2 + 2\chi_3 &= 6 \\ \chi_j &\geqq 0 \qquad (j=1,\ \cdots,\ 5). \end{aligned}$$

Παρετηρήθη ἐπίσης προηγουμένως ὅτι ἡ μεγιστοποίησις τῆς φ εἰς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς $-\varphi$, οὕτω δὲν περιοριζόμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἢ τὴν μέθοδον simplex πρὸ λύσιν αὐτοῦ εἰς τὰ ὅρια τῆς μεγιστοποιήσεως καὶ μόνον. Δι' αὐτὸν ἀκριβῶς τὸν λόγον ἡ διάκρισις μεταξὺ προβλημάτων μεγιστοποιήσεως καὶ προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως εἶναι κάπως τεχνική. Διὰ πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ σημείου τούτου ὅμως θὰ ἔπρεπε νὰ γίνῃ λεπτομερεστέρα σπουδὴ τῆς ἀλγέβρας τῆς μεθόδου simplex, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται εἰς τὸν ἀντικειμενικὸν σκοπὸν τοῦ βιβλίου τούτου. Συνεπῶς, θὰ θεωρῶμεν ἓν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν ὡς διακεκριμένον καὶ θὰ ἐξετάσωμεν τίνι τρόπῳ αἱ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐκτεθεῖσαι διαδικασίαι δύνανται νὰ τροποποιηθοῦν πρὸς λύσιν προβλημάτων ἐλαχιστοποιήσεως.

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιθυμοῦμεν τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς

$$\xi = \chi_1 - 3\chi_2 + 2\chi_3 + 0\chi_4 + 0\chi_5 + 0\chi_6$$

ὑποκειμένης εἰς

$$\begin{aligned} 3\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3 + \chi_4 &= 7 \\ -2\chi_1 + 4\chi_2 \qquad\quad + \chi_5 &= 12 \\ -4\chi_1 + 3\chi_2 + 8\chi_3 + \chi_6 &= 10 \\ \chi_j &\geqq 0 \qquad (j=1,\ \cdots,\ 6) \end{aligned}$$

Ὑπὸ μορφὴν διανυσμάτων οἱ περιορισμοὶ δύνανται νὰ γραφοῦν

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \chi_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \chi_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \chi_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_5 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_6 = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ἂς παραστήσωμεν μὲ P_i τὸ διάνυσμα τὸ σχετιζόμενον μὲ τὸ χ_i καὶ ἔστω

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Τὸ πρῶτον στάδιον τοῦ πίνακος ἐμφανίζεται ὡς ἀκολούθως, ἔνθα πάλιν τοποθετοῦμεν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα εὐθὺς μετὰ τὸ P_0.

γ_j			0	0	0	1	—3	2
	Διάνυσμα	P_0	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3
0	P_4	7	1	0	0	3	—1	2
0	P_5	12	0	1	0	—2	4	0
0	P_6	10	0	0	1	—4	3	8
	ζ_j	0	0	0	0	0	0	0
	$\zeta_j - \gamma_j$	0	0	0	0	—1	3	2

Εἰς ἓν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως ἐκλέγομεν τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσέλθῃ εἰς τὴν βάσιν (τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα) συμφώνως πρὸς τὸν κάτωθι κανόνα: τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα εἶναι τὸ ἔχον τὴν μεγίστην τιμὴν $\zeta_j - \gamma_j$ διὰ $\zeta_j - \gamma_j > 0$. Τὸ διάνυσμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀντικατασταθῇ προσδιορίζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς εἰς τὰ προβλήματα μεγιστοποιήσεως καὶ οἱ μετασχηματισμοὶ (56) καὶ (57) οἱ ἐπιτρέποντες μετακινήσεις ἐξ ἑνὸς σταδίου τοῦ πίνακος εἰς ἕτερον εἶναι ἐπίσης οἱ αὐτοὶ διὰ τὸ πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως. Τελικῶς, ἀκολουθεῖται ὁ κατωτέρω ἔλεγχος διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἂν μία λύσις εἶναι ἀρίστη. Ἂν ἕκαστον $\zeta_j - \gamma \leqq 0$, τότε ἔχει ἐπιτευχθῇ ἀρίστη λύσις. Ἀφ' ἑτέρου, ἂν $\zeta_j - \gamma_j > 0$ διά τι διάνυσμα, ὑπάρχουν δύο δυνατότητες. (1) Ἂν εἰς τὸ διάνυσμα διὰ τὸ ὁποῖον $\zeta_j - \gamma_j > 0$, ἔχωμεν ἕκαστον $\alpha_{ij} \leqq 0$, τότε δὲν ὑπάρχει ἀρίστη λύσις. (2) Ἂν εἰς τὸ διάνυσμα διὰ τὸ ὁποῖον $\zeta_j - \gamma_j > 0$ τουλάχιστον ἓν $\alpha_{ij} > 0$, ἀπαιτοῦνται περαιτέρω ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, π. χ., ἔχομεν $\zeta_j - \gamma_j > 0$ διά τινα στήλην καὶ εἰς τὴν στήλην ταύτην ἔχομεν κάποιο $\alpha_{ij} > 0$. Τὸ μέγιστον θετικὸν $\zeta_j - \gamma_j$ σχετίζεται μὲ τὸ διάνυσμα P_2, οὕτω τὸ P_2 εἶναι τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα διὰ τὸ δεύτερον στάδιον καὶ ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ ὅτι τὸ P_5 εἶναι τὸ ὑπὸ τοῦ P_2 ἀντικαθιστάμενον διάνυσμα. Ὁ ἀναγνώστης δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ ἐπίσης ὅτι χρειάζεται ἑτέρα ἐπανάληψις τῆς διαδικασίας καὶ ὅτι εἰς τὸ τρίτον στάδιον ἐπιτυγχάνεται ἀρίστη λύσις, ἡ $\chi_1 = 4, \chi_2 = 5, \chi_6 = 11$, μὲ τὸ ἀπομένον $\chi_i = 0$. Ἡ ἐλαχίστη τιμὴ εἶναι

$$\xi = 4 - 3(5) + 2(0) + 0(0) + 0(0) + 0(11) = -11$$

Προσδιορισμὸς ἀρχικῆς βασικῆς λύσεως

Εἰς ὅλα τὰ μέχρι τοῦδε λυθέντα προβλήματα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἡ στήλη - διάνυσμα τῶν σταθερῶν P_0 ἦτο θετικὴ καὶ ἡ εἰσαγωγὴ χαλαρῶν μεταβλητῶν παρῆχε κατάλληλον ἀριθμὸν μοναδιαίων διανυσμάτων οὕτως ὥστε ὁ χῶρος ἀπαιτήσεων ἠδύνατο νὰ ζευχθῇ ὑπ' αὐτῶν καὶ μόνον. Συνεπῶς, ἁπλοῦν ἀπετέλει θέμα ἡ ἔκφρασις τοῦ P_0 μέσῳ τῶν (ἀνεξαρτήτων) αὐτῶν διανυσμάτων καὶ ἡ ἐπίτευξις ἀρχικῆς λύσεως ἄκρου σημείου μὲ τὴν ὁποίαν ἠδύνατο ν' ἀρχίσῃ ἡ μέθοδος simplex. Ἐπὶ παραδείγματι, ἂς θεωρήσωμεν ἓν πρόβλημα προηγουμένως ἐξετασθέν:

νὰ μεγιστοποιηθῇ $\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2$ ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς

$$\begin{aligned} \chi_1 + 4\chi_2 &\leqslant 24 \\ 3\chi_1 + \chi_2 &\leqslant 21 \\ \chi_1 + \chi_2 &\leqslant 9 \\ \chi_j &\geqslant 0 \qquad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν χαλαρῶν μεταβλητῶν οἱ περιορισμοὶ δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_1 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \chi_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \chi_5 = \begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Τρία μοναδιαῖα διανύσματα ἐμφανίζονται τώρα εἰς τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ἐξισώσεως, οὕτω διὰ θεωρήσεως δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἓν ἀρχικὸν ἄκρον σημεῖον: $\chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 24, \chi_4 = 21, \chi_5 = 9$. Τοῦτο δύναται νὰ φανῇ κατ' ἄλλον τρόπον, ἂν γράψωμεν τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὑπὸ μορφὴν μήτρας,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix},$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα ἐμφανίζονται ὡς ταυτοτικὴ ὑπομήτρα καταλλήλου τάξεως εἰς τὴν μήτραν τῶν περιορισμῶν.

Εἰς τὴν πραγματικότητα, ἡ μέθοδος αὕτη προσδιορισμοῦ ἀρχικοῦ ἄκρου σημείου δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁποτεδήποτε ἡ μήτρα περιορισμῶν περιέχῃ ταυτοτικὴν ὑπομήτραν καταλλήλου τάξεως, καὶ δὲν ἐξαρτᾶται κατ' ἀνάγκην ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς χαλαρῶν μεταβλητῶν. Ὁπωσδήποτε, δυνάμεθα νὰ συναντήσωμεν προβλήματα μὴ ἔχοντα ταυτοτικὴν ὑπομήτραν ὡς τμῆμα τῆς μήτρας περιορισμῶν, ἀκόμη καὶ ὅταν ἔχῃ εἰσαχθῇ κατάλληλος ἀριθμὸς χαλαρῶν ἢ πλεοναζουσῶν μεταβλητῶν. Ὁ προσδιορισμὸς ἀρχικῆς λύσεως εἰς ἄκρον σημεῖον εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς δὲν εἶναι συνήθως εὐχερής. Εἰσάγομεν τώρα γενικὴν μέθοδον διὰ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων. Ὑποτεθείσθω ὅτι θέλομεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν $\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2$ ὑποκειμένην εἰς τοὺς περιορισμοὺς

)58)

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &\geqslant 9 \\ 3\chi_1 + \chi_2 &\geqslant 21 \\ \chi_1 + 4\chi_2 &\leqslant 24 \\ \chi_i &\geqslant 0 \qquad (j = 1,2) \end{aligned}$$

Εἰσάγοντες πλεοναζούσας μεταβλητὰς εἰς τὰς πρώτην καὶ δευτέραν ἀνισότητας καὶ χαλαρὸν διάνυσμα εἰς τὴν τρίτην λαμβάνομεν τὸ κάτωθι πρόβλημα: νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ

$$\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 \quad \text{ὑποκειμένη εἰς}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\chi_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \cdots, 5)$$

Ἡ μήτρα περιορισμῶν A δὲν περιέχει ταυτοτικὴν ὑπομήτραν καταλλήλου τάξεως. Ἀλλάσσομεν τώρα τὸ πρόβλημα ἐπισυνάπτοντες εἰς τὰ διανύσματα — στήλας τῆς A ἐπαρκῆ ἀριθμὸν μοναδιαίων διανυσμάτων λαμβάνοντες οὕτω μήτραν B ἔχουσαν ταυτοτικὴν ὑπομήτραν καταλλήλου τάξεως. Ἐπίσης, ἕκαστον τῶν οὕτω συναπτομένων διανυσμάτων καλεῖται *τεχνητὸν* διάνυσμα καὶ εἰσάγομεν μίαν ἀντίστοιχον μεταβλητὴν χ_ι, καλουμένην *τεχνητὴν* μεταβλητήν. Τὸ ἀποτέλεσμα ἔχει ὡς ἑξῆς,

(59)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ 5 \\ \chi_6 \\ \chi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\chi_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \cdots, 6)$$

ἔνθα χ_5 καὶ χ_6 εἶναι τεχνηταὶ μεταβληταί, χ_3 καὶ χ_4 εἶναι πλεονάζουσαι μεταβληταί, καὶ χ_7 εἶναι χαλαρὰ μεταβλητή.

Εὐχερῶς τώρα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν βασικὴν λύσιν εἰς τὸ νέον πρόβλημα. Μολονότι ἡ λύσις αὕτη δὲν εἶναι πραγματοποιήσιμος εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα, δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν τὴν διαδικασίαν simplex μὲ αὐτὴν καὶ νὰ φθάσωμεν εἰς βάσιν ἀποτελουμένην ἐκ διανυσμάτων — στηλῶν τῆς B μὴ περιέχουσαν τεχνητὰ διανύσματα. Ἀφοῦ τοιαύτη βάσις θ' ἀποτελῆται ἐπίσης ἐκ διανυσμάτων — στηλῶν τῆς μήτρας A, θὰ ἔχωμεν τότε λύσιν εἰς ἄκρον σημεῖον εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Ἐν ἄλλοις λόγοις, χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον simplex διὰ νὰ ὁδηγήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν τεχνητῶν μεταβλητῶν εἰς τὸ μηδέν. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἂν δώσωμεν μίαν τῶν κάτωθι ἑρμηνειῶν εἰς τὴν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ γ_ι ἑκάστης τεχνητῆς μεταβλητῆς χ_ι εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν. Ἂν θέλωμεν νὰ μεγιστοποιήσωμεν τὴν φ, ἔστω $\gamma_\iota = -M$, ἔνθα M εἰς αὐθαιρέτως μέγας θετικὸς ἀριθμὸς (τὸ M λαμβάνεται τοσοῦτον μέγα ὥστε ὁ συντελεστὴς πάσης μὴ τεχνητῆς μεταβλητῆς εἶναι ἀμελητέος ἐν συγκρίσει πρὸς αὐτόν). Ἂν θέλωμεν νὰ ἐλαχιστοποιήσωμεν τὴν φ, ἔστω $\gamma_i = M$, διὰ M ὡς ἀνωτέρω. Τοῦτο ἔχει τὸ ἀποτέλεσμα τῆς παροχῆς συντελεστῶν εἰς τὰς τεχνητὰς μεταβλητὰς τοσοῦτον δυσμενῶν, ὥστε ἡ τιμὴ τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως δύναται πάντοτε νὰ βελτιωθῇ ἐνόσῳ παραμένῃ εἰς βάσιν μοναδιαῖον διάνυσμα.

Πρὸς ἀνακεφαλαίωσιν: ἂν διὰ θεωρήσεως δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀρχικὴν λύσιν εἰς ἄκρον σημεῖον, εἰσάγομεν τεχνητὰς μεταβλητὰς καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὴν μέθοδον simplex πρὸς λύσιν τοῦ νέου προβλήματος. Αὕτη ὁδηγεῖ εἰς λύσιν ἄκρου σημείου τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος (ἂν τοῦτο ἔχῃ λύσεις)· χρησιμοποιοῦμεν ἐν συνεχείᾳ τὴν λύσιν ταύτην διὰ νὰ ἀρχίσωμεν τὴν διαδικασίαν simplex πρὸς λύσιν τοῦ ἀρχικοῦ προβλήματος. Δύναται ἐπίσης νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἀρχίσωμεν κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν μὲ ἐπηυξημένον πρόβλημα καὶ ἐπιτύχωμεν ἀρίστην αὐτοῦ λύσιν, ἡ ὁποία δὲν ἀποτελεῖ λύσιν ἄκρου σημείου εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα (δηλαδὴ ὑπάρχει μία τουλάχιστον τεχνητὴ μεταβλητὴ εἰς ἀρίστην λύσιν τοῦ ἐπηυξημένου προβλήματος), τότε τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα δὲν ἔχει δυνατὰς λύσεις. Συμβατικῶς ἀρχίζομεν, ἂς λεχθῇ παρεμπιπτόντως, μὲ ἓν μὴ ἀρνητικὸν διάνυσμα — στήλη P_0 εἰς τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου simplex διὰ προβλήματα περιέχοντα τεχνητὰς μεταβλητάς. Ἂν μία συνιστῶσα τοῦ διανύσματος τούτου εἶναι ἀρχικῶς ἀρνητική, τότε ἁπλῶς πολλαπλασιάζομεν μίαν κατάλληλον περιοριστικὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ -1.

Δυνάμεθα νὰ διασαφηνίσωμεν τὰς ἐννοίας αὐτὰς σχηματίζοντες τὸ πρῶτον στάδιον τῆς λύσεως simplex διὰ τὸ πρόβλημα τοῦ ὁποίου οἱ περιορισμοὶ ἐκφράζονται ὑπὸ μορφὴν μήτρας εἰς τὴν (59). Ἀφοῦ μεγιστοποιῶμεν, ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος συνάρτησις διὰ τὸ πρόβλημα (59) εἶναι

$$\varphi = 2\chi_1 + 5\chi_2 + 0\chi_3 + 0\chi_4 - M\chi_5 - M\chi_6 + 0\chi,$$

ἔνθα τὸ M ἔχει τὴν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν ἑρμηνείαν. Σχηματίζεται τότε τὸ πρῶτον στάδιον τῆς λύσεως simplex. Τὸ διάνυσμα μὲ τὴν μεγίστην ἀρνητικὴν $\zeta_j - \gamma_j$ εἶναι τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα. Ἡ μεγίστη ἀρνητικὴ τιμὴ εἶναι $-4M-2$, οὕτω τὸ P_1 εἰσέρχεται εἰς τὴν βάσιν. Τὸ διάνυσμα πρὸς ἀντικατάστασιν εὑρίσκεται ἂν διαιρέσωμεν τὰς συνιστώσας τοῦ P_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων συνιστωσῶν τοῦ P_1. Τὸ σχετιζόμενον μὲ τὸν μικρότερον τῶν προκυπτόντων λόγων διάνυσμα εἶναι τὸ διά-

γ_j			$-M$	$-M$	0	2	5	0	0
	Διάνυσμα	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
$-M$	P_5	9	1	0	0	1	1	-1	0
$-M$	P_6	21	0	1	0	3	1	0	-1
0	P_7	24	0	0	1	1	4	0	0
	ζ_j		$-M$	$-M$	0	$-4M$	$-2M$	M	M
	$\zeta_j - \gamma_j$		0	0	0	$-4M-2$	$-2M-5$	M	M

νυσμα τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τῆς βάσεως. Ὁ μικρότερος λόγος εἶναι 21/3, οὕτω, τὸ τεχνητὸν διάνυσμα P_6, ἐξέρχεται τῆς βάσεως. Συνεχίζοντες κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ λάβωμεν λύσιν ἄκρου σημείου εἰς τὸ πρόβλημα (58) καὶ δυνάμεθα νὰ συνεχίσωμεν περαιτέρω διὰ νὰ εὕρωμεν ἀρίστην λύσιν.

Ἐκφυλισμὸς εἰς τὸν γραμμικὸν προγραμματισμὸν

Πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς ἐξετάσεώς μας τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ καὶ τῆς μεθόδου simplex ἐδέχθημεν ὅτι τὸ P_0, τὸ διάνυσμα — στήλη τῶν σταθερῶν εἰς τὸ πρόβλημα, δὲν ἐκφράζεται ὡς γραμμικὸς συνδυασμὸς ὀλιγωτέρων τῶν ρ γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων διανυσμάτων, ὅπου ρ ὁ βαθμὸς τῆς μήτρας τῶν περιορισμῶν. Αὕτη καλεῖται συνήθως ὑπόθεσις μὴ ἐκφυλισμένη καὶ πᾶν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ διὰ τὸ ὁποῖον αὕτη δὲν ἰσχύει καλεῖται ἐκφυλισμένον. Ὁ ἐκφυλισμὸς δημιουργεῖ δυσχερῆ θεωρητικὰ προβλήματα, εἶναι ὅμως εὐτυχῶς μικρᾶς πρακτικῆς σημασίας διότι εἶναι ἁπλοῦν θέμα ἡ τροποποίησις τοῦ ἀλγορίθμου simplex (καὶ ἄλλων ἐπίσης ἀλγορίθμων) διὰ νὰ προσαρμοσθῇ πρὸς αὐτόν. Ἐπὶ παραδείγματι, κατὰ τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου simplex ἔχομεν ἐκφυλισμὸν ὅταν δύο ἢ πλείονες τῶν λόγων (55) εἶναι δεσμευμένοι διὰ τὴν ἐλαχίστην τιμήν. Ἂν ὅλα τὰ διανύσματα τὰ σχετιζόμενα μὲ τοὺς δεσμευμένους λόγους ἐξήρχοντο τῆς βάσεως, θὰ ὑπῆρχεν ἀνεπαρκὴς ἀριθμὸς διανυσμάτων παραμενόντων πρὸς συνέχισιν τῆς διαδικασίας λύσεως. Ἀφοῦ ἓν μόνον διάνυσμα πρέπει ν' ἀντικατασταθῇ εἰς ἕκαστον στάδιον τῆς λύσεως, ἀπαιτεῖται συνθήκη «λύσεως» τοῦ δεσμοῦ ὅταν ἐμφανισθῇ. Κατὰ ἕνα κανόνα ἐκλέγομεν τὸ διάνυσμα τὸ σχετιζόμενον μὲ ἕνα τῶν μικροτέρων λόγων μὲ τὸ μικρότερον ὑπόσημον· ἕτερος κανὼν εἶναι νὰ θέτωμεν ἐκτὸς τὸ διάνυσμα τὸ σχετιζόμενον μὲ ἕνα τῶν μικροτέρων λόγων τοῦ ὁποίου τὸ ὑπόσημον ἐμφανίζεται πρῶτον εἰς πίνακα τυχόντων ἀριθμῶν. Μολονότι ὑπάρχουν πλέον περιπεπλεγμένοι κανόνες «λύσεως» δεσμῶν, ἡ πεῖρα ἔχει δείξει ὅτι ἕκαστος τῶν δύο τούτων κανόνων θὰ ἐπιτρέψῃ περαιτέρω ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας καὶ ἐπίτευξιν ἀρίστης λύσεως ἂν ὑφίσταται τοιαύτη.