ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΟΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΝ

Τοῦ κ. W. ALLEN SPIVEY
Καθηγητοῦ Στατιστικῆς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Μίτσιγκαν

Κατὰ μετάφρασιν κ. ΑΝΔΡΕΟΥ ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
Ἀποφοίτου τῆς Α.Β.Σ.

(Συνέχεια ἐκ τοῦ τεύχους 5)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 4ον

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Ἁπλᾶ τινα παραδείγματα

Αἱ πρῶται ἐφαρμογαὶ τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ θὰ παρουσιασθοῦν μέσῳ δύο ὑποθετικῶν παραδειγμάτων. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ταῦτα εἶναι ὑπεραπλοποιημένα προβλήματα, εἶναι διδακτικὰ διότι ἕκαστον παρουσιάζει σπουδαῖα χαρακτηριστικὰ ἀπαντώμενα καὶ εἰς πλέον ἐξεζητημένας ἐφαρμογὰς καὶ ἡ σχετική των ἁπλότης θὰ καταστήσῃ εὐχερῆ τὴν μετάβασιν ἐκ τῆς προηγηθείσης μαθηματικῆς ἀναλύσεως εἰς τὰς ἀκολουθούσας γενικωτέρας ἐφαρμογάς.

Εἷς βιομήχανος δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ἐκ τεσσάρων παραγωγικῶν δραστηριοτήτων. Ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα παράγουν ἓν προϊὸν Χ καὶ ἡ τρίτη καὶ ἡ τετάρτη παράγουν ἓν προϊὸν Ψ. Ὑπάρχουν τρεῖς εἰσροαὶ εἰς ἑκάστην τῶν μεθόδων αὐτῶν: ἐργασία κατ' ἐργάτην - ἑβδομάδα, λίτραι πρώτης ὕλης Α, κυτία πρώτης ὕλης Β. Ἑκάστη μέθοδος ἔχει διαφόρους ἀπαιτήσεις εἰσροῶν· ἑπομένως τὰ προερχόμενα ἐκ τῶν ποικίλων μεθόδων ἀποτελέσματα διαφέρουν ἀκόμη καὶ διὰ παραγούσας τὸ αὐτὸ προϊὸν μεθόδους. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν παραγωγῆς μιᾶς ἑβδομάδος ὁ βιομήχανος δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιήσῃ πλέον τῶν διαθεσίμων ποσοτήτων τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ καὶ τῶν δύο πρώτων ὑλῶν. Ὁ πίναξ 1 παρέχει τὰς σχετικὰς πληροφορίας. Ἕκαστον διάνυσμα παραγωγῆς πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τοὺς περιορισμοὺς εἰς τὴν διαθεσιμότητα ποσοτήτων εἰσροῆς.

Πίναξ 1

	Μία μονὰς προϊόντος Χ		Μία μονὰς προϊόντος Ψ		Διαθεσιμότητες εἰσροῆς
	Μέθοδος 1	Μέθ. 2	Μέθ. 3	Μεθ. 4	
Ἐργάται - ἑβδομάδες	1	2	1	2	20
Λίτραι πρώτης ὕλης Α	6	5	3	2	100
Κυτία ὕλης Β	3	4	9	12	75
Ἐπίπεδα παραγωγῆς	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\chi_1 + 2\chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 &\leqq 20\\
6\chi_1 + 5\chi_2 + 3\chi_3 + 2\chi_4 &\leqq 100\\
3\chi_1 + 4\chi_2 + 9\chi_3 + 12\chi_4 &\leqq 75 .
\end{aligned}
$$

Περαιτέρω, δὲν εἶναι νοητὰ ἀρνητικὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς, οὕτω θέτομεν περιορισμοὺς μὴ ἀρνητικότητος εἰς τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς,

$$
(2)\qquad \chi_j \geqq 0, \quad (j = 1, \cdots, 4).
$$

Ὑποτεθείσθω τώρα ὅτι τὰ ἔσοδα κατὰ μονάδα ἀποτελέσματος τῆς μεθόδου 1 ἐκ πωλήσεως εἶναι \$6, καὶ διὰ τὰς ἄλλας μεθόδους εἶναι \$4, \$7, καὶ \$5. Τότε τὰ ὁλικὰ ἔσοδα διὰ πᾶν διάνυσμα παραγωγῆς $(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)'$ δίδονται διὰ

$$
(3)\qquad R = 6\chi_1 + 4\chi_2 + 7\chi_3 + 5\chi_4 .
$$

Τὸ πρόβλημα εἶναι λοιπὸν νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ (3) ὑποκειμένη εἰς τοὺς περιορισμοὺς (1) καὶ (2). Χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον simplex εἰσάγομεν πρῶτον χαλαρὰς μεταβλητὰς χ_5, χ_6 καὶ χ_7, ἔνθα ἡ χ_5 δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἀχρησιμοποίητος ποσότης ἐργατῶν - ἑβδομάδων, καὶ αἱ χ_6 καὶ χ_7 παριστοῦν μὴ χρησιμοποιηθείσας ποσότητας τῶν πρώτων ὑλῶν A καὶ B, ἀντιστοίχως. Τὰ κάτωθι πινάκια ἐκθέτουν τὰς ποικίλας ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας. Εἰς τὸ πρῶτον στάδιον ἡ μεγίστη ἀρνητικὴ $\zeta_j - \gamma_j$ εἶναι -7, οὕτω τὸ P_3 εἶναι τὸ ἀντικαθιστὸν διάνυσμα. Τὸ πρὸς ἀντικατάστασιν διάνυσμα προσδιορίζεται, ὡς συνήθως, διὰ διαδοχικῶν διαιρέσεων τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος P_0 διὰ τῶν ἀντιστοίχων συνιστωσῶν τοῦ ἀντικαθιστῶντος διανύσματος, ἤτοι τοῦ P_3. Τὸ σχετιζόμενον μὲ τὸν μικρότερον λόγον διάνυσμα εἶναι τὸ πρὸς ἀντικατάστασιν, καὶ ἐδῶ τὸ μικρότερον πηλίκον εἶναι 75/9, οὕτω

γ_j			0	0	0	6	4	7	5
	Διάν.	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
0	P_5	20	1	0	0	1	2	1	2
0	P_6	100	0	1	0	6	5	3	2
0	P_7	75	0	0	1	3	4	9	12
	ζ_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\zeta_j - \gamma_j$	0	0	0	0	-6	-4	-7	-5

τὸ P_7 ἐξέρχεται τῆς βάσεως. Ἡ ἑπομένη ἐπανάληψις δίδει τὸ ἑξῆς:

γ_j			0	0	0	6	4	7	5
	Διάν.	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
0	P_5	35/3	1	0	$-1/9$	2/3	14/9	0	2/3
0	P_6	75	0	1	$-1/3$	5	11/3	0	-2
7	P_7	25/3	0	0	1/9	1/3	4/9	1	4/3
	ζ_j	175/3	0	0	7/	7/3	28/9	7	28/3
	$\zeta_j - \gamma_j$	175/3	0	0	7/9	$-11/3$	$-8/9$	0	13/3

Ἡ μεγίστη ἀρνητικὴ $\zeta_j - \gamma_j$ εἶναι $-11/3$, οὕτω τὸ P_1 εἰσέρχεται εἰς τὴν βάσιν. Σχηματίζοντες πηλίκα κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ P_6 ἐξέρχεται τῆς βάσεως. Τὸ τελικὸν στάδιον δεικνύεται κατωτέρω.

γ_j			0	0	0	6	4	7	7
	Διάν.	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
0	P_5	5/3	1	—2)15	—1)15	0	16)15	0	14)15
6	P_1	15	0	1)5	—1)15	1	11)15	0	—2)5
7	P_3	10/3	0	—1)15	2)15	0	1)5	1	22)15
	ζ_j	340/3	0	11)15	8)15	6	87)15	7	118)15
	$\zeta_j - \gamma_j$	340)3	0	11)15	8)15	0	9)15	0	43)15

Ὡς ἀρίστην λύσιν ἔχομεν

$$\chi_1 = 15, \chi_2 = 0, \chi_3 = 10/3, \chi_4 = 0,\ \chi_5 = 5/3,\ \chi_6 = 0,\ \chi_7 = 0, \quad \text{καὶ}$$

$$\text{μεγ } R = 6(15) + 4(0) + 7(10/3) + 5(0) + 0(5/3) + 0(0) + 0(0) = 133{,}33\ .$$

Διὰ τὸ δεύτερον παράδειγμά μας ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μία ἑταιρεία αὐτοκινήτων διαθέτει ἐγκαταστάσεις συναρμολογήσεως δυναμένας νὰ παράγουν αὐτοκίνητα κατὰ πρότυπον μεγέθους, αὐτοκίνητα κατὰ παραγγελίαν μετὰ πολυτελοῦς συσκευασίας καὶ αὐτοκίνητα κατὰ παραγγελίαν ἄνευ τῆς πολυτελοῦς συσκευασίας. Αἱ ἐγκαταστάσεις ἔχουν ὀργανωθῆ εἰς πέντε τμήματα: πρεσσάρισμα, συναρμολόγησις μηχανῶν, τελικὴ συναρμολόγησις προτύπου αὐτοκινήτου, τελικὴ συναρμολόγησις πολυτελοῦς κατὰ παραγγελίαν αὐτοκινήτου καὶ τελικὴ συναρμολόγησις κανονικοῦ κατὰ παραγγελίαν αὐτοκινήτου.

Ἕκαστον τμῆμα ἔχει περιορισμοὺς παραγωγικοῦ δυναμικοῦ, οἱ ὁποῖοι ἐκτίθενται εἰς τὸν πίνακα 2 (ταῦτα ἀποτελοῦν τὰ ἀνώτατα ὅρια, τὰ τμήματα δυνατὸν νὰ παράγουν ὀλιγώτερον ἢ οἱ ἀριθμοὶ εἰς τὸν πίνακα δεικνύουν).

Πίναξ 2

Μηνιαῖαι Παραγωγικότητες Τμημάτων

Τμῆμα	*Πρότυπα Αὐτοκ.*	*Πολυτ. Παραγ.*	*Κανον. Παραγ.*
Πρεσσάρισμα	10.116	13.000	14.500
Συναρμολ. μηχανῶν	16.200	19.110	19.970
Συναρμολ. αὐτοκ. προτύπου μεγ.	8.760		
Συναρμολ. αὐτοκ. πολυτελῶν παραγ.		7.640	
Συναρμολ. αὐτοκ. κανονικῶν παραγ.			12.274

Ὑπάρχουν τρεῖς παραγωγικαὶ δραστηριότητες ἢ μέθοδοι εἰς τὰς ἐγκαταστάσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων παράγει ἕνα τῶν τριῶν τύπων αὐτοκινήτων, καὶ ἑκάστη μέθοδος ἔχει ἓν αὐτοκίνητον ὡς ἐκροὴν (παραγωγικὸν ἀποτέλεσμα) καὶ ποσοστὸν ἑκάστης τῶν εἰς τὸν πίνακα 2 δεικνυομένων παραγωγικοτήτων. Ἐπὶ παραδείγματι ἕν, προτύπου μεγέθους αὐτοκίνητον ἀπαιτεῖ ὡς εἰσροὰς

$\frac{1}{10.116} = 0{,}0099\,^0/_0$ παραγωγικότητα τοῦ τμήματος πρεσσαρίσματος

$\frac{1}{16.200} = 0{,}0062\,^0/_0$ παραγωγικότητα τοῦ τμήματος συναρμολογήσεως μηχανῶν

$\frac{1}{8.760} = 0{,}0114\,^0/_0$ παραγωγικότητα τοῦ τμήματος συναρμολογήσεως αὐτοκινήτων προτύπου μεγέθους.

Ταῦτα καὶ τὰ ἀποτελέσματα παρομοίων ὑπολογισμῶν διὰ τὰς ὑπολοίπους μεθόδους παρουσιάζονται εἰς τὸν πίνακα 3.

Π ί ν α ξ 3

Ποσοστὸν ἀπαιτουμένης παραγωγικότητος κατὰ μονάδα ἐκροῆς

Τ μ ῆ μ α	*Πρότυπα*	*Πολυτ. Παραγ.*	*Κανον. Παραγ.*
Πρεσσάρισμα	0,0099	0,0077	0,0069
Συναρμολόγησις μηχανῶν	0,0062	0,0052	0,0050
Συναρμολόγησις αὐτοκ. προτ. μεγ.	0,0114		
Συναρμολόγησις πολυτ. παραγγελ.		0,0131	
Συναρμολόγησις κανον. παραγγελ.			0,0082

Κάμνομεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ διοίκησις ἔχει καλῶς κατὰ προσέγγισιν ὑπολογίσει τὴν σχετικὴν ἀπόδοσιν κέρδους τῶν τριῶν τύπων αὐτοκινήτων οὕτως ὥστε πιστεύει ὅτι ἡ τιμὴ πωλήσεως ἑνὸς αὐτοκινήτου προτύπου μεγέθους εἶναι \$ 260 μεγαλυτέρα τοῦ συνολικοῦ κόστους κατασκευῆς του καὶ ὅτι παρόμοιοι ἀριθμοὶ διὰ τὰ πολυτελῆ καὶ κανονικὰ κατὰ παραγγελίαν αὐτοκίνητα εἶναι \$ 290 καὶ \$ 280, ἀντιστοίχως. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ὁλικὴ ἀπόδοσις δίδεται ὑπὸ

(4) $$R = 260\chi_1 + 290\chi_2 + 280\chi_3 \,.$$

Τὸ ὑπὸ κρίσιν πρόβλημα συνίσταται τώρα ἐκ τοῦ προσδιορισμοῦ ἑνὸς συνδυασμοῦ ἐκροῶν τῶν τριῶν αὐτοκινήτων, ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα τὴν μεγίστην ὁλικὴν ἀπόδοσιν, ὑποκειμένου εἰς τοὺς περιορισμοὺς τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ ἑκάστου τμήματος εἰς τὰς ἐγκαταστάσεις.

Ἔστωσαν χ_1 ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐντὸς ἑνὸς μηνὸς παραγομένων προτύπων αὐτοκινήτων καὶ χ_2 καὶ χ_3 οἱ ἀριθμοὶ τῶν πολυτελῶν παραγγελίας καὶ κανονικῶν παραγγελίας, ἀντιστοίχως. Τότε, διὰ τῆς χρήσεως τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 3 δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$0{,}0099\chi_1 + 0{,}0077\chi_2 + 0{,}0069\chi_3 = \%$ ἐκμετάλλευσις τοῦ τμήματος πρεσσαρίσματος.

Ἀφοῦ τὸ ὅριον τῆς παραγωγικότητος εἶναι 100%, ὁ περιορισμὸς τοῦ τμήματος πρεσσῶν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς γραμμικὴ ἀνισότης ὡς ἑξῆς :

$$0{,}0099\chi_1 + 0{,}0077\chi_2 + 0{,}0069\chi_3 \leqq 100 \,.$$

Σκεπτόμενοι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ὡς πρὸς τοὺς ἄλλους περιορισμοὺς παραγωγικότητος, φθάνομεν εἰς τὸ ἀκόλουθον σύστημα γραμμικῶν ἀνισοτήτων.

$$
(5)\qquad
\begin{array}{lllll}
0{,}0099\chi_1 & + 0{,}0077\chi_2 & + 0{,}0069\chi_3 & \leqq 100 & \\
0{,}0062\chi_1 & + 0{,}0052\chi_2 & + 0{,}0050\chi_3 & \leqq 100 & \\
0{,}0114\chi_1 & & & \leqq 100 & \\
 & 0{,}0131\chi_2 & & \leqq 100 & \\
 & & 0{,}0082\chi_3 & \leqq 100 & \\
 & & \chi_j & \geqq 0, & (j = 1,\ 2,\ 3),
\end{array}
$$

καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι νὰ μεγιστοποιηθῇ ἡ (4) ὡς πρὸς τὴν (5).

Χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον simplex εὑρίσκομεν μετὰ τέσσαρας ἐπαναλήψεις τῆς διαδικασίας ὅτι ἡ μεγίστη ἀπόδοσις εἶναι $4.011.719,96. Ἐπίσης, $\chi_1 = 0$ εἰς τὴν ἀρίστην μας λύσιν, οὕτω δὲν πρέπει αἱ ἐγκαταστάσεις συναρμολογήσεως νὰ παράγουν αὐτοκίνητα κατὰ πρότυπον μεγέθους. Ὅλη ἡ παραγωγὴ πρέπει νὰ ἀφιερωθῇ εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτοκινήτων κατὰ παραγγελίαν καὶ ἄριστον παραγωγικὸν ἀποτέλεσμα εἶναι 2.059 πολυτελῆ καὶ 12.195 κανονικὰ αὐτοκίνητα.

Πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι δύναται νὰ ὑπάρξῃ δυσχέρεια ἐνίοτε κατὰ τὴν χρῆσιν τοῦ μαθηματικοῦ ὑποδείγματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ πρὸς λύσιν προβλήματος τοῦ εἴδους αὐτοῦ. Τὸ ὑπόδειγμα ἐπιτρέπει εἰς τὰ διανύσματα λύσεως νὰ ἔχουν συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἡ μέθοδος simplex, ἐπὶ παραδείγματι, ἔδωκεν ὡς ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο $\chi_1=0$, $\chi_2=2.058{,}92$, $\chi_3 = 12.195{,}12$. Καὶ αἱ τιμαὶ τῶν χ_2 καὶ χ_3 ἔχουν στρογγυλοποιηθῇ εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐκτεθὲν ἀποτέλεσμα. Κατ᾽ αὐστηρὸν προσδιορισμόν, ἂν γίνεται χρῆσις τῆς διαδικασίας simplex εἰς πρόβλημα τοῦ εἴδους αὐτοῦ πρέπει νὰ ἐκλαμβάνωμεν ὡς προϊὸν καὶ ἓν μερικῶς περατωθὲν αὐτοκίνητον. Ἂν τοῦτο δὲν συμβαίνῃ, τότε τὸ πρόβλημα εἶναι πρόβλημα ***ἀκεραίου προγραμματισμοῦ*** καὶ εἰδικοὶ ἀλγόριθμοι, περικλείοντες πλέον περίπλοκον μαθηματικὸν ἐξοπλισμόν, ἀπαιτοῦνται πρὸς ἐπίτευξιν λύσεως. Μελέται ἔχουν δείξει ὅτι δύναται νὰ ὑπάρξῃ σημαντικὴ διαφορὰ μεταξὺ ἀρίστης λύσεως εἰς πρόβλημα ἀκεραίου προγραμματισμοῦ ὑπολογισθείσης διὰ τῆς δεούσης τεχνικῆς, καὶ διανύσματος ἀρίστης λύσεως κτηθέντος ἐκ μιᾶς λύσεως προτύπου γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν ἔχουν ἐπιτραπῆ μὴ ἀκέραιαι τιμαὶ συνιστωσῶν, καὶ εἰς τὴν ὁποίαν αἱ συνιστῶσαι ἔχουν στρογγυλοποιηθῆ, ὅπου ἔδει, πρὸς τὸν πλησιέστερον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Τὸ πρόβλημα ἀποθηκεύσεως

Ὁ διαχειριστὴς μιᾶς ἀποθήκης ἀντιμετωπίζει ποικίλα δυνατὰ σχέδια (ὑποδείγματα) ἀγορῶν, πωλήσεων καὶ ἀποθηκεύσεως κατὰ τὰς $j = 1, \ldots, \nu$ περιόδους, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸν ὁρίζοντα σχεδιασμοῦ του. Τὸ πρόβλημα κατ᾽ οὐσίαν ἔγκειται: εἰς τὸν προσδιορισμὸν ἀρίστου ὑποδείγματος ἀγορῶν (ἢ παραγωγῆς), ἀποθηκεύσεως καὶ πωλήσεων, δοθείσης ἀποθήκης τινὸς μὲ καθωρισμένον παραγωγικὸν δυναμικὸν καὶ ἀρχικὴν προμήθειαν ἑνὸς ἀγαθοῦ ὑποκειμένου εἰς γνωστὰς ἐποχιακὰς διακυμάνσεις τιμῶν καὶ κόστους.

Ἔστωσαν :

B = ἡ ὡρισμένη παραγωγικὴ δυναμικότης τῆς ἀποθήκης

A = ἀρχικὸν ἀπόθεμα ἀποθήκης ἐξ ἀπογραφῆς

χ_j = ποσότης πρὸς ἀγορὰν κατὰ τὴν περίοδον j

ψ_j = ποσότης πρὸς πώλησιν κατὰ τὴν περίοδον j

ρ_j = τιμὴ πωλήσεως κατὰ μονάδα ἰσχύουσα κατὰ τὴν περίοδον j.

γ_j = τιμὴ ἀγορᾶς κατὰ μονάδα (ἢ κατὰ μονάδα κόστος) ἐν ἰσχύι κατὰ τὴν περίοδον j.

Αἱ ὑποθέσεις εἶναι αἱ ἑξῆς :

1) Τὸ εἰς τὴν ἀποθήκην ἀγαθὸν πωλεῖται ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀνταγωνισμοῦ οὕτως ὥστε αἱ δυναταὶ πωλήσεις τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τιμὴν ρ_j δύνανται νὰ εἶναι παντὸς μεγέθους.

2) Αἱ πωλήσεις πρέπει νὰ γίνωνται ἐξ ἀπογραφῆς ἀρχῆς περιόδου, ὥστε ἡ πωλουμένη κατὰ τὴν ι περίοδον ποσότης νὰ μὴ δύναται νὰ ὑπερβῇ τὴν εἰς τὸ τέλος τῆς περιόδου $(\iota-1)$ διαθέσιμον ποσότητα. Ἑπομένως εἰς τὴν περίοδον ι τὸ ἄθροισμα τῶν πωλήσεων πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ :

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{\iota}\psi_j \leqq A + \sum_{j=1}^{\iota-1}\chi_j .$$

3) Πλήρης ἀνταγωνισμὸς ἐπικρατεῖ εἰς τὴν ἀγορὰν ἔνθα ὁ ἐπὶ τῆς ἀποθήκης ἀγοράζει τὸ ἀγαθόν, οὕτω δύναται οὗτος νὰ ἀγοράσῃ πᾶσαν ποσότητα ἀγαθοῦ εἰς τὴν τιμὴν γ_j . Δὲν δύναται ὅμως νὰ ἀποθηκεύσῃ πλέον ἢ ἡ καθαρὰ διαθέσιμος δυναμικότης τῆς ἀποθήκης τοῦ ἐπιτρέπει, οὕτω διὰ πᾶσαν περίοδον $\iota > 1$ ἔχομεν

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{\iota}\chi_j \leqq B - A + \sum_{j=1}^{\iota}\psi_j .$$

Τὸ πρόβλημα εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῶν καθαρῶν ἐσόδων (ὁλικὰ ἔσοδα μεῖον ὁλικὸν κόστος) ὑποκειμένων εἰς τοὺς περιορισμοὺς ἀγορᾶς καὶ πωλήσεως καὶ εἰς τὰς συνθήκας μὴ ἀρνητικότητος ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν χ_j καὶ ψ_j :

νὰ μεγιστοποιηθῇ $\qquad \pi = \sum_{j=1}^{\nu} - \gamma_j \chi_j + \sum_{j=1}^{\nu}\rho_j \psi_j$

ὡς πρὸς

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{\iota}\chi_j - \sum_{j=1}^{\iota}\psi_j \leqq B-A \qquad [\ \nu \text{ περιορισμοὶ ἀγορῶν ἐκ τῆς (7)}\ ]$$

$$(9) \qquad -\sum_{j=1}^{\iota-1}\chi_j + \sum_{j=1}^{\iota}\psi_j \leqq A \qquad [\ \nu \text{ περιορισμοὶ πωλήσεων ἐκ τῆς (6)}\ ]$$

$$(10) \qquad \chi_j \geqq 0$$

$$(11) \qquad \psi_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \cdots, \nu) .$$

Σημειώσατε ὅτι: μεγιστοποιοῦμεν τὰ συνολικὰ κέρδη ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἔχει γίνει εἰς τὸν διαχειριστὴν μία παραχώρησις κεφαλαίων καὶ δὲν γίνονται σκέψεις οὔτε δι' ἀπολήψεις κεφαλαίων οὔτε πρὸς ἐπαύξησιν τῶν ὑπαρχόντων πρὶν φθάσωμεν εἰς τὴν νέαν περίοδον ὁρίζοντος.

Οἱ περιορισμοὶ (8) καὶ (9) καταγραφόμενοι λαμβάνουν τὴν μορφὴν

$$
\begin{array}{ll}
\chi_1 + 0\chi_2 + \cdots + 0\chi_\nu - \psi_1 - 0\psi_2 - \cdots - 0\psi_\nu \leqq B-A & (\iota = 1)\\
\chi_1 + \chi_2 + \cdots + 0\chi_\nu - \psi_1 - \psi_2 - \cdots - 0\psi_\nu \leqq B-A & (\iota = 1, 2)\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_\nu - \psi_1 - \psi_2 - \cdots - \psi_\nu \leqq B-A & (\iota = 1, 2, \ldots, \nu)\\
-0\chi_1 - 0\chi_2 - \cdots - 0\chi_\nu + \psi_1 + 0\psi_2 + \cdots + 0\psi_\nu \leqq A & (\iota = 1)\\
-\chi_1 - 0\chi_2 - \cdots - 0\chi_\nu + \psi_1 + \psi_2 + \cdots + 0\psi_\nu \leqq A & (\iota = 1, 2)\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
-\chi_1 - 0\chi_2 - \cdots - 0\chi_\nu + \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_\nu \leqq A & (\iota = 1, 2, \ldots, \nu).
\end{array}
$$

Ἐπομένως, τὸ πρόβλημα ὑπὸ μορφὴν μητρῶν εἶναι

(12) νὰ μεγιστοποιηθῇ $\pi = \sum_{j=1}^{\nu} -\gamma_j \chi_j + \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j \psi_j$

$$
= [-\gamma_1, \cdots, -\gamma_\nu, \rho_1, \cdots, \rho_\nu] \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \\ \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu \end{bmatrix} = \rho'\lambda
$$

ὡς πρὸς

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & -1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \\ \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} B-A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B-A \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \end{bmatrix}
$$

δι' ὅλα τὰ μὴ ἀρνητικὰ διανύσματα λ. Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συντομώτερον

(13) νὰ μεγιστοποιηθῇ $\pi = \rho'\lambda$

ὡς πρὸς

(14) $$M\lambda \leqq \beta$$

(15) $$\lambda \geqq 0$$

ὅπου M εἶναι ἡ ἀνωτέρω μήτρα 2ν ἐπὶ $2\nu,\beta$ εἶναι τὸ διάνυσμα - στήλη τῶν σταθερῶν ὅρων, ρ' καὶ λ εἶναι τὰ διάνυσμα - γραμμὴ καὶ διάνυσμα - στήλη, ἀντιστοίχως, τὰ ἐμφανιζόμενα εἰς τὴν (12).

Τὸ πρόβλημα μεταφορᾶς

Ὑπάρχουν μ λιμένες, κέντρα προμηθεύσεως ἢ προελεύσεις καὶ ν προορισμοὶ ἢ ἀγοραὶ πρὸς τὰς ὁποίας θὰ ἀποσταλῇ δοθὲν (ὁμογενὲς) προϊόν. Ἡ ι προέλευσις ἔχει ποσότητα s_ι τοῦ ἀγαθοῦ ($\iota = 1, \ldots, \mu$) καὶ αἱ ἀπαιτήσεις εἶναι τοιαῦται ὥστε ὁ κ προορισμὸς νὰ λάβῃ ποσότητα ρ_κ ($\kappa = 1, \ldots, \nu$). Ἔστωσαν $\chi_{\iota\kappa}$ ἡ ποσότης τοῦ ἀγαθοῦ, τὸ ὁποῖον θὰ μεταφερθῇ ἐκ προελεύσεως ι εἰς προορισμὸν κ, καὶ $\gamma_{\iota\kappa}$ τὸ κατὰ μονάδα ἀγαθοῦ κόστος μεταφορᾶς αὐτοῦ ἐκ προελεύσεως ι εἰς προορισμὸν κ. Τὸ πρόβλημα συνεπῶς εἶναι

νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \gamma_{\iota\kappa} \chi_{\iota\kappa}$$

ὡς πρὸς

(16) $$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \chi_{\iota\kappa} \leqq s_\iota$$

17) $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \chi_{\iota\kappa} \geqq \rho_\kappa$$

(18) $$\chi_{\iota\kappa} \geqq 0 \qquad \text{δι' ἅπαντα τὰ } \iota, \kappa.$$

Λαμβάνομεν ἐπίσης ὅτι $\gamma_{\iota\kappa} > 0$, $\rho_\kappa > 0$, $s_\iota > 0$ καὶ ὅτι $\sum_\kappa \rho_\kappa \leqq \sum_\iota s_\iota$ (αἱ διαθέσιμοι προσφερόμεναι ποσότητες εἰς τὸν τόπον προελεύσεως εἶναι ἐπαρκεῖς πρὸς ἱκανοποίησιν τῶν ζητουμένων ποσοτήτων εἰς τὸν τόπον προορισμοῦ).

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐξητάσθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Hitchcock, φυσικοῦ, τὸ 1941 (The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities», Journal of Mathematics and Physics 20, 1941) καὶ ἀνεξαρτήτως ὑπὸ τοῦ Ρώσσου μαθηματικοῦ Kantorovich (1942) καὶ ὑπὸ τοῦ Koopmans (1944 - 46). Μὲ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ αἱ μαθηματικαὶ ἰδιότητες τοῦ προβλήματος ἐμελετήθησαν (ἐφαίνετο ὡς πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ), ἀνεπτύχθη γενική τις ἔκφρασις τῆς τάξεως ταύτης τῶν προβλημάτων, καὶ ἐγένοντο γνωσταὶ γενικαὶ συνθῆκαι διὰ τὴν ὕπαρξιν λύσεως.

Ἐκτὸς τῆς ἀναπτύξεως τῶν μαθηματικῶν ἰδιοτήτων τοῦ ὑποδείγματος, ἤρχισε νὰ λαμβάνῃ χώραν εὐρεῖα ποικιλία ἐφαρμογῶν τούτου. Μέγα ποσοστὸν ὅμως τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως εἶναι κάπως περίπλοκον, καὶ ἐξετάζομεν ἐδῶ μόνον τὰ σπουδαιότερα ἀποτελέσματα.

Ἔστω X ἓν διάνυσμα αἱ συνιστῶσαι τοῦ ὁποίου εἶναι $\chi_{\iota\kappa}$ διὰ $\iota = 1, \ldots, \mu$ καὶ $\kappa = 1, \ldots, \nu$. Τότε δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι X εἶναι λύσις εἰς (16), (17) καὶ (18) μόνον ἂν X ἱκανοποιῇ

$$\sum_{\kappa}\chi_{\iota\kappa} \leqq s_\iota$$

$$\sum_{\iota}\chi_{\iota\kappa} = \rho_\kappa$$

$$\chi_{\iota\kappa} \geqq 0 \qquad \text{δι' ἅπαντα τὰ } \iota,\ \kappa.$$

Ἐν ἄλλοις λόγοις, ἡ X εἶναι πραγματοποιήσιμος μόνον ἂν αἱ ἀπαιτήσεις προορισμοῦ πληροῦνται εἰς ἰσότητα. Ἂν ληφθῇ ἐπιπροσθέτως ὅτι $\sum_{\kappa}\rho_\kappa = \sum_{\iota} s_\iota$ (δηλαδὴ ὅτι ἡ προσφορὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ζήτησιν), τότε πᾶν διάνυσμα X ἱκανοποιοῦν τὰς (16), (17), (18), ἱκανοποιεῖ κατ' ἀνάγκην τὰς ἐξισώσεις

$$\sum_{\kappa}\chi_{\iota\kappa} = s_\iota \tag{19}$$

$$\sum_{\iota}\chi_{\iota\kappa} = \rho_\kappa \tag{20}$$

$$\chi_{\iota\kappa} \geqq 0 \qquad \text{δι' ἅπαντα τὰ } \iota,\ \kappa. \tag{21}$$

Τὸ πρόβλημα μεταφορᾶς ὡς ἐμφανίζεται εἰς τὰς (19), (20), (21) εὑρίσκεται εἰς τὴν μορφὴν εἰς τὴν ὁποίαν συχνότατα ἐξετάζεται. Οἱ περιορισμοὶ (19) καὶ (20), γραφόμενοι ἀναλυτικῶς, εἶναι ἀντιστοίχως

$$\begin{aligned}
\chi_{11} + \chi_{12} + \cdots + \chi_{1\nu} &= s_1\\
\chi_{21} + \chi_{22} + \cdots + \chi_{2\nu} &= s_2\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot\\
\chi_{\mu 1} + \chi_{\mu 2} + \cdots + \chi_{\mu\nu} &= s_\mu\\
\chi_{11} + \chi_{21} + \cdots + \chi_{\mu 1} &= \rho_1\\
\chi_{12} + \chi_{22} + \cdots + \chi_{\mu 2} &= \rho_2\\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \cdot\\
\chi_{1\nu} + \chi_{2\nu} + \cdots + \chi_{\mu\nu} &= \rho_\nu .
\end{aligned}$$

Τὸ σύστημα ὅμως δύναται νὰ γραφῇ ἔτι ἀναλυτικώτερον, ὁπότε ἔχει $\mu + \nu$ ἐξισώσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων περιλαμβάνει τὰς $\mu\nu$ μεταβλητὰς $\chi_{\iota\kappa}$. Ἡ μήτρα τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν περιορισμῶν ἔχει τὴν κάτωθι μορφήν :

$$A = \begin{array}{l} \\ \mu \text{ σειραί} \\ \\ \\ \nu \text{ σειραί} \end{array}
\begin{array}{c}
\chi_{11}, \ \ldots, \ \chi_{1\nu}, \ \chi_{21}, \ \ldots, \ \chi_{2\nu}, \ \ldots, \ \chi_{\mu 1}, \ \ldots, \ \chi_{\mu\nu} \\
\begin{bmatrix}
1 \ \cdots \ 1 & & & & & \\
& 1 \ \cdots \ 1 & & & & \\
& & \cdot & & & \\
& & & \cdot & & \\
& & & & \cdot \ 1 \ \cdots & 1 \\
1 \ \cdot & 1 \ \cdot & \cdots & 1 \ \cdot & & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \\
\cdot \ 1 & \cdot \ 1 & \cdots & \cdot \ 1 & &
\end{bmatrix}
\end{array}$$

ἔνθα ὅλαι αἱ ἐγγραφαὶ εἶναι μηδὲν ἐκτὸς τῶν δεικνυομένων μονάδων. Αἱ μεταβληταὶ $\chi_{\iota\kappa}$ γράφονται ὑπεράνω τῆς μήτρας πρὸς βοήθειαν τοῦ ἀναγνώστου εἰς τὴν κατανόησιν τῆς αἰτίας διὰ τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἐγγραφῶν εἰς τὴν μήτραν καὶ τῶν μεταβλητῶν $\chi_{\iota\kappa}$. Ἐπίσης, ἂν λάβωμεν $X = [\chi_{11}, \cdots, \chi_{1\mu}, \chi_{21}, \cdots, \chi_{2\nu}, \cdots, \chi_{\mu 1}, \cdots, \chi_{\mu\nu}]'$ καὶ $B = [s_1, \cdots, s_\mu, \rho_1, \cdots, \rho_\nu]'$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς (19), (20) καὶ (21) ὑπὸ μορφὴν μητρῶν ὡς ἑξῆς:

$$AX = B$$
$$X \geqq 0 .$$

Ἔχομεν παρατηρήσει ὅτι εἰς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ κατευθύνομεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὰ ἀκραῖα σημεῖα τοῦ κυρτοῦ συνόλου πραγματοποιησίμων λύσεων, ἐφ' ὅσον μία ἀρίστη λύσις, ἂν ὑπάρχῃ, πρέπει νὰ θεωρηθῇ εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον. Τὰ ἀκόλουθα ἀποτελοῦν δύο σπουδαιότατα θεωρήματα ἀφορῶντα εἰς τὸ πρόβλημα μεταφορᾶς.

Θεώρημα Α. Ἔστω ὅτι ἕκαστον ρ_κ καὶ s_ι εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς (ὄχι ἅπαντα τὰ ρ_κ καὶ s_ι μηδενικά), καὶ ἔστω X ἓν διάνυσμα εἰς T, ἑκάστη τῶν συνιστωσῶν τοῦ ὁποίου εἶναι ἀκέραιος. Τότε τὰ ἀκραῖα σημεῖα τοῦ συνόλου λύσεως T περιέχονται εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν $X \in T$ ἔνθα X ἔχει ἀκεραίας συνιστώσας.

Θεώρημα Β. Ἂν ρ_κ καὶ s_ι εἶναι ἀκέραιοι, τότε ὑπάρχει ἀρίστη λύσις X εἰς τὰς (19), (20) καὶ (21) ἔχουσα ἀκεραίους ὡς συνιστώσας.

Τὸ θεώρημα Β, βεβαίως, δηλοῖ ὅτι ἂν ἡ προσφορὰ καὶ ἡ ζήτησις ἐκφράζωνται μέσῳ ἀκεραίων (ἀδιαιρέτων) ποσοτήτων ἀγαθοῦ, τότε μία ἀρίστη λύσις διὰ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τοῦ κόστους ἀπαιτεῖ τὴν μεταφορὰν μόνον ἀκεραίων ποσοτήτων ἐκ τῶν τόπων προελεύσεως εἰς τοὺς τόπους προορισμοῦ παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς τὴν ἀνωτέρω διατύπωσιν ἐπιτρέπονται δυναταὶ λύσεις περιλαμβάνουσαι μεταφορὰν κλασματικῶν ποσοτήτων τοῦ ἀγαθοῦ.

Τὸ κάτωθι παράδειγμα θὰ διασαφίσῃ τὰς ἀνωτέρω ἐννοίας. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κόστος μεταφορᾶς προϊόντος τινὸς ἐκ προελεύσεων 0, 1, 2 πρὸς προορισμοὺς 3, 4, 5 εἶναι ὡς δίδεται ὑπὸ τοῦ παρατιθεμένου πινακίου.

		Προορισμοί		
		3	4	5
Προελεύσεις	0	73	40	9
	1	62	93	96
	2	95	65	80

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαθεσίμων μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ εἰς τοὺς τόπους προελεύσεως (τὰ s_ι) εἶναι : εἰς τὸν 0,8· εἰς τὸν 1,7· εἰς τὸν 2,9. Ὁμοίως ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων μονάδων ἀγαθοῦ εἰς τοὺς τόπους προορισμοῦ (τὰ ρ_κ) εἶναι 6 εἰς τὸν 3, καὶ 8 καὶ 10, ἀντιστοίχως, εἰς τοὺς 4 καὶ 5. Τελικῶς λαμβάνομεν ὅτι ἅπασαι αἱ μονάδες τοῦ ἀγαθοῦ, μεταφέρονται εἰς τοὺς προορισμοὺς ($\mathbf{\Sigma} s_\iota = \mathbf{\Sigma} \rho_\kappa$). Ἔστω $\chi_{\iota\kappa}$ ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ ἀγαθοῦ τοῦ μεταφερομένου ἐκ προελεύσεως ι εἰς προορισμὸν κ. Τὸ πρόβλημα τότε εἶναι νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ

$$\Gamma = 73\chi_{03} + 40\chi_{04} + 9\chi_{05} + 62\chi_{13}\ 93\chi_{14} + 96\chi_{15} + 95\chi_{23} + 65\chi_{24} + 80_{25}$$

ὡς πρὸς

$$\left.\begin{aligned} \chi_{03} + \chi_{04} + \chi_{05} &= 8 \\ \chi_{13} + \chi_{14} + \chi_{15} &= 7 \\ \chi_{23} + \chi_{24} + \chi_{25} &= 9 \end{aligned}\right\} \text{ δυναμικότης προελεύσεων}$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_{03} + \chi_{13} + \chi_{23} &= 6 \\ \chi_{04} + \chi_{14} + \chi_{24} &= 8 \\ \chi_{05} + \chi_{15} + \chi_{25} &= 10 \end{aligned}\right\} \text{ ἀπαιτήσεις προορισμῶν}$$

Τὸ πρόβλημα ἔχει ἐννέα μεταβλητὰς εἰς τὸ στάδιον τοῦτο, καὶ πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι νοοῦμεν ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ὡς ἐξίσωσιν εἰς τὰς ἐννέα ταύτας μεταβλητάς. Οὐδεμία χαλαρὰ ὑπάρχει εἰς τὸ πρόβλημα, οὕτως εἰσάγομεν μίαν τεχνητὴν μεταβλητὴν εἰς ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων, καί, συμφώνως πρὸς τὴν συζήτησίν μας ἐπὶ τῶν τεχνητῶν μεταβλητῶν εἰς τὸ προηγηθὲν κεφάλαιον, ἑκάστη μεταβλητὴ αὐτοῦ τοῦ εἴδους τοποθετεῖται εἰς τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος συνάρτησιν μὲ μίαν αὐθαιρέτως μεγάλην τιμὴν (κόστος) \$M.

Δύναται νὰ δειχθῇ διὰ τῆς χρήσεως τῆς μεθόδου simplex ὅτι ἀρίστη λύσις εἶναι $\chi_{05} = 8$, $\chi_{04} = 0$, $\chi_{25} = 1$, $\chi_{13} = 6$, $\chi_{24} = 8$, καὶ $\chi_{15} = 1$, καὶ ὅτι $\Gamma = \$\ 1.140$ εἶναι τὸ μικρότερον κόστος, εἰς τὸ ὁποῖον δύνανται νὰ ἱκανοποιηθοῦν αἱ ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος.

Ἕνεκα τῆς εἰδικῆς ἰδιότητος τῆς μήτρας περιορισμῶν εἰς τὰ προβλήματα μεταφορᾶς — ἡ μήτρα ἀποτελεῖται μόνον ἀπὸ μηδενικὰ καὶ μονάδας — ἡ μέθοδος simplex ἀποτελεῖ ἀλγόριθμον σημαντικῶς ὀλιγώτερον ἐπαρκῆ ἀρκετῶν ἄλλων μεθόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀναπτυχθῇ καὶ αἱ ὁποῖαι ἐκμεταλλεύονται πλήρως τὴν ἰδιότητα ταύτην.

Τὸ πρόβλημα ἀναθέσεως ἐργασίας

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀποτελεῖ εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ προβλήματος μεταφορᾶς καὶ προέρχεται ἐκ τούτου ὅταν $\rho_\kappa = s_\iota = 1$ καὶ $\mu = \nu$. Τὸ πρόβλημα ἀναθέσεως ἐργασίας ἐκφράζεται συνήθως ὡς ἑξῆς : Ὑπάρχουν ν εἴδη ἐργασίας καὶ ν ἐργάται νὰ τὰ ἀναλάβουν. Ἡ «τιμὴ» (ἢ τὸ κόστος) τῆς ἀναθέσεως εἰς τὸν ἐργάτην κ τῆς ἐργασίας ι εἶναι $\alpha_{\iota\kappa}$ ($\alpha_{\iota\kappa} > 0$ ἂν ἀντιπροσωπεύῃ ἀξίαν). Τὸ πρόβλημα ἔγκειται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῶν ν προσλήψεων, αἱ ὁποῖαι θὰ μεγιστοποιήσουν τὴν ὁλικὴν ἀξίαν (ἢ θὰ ἐλαχιστοποιήσουν τὸ ὁλικὸν κόστος). Διὰ παράδειγμα, θεωρήσατε τὴν κάτωθι διάταξιν εἰς τὴν ὁποίαν οἱ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ νὰ δείξουν τὰς «ἐκτιμήσεις» τῶν ἀνδρῶν Α,Β,Γ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ἔργων 1,2,3. Π.χ. θὰ ἐκόστιζε $7 κατὰ τμῆμα ἐργασίας ἂν τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς ἐργασίας 1 ἀνελαμβάνετο ὑπὸ τοῦ Α. Τὸ τμῆμα θὰ κοστίσῃ $ 6 ἂν ὁ Β ἀναλάβῃ τὴν ἐργασίαν 1 καὶ $ 12 ἂν ἡ αὐτὴ ἐργασία ἀνατεθῇ εἰς τὸν Γ. Ὁ πίναξ 4 δεικνύει ὅλας τὰς δυνατὰς ἀναθέσεις ἐργασίας καὶ τὰ «ἀθροίσματα ἐκτιμήσεων» τὰ προκύπτοντα ἐξ ἑκάστης. Ἡ περίπτωσις 3 εἶναι ἡ ἐλαχιστοποιοῦσα τὸ ὁλικὸν κόστος κατασκευῆς τῶν τριῶν τμημάτων (ἀναθέσεως τῶν τριῶν ἐργασιῶν).

Ἄνδρας	1	2	3
Α	7	3	2
Β	6	4	1
Γ	12	8	6

Ἐργασία

Πίναξ 4

Ἀριθμ. ἀναθέσεως ἐργασίας	Ἐργασία 123	Ἄθροισμα ἐκτιμήσεων
1	ΑΒΓ	$7+4+6=17$
2	ΑΓΒ	$7+8+1=16$
3	ΒΑΓ	$6+3+6=15$
4	ΒΓΑ	$6+8+2=16$
5	ΓΑΒ	$12+3+1=16$
6	ΓΒΑ	$12+4+2=18$

Αὐτὸ διασαφηνίζει ἕνα τρόπον λύσεως τοῦ προβλήματος ἀναθέσεως ἐργασίας.

Ἂν ἔχωμεν τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς ἀρίστης ἀναθέσεως ἔργων εἰς προσωπικόν, τότε δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν «κατάλογον» ὅλων τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν καὶ ἐκ τούτου νὰ ἐκλέξωμεν τὸν ἀρίστως ἱκανοποιοῦντα τὸ κριτήριον συνδυασμόν. Μολονότι ἁπλοῦν ἀποτελεῖ ἔργον νὰ σχηματίσωμεν μίαν διάταξιν 3×3, παρομοία διάταξις 20×20 θὰ ἀπήτει ἐκτίμησιν 4.3×10^{18} ἀναθέσεων. Τοῦτο θὰ ἀπήτει ἔτη πρὸς συμπλήρωσίν του ἀκόμη καὶ μὲ ὑπολογιστὴν ὑψηλῆς ταχύτητος. Γενικώτερον, ἀπὸ διάταξιν $\nu \times \nu$ εἶναι δυνατοὶ $\nu!$ ἀναθέσεις (συνδυασμοὶ) καὶ τὸ $\nu!$ εἶναι, βεβαίως, πολὺ μέγα ἀκόμη καὶ διὰ σχετικῶς μικρὸν ν.

Πρέπει νὰ παρατηρηθῇ ὅτι εἰς τὸν ἄριστον συνδυασμὸν ἀνωτέρω, τὸν 3, μόνον εἰς ἄνδρας ἀναλαμβάνει τὸ ἔργον εἰς τὸ ὁποῖον ἁρμόζει καλύτερον, (ὁ Γ), καὶ ὅτι ὁ Β ἀναλαμβάνει τὸ ἔργον διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι ὀλιγώτερον κατάλληλος (ἔχει τὸ ὑψηλότερον κόστος διὰ τὸ ἔργον 1). Εἰς ἀρίστας λύσεις τῶν προβλημάτων ἀναθέσεως ἐργασίας δὲν εἶναι σπάνιον νὰ ἔχωμεν ἀρκετὰ πρόσωπα εἰς ἔργα μὴ κατάλληλα δι' αὐτά, καὶ διὰ μίαν μεγάλην κατηγορίαν προβλημάτων προκύπτει ὅτι ἂν ἕκαστος ἄνδρας ἀναλαμβάνῃ τὸ ἔργον διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ πλέον κατάλληλος, τότε ὁ συνδυασμὸς ἀναθέσεως τῶν ἔργων δὲν εἶναι ἄριστος.

Δύναται νὰ κατανοηθῇ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος ὅτι ἡ εὕρεσις ἀρίστης ἀναθέσεως ἔργου εἶναι ἁπλῶς ζήτημα εὑρέσεως ἀρίστου συνδυασμοῦ ἢ διευθετήσεως, οὕτως ἡ ἔννοια τοῦ ***συνδυασμοῦ*** εἶναι σοβαρὸν χαρακτηριστικὸν τοῦ προβλήματος ἀναθέσεως ἔργου. Ἡ ἔννοια αὕτη εἶναι προφανὴς ἔτι μᾶλλον ὅταν τὸ τοιοῦτον πρόβλημα ἐκφράζεται διὰ ***συνδυαστικῶν μητρῶν*** (permutation matrices). Ἡ συνδυαστικὴ μήτρα εἶναι τετραγωνικὴ μήτρα, ἑκάστη σειρὰ καὶ ἑκάστη στήλη τῆς ὁποίας περιέχει τὸν ἀριθμὸν 1 καὶ μηδενικὰ παντοῦ ἀλλοῦ. Αἱ κάτωθι, παραδείγματος χάριν, συνιστοῦν τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνδυαστικῶν μητρῶν 3×3:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ἑτέρα μία ἔννοια ἐκ τῆς θεωρίας τῶν μητρῶν εἶναι ἀπαραίτητος πρὶν προβῶμεν εἰς διαζευκτικὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος, ἡ ἔννοια τοῦ ***ἴχνους*** (trace) μιᾶς τετραγωνικῆς μήτρας. Ἴχνος τετραγωνικῆς μήτρας εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῆς κυρίας αὐτῆς διαγωνίου.

Διὰ νὰ ἴδωμεν τίνι τρόπῳ χρησιμοποιοῦνται εἰς τὸ πρόβλημα ἀναθέσεως ἔργου αἱ συνδυαστικαὶ μήτραι καὶ τὰ ἴχνη τῶν μητρῶν, ἂς θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς κόστους εἰς τὴν διάταξιν τῆς σελ. 108 ὡς τετραγωνικὴν μήτραν. Ἂς καλέσωμεν ταύτην A καὶ ἂς πολλαπλασιάσωμεν τὴν A εἰς τὰ δεξιὰ διαδοχικῶς ἐπὶ ἑκάστην τῶν συνδυαστικῶν 3×3 μητρῶν P_ι ($\iota = 1, \cdots, 6$) ἀνωτέρω, καὶ ἂς προσδιορίσωμεν μετὰ ταῦτα τὸ ἴχνος ἑκάστης τῶν μητρῶν - γινομένων AP_ι.

Ἀθροίσματα ἐκτιμήσεων

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

ἴχνος $= 7 + 4 + 6 = 17$ (ἀνάθεσις 1).

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 8 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ἴχνος} = 3 + 6 + 6 = 15 \qquad (\text{ἀνάθεσις } 3).$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 12 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{ἴχνος} = 7 + 1 + 8 = 16 \qquad (\text{ἀνάθεσις } 2).$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{ἴχνος} = 2 + 4 + 12 = 18 \qquad (\text{ἀνάθεσις } 6).$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \\ 8 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{ἴχνος} = 3 + 1 + 12 = 16 \qquad (\text{ἀνάθεσις } 5).$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 6 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{ἴχνος} = 2 + 6 + 8 = 16 \qquad (\text{ἀνάθεσις } 4).$$

Τὰ ἀνωτέρω εὑρεθέντα ἴχνη πρέπει νὰ συγκριθοῦν μὲ τὴν στήλην τοῦ ἀθροίσματος ἐκτιμήσεων τοῦ πίνακος 4. Εἶναι, ἐξαιρουμένης τῆς σειρᾶς ἐμφανίσεως, τὰ αὐτά.

Ἡ γενικὴ ἔκφρασις τοῦ προβλήματος ἀναθέσεως ἐργασίας μέσῳ συνδυαστικῶν μητρῶν εἶναι ἁπλῶς καὶ μόνον γενίκευσις τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης ἰδέας. Ἔστωσαν P τὸ σύνολον ὅλων τῶν $\nu \times \nu$ συνδυαστικῶν μητρῶν καὶ $A = (\alpha_{\iota\kappa})$ μήτρα τοιαύτη ὥστε $\alpha_{\iota\kappa}$ νὰ εἶναι ἡ ἀξία (ἢ τὸ κόστος) τῆς ἀναθέσεως τοῦ ἔργου ι εἰς τὸν ἐργάτην κ. Τότε τὸ πρόβλημα τῆς ἀρίστης ἀναθέσεως τοῦ ἔργου εἶναι ἡ εὕρεσις τῆς συνδυαστικῆς μήτρας P^* τοιαύτης ὥστε τὸ ἴχνος τῆς AP^* νὰ εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

Ἡ νέα αὕτη ἔκφρασις τοῦ προβλήματος, μολονότι ἐνδιαφέρουσα, δὲν ἁπλοποιεῖ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, καὶ εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν οὐδόλως εὐχερεστέρα θὰ ἦτο ἡ λύσις διὰ τὸν λόγον ὅτι περικλείονται $\nu!$ συνδυαστικαὶ μῆτραι. Εὐτυχῶς, ὑπάρχουν εὐχερεῖς ὑπολογιστικαὶ μέθοδοι διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων ἀναθέσεως ἔργου ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ ἐξέτασις αὐτῶν θὰ ἀπήτει ἐπιπρόσθετον μαθηματικὸν ὑπόβαθρον, δὲν θὰ προβῶμεν ἐδῶ εἰς τὴν ἐξέτασίν των.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 5ον

ΔΥΑΔΙΚΟΤΗΣ

Τὸ δυαδικὸν πρόβλημα

Στενὴν σχέσιν πρὸς ἓν πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχει ἓν ἕτερον πρόβλημα, ὁμοίως γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, καλούμενον τὸ ***δυαδικὸν*** τοῦ δοθέντος προβλήματος. Διακρίνομεν ἐνίοτε τὰ δύο προβλήματα μεταξύ των, καλοῦντες τὸ ἓν τὸ ***ἀρχικὸν*** (primal) καὶ τὸ δεύτερον τὸ ***δυαδικὸν*** (dual). Δὲν ἔχει πάντως σημασίαν ποῖον πρόβλημα ὁρίζεται ὡς ἀρχικόν, διότι δύναται νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ δυαδικὸν τοῦ δυαδικοῦ εἶναι τὸ ἀρχικόν. Ἐπὶ πλέον, ἀρίστη λύσις εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα παρέχει πληροφορίας περὶ ἀρίστης λύσεως εἰς τὸ δυαδικόν, καί, ἂν ἓν ἀρχικὸν πρόβλημα εἶναι ἑρμηνεύσιμον, τότε καὶ τὸ δυαδικόν του εἶναι ἑρμηνεύσιμον.

Διὰ νὰ ἀποκτήσωμεν γνώσεις τινὰς περὶ δυαδικότητος, ἐπιστρέφομεν εἰς ἓν προηγουμένως (Κεφ. 3) ἐξετασθὲν πρόβλημα, τὸ τῆς μεγιστοποιήσεως τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως $\varphi\ (\chi_1, \chi_2) = \chi_1 + 5\chi_2$

ὡς πρὸς (1) $\quad 5\chi_1 + 6\chi_2 \leqq 30$

(2) $\quad 3\chi_1 + 2\chi_2 \leqq 12$

(3) $\quad \chi_1 \geqq 0$

(4) $\quad \chi_2 \geqq 0\,.$

Ὡς ἀρίστη λύσις εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶχε προσδιορισθῆ γεωμετρικῶς τὸ σημεῖον $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ καὶ ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς φ, 25. Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἐνδιαφερόμεθα νὰ ***ἀποδείξωμεν*** ὅτι $\varphi\,(\chi_1, \chi_2) = 25$ εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς $\varphi\,(\chi_1, \chi_2)$ ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμούς. Τοῦτο σημαίνει ὅτι θέλομεν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι διὰ πᾶν διάνυσμα $\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}$ εἰς τὸ σύνολον δυνατῶν λύσεων

$$\varphi = \chi_1 + 5\chi_2 \leqq 25,$$

ἢ ἰσοδυνάμως, διὰ πᾶν διάνυσμα εἰς τὸ σύνολον πραγματοποιησίμων λύσεων

$$\chi_1 + 5\chi_2 - 25 \leqq 0\,.$$

Εἷς τρόπος ἀποδείξεως ὅτι $\chi_1 + 5\chi - 25$ οὐδέποτε εἶναι θετικόν, εἶναι νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ποσότης αὕτη εἶναι δυνατὸν νὰ γραφῇ ὡς μὴ ἀρνητικὸς γραμμικὸς συνδυασμὸς ποσοτήτων, αἱ ὁποῖαι οὐδέποτε δύνανται νὰ εἶναι θετικαί. Εὐτυχῶς δυνάμεθα πρὸς τοῦτο νὰ χρησιμοποιήσωμεν πληροφορίας περιεχομένας εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Συγκεκριμένως αἱ (1) — (4) δηλοῦν ὅτι αἱ κάτωθι ποσότητες δὲν δύνανται ποτὲ νὰ εἶναι θετικαί :

$$5\chi_1 + 6\chi_2 - 30 \leqq 0$$
$$3\chi_1 + 2\chi_2 - 12 \leqq 0$$
$$-\chi \leqq 0$$
$$-\chi \leqq 0.$$

Συνεπῶς, ἡ ἐπαλήθευσις τοῦ ὅτι $\varphi = 25$ εἶναι μέγιστον μᾶς ἄγει εἰς ἐξέτασιν τῶν συνθηκῶν ὑπὸ τὰς ὁποίας ὑπάρχουν μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ υ_i ἱκανοποιοῦντες

$$\chi_1 + 5\chi_2 - 25 = \upsilon_1 (5\chi_1 + 6\chi_2 - 30) + \upsilon_2 (3\chi_1 + 2\chi_2 - 12) + \upsilon_3 (-\chi_1) +$$
$$+ \upsilon_4 (-\chi_2) = (5\upsilon_1 + 3\upsilon_2 - \upsilon_3)\, \chi_1 + (6\upsilon_1 + 2\upsilon_2 - \upsilon_4)\, \chi_2 - (30\upsilon_1 + 12\upsilon_2).$$

Ἐξισοῦντες τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστὰς λαμβάνομεν

$$5\upsilon_1 + 3\upsilon_2 - \upsilon_3 = 1$$
$$6\upsilon_1 + 2\upsilon_2 - \upsilon_4 = 2$$
$$30\upsilon_1 + 12\upsilon_2 = 25,$$

ἤ, ἀφοῦ τὰ υ_i πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικά,

$$5\upsilon_1 + 3\upsilon_2 \geqq 1$$
$$6\upsilon_2 + 2\upsilon_2 \geqq 5$$
$$\upsilon_1 \geqq 0$$
$$\upsilon_2 \geqq 0$$
$$30\upsilon_1 + 12\upsilon_2 = 25$$

Δυνάμεθα, συνεπῶς, νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι μεγ $\varphi = 25$ ἂν ὑπάρχουν μεταβληταὶ υ_1 καὶ υ_2 ἱκανοποιοῦσαι τὸ ἀμέσως ἀνωτέρω σύστημα.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι κατ' οὐσίαν τὸ ***δυαδικὸν*** τοῦ εἰς τὰς (1) — (4) ἐκφραζομένου προβλήματος, καὶ εἷς τρόπος καταγραφῆς τοῦ δυαδικοῦ εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

$$\text{νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ } \xi = 30\upsilon_1 + 12\upsilon_2$$

ὑποκειμένη εἰς

$$(\upsilon_1,\ \upsilon_2) \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geqq (1{,}5)$$
$$(\upsilon_1,\ \upsilon_2) \geqq 0.$$

Πάλιν, ἂν θελήσωμεν νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι $\xi = 25$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς ξ ὑποκειμένης εἰς τοὺς περιορισμούς, θὰ ἀχθῶμεν εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα.

Γενικώτερον, τὰ οὐσιώδη χαρακτηριστικὰ τῆς σχέσεως μεταξὺ ἀρχικῶν καὶ δυαδικῶν προβλημάτων ἐννοοῦνται ὀπτικῶς καλύτερον ἂν χρησιμοποιηθῇ συμβολισμὸς μητρῶν ὡς ἀκολούθως:

Ἀρχικὸν	***Δυαδικὸν***
μεγ $\varphi = \Gamma X$	ἐλαχ $\xi = \Psi B$
ὡς πρὸς	ὡς πρὸς
$AX \leqq B$	$\Psi A \geqq \Gamma$
$X \geqq O$	$\Psi \geqq O$,

ἔνθα A εἶναι $\mu \times \nu$, X εἶναι $\nu \times 1$, Γ εἶναι $1 \times \nu$, καὶ Ψ εἶναι $1 \times \mu$. Συγκεκριμένως, τὸ διάνυσμα τῶν συντελεστῶν εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν τοῦ ἀρχικοῦ ἐμφανίζεται εἰς τὸ δυαδικὸν ὡς τὸ διάνυσμα · στήλη τῶν σταθερῶν, καὶ τὸ διάνυσμα · στήλη τῶν σταθερῶν B εἰς τὸ ἀρχικόν, ἐμφανίζεται ὡς τὸ διάνυσμα συντελεστῶν εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν τοῦ δυαδικοῦ. Ἡ μήτρα A εἶναι ἡ μήτρα τῶν περιορισμῶν εἰς ἀμφότερα τὰ προβλήματα (1).

Τὰ κάτωθι θεωρήματα περιλαμβάνουν μαθηματικὴν ὕλην ἐπὶ τῆς δυαδικότητος.

Θεώρημα 1. Ἂν X^* καὶ Ψ^* εἶναι δυναταὶ λύσεις τῶν σχετικῶν προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, τότε $\Gamma X^* \leqq \Psi^* B$.

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ αἱ X^* καὶ Ψ^* εἶναι δυναταί,

$$AX^* \leqq B$$
$$\Psi^* A \geqq \Gamma .$$

Ἐπίσης, ἀφοῦ αἱ X^* καὶ Ψ^* εἶναι μὴ ἀρνητικαί,

$$\Psi^* A X^* \leqq \Psi^* B$$
$$\Psi^* A X^* \geqq \Gamma X^* ,$$

καὶ

$$\Gamma X^* \leqq \Psi^* B .$$

Θεώρημα 2. Ἂν X^* καὶ Ψ^* εἶναι δυναταὶ λύσεις καὶ ἂν $\Gamma X^* = \Psi^* B$, τότε X^* καὶ Ψ^* εἶναι ἄρισται.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἀφοῦ X^* καὶ Ψ^* εἶναι δυναταί,

$$\Gamma X \leqq \Psi^* B,$$

ἔνθα X εἶναι τυχοῦσα δυνατὴ λύσις εἰς τὸ ἀρχικόν. Ἐπίσης,

$$\Psi^* B = \Gamma X^*,$$

---

1. Τὸ δυαδικὸν δύναται ἐπίσης νὰ γραφῇ ὡς $A'\Psi \geqq \Gamma$, $\Psi \geqq O$, ἐλαχ $\xi = B'\Psi$. Εἰς τὸν συμβολισμὸν αὐτὸν τὸ δυαδικὸν διάνυσμα Ψ εἶναι στήλη καὶ ἡ μήτρα τῶν περιορισμῶν τοῦ δυαδικοῦ εἶναι ἡ ἐνηλλαγμένη τῆς μήτρας περιορισμῶν τοῦ ἀρχικοῦ. Τὰ ἀποτελέσματα εἶναι τὰ αὐτὰ εἴτε ὡς σειρὰ θεωρήσωμεν τὸ διάνυσμα Ψ εἴτε ὡς στήλη. Ἐκλέγομεν τὸ πρῶτον διότι εἶναι κατά τινα τρόπον ἁπλούστερος συμβολισμὸς διὰ τοὺς παρόντας σκοπούς. Εἰς ἑπομένην παράγραφον ὅταν ἀσχολούμεθα μὲ τὸ δυαδικὸν τοῦ προβλήματος ἀποθηκεύσεως, θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν συμβολισμὸν τῆς ἐνηλλαγμένης εἰς τὸ δυαδικόν.

ἑπομένως

$$ΓX \leqq ΓX^*$$

καὶ ἡ X^* εἶναι ἀρίστη. Παρόμοιον ἐπιχείρημα θὰ ἀποδείξῃ ὅτι καὶ ἡ $Ψ^*$ εἶναι ἀρίστη.

Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἀκολούθων σπουδαίων θεωρημάτων ἀπαιτοῦν ἰσχυρότερον μαθηματικὸν ἐξοπλισμὸν τοῦ ἐμφανιζομένου εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο, οὕτω παρατίθενται ἐδῶ ἄνευ ἀποδείξεως.

Θεώρημα 3. (Θεώρημα δυαδικότητος). Ἓν δυνατὸν διάνυσμα X^* εἶναι ἄριστον διάνυσμα διὰ τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ὑπάρχῃ ἓν δυνατὸν διάνυσμα $Ψ^*$ διὰ τὸ δυαδικόν, τοιοῦτον ὥστε,

$$ΓX^* = Ψ^*B.$$

Θεώρημα 4. (Θεώρημα ὑπάρξεως). Ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη διὰ τὴν ὕπαρξιν ἀρίστης λύσεως εἰς ἓν (καὶ συνεπῶς εἰς ἀμφότερα) τῶν προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι ἡ ὕπαρξις δυνατῶν λύσεων εἰς ἀμφότερα τὰ προβλήματα.

Τὸ θεώρημα δυαδικότητος εἶναι λίαν ἀξιοπρόσεκτον. Δηλοῖ μεταξὺ τῶν ἄλλων ὅτι ἂν καὶ τὸ ἀρχικὸν καὶ τὸ δυαδικὸν πρόβλημα ἔχουν ἄριστα διανύσματα, τότε διὰ τὰ διανύσματα αὐτὰ αἱ δύο γραμμικαὶ συναρτήσεις λαμβάνουν ἴσας τιμάς:

$$\text{μεγ}\ \varphi = \sum_{κ=1}^{ν} γ_κ χ_κ^* = \sum_{ι=1}^{μ} β_ι υ_ι^* = \text{ἐλαχ}\ ξ\ .$$

Παρατηρήσατε ὅτι X^*, ἀρίστη λύσις εἰς τὸ ἀρχικόν, εἶναι $ν \times 1$ καὶ ὅτι $Ψ^*$ εἶναι $1 \times μ$ διάνυσμα. Τὸ θεώρημα δυαδικότητος, βεβαίως, δὲν λέγει ὅτι τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι ἴσα· λέγει ὅτι ἡ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἡ γραμμικὴ συνάρτησις διὰ X^* εἰς τὸ ἀρχικὸν εἶναι ἴση πρὸς τὴν τιμὴν τὴν λαμβανομένην ὑπὸ τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἰς τὸ δυαδικὸν διὰ $Ψ^*$. Ἡ ἰσότης αὕτη ἔχει πολὺ σπουδαίας πρακτικὰς ἑρμηνείας ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβλητὰς τοῦ δυαδικοῦ, ὡς ἐντὸς ὀλίγου θὰ ἴδωμεν.

Οἰκονομικὴ ἑρμηνεία τῆς δυαδικότητος

Ὑποτεθείσθω ὅτι μία ἐπιχείρησις ἔχει μ εἰσροὰς καὶ ν ἐκροὰς $X_1, \ldots, X_ν$, ἔνθα

$χ_κ$ = ποσότης ἐκροῆς $X_κ$,

$ρ_κ$ = καθαρὰ ἔσοδα κατὰ μονάδα τοῦ $X_κ$,

$α_{ικ}$ = ποσότης εἰσροῆς ι ἀπαιτουμένη πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος ἐκροῆς (παραγομένου προϊόντος) $X_κ$,

$β_ι$ = συνολικὸν ποσὸν διαθεσίμου εἰσροῆς ι.

Τότε πρόβλημα μεγιστοποιήσεως διὰ τὴν ἐπιχείρησιν εἶναι ἡ μεγιστοποίησις τῆς ὁλικῆς καθαρᾶς προσόδου

(5) $$\text{ΟΚΠ (TNR)} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \rho_\kappa \chi_\kappa$$

ὑποκειμένης εἰς

(6) $$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \alpha_{\iota\kappa}\chi_\kappa \leqslant \beta_\iota \quad \leftarrow$$
$$\chi_\kappa \geqq 0$$

Ἐν λέξεσιν: ἡ ὁλικὴ ποσότης τῆς εἰσροῆς ι χρησιμοποιουμένη εἰς τὴν παραγωγὴν τῶν $X_1, \ldots, X_\nu$ πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὴν ὁλικὴν διαθέσιμον ποσότητα τῆς εἰσροῆς ι.

Τὸ δυαδικὸν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ εἶναι νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ

(7) $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \beta_\iota \upsilon_\iota$$

ὡς πρὸς

(8) $$\sum_{\iota=1}^{\mu} \alpha_{\iota\kappa} \upsilon_\iota \geqq \rho_\kappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, \nu)$$
$$\upsilon_\iota \geqq 0 .$$

Ἐκ τοῦ θεωρήματος 1 γνωρίζομεν ὅτι

(9) $$\sum_\kappa \rho_\kappa \chi_\kappa \leqq \sum_\iota \beta_\iota \upsilon_\iota$$

καὶ ἐκ τοῦ θεωρήματος 3 ὅτι

(10) $$\text{μεγ} \sum_\kappa \rho_\kappa \chi_\kappa = \text{ἐλαχ} \sum_\iota \beta_\iota \upsilon_\iota .$$

Ἀφοῦ τὰ χ_κ καὶ β_ι ἐκφράζωνται μέσῳ μονάδων πραγματικῶν (φυσικῶν) καὶ ἀφοῦ τὰ ρ_κ ἐκφράζωνται μέσῳ χρηματικῶν μονάδων, ἂς εἴπωμεν δολλαρίων, τὰ υ_ι πρέπει ἐπίσης νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς δολλάρια διὰ νὰ ἔχῃ ἡ (10) ἔννοιαν κατὰ τὴν ἑρμηνείαν. Ὑποτεθείσθω ὅτι ἡ διεύθυνσις ἐνδιεφέρετο διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς ἀναλογίας κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὁλικὴ καθαρὰ πρόσοδος ἀποδίδεται εἰς ἑκάστην εἰσροήν. Τότε διὰ νὰ ἔχουν χρῆσιν τινὰ αἱ οὕτως ὑπολογιζόμεναι ἀξίαι ἢ τιμαὶ πρέπει νὰ ἱκανοποιηθοῦν δύο ἁπλαῖ ἀπαιτήσεις:

(α) ἡ ὁλικὴ ὑπολογιστικὴ ἀξία ὅλων τῶν εἰσροῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὁλικῆς καθαρᾶς προσόδου τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκ τῶν πωλήσεων τῶν ἐκροῶν (προϊόντων) — (δηλαδὴ πρέπει νὰ εὑρεθοῦν τιμαὶ διὰ τὰς εἰσροάς, αἱ ὁποῖαι ἐλαχιστοποιοῦν τὴν ὁλικὴν ὑπολογιστικὴν ἀξίαν ὅλων τῶν εἰσροῶν τῆς ἐπιχειρήσεως), καὶ

(β) πρέπει νὰ καταλογισθοῦν τιμαὶ εἰς τὰς εἰσροάς, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι μικρότεραι τῆς συνεισφορᾶς τῶν εἰσροῶν εἰς τὴν καθαρὰν πρόσοδον (ἄλλως δὲν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν εἰσροῶν κατὰ τὸν ἐπιθυμητὸν τρόπον).

Ἡ ἀπαίτησις (α) εἶναι ἑρμηνεία τῶν μαθηματικῶν ἐκφράσεων (9) καὶ (10). Ἡ κ ἀνισότης τῆς (8),

$$\alpha_{1\kappa}\upsilon_1 + \alpha_{2\kappa}\upsilon_2 + \cdots + \alpha_{\mu\kappa}\upsilon_\mu \geq \rho_\kappa$$

σημαίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τιμῶν τῶν ποσοτήτων εἰσροῶν 1, $\cdots$, μ τῶν χρησιμοποιουμένων εἰς τὴν παραγωγὴν μιᾶς μονάδος X_κ δὲν εἶναι μικρότερον τῆς συνεισφορᾶς εἰς τὴν καθαρὰν πρόσοδον ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ X_κ καὶ ἀποτελεῖ ἐκ τούτου μαθηματικὴν ἔκφρασιν τῆς ἀπαιτήσεως (6).

Τοῦτο εἶναι ἐνδιαφέρον ἀποτέλεσμα διότι δηλοῖ ὅτι, ἂν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν μεγίστην ὁλικὴν καθαρὰν πρόσοδον, εἴμεθα ἐλεύθεροι νὰ λύσωμεν ἓν φαινομενικῶς διάφορον πρόβλημα —τὸ πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῆς ὁλικῆς ὑπολογιστικῆς ἀξίας ὅλων τῶν εἰσροῶν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν. Διὰ τοῦ θεωρήματος δυαδικότητος, ἀρίστη λύσις εἰς τὸ ἓν πρόβλημα ἄγει εἰς τὴν τιμὴν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἰς τὸ ἀρχικόν, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ δυαδικὸν δι' ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ δυαδικόν.

Γεωμετρία ἀναλύσεως δυαδικότητος καὶ εὐαισθησίας

Ἂς ἐξετάσωμεν δύο ἁπλᾶ προβλήματα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι τὸ δυαδικὸν τοῦ ἑτέρου :

νὰ μεγιστοποιηθῇ $\varphi = 7\chi_1 + 6\chi_2$

ὡς πρὸς

$$\begin{aligned} 2\chi_1 + \chi_2 &\leq 3 \\ \chi_1 + 4\chi_2 &\leq 4 \\ \chi_1 &\geq 0 \\ \chi_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $\xi = 3\upsilon_1 + 4\upsilon_2$

ὡς πρὸς

$$\begin{aligned} 2\upsilon_1 + \upsilon_2 &\geq 7 \\ \upsilon_1 + 4\upsilon_2 &\geq 16 \\ \upsilon_1 &\geq 0 \\ \upsilon_2 &\geq 0 . \end{aligned}$$

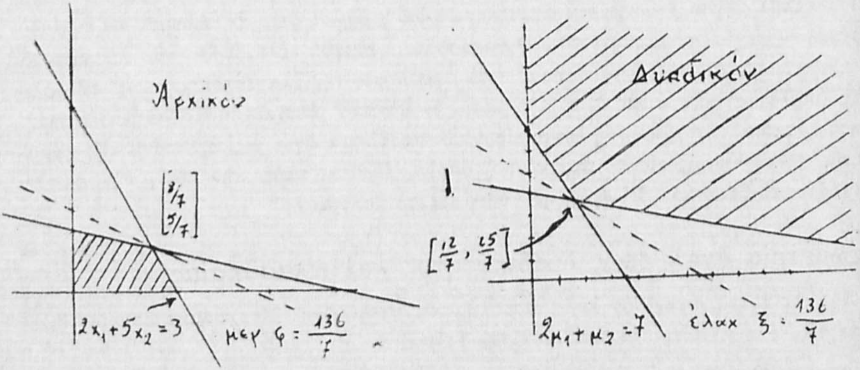
Τὸ σχῆμα 1 δεικνύει τὰς διαδικασίας ἀριστοποιήσεως καὶ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ τοῦ δυαδικοῦ. Ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ ἀρχικὸν ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα $\begin{bmatrix} 8/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}$ καὶ ἀρίστην λύσιν εἰς τὸ δυαδικὸν ἀποτελεῖ τὸ διάνυσμα [12/7, 25/7). Ἐπίσης,

$$\begin{aligned} \text{μεγ } \varphi &= 7\,(8/7) + 16(5/7) = 136/7, \\ \text{ἐλαχ } \xi &= 3\,(12/7) + 4(25/7) = 136/7, \end{aligned}$$

ὁπότε ἔχομεν μεγ $\varphi =$ ἐλαχ ξ.

Εἰς τὸ ἀρχικὸν ἡ ἀριστοποίησις ἔχει κατεύθυνσιν «ἀπομακρυνομένην» τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων, καὶ εἰς τὸ δυαδικὸν ἡ ἀριστοποιοῦσα κατεύθυνσις εἶναι «πρὸς» τὴν ἀρχήν. Τὰ διανύσματα τῶν συντελεστῶν εἰς τὰς γραμμικὰς συναρτήσεις, [7, 16] καὶ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, καθορίζουν πλήρως τὰς κατευθύνσεις ἀριστοποιήσεως. Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῆς φ, διὰ ποικίλας τιμὰς τῆς φ, εἶναι εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς τὸ [7, 16] ἢ πρὸς ἓν μονομετρικὸν πολλαπλάσιον τοῦ διανύσματος, καὶ αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῆς ξ εἶναι εὐθεῖαι κάθετοι πρὸς ἓν μονομετρικὸν πολλαπλάσιον τοῦ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Ἐν ἄλλοις λόγοις, αἱ κλίσεις τῶν ἀποτελουσῶν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν φ καὶ ξ εὐθειῶν προσδιορίζονται ἀπὸ τὰς συνιστώσας τῶν διανυσμάτων [7, 16] καὶ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, ἀντιστοίχως.

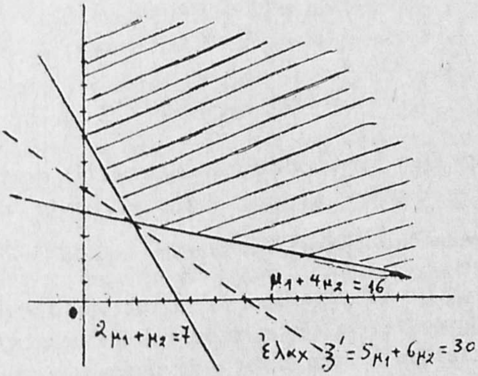
Αὕτη ἀποτελεῖ ἁπλῆν πλὴν ὅμως σπουδαίαν παρατήρησιν. Ὑποτεθείσθω ὅτι ἐπιθυμοῦμεν ν' ἀλλάξωμεν τὸ διάνυσμα-στήλη τῶν σταθερῶν B εἰς τὸ ἀρχι-



Σχῆμα 1.

κὸν (εἰς ἐφηρμοσμένον πρόβλημα, αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος τούτου πρέπει συνήθως νὰ ἐκτιμηθοῦν καὶ δὲν δυνάμεθα νὰ εἴμεθα βέβαιοι διὰ τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἐκτιμήσεως). Ἀφοῦ αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος αὐτοῦ ἐμφανίζωνται ὡς οἱ συντελεσταὶ εἰς τὴν ἔκφρασιν τῆς ξ, καὶ ἀφοῦ προσδιορίζουν τὴν κλίσιν τῆς γεωμετρικῶς ἀπεικονιζούσης τὴν ξ εὐθείας, ἡ μεταβολὴ τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος σταθερῶν B εἰς τὸ ἀρχικὸν ἔχει τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μεταβολῆς τῆς κλίσεως τῆς εὐθείας τῆς ξ. Ἐπίσης, ἑκάστη τοιαύτη ἀλλαγὴ εἰς τὰς B δίδει νέον ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ νέον δυαδικὸν τοιοῦτον. Πάντως, καὶ τοῦτο ἔχει τὴν σπουδαιότητα, διὰ μίαν ὁμάδα μεταβολῶν τῶν B, δι' ἕκαστον τῶν προκυπτόντων δυαδικῶν προβλημάτων ἡ κλίσις τῆς εὐθείας τῆς ξ θὰ ἔχῃ μεταβληθῇ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἕκαστον τοιοῦτον δυαδικὸν πρόβλημα θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἄριστον ἄκρον σημεῖον [12/7, 25/7] ὡς τὸ πρῶτον ληφθὲν δυαδικὸν πρόβλημα. Δι' ἕκαστον τῶν νέων τούτων προβλημάτων δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν τὰς νέας τιμὰς τῶν B εἰς τὴν ἐξίσωσιν διὰ τὴν ξ, καί, ἀφοῦ ἡ ἀρίστη λύσις δὲν ἔχῃ μεταβληθῇ, δυνάμεθα ταχέως νὰ λάβωμεν καὶ τὸ μέγιστον τῆς φ καὶ τὸ ἐλάχιστον τῆς ξ διὰ τὸ νέον πρόβλημα ἄνευ λύσεως τῶν προβλημάτων ἐκ νέου. Ἐπὶ παραδείγματι, ἂς ὑποτεθῇ ὅτι μεταβάλλομεν τὸ B ἀπὸ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ εἰς $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Ἡ συνάρτησις τοῦ δυαδικοῦ μεταβάλλεται ἀπὸ $\xi = 3\upsilon_1 + 4\upsilon_2$ εἰς $\xi' = 5\upsilon_1 + 6\upsilon_2$, καὶ διὰ $(\upsilon_1, \upsilon_2) = (12/7, 25/7)$ ἔχομεν $\xi' = 5\,(12/7) + 6\,(25/7) = 30$. Ἀπεικονίζομεν τώρα τὸ πρόβλημα γεωμετρικῶς εἰς τὸ σχῆμα 2 μὲ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ πρῶτον ληφθέντος δυαδικοῦ καὶ μὲ $5\upsilon_1 + 6\upsilon_2 = 30$ διὰ $\upsilon_1 = 12/7$ καὶ $\upsilon_2 = 25/7$. Βλέπομεν ὅτι τὸ σημεῖον (12/7, 25/7) ἀποτελεῖ ἄριστον ἄκρον σημεῖον διὰ τὸ πρόβλημα τῆς ἐλαχιστοποιήσεως τῆς $\xi' = 5\upsilon_1 + 6\upsilon_2$ ὡς πρὸς τοὺς περιορισμοὺς τοῦ πρῶτον ληφθέντος δυαδικοῦ προβλήματος.

Ἡ μεταβολὴ τῶν σταθερῶν εἰς τὸ ἀρχικόν, ἤ, ἀκριβέστερον, ἡ μεταβολὴ τῶν σταθερῶν εἰς παραμέτρους καὶ ἡ παρατήρησις τῶν ἀποτελεσμάτων ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν προβλημάτων, ἀρχικοῦ καὶ δυαδικοῦ, καλεῖται ***ἀνάλυσις εὐαισθησίας*** (sensitivity analysis). Ὅταν συνδυάσωμεν ταύτην μὲ ἑρμηνείαν ἐκτιμήσεως τοῦ δυαδικοῦ δυνάμεθα νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰς μεταβολὰς καὶ δυνάμεθα κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ ἀρχικὸν καὶ τὸ δυαδικὸν πρὸς ἐκτίμησιν διαζευκτι-



Σχ. 2

κῶν χρήσεων καὶ νὰ λάβωμεν προκαταβολικῶς ἀποφάσεις περὶ τῆς πραγματώσεως τῶν πραγματικῶν μεταβολῶν εἰς τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζομεν τὸ ὑπόδειγμα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Θὰ ἴδωμεν τοῦτο πληρέστερον ἀργότερα εἰς τὸ κείμενον τοῦ προβλήματος ἀποθηκεύσεως. Πρὸς τὸ παρὸν θὰ συνεχίσωμεν τὴν ἐξέτασιν μόνον τῶν βασικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς ἀναλύσεως εὐαισθησίας.

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὰ προβλήματα ἀνωτέρω, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐπιθυμοῦμεν νὰ γνωρίζωμεν τὰ ὅρια ἐντὸς τῶν ὁποίων εἴμεθα ἐλεύθεροι νὰ μεταβάλλωμεν τὸ διάνυσμα - στήλη τῶν σταθερῶν Β. Προκύπτει ὅτι ἔχομεν μεγάλην ἐλευθερίαν· δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν τὸ Β παντοιοτρόπως, βεβαίως, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι δὲν θὰ «ξεφύγωμεν» ἀπὸ τὸ σημεῖον (12/7, 25/7). Γεωμετρικῶς, δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν ὅτι τοῦτο θὰ ἔχῃ ἰσχὺν διὰ πᾶν διάνυσμα Β τὸ ὁποῖον ἄγει εἰς δυαδικὴν συνάρτησιν ξ τῆς ὁποίας ἡ γεωμετρικὴ παράστασις εὑρίσκεται ***μεταξὺ*** τῶν εὐθειῶν - ὁρίων τῶν τεμνομένων εἰς τὸ σημεῖον (12/7, 25/7) ἢ τῆς ὁποίας ἡ γεωμετρικὴ ἀπεικόνησις συμπίπτει μὲ μίαν τῶν εὐθειῶν - ὁρίων. Διὰ νὰ ἴδωμεν τὴν ἔννοιαν τούτου ἂς ἴδωμεν τοὺς δυαδικοὺς περιορισμούς.

$$2\upsilon_1 + \upsilon_2 \geqq 7$$

$$\upsilon_1 + 4\upsilon_2 \geqq 16.$$

Λαμβάνομεν σύνορα τοῦ συνόλου λύσεως τοῦ δυαδικοῦ ἐκ τῶν ἐξισώσεων $2\upsilon_1 + \upsilon_2 = 7$ καὶ $\upsilon_1 + 4\upsilon_2 = 16$. Πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς ἐξετάσεώς μας θὰ «μεταφράσωμεν» τὸ ὑπὸ κρίσιν ἄκρον σημεῖον εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων διὰ μετατοπίσεως τῶν εὐθειῶν - συνόρων παραλλήλως πρὸς ἑαυτὰς οὕτως ὥστε νὰ τέμνωνται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος. Αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν αὐτῶν τότε καθίστανται

$$2\upsilon_1 + \upsilon_2 = 0 \tag{11}$$

$$\upsilon_1 + 4\upsilon_2 = 0\,. \tag{12}$$

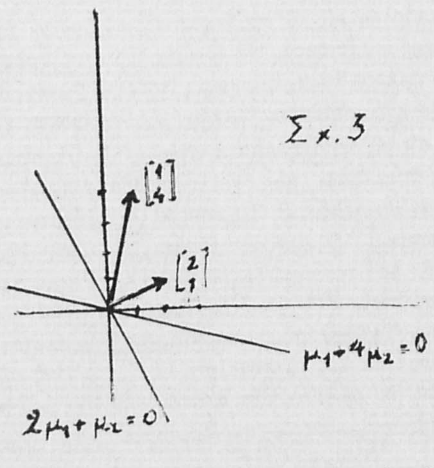
Ἂς γράψωμεν αὐτὰς ὡς

$$[\,\upsilon_1,\ \upsilon_2\,]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

καὶ

$$[\,\upsilon_1,\ \upsilon_2\,]\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Τότε τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἱκανοποιούντων τὴν (11) σημείων εἶναι ἀκριβῶς τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων πέρατος ὅλων τῶν πρὸς τὸ ὡρισμένον διάνυσμα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ὀρθογωνίων διανυσμάτων καὶ παρόμοια σχόλια ἰσχύουν δια τὸ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Τὰ διανύσματα τῶν ὁποίων αἱ συνιστῶσαι ἀποτελοῦν τοὺς συντελεστὰς τῶν μεταβλητῶν τῆς (11) καὶ τῆς (12) καλοῦνται ***κανονικὰ*** διανύσματα, καὶ ἡ περίπτωσις δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα 3, ὅπου ἕκαστον κανονικὸν διάνυσμα δεικνύεται κάθετον (ὀρθογώνιον) πρὸς τὴν κατάλληλον εὐθεῖαν - ὅριον. Τώρα ἂς θεωρήσωμεν τὸν ὑπὸ τῶν κανονικῶν διανυσμάτων ζευγνύμενον κῶνον. Πᾶν διάνυσμα εἰς τὸν



κῶνον αὐτὸν δύναται νὰ εἶναι τὸ κανονικὸν διάνυσμα πρὸς εὐθεῖαν τινὰ διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συστήματος. Ἐπὶ πλέον, διὰ πᾶν εἰς τὸν κῶνον κανονικὸν διάνυσμα, ἡ ἀντίστοιχος εὐθεῖα θὰ κεῖται ***μεταξὺ*** τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπεικονίζονται εἰς τὸ σχ. 2. Ἐπειδὴ δυνάμεθα ἐπίσης νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς ἓν κανονικὸν διάνυσμα εἰς τὸν κῶνον εὐθεῖαν ὡς τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἰς ἓν (δυαδικὸν) πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, διὰ πᾶν διάνυσμα εἰς τὸν κῶνον αὐτὸν ἔχομεν πρόβλημα προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ἄριστον ἀκραῖον σημεῖον ὡς τὸ κατὰ πρῶτον ληφθὲν (μεταφρασθὲν) πρόβλημά μας. Εὐκρινῶς, ἡ «μετάφρασις» καθ' ἑαυτὴ δὲν ἐπηρεάζει τὰς παρατηρήσεις ταύτας καὶ καταλήγομεν εἰς τοῦτο: δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν πᾶν διάνυσμα εἰς τὸν ἐν σχήματι 3 δεικνυόμενον κῶνον εἰς τὸ διάνυσμα-στήλη τῶν σταθερῶν B εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα. Δι' ἑκάστην τοιαύτην ἐκλογὴν τοῦ B λαμβάνομεν ἓν νέον δυαδικὸν πρόβλημα προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ἄκρον σημεῖον ὡς τὸ πρωταρχικὸν δυαδικὸν πρόβλημα.

Ἕτερος τρόπος ἐξευρέσεως διανύσματος B τὸ ὁποῖον θὰ προκαλέσῃ τὴν ἀπομάκρυνσιν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως ἀπὸ τὸ ἀκραῖον σημεῖον (12/7, 25/7) εἶναι ὁ ἀκόλουθος. Σχετιζόμενος μὲ ἕκαστον ἀκραῖον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων εἶναι εἷς γραμμικὸς συνδυασμὸς διανυσμάτων-στηλῶν ἀπὸ τὴν μήτραν περιορισμῶν τοῦ δυαδικοῦ, καὶ εἰς τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν τὰ ἀνεξάρτητα διανύσματα (διανύσματα βάσεως) ἔχουν ὡς θετικοὺς συντελεστὰς τὰς συνιστώσας τοῦ ἄκρου σημείου καὶ τὰ μένοντα διανύσματα ἔχουν μηδενικοὺς συντελεστάς. Ἂν ἐκλεγῇ διάνυσμα B ἐπιφέρον μεταβολὴν εἰς τὴν σύνθεσιν τῶν διανυσμάτων εἰς ἀρίστην βάσιν, τότε ἡ γραμμικὴ συνάρτησις πρέπει νὰ ἔχῃ μετατοπισθῆ εἰς ἓν νέον ἄκρον σημεῖον τοῦ συνόλου λύσεων τοῦ δυαδικοῦ.

Μία ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλύσεως δυαδικότητος καὶ εὐαισθησίας

Εἰς τὸ πρόβλημα ἀποθήκης ζητοῦμεν ἄριστον ὑπόδειγμα ἀγορῶν, ἀποθηκεύσεως καὶ πωλήσεων, δοθείσης ἀποθήκης μὲ ὡρισμένην δυναμικότητα καὶ ἀρχικὴν προμήθειαν ἑνὸς ἀγαθοῦ ὑποκειμένου εἰς γνωστὰς ἐποχιακὰς διακυμάνσεις τιμῆς καὶ κόστους. Αἱ ὑποθέσεις ἐξετέθησαν εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον· πρὸς εὐκολίαν ὁρίζομεν ἐκ νέου τὰ σύμβολα ὡς ἑξῆς:

$B =$ ἡ ὡρισμένη δυναμικότης τῆς ἀποθήκης,

$A =$ ἀρχικὸν ἐξ ἀπογραφῆς ἀπόθεμα εἰς τὴν ἀποθήκην,

$\chi_j =$ ποσότης πρὸς ἀγορὰν κατὰ τὴν περίοδον j,

$\psi_j =$ ποσότης πρὸς πώλησιν κατὰ τὴν περίοδον j,

$\rho_j =$ κατὰ μονάδα τιμὴ πωλήσεως ἐν ἰσχύι κατὰ τὴν περίοδον j,

$\gamma_j =$ κατὰ μονάδα τιμὴ ἀγορᾶς (ἢ κατὰ μονάδα κόστος) ἐν ἰσχύι κατὰ τὴν περίοδον j.

Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ γραφῇ ὡς

(13) νὰ μεγιστοποιηθῇ $\pi = \sum_{j=1}^{\nu} -\gamma_j \chi_j + \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j \psi_j$

$$= [\, -\gamma_1, \cdots, -\gamma_\nu, \rho_1, \cdots, \rho_\nu \,] \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu \\ \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu \end{bmatrix} = \rho'\lambda$$

ὡς πρὸς τοὺς περιορισμοὺς

$$(14) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi \\ \psi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} B-A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B-A \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \end{bmatrix}$$

δι' ἅπαντα τὰ μὴ ἀρνητικὰ διανύσματα λ. Βραχύτερον τὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς

(15) νὰ μεγιστοποιηθῇ $\pi = \rho'\lambda$

ὡς πρὸς

(16) $M\lambda \leqq \beta$

(17) $\lambda \geqq 0$

ἔνθα M ἡ ἀνωτέρω μήτρα 2ν ἐπὶ 2ν, β τὸ διάνυσμα - στήλη τῶν σταθερῶν ὅρων, ρ′ καὶ λ τὰ διάνυσμα - γραμμὴ καὶ διάνυσμα - στήλη, ἀντιστοίχως, τὰ ἐμφανιζόμενα εἰς τὴν (13).

Τὸ πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ δυαδικὸν τοῦ προβλήματος (15), (16) καὶ (17) ἔχει ὡς ἀκολούθως :

(18) νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ $E = \omega'\beta$

ὡς πρὸς

(19) $M'\omega \geqq \rho$

(20) $\omega \geqq 0$

ἔνθα M′ ἡ ἐνηλλαγμένη τῆς μήτρας εἰς τὴν (14) καὶ ἔνθα τὸ διάνυσμα - στήλη ω ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς μεταβλητὰς τοῦ δυαδικοῦ. Ἂς ὁρίσωμεν

$$\omega = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu \\ \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_\nu \end{bmatrix}$$

καὶ τὸ δυαδικὸν πρόβλημα εἶναι

νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ

$$E = [\,\tau_1, \;\cdots, \;\tau_\nu \,, \;\mu_1 \,, \;\cdots, \;\mu_\nu \,] \begin{bmatrix} B-A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B-A \\ A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A \end{bmatrix} = \omega' \beta$$

ὡς πρὸς τοὺς περιορισμοὺς

$$(21) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & \ldots & -1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu \\ \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_\nu \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} -\gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\gamma_\nu \\ \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_\nu \end{bmatrix}$$

$$\omega \geqq 0 \,.$$

Τὸ δυαδικὸν δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς μέσῳ ἀθροιστικῶν συμβόλων,

$$(22) \qquad \text{νὰ ἐλαχιστοποιηθῇ} \quad E = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (B-A)\,\tau_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\nu} A\mu_\kappa$$

ὡς πρὸς

(23) $$\sum_{\iota=\kappa}^{\nu} \tau_\iota - \sum_{\iota=\kappa+1}^{\nu} \mu_\iota \geqq -\gamma_\kappa \qquad (\kappa = 1, \ldots, \nu)$$

(24) $$-\sum_{\iota=r}^{\nu} \tau_\iota + \sum_{\iota=r}^{\nu} \mu_\iota \geqq \rho_r \qquad (r = 1, \ldots, \nu)$$

(25) $$\left.\begin{matrix} \tau_\iota \geqq 0 \\ \mu_\iota \geqq 0 \end{matrix}\right\} \quad (\iota = 1, \ldots, \nu) \text{ [2].}$$

Ἀμφότερα τὰ προβλήματα, ἀρχικὸν καὶ δυαδικὸν δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν μέσῳ τοῦ κάτωθι διαγράμματος:

Ὅρος

$\omega \backslash \lambda$	χ_1	$\cdots$	χ_κ	$\cdots$	χ_ν	ψ_1	$\cdots$	ψ_r	$\cdots$	ψ_ν	β	
τ_1	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	B–A	Καθαρὰ ἀποθήκευσις
$\vdots$	$\vdots$										$\vdots$	
τ_κ	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	-1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	B–A	
$\vdots$	$\vdots$										$\vdots$	
τ_ν	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1	-1	$\cdots$	-1	$\cdots$	-1	B–A	
$\vdots$												
μ_1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	A	Πωλήσεις
$\vdots$											$\vdots$	
μ_r	-1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	A	
$\vdots$											$\vdots$	
μ_ν	-1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	1	A	
ρ	$-\gamma_1$	$\cdots$	$-\gamma_r$	$\cdots$	$-\gamma_\nu$	ρ_1	$\cdots$	ρ_r	$\cdots$	ρ_ν		

2) Ὑποδεικνύεται εἰς τὸν ἀναγνώστην νὰ ἐπαληθεύσῃ ὅτι ἡ (23) διὰ $\kappa = 1$ καὶ $\kappa = 2$ καὶ ἡ (24) διὰ $r = 1$ καὶ $r = 2$ δύνανται νὰ ληφθοῦν ἐκ τῆς (21).

Τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα δύναται νὰ σχηματισθῇ ἀπὸ τὰς σειρὰς καὶ τὸ δυαδικὸν ἀπὸ τὰς στήλας. Ἐπὶ παραδείγματι, ὁ πρῶτος καὶ οἱ διαδοχικοὶ περιορισμοὶ εἰς τὸ ἀρχικὸν δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἂν λάβωμεν τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης γραμμῆς καὶ δευτέρας γραμμῆς, κλπ., καὶ ὁ πρῶτος καὶ οἱ διαδοχικοὶ περιορισμοὶ τοῦ δυαδικοῦ δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἂν λάβωμεν τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης στήλης καὶ τῆς δευτέρας στήλης, κλπ. Τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα δύνανται νὰ σχηματισθοῦν ἐπίσης ὡς ἑξῆς : τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης καὶ τελευταίας γραμμῆς εἰς τὸ διάγραμμα εἶναι ἡ ἔκφρασις (15) καὶ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῆς πρώτης καὶ τελευταίας στήλης εἶναι ἡ ἔκφρασις (18) ἢ (22).

Ἐκ τοῦ θεωρήματος δυαδικότητος τοῦ γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι μεγ $\pi =$ ἐλαχ E. Ἂν δηλώσωμεν τὰς ἀρίστας λύσεις ὡς ἑξῆς,

$$\lambda^* = \begin{bmatrix} \chi_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \chi_\nu^* \\ \psi_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\nu^* \end{bmatrix} \qquad \omega^* = \begin{bmatrix} \tau_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau_\nu^* \\ \mu_1^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_\nu^* \end{bmatrix}$$

ἔχομεν ὡς ἀρίστην λύσιν

$$\pi^* = -\sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \, \chi_j^* + \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j \quad \psi_j^* = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (B-A)\, \tau_\kappa^* + \sum_{\kappa=1}^{\nu} A\mu_\kappa^* = E^*. \tag{26}$$

Διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν ἡ ἐξίσωσις αὕτη, ἀμφότερα τὰ μέλη πρέπει νὰ ἐκφρασθοῦν εἰς τὰς αὐτὰς μονάδας μετρήσεως. Ἀφοῦ τὰ ψ_j , χ_j , B — A, καὶ A ἐκφράζωνται εἰς φυσικὰς μονάδας (τόννους, ὡς εἴπωμεν), καὶ ἀφοῦ τὰ ρ_j καὶ γ_j ἐκφράζωνται εἰς δολλάρια κατὰ μονάδα, τὰ τ_κ^* καὶ μ_κ^* πρέπει ἐπίσης νὰ ἐκφράζωνται εἰς δολλάρια κατὰ μονάδα. Συγκεκριμένως, τὸ τ_κ^* πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ εἰς δολλάρια κατὰ τόννον καθαρᾶς δυναμικότητος τῆς ἀποθήκης, ἐν διαθέσει κατὰ τὴν περίοδον κ καὶ τὸ μ_κ^* πρέπει νὰ ἐκφρασθῇ εἰς δολλάρια κατὰ μονάδα τῆς ἀρχικῆς ἀπογραφῆς εἰς τὴν περίοδον κ. Ἀρίστη λύσις τοῦ δυαδικοῦ ἑρμηνεύεται οὕτως ὡς λύσις τοῦ προβλήματος ἐκτιμήσεως τῶν ὡρισμένων πόρων τοῦ κτήτορος τῆς ἀποθήκης. Οἰκονομικῶς, ὁ διαχειριστὴς δύναται εὐθέως νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν μεγιστοποίησιν τῆς καθαρᾶς ἀποδόσεως ὡς πρὸς τοὺς περιορισμοὺς τοὺς τιθεμένους ὑπὸ τῶν φυσικῶν ὁρίων καὶ ὁρίων κεφαλαίου (τὸ ἀρχικόν), ἢ ἐμμέσως διὰ κατανομῆς τῶν πόρων μεταξὺ ἀνταγωνιστικῶν χρήσεων ἕως ὅτου τὸ χαμηλότερον ἐπίπεδον αὐξητικῆς ἀξίας, τὸ ἐπιτρεπόμενον ἐξ ἐξωτερικῶν συνθηκῶν ἢ μὴ ἀρνητικότητος, φέρῃ ἀποτελέσματα (τὸ δυαδικόν). Ἡ ***ἐλαχίστη*** ὁλικὴ τιμὴ τῶν πόρων εἶναι βεβαίως, ἡ μεγίστη ἀξία ἡ ὁποία δύναται νὰ κτηθῇ διὰ τῆς παραγωγικῆς αὐτῶν χρήσεως ὑπὸ αὐτοῦ τούτου τοῦ ἰδιοκτήτου· εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ (ἢ κόστος εὐκαιρίας) εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἐξετασθῇ ἡ πώλησις ἢ ἐκμίσθωσις τῶν πόρων ἀντὶ τῆς παραγωγικῆς αὐτῶν χρησιμοποιήσεως.

Διὰ νὰ διευκρινίσωμεν τὴν χρῆσιν τῶν τ_κ^* καὶ μ_κ^* πρὸς ἐκτίμησιν τῶν περιουσιακῶν στοιχείων, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀποθήκη ἀποκτᾷ κατὰ τὴν περίοδον 1 πρόσθετον μονάδα δυναμικότητος. Τότε ἐκ τῆς (22),

$$\Sigma_\kappa (B + 1 - A)\, \tau_\kappa^* + \Sigma_\kappa A\mu_\kappa^* = (B + 1)\, \Sigma\tau_\kappa^* - A\Sigma\, (\tau_\kappa^* - \mu_\kappa^*). \tag{27}$$

Αὕτη περικλείει τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὰ τ_κ^* καὶ μ_κ^* δὲν μεταβάλλονται (θὰ ἴδωμεν ἀργότερον τὸν προσδιορισμὸν τῶν ὁρίων ἐντὸς τῶν ὁποίων τὰ τ_κ^* καὶ μ_κ^* παραμένουν ἀμετάβλητα). Ἂν δὲν μεταβληθοῦν τὰ τ_κ^* καὶ μ_κ^*, τότε ἑτέρα ἀρίστη λύσις, ἡ E^{**}, προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς (27).

Ἐπιστρέφοντες εἰς τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (22), παρατηροῦμεν ὅτι

$$\pi^* = \Sigma_\kappa (B-A)\tau_\kappa^* + \Sigma_\kappa A\mu_\kappa^* = B\Sigma_\kappa \tau_\kappa^* - A\Sigma_\kappa (\tau_\kappa^* - \mu_\kappa^*) = \tag{28}$$
$$= B\Sigma_\kappa \tau_\kappa^* + A\Sigma_\kappa (\mu_\kappa^* - \tau_\kappa^*),$$

ἔνθα τὸ $\Sigma_\kappa (\mu_\kappa^* - \tau_\kappa^*)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ ***καθαρὰ ἐξ ἀπογραφῆς ἀξία***, τοῦ τ_κ^* ἀντιπροσωπεύοντος κόστος εὐκαιρίας προκῦπτον ἐκ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ ἄλλως διατιθεμένου χώρου τῆς ἀποθήκης καὶ τοῦ μ_κ^* ἀντιπροσωπεύοντος κέρδη εἴτε ἐξ οἰκονομιῶν τῶν ἀγορῶν εἴτε ἐκ δυνατοτήτων πωλήσεων. Ἐκ τῆς (27) ἐπίσης,

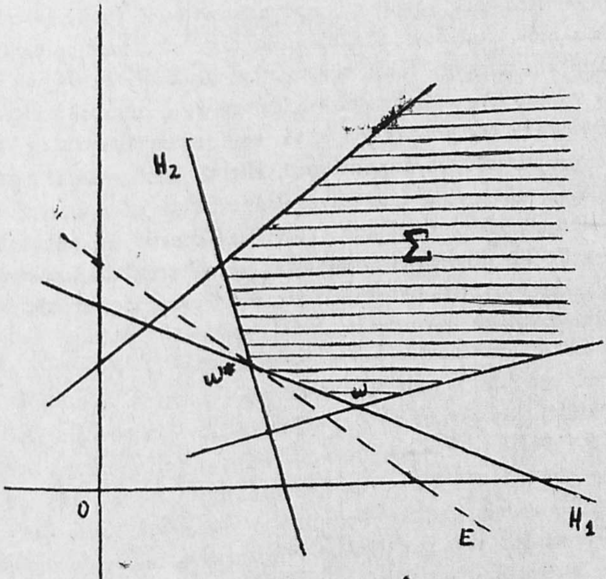
$$\pi^{**} = E^{**} = B\Sigma_\kappa \tau_\kappa^* - A\Sigma_\kappa (\tau_\kappa^* - \mu_\kappa^*) + \Sigma_\kappa \tau_\kappa^* = \pi^* + \Sigma\tau_\kappa^*,$$

καὶ

$$\pi^{**} = \pi^* + \Sigma\tau_\kappa^* \geqq \pi^*, \tag{29}$$

ἀφοῦ $\tau_\kappa^* \geqq 0$. Συνεπῶς, αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν τοῦ δυαδικοῦ παρέχουν ***ἐκ τῶν προτέρων*** μέσον προσδιορισμοῦ τῶν ἐπερχομένων αὐξήσεων ἢ μειώσεων εἰς τὰ κέρδη, τὸ κόστος, κλπ., αἱ ὁποῖαι θὰ ἐμφανισθοῦν ἂν λάβῃ χώραν ἀρίστη χρῆσις τῶν μελετουμένων μεταβολῶν τῶν περιουσιακῶν στοιχείων. Οὕτω, τὸ θεώρημα δυαδικότητος καθίσταται ἰσχυρὸν πρακτικὸν ὄργανον· δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ πρὸς ἐξέτασιν ταυτοχρόνων ἀλληλεπιδράσεων τῶν μεταβολῶν τῆς περιουσίας καὶ ἀρίστων συνθέσεων προγράμματος καὶ ἐπιτρέπει τὴν ἐξέτασιν ἑνὸς προβλήματος γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἀντὶ τοῦ ὅ,τι θὰ ἐφαίνετο νὰ εἶναι μία σειρὰ πολυπλόκων προβλημάτων γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ.

Σημειώσατε ὅτι ἡ μεταβολὴ (αὔξησις) κατὰ ἕνα τόννον τῆς παραγωγικῆς δυναμικότητος τῆς ἀποθήκης εἰς τὴν πραγματικότητα ἀνέρχεται εἰς κατὰ μίαν μονάδα αὔξησιν τοῦ B καὶ τὸ B — A ἀντικαθίσταται ὑπὸ τοῦ B + 1 — A δι' ἑκάστην τοιαύτην ἐγγραφὴν εἰς τὸ διάγραμμα τῆς σελίδος 123. Πράγματι, αὐτὸ συμβαίνει ὅταν ὁ ἀριθμὸς 1 εἰσέλθῃ εἰς τὴν (22). Ἐπίσης, οἱ σταθεροὶ ὅροι δύνανται νὰ μεταβληθοῦν, ἄνευ μεταβολῆς τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν τοῦ δυαδικοῦ (δηλ., ἄνευ μεταβολῆς τῆς ἀρίστης λύσεως) καθ' ὃν χρόνον δὲν ἐπέλθῃ μεταβολὴ εἰς τὰ διανύσματα βάσεως τοῦ δυαδικοῦ, τὰ ὁποῖα ἐπέφερον τὴν ἀρίστην λύσιν. Παρατηρήσατε ὅτι ὅταν αἱ συνιστῶσαι τοῦ β μεταβάλλωνται ἡ *τιμὴ* τοῦ μεγίστου (καὶ ἑπομένως τοῦ ἐλαχίστου) δύναται νά, καὶ εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων θά, μεταβληθῇ (ἴδε τὴν (29) διὰ τὴν ἀλλαγὴν ταύτην), ἀλλὰ διὰ μεταβολὰς εἰς τὸ β ἱκανοποιούσας τὰς ἀνωτέρω ἀπαιτήσεις δὲν θὰ ὑπάρξῃ μεταβολὴ εἰς τὴν ἀρίστην λύσιν (δηλ., δὲν θὰ ὑπάρξῃ μεταβολὴ εἰς τὸ σημεῖον ἔνθα ἐπιτυγχάνεται ἀρίστη λύσις), καὶ αἱ συνιστῶσαι αὐτοῦ τοῦ διανύσματος ἀρίστης λύσεως δύνανται τότε



Σχῆμα 4

νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς «ἐκτιμηταὶ» δι᾿ ἀριθμὸν διαφόρων διαζευκτικῶν ἐπιτεύξεων κέρδους.

Τοῦτο δύναται ἐπίσης νὰ διευκρινισθῇ γεωμετρικῶς κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον τῆς ἐξετάσεως τῆς ἀναλύσεως εὐαισθησίας εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον. Ἐνθυμούμενοι ὅτι αἱ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος - στήλης τῶν σταθερῶν εἰς τὸ ἀρχικὸν (τοῦ διανύσματος β) εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν μεταβλητῶν εἰς τὴν γραμμικὴν μορφὴν Ε τοῦ δυαδικοῦ (ἴδε τὰς (16) καὶ (18)), καὶ ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ Ε εἶναι ὑπερεπίπεδον, τὸ ὁποῖον δι᾿ ἀρίστην λύσιν τέμνει τὸ κυρτὸν σύνολον τῶν δυνατῶν λύσεων τοῦ δυαδικοῦ εἰς ἓν ἄκρον σημεῖον «ἐγγύτατον» πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος συντεταγμένων, βλέπομεν ὅτι ἡ μεταβολὴ τοῦ β δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ γεωμετρικῶς ὡς ἡ μεταβολὴ τῆς κλίσεως τοῦ ὑπερεπιπέδου τοῦ ἀντιπροσωπεύοντος τὴν γραμμικὴν μορφὴν τοῦ δυαδικοῦ. Ἄς ὑποθέσωμεν, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι ἡ γραμμικὴ μορφὴ τοῦ δυαδικοῦ εἶναι ἡ εὐθεῖα Ε εἰς τὸ σχῆμα 4 καὶ ὅτι τὸ σύνολον τῶν δυνατῶν λύσεων εἰς τὸ δυαδικὸν εἶναι τὸ σύνολον Σ. Τότε αἱ συνιστῶσαι τοῦ β εἰς τὸ ἀρχικὸν δύνανται νὰ μεταβληθοῦν καθ' οἱονδήποτε τρόπον ἐφ' ὅσον τὸ ὑπερεπίπεδον τέμνῃ τὸ Σ εἰς τὸ σημεῖον ω*. Ἂν τὸ β μετεβάλλετο κατὰ τοιοῦτον τροπον ὥστε ἡ κλίσις τοῦ Ε νὰ καθίστατο «πιὸ ἐπίπεδος» ἐκείνης τοῦ H_1, τότε τὸ σημεῖον ω θὰ ἦτο ἀρίστη λύσις καὶ τοῦτο θὰ ἐσήμαινεν ὅτι ἠλλάξαμε τὰ διανύσματα βάσεως. Ἐπίσης, ἂν ἡ κλίσις τῆς Ε ἐγίνετο «πιὸ ἀπότομος» ἐκείνης τῆς H_2, θὰ ἀπεμακρυνώμεθα πάλιν τοῦ ἄκρου σημείου ω* καὶ ἡ βάσις θὰ εἶχε μεταβληθῆ. Πάντως, δι' ἑκάστην μεταβολὴν εἰς τὸ β (καὶ εἰς τὴν Ε) τοιαύτην ὥστε ἡ ω* παραμένει ἀρίστη λύσις, λαμβάνομεν ἓν *νέον* πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ ἔχον τὴν αὐτὴν ἀρίστην λύσιν ὡς τὸ παλαιόν, καὶ δυνάμεθα εὐχερῶς τότε νὰ προσδιορίσωμεν τὴν νέαν τιμὴν τῆς γραμμικῆς μορφῆς. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὰς τιμὰς τῶν γραμμικῶν μορφῶν διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν ἡ μεταβολὴ εἰς τὸ β ηὔξησεν ἢ ἐλάττωσε τὴν τιμὴν τῆς μορφῆς χωρὶς νὰ καθίσταται ἀναγκαῖον νὰ λύσωμεν ἓν νέον πρόβλημα γραμμικοῦ προγραμματισμοῦ. Εἰς τὸ ὑπόδειγμα τῆς ἀποθήκης, ἐπὶ παραδείγματι, ἡ μεταβολὴ τοῦ β σημαίνει ἢ μεταβολὴν τῶν ἀπαιτήσεων καθαρᾶς ἀποθηκεύσεως, ἢ μεταβολὴν τῶν ἀπαιτήσεων πωλήσεων, ἢ μεταβολὴν καὶ τῶν δύο, οὕτω δυνάμεθα νὰ χρησιμοπριήσωμεν τὰς μεταβλητὰς τοῦ δυαδικοῦ πρὸς ἐκτίμησιν μιᾶς ποικιλίας δυνατῶν μεταβολῶν εἰς τὴν δυναμικότητα τῆς ἀποθήκης καὶ τὴν ἀρχικὴν ἀπογραφήν.