Η ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΣ

Ὑπὸ κ. ΣΠΥΡΟΥ Α. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ - ΣΤΑΥΡΟΥ

1. Ἡ ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως (Analysis of variance) ἀποτελεῖ στατιστικὴν τεχνικήν ἡ ὁποία ἀναλύει ποσοτικὰ μεγέθη ἐξαρτώμενα ἐκ τῆς συγχρόνου ἐπενεργείας διαφόρων ποιοτικῆς μορφῆς παραγόντων καὶ ἐκτιμᾷ τὴν ἐπίδρασιν ἑνὸς ἑκάστου τούτων μεμονωμένως ἢ ἐν συνδυασμῷ μὲ τοὺς ὑπολοίπους. Ἡ ὀνομασία τῆς ἐν λόγῳ τεχνικῆς προέρχεται ἐκ τῆς ἐπιτυγχανομένης διασπάσεως τῆς διακυμάνσεως εἰς διάφορα τμήματα, τὰ ὁποῖα ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς διαφόρους πηγὰς (παράγοντας) παρεκλίσεως τῶν παρατηρήσεων ἐκ τῆς μέσης τιμῆς τούτων.

Ἡ μορφὴ τοῦ ὑποδείγματος, τὸ ὁποῖον διερευνᾷ ἡ ἀνάλυσις τῆς διακυμάνσεως εἶναι ὡς ἀκολούθως :

$$\Psi_\nu = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} X_{\nu\gamma}\,\beta_\gamma + U_\nu \qquad \text{ὅπου οἱ συντελεσταὶ } X_{\nu\gamma} \text{ ἔχουν τιμὴν 0 ἢ 1 } (^1)$$

$$\nu = 1, \ldots, N \qquad \text{(indicator variables)}$$

$$E(U_\nu) = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad E(\Psi_\nu) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} X_{\nu\gamma}\,\beta_\gamma$$

$$E(U_\nu U_\mu) = \sigma^2 \cdot \delta_{\mu\nu}, \quad \text{ὅπου} \quad \delta_{\mu\nu} = 1 \quad \text{διὰ} \quad \mu = \nu$$

$$= 0 \quad \text{διὰ} \quad \mu \neq \nu$$

1) Ἐκ τῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι ἐν γένει ὑπεισέρχονται εἰς ἕνα ὑπόδειγμα ἄλλοι εἶναι ποιοτικοὶ (ὅπως λ.χ. ἡ ποικιλία τοῦ χρησιμοποιουμένου σπόρου) καὶ ἄλλοι ποσοτικοὶ (ὅπως λ.χ. ἡ θερμοκρασία). Ἕνας ποσοτικὸς παράγων δύναται νὰ τύχῃ χρησιμοποιήσεως ὡς ποιοτικός, ὅταν, ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ὅλη θερμομετρικὴ κλῖμαξ τοῦ πειράματος ἢ τῶν παρατηρήσεων ὑποδιαιρεῖται εἰς περιωρισμένον ἀριθμὸν διακριτικῶν ἐπιπέδων καὶ εἰς τὸ ὑπόδειγμα δὲν ὑπεισέρχεται τὸ πραγματικὸν ὕψος τῆς παρατηρουμένης θερμοκρασίας, ἀλλὰ μόνον ἡ ἔνδειξις τοῦ ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν ἐπιπέδου.

Εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς διακυμάνσεως ὅλοι οἱ παράγοντες, οἱ ὁποῖοι ἐπηρεάζουν τὰς παρατηρήσεις λαμβάνονται ὡς ποιοτικοὶ καὶ συνεπῶς εἶναι ἀσυνεχεῖς μεταβληταί, τῆς ἐπιδράσεώς των ἐκφραζομένης ὑπὸ παραμέτρων, ὡς αἱ β_γ τοῦ ἐν τῷ κειμένῳ ὑποδείγματος. Σημειωτέον ὅτι εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς παλινδρομήσεως ὑπεισέρχονται ἀντιθέτως ποσοτικοὶ μόνον παράγοντες, οὕτω δὲ οἱ συντελεσταὶ $X_{\nu\gamma}$ τοῦ ὡς ἀνωτέρω ὑποδείγματος εἶναι ἐν προκειμένῳ συνεχεῖς μεταβληταί, τῶν παραμέτρων β_γ καλουμένων συντελεστῶν τῆς παλινδρομήσεως.

Στατιστικῶς ἀναλύονται καὶ ὑποδείγματα εἰς τὰ ὁποῖα ὑπεισέρχονται τόσον ποιοτικοὶ ὅσον καὶ ποσοτικοὶ παράγοντες (analysis of covariance). Οὕτω λ.χ. ἡ ἀντοχὴ μιᾶς κολλώδους οὐσίας θεωρεῖται ὅτι ἐπηρεάζεται τόσον ἐκ τῆς χρησιμοποιουμένης, μεταξὺ πλειόνων δυνατῶν, μεθόδου παρασκευῆς της (ὁ ποιοτικὸς παράγων) ὅσον καὶ ἐκ τοῦ πάχους τοῦ ἐπιθέματος ἐκ τῆς οὐσίας (ὁ συνεχής, ποσοτικὸς παράγων).

Ἡ μεταβλητὴ Ψ_ν προέρχεται ἐκ πληθυσμοῦ μὲ κανονικὴν κατανομὴν (normal distribution), ὥστε U_ν ἔχει κανονικὴν κατανομὴν $(0, \sigma^2)$. Αἱ παράμετροι (²) β_γ ἐκφράζουν ποιοτικοὺς παράγοντας, ὑπεισέρχονται δὲ εἰς τὸ ὑπόδειγμα ὑπὸ γραμμικὴν μορφήν.

Ὑπὸ μορφὴν μητρῶν ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$\underset{(N\times 1)}{Y} = \underset{(N\times\Gamma)}{X'}\ \underset{(\Gamma\times 1)}{B} + \underset{(N\times 1)}{U}$$

$$E(Y) = X'B \qquad E(U\,U') = \sigma^2 I$$

ὅπου

$$Y = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_N \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} X_{11}, \ldots, X_{1\Gamma} \\ \cdot \qquad\quad \cdot \\ \cdot \qquad\quad \cdot \\ \cdot \qquad\quad \cdot \\ X_{N1}, \ldots, X_{N\Gamma} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\Gamma \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_N \end{bmatrix}$$

Ἡ τάξις (rank) τῆς μήτρας X' θεωρεῖται ἴση πρὸς ρ.

Ἔστω ὅτι $(\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_\Gamma)$ ἀποτελοῦν ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων. Αἱ τιμαὶ τῶν ἐκτιμήσεων τούτων αἱ ὁποῖαι ἐλαχιστοποιοῦν τὴν διαφορὰν

$$\Sigma(Y, \beta) = \sum_{\nu=1}^{N} (\psi_\nu - \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} X_{\nu\gamma}\,\beta_\gamma)^2 = \sum_{\nu=1}^{N} \bar{U}_\nu^{\,2}$$

ὀνομάζονται, ὡς γνωστόν, ἐκτιμήσεις ἐλαχίστων τετραγώνων (least squares estimates), ἐκτιμώμεναι ὡς ἀκολούθως :

$$\frac{\vartheta\,\Sigma(Y, \bar{\beta})}{\vartheta\,\beta\gamma} = 0 \qquad \gamma = 1, \ldots, \Gamma$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} X_{\nu\gamma}\,\bar{\beta}_\gamma\,X_{\gamma\nu} = \sum_{\nu=1}^{N} \Psi_\nu\,X_{\nu\gamma}$$

Ἐκ τῶν ὡς ἀνωτέρω Γ κανονικῶν ἐξισώσεων (normal equations) λαμβάνομεν τὰς ἐκτιμήσεις ἐλαχίστων τετραγώνων τῶν παραμέτρων $(\beta_1, \ldots, \beta_\Gamma)$.

2) Τὸ ὑπόδειγμα κατὰ τὸ ὁποῖον τὰ μεγέθη β_γ δὲν εἶναι ἄγνωστοι σταθεραί, ἀλλὰ τυχαῖαι μεταβληταὶ μιᾶς γνωστῆς κατανομῆς (random effects model) δὲν ἐξετάζεται ἐνταῦθα.

Ὑπὸ μορφὴν μητρῶν αἱ κανονικαὶ ἐξισώσεις εἶναι

$$X X'\overline{B} = X Y$$

Ἐὰν ἡ τάξις (rank) τῆς μήτρας X εἶναι ἴση πρὸς Γ, τότε ἡ μήτρα (XX') ἔχει ἀντίστροφον (inverse), ὥστε προκύπτει ἡ κάτωθι μοναδικὴ (unique) λύσις:

$$\overline{B} = (XX')^{-1} XY$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ μήτρα τῶν διακυμάνσεων καὶ συνδιακυμάνσεων τῶν ἐκτιμήσεων ἐλαχίστων τετραγώνων εἶναι

$$\mathbf{\Sigma}_{\overline{B}} = [(XX')^{-1}X]\,\mathbf{\Sigma}_Y [(XX')^{-1}X]' = \sigma^2 (XX')^{-1}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν τοῦ Σ (Y,β) τὰ παραμέτρους διὰ τῶν ἐκτιμήσεων ἐλαχίστων τετραγώνων, λαμβάνομεν τὴν ἐλαχίστην τιμὴν τῆς ἐν λόγῳ σχέσεως, συμβολιζομένην ὑπὸ μορφὴν μητρῶν ὡς κάτωθι:

$$SS_\varepsilon = (Y - X'\overline{B})'\,(Y - X'\overline{B}) = Y'Y - \overline{B}'\,(XY)$$

$$\text{ἢ} \qquad SS_\varepsilon = \| Y - X'\overline{B} \|^2$$

Ἀλγεβρικῶς ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$SS_\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{N} \psi_\nu^2 - \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \overline{\beta}_\gamma \sum_{\nu=1}^{N} \psi_\nu \, X_{\nu\gamma}$$

Ἡ μεταβλητὴ $\left(\frac{SS_\varepsilon}{\sigma^2}\right)$ ἔχε κατανομὴν χ^2 μὲ $(N-\rho)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας, ὅπου N ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων καὶ ρ ἡ τάξις (rank) τῆς μήτρας X. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἀκολούθως: Ἕνα σύνολον (set) N διανυσμάτων (vectors) $(\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_N)$, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ βάσιν (basis) διὰ τὸν N-διάστατον χῶρον καλεῖται ὀρθοκανονικὴ (orthonormal) βάσις, ἐὰν τὰ ἐν λόγῳ N διανύσματα εἶναι ὀρθογωνικὰ ἀνὰ ζεύγη (pairwise orthogonal), ἤτοι ἐὰν $\widehat{\alpha}'_\gamma \widehat{\alpha}_\delta = 0$, ὅταν $\gamma \neq \delta$ (ὅπου $\gamma, \delta = 1, \ldots, N$) καὶ ἐὰν τὸ μῆκος τῶν διανυσμάτων (norm) εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, ἤτοι ἐὰν

$$\| \alpha \| = (\widehat{\alpha}'\,\widehat{\alpha})^{1/2} = 1 .$$

Ἔστω $A = (\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_N) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1N} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \alpha_{N1} \ldots \alpha_{NN} \end{bmatrix}$ εἶναι μιὰ ὀρθοκανονικὴ βάσις διὰ τὸν N — διάστατον χῶρον.

Ἡ (NXNK) μήτρα $\Theta = (\widehat{\vartheta}_1, \ldots, \widehat{\vartheta}_N) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & 1 \end{bmatrix}$ (identity matrix)

ἀποτελεῖ ἐπίσης ὀρθοκανονικὴν βάσιν διὰ τὸν N — διάστατον χῶρον.

Τὸ διάνυσμα τῶν παρατηρήσεών μας $Y = (\psi_1, \ldots, \psi_N)'$ εὑρίσκεται εἰς τὸν N — διάστατον χῶρον καὶ συνεπῶς δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς γραμμικὴ συνάρτησις τῶν διανυσμάτων — βάσεων τοῦ N - διάστατου χώρου :

$$Y = \Theta Y = \sum_{\nu=1}^{N} \psi_\nu \widehat{\vartheta}_\nu \qquad Y = AZ = \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \widehat{\alpha}_\nu$$

Συνεπῶς $\Theta Y = AZ$ $\qquad Z = A^{-1}\,\Theta Y = A^{-1}\,Y = A'Y$

$$\zeta_\nu = \widehat{\alpha}'_\nu\, Y \qquad E(\zeta_\nu) = \widehat{\alpha}'_\nu\, E(Y) = \widehat{\alpha}'_\nu\,(X'B).$$ Τοῦτο

τὸ ἐκφράζομεν ὡς $\xi_\nu = \widehat{\alpha}'_\nu\, \widehat{\eta}$ ὅπου $\widehat{\eta} = X'B$ εἶναι μία $(N \times 1)$ μήτρα ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸν ρ — διάστατον χῶρον, καθόσον ἡ τάξις (rank) τῆς μήτρας X' εἶναι ρ.

Ἐφ' ὅσον τὰ διανύσματα $(\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_N)$ ἀποτελοῦν ὀρθοκανονικὴν βάσιν τοῦ N - διαστάτου χώρου, ἕκαστον ἐκ τούτων, διὰ τὸ ὁποῖον $\nu > \rho$, θὰ εἶναι ὀρθογωνικὸν πρὸς τὸν ρ — διάστατον χῶρον, συνεπῶς καὶ πρὸς τὸ διάνυσμα $\widehat{\eta} = X'B$, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸν χῶρον τοῦτον, ἤτοι

$$E(\zeta_\nu) = \xi_\nu = \widehat{\alpha}'_\nu\, \widehat{\eta} = 0 \text{ διὰ } \nu > \rho\,.$$

Ἡ μήτρα τῶν διακυμάνσεων τῆς μεταβλητῆς ζ_ν (ἡ ὁποία καλεῖται κανονιστική, canonical variable) εἶναι ἴση πρὸς $\sigma^2 A'A = \sigma^2 I$.

Ἤδη τὸ ὑπόδειγμά μας δύναται νὰ διατυπωθῇ ἐν σχέσει πρὸς τὴν κανονιστικὴν μεταβλητὴν ὡς ἀκολούθως :

$$E(\zeta_\nu) = \xi_\nu \text{ διὰ } \nu = 1, \ldots, \rho$$

$$= 0 \text{ διὰ } \nu > \rho$$

ἡ διακύμασις τῆς ζ_ν εἶναι $\sigma^2 I$.

Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι $SS_\varepsilon = \| Y - X'\overline{B} \|^2$

συνεπῶς $SS_\varepsilon = \| Y - \widehat{\eta} \|^2$ ὅπου $Y = \sum_{\nu=1}^{N} \zeta_\nu \widehat{\alpha}_\nu$ καὶ $\widehat{\eta} = \sum_{\nu=1}^{\rho} \zeta_\nu \widehat{\alpha}_\nu$

ὥστε $$SS_\varepsilon = \| \sum_{\nu=\rho+1}^{N} \zeta_\nu \widehat{\alpha_\nu} \|^2 = \sum_{\nu=\rho+1}^{N} \zeta_\nu^2$$ καὶ ἐφ' ὅσον ζ_ν ἔχει

(διὰ $\nu = \rho+1, \ldots, N$) κανονικὴν κατανομὴν $(0, \sigma^2)$,

$\left(\frac{SS_\varepsilon}{\sigma^2}\right)$ ἔχει κατανομὴν χ^2 μὲ $(N-\rho)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας.

2. Ἡ ἁπλουστέρα περίπτωσις ἐφαρμογῆς τῆς ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως εἶναι ἡ σύγκρισις τῶν μέσων διαφόρων πληθυσμῶν (one-way lay out).

Ἔστω $(\beta_1, \ldots, \beta_\Gamma)$ οἱ μέσοι Γ πληθυσμῶν καὶ $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_\Gamma)$ τὸ μέγεθος τῶν ἀντιστοίχων δειγμάτων, μὲ σύνολον $\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \Lambda_\gamma = N$.

Τὸ ὑπόδειγμα εἶναι $\Omega : \psi_{\gamma\lambda} = \beta_\gamma + \varepsilon_{\gamma\lambda} \quad \gamma = 1,\ldots,\Gamma \quad \lambda = 1,\ldots,\Lambda_\gamma$

$(\varepsilon_{\gamma\lambda})$ ἔχει κανονικὴν κατανομὴν $(0, \sigma^2)$.

Ὑπὸ μορφὴν μητρῶν ἔχομεν ἀντιστοίχως: $Y = X'B + E$, ὅπου

$$Y = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{1\Lambda_1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \psi_{\Gamma_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{\Gamma\Lambda_\Gamma} \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{matrix}\right\} \Lambda_1 & & O \\ O & \left.\begin{matrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{matrix}\right\} \Lambda_2 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & O & \left.\begin{matrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{matrix}\right\} \Lambda_\Gamma \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_\Gamma \end{bmatrix}$$

μὲ διαστάσεις $(N \times 1)$

μὲ διαστάσεις $(N \times 1)$ καὶ τάξιν (rank) $\rho = \Gamma$

Αἱ ἐκτιμήσεις ἐλαχίστων τετραγώνων τῶν μέσων τῶν πληθυσμῶν εἶναι

$$\bar{\beta}_\gamma = \frac{1}{\Lambda_\gamma} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda_\gamma} \Psi_{\gamma\lambda} = \Psi_{\gamma.}, \qquad \gamma = 1, \ldots, \Gamma$$

συνεπῶς

$$SS_\varepsilon = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda_\gamma} (\Psi_{\gamma\lambda} - \Psi_{\gamma.})^2$$ μὲ $(N - \Gamma)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο μέγεθος μετρεῖ τὴν ἀπόκλισιν τῶν παρατηρήσεων ἑκάστου πληθυσμοῦ ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ἀντιστοίχου πληθυσμοῦ. Καλεῖται ὡς ἐκ τούτου "ἐντὸς τῶν ὁμάδων" ἄθροισμα ἐλαχίστων τετραγώνων (within groups sum of squares).

Ἡ ὑπόθεσις πρὸς ἐπαλήθευσιν ἔχει τὴν μορφὴν

$$\omega: \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\Gamma = \beta$$

μὲ ἐκτίμησιν ἐλαχίστων τετραγώνων $\bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{\gamma}^{\Gamma} \sum_{\lambda}^{\Lambda\gamma} \Psi_{\gamma\lambda} = \Psi_{..}$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαφορῶν:

$$S\,S_{\sigma\upsilon\nu.} = \sum_{\gamma}^{\Gamma} \sum_{\lambda}^{\Lambda\gamma} (\Psi_{\gamma\lambda} - \Psi_{..})^2$$

δίδει τὰς ἀποκλίσεις τῶν παρατηρήσεων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου, καὶ καλεῖται "συνολικὸν" ἄθροισμα τετραγώνων (total sum of squares).

$$\begin{aligned}[S\,S_{\sigma\upsilon\nu.} - S\,S_\varepsilon] = S\,S_H &= \sum_{\gamma}\sum_{\lambda} (\Psi_{\gamma\lambda} - \Psi_{..})^2 - \sum_{\gamma}\sum_{\lambda} (\Psi_{\gamma\lambda} - \Psi_{\gamma.})^2 = \\ &= \sum_{\gamma}\sum_{\lambda} \Psi^2_{\gamma\lambda} + \Gamma\Lambda\Psi^2_{..} - 2\Psi_{..}\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\Psi_{\gamma\lambda} - \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\Psi^2_{\gamma\lambda} - \Lambda\sum_{\gamma}\Psi^2_{\gamma.} + 2\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\Psi_{\gamma\lambda}\Psi_{\gamma.} = \\ &= \Gamma\Lambda\Psi^2_{..} - 2\Psi_{..}\Lambda\sum_{\gamma}\Psi_{\gamma.} + \Lambda\sum_{\gamma}\Psi^2_{\gamma.} = \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}(\Psi_{\gamma.} - \Psi_{..})^2,\end{aligned}$$

ἤτοι ἡ διαφορὰ $S\,S_H$ ἀποτελεῖ μέτρον τῆς διασπορᾶς τῶν μέσων τῶν πληθυσμῶν ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου, καλουμένη ἄθροισμα τετραγώνων "μεταξὺ τῶν ὁμάδων" (between groups sum of squares).

Εἶναι ἐμφανὲς ὅτι:

$$SS_{\sigma\upsilon\nu.} = SS_\varepsilon + SS_H$$

ἢ

$$\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}(\Psi_{\gamma\lambda} - \Psi_{..})^2 = \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}(\Psi_{\gamma\lambda} - \Psi_{\gamma.})^2 + \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}(\Psi_{\gamma.} - \psi_{..})^2,$$

ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς συνολικῆς ἀποκλίσεως τῶν παρατηρήσεων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου διαχωρίζεται εἰς δύο τμήματα: εἰς τὰς ἀποκλίσεις τῶν παρατηρήσεων ἑκάστου πληθυσμοῦ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου μέσου καὶ εἰς τὰς ἀποκλίσεις τῶν μέσων τούτων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου.

Ἡ μεταβλητὴ $\frac{SS_H}{\sigma^2} = \frac{SS_{\sigma\upsilon\nu.} - SS_\varepsilon}{\sigma^2}$, ἐφ᾽ ὅσον ἡ ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής, ἔχει κατανομὴν χ^2 μὲ $(\Gamma-1)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὅτι, ἀντιστοίχως πρὸς τὴν ἔκφρασιν $SS_\varepsilon = \sum_{\nu=\rho+1}^{N} \zeta^2_\nu$ (ἴδε σχετικῶς σελίδα 1051 τοῦ παρόντος) προκύπτει ἐπίσης ὅτι

$$SS_{\sigma\upsilon\nu.} = \sum_{\nu=1}^{\Gamma-1} \zeta_\nu^2 + \sum_{\nu=\rho+1}^{N} \zeta_\nu^2$$

συνεπῶς:

$$SS_H = SS_{\sigma\upsilon\nu.} - SS_\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{\Gamma-1} \zeta_\nu^2,$$

ὅπου $(\Gamma-1)$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν συναρτήσεων τῶν παραμέτρων τοῦ ὑποδεί γματος, αἱ ὁποῖαι δύνανται κατὰ τὴν ὑπόθεσιν νὰ ἐξισωθοῦν πρὸς τὸ μηδέν. Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν ἡ ὑπόθεσις $\beta_1 = \ldots = \beta_\Gamma$ δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\beta_2 - \beta_1 = 0, \quad \beta_3 - \beta_1 = 0, \; . \; . \; . \; , \beta_\Gamma - \beta_1 = 0$$

ὅπου αἱ $(\Gamma-1)$ διαφοραὶ ἐξισοῦνται πρὸς μηδέν.

Τὸ κριτήριον ἐπαληθεύσεως τῆς ὑποθέσεως ἔχει ὡς κάτωθι:

$$\frac{SS_H}{\Gamma-1} \Big/ \frac{SS_\varepsilon}{N-\Gamma} = \frac{N-\Gamma}{\Gamma-1} \, \frac{SS_H}{SS_\varepsilon} \, .$$

Ἡ μεταβλητὴ αὕτη ἔχει F κατανομὴν μὲ βαθμοὺς ἐλευθερίας $(\Gamma-1)$ καὶ $(N-\Gamma)$, διότι ἡ κατανομὴ τῶν SS_H καὶ SS_ε εἶναι χ^2.

3. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἐκτίμησις τῆς ἐπιδράσεως ἐπὶ τῶν παρατηρήσεών μας δύο παραγόντων, οἱ ὁποῖοι ἐπενεργοῦν συγχρόνως (two - way lay out). Οἱ παράγοντες οὗτοι, ἔστω Α καὶ Β, ἐμφανίζουν ἀντιστοίχως Γ καὶ Λ ἐπίπεδα. Αἱ παρατηρήσεις δύνανται νὰ ταξινομηθοῦν εἰς ἕνα πίνακα μὲ Γ ὁριζοντίους καὶ Λ καθέτους εἰσόδους. Εἰς ἕκαστον κελίον $(\gamma\lambda)$ ὑποθέτομεν ὅτι ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένος πληθυσμός, ἐκ τοῦ ὁποίου προέρχονται αἱ παρατηρήσεις τοῦ κελίου, μὲ μέσον $\eta_{\gamma\lambda}$.

$A_\gamma = \dfrac{1}{\Lambda} \sum\limits_{\lambda=1}^{\Lambda} \eta_{\gamma\lambda} = \eta_{\gamma.}$, εἶναι ὁ μέσος τῆς γραμμῆς γ (row mean), $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$

$B_\lambda = \dfrac{1}{\Gamma} \sum\limits_{\gamma=1}^{\Gamma} \eta_{\gamma\lambda} = \eta_{.\lambda}$, εἶναι ὁ μέσος τῆς στήλης λ (column mean), $\lambda=1,\ldots,\Lambda$

$\mu = \dfrac{1}{\Gamma\Lambda} \sum\limits_{\gamma} \sum\limits_{\lambda} \eta_{\gamma\lambda} = \eta_{..}$, εἶναι ὁ γενικὸς μέσος

$\alpha_\gamma = (A_\gamma - \mu) = (\eta_{\gamma.} - \eta_{..})$, εἶναι ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἐπιπέδου γ τοῦ παράγοντος Α (the main effect of the γ^{th} level of **A**).

$\beta_\lambda = (B_\lambda - \mu) = (\eta_{.\lambda} - \eta_{..})$, εἶναι ἡ εἰδικὴ ἐπίδρασις τοῦ ἐπιπέδου λ τοῦ παράγοντος Β (the main effect of the λ^{th} level of B).

$(\eta_{\gamma\lambda} - B_\lambda) = (\eta_{\gamma\lambda} - \eta_{.\lambda})$, εἶναι ἡ εἰδικὴ ἐπίδρασις τοῦ ἐπιπέδου γ τοῦ παράγοντος Α, ἐφ᾽ ὅσον συνδυάζεται τοῦτο μὲ τὸ ἐπίπεδον λ τοῦ παράγοντος Β, ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἐν γένει ἐπίδρασιν τοῦ τελευταίου τούτου ἐπιπέδου.

$\delta_{\gamma\lambda} = (\eta_{\gamma\lambda} - B_\lambda) - (A_\gamma - \mu) = (\eta_{\gamma\lambda} - \beta_\lambda - \alpha_\gamma - \mu) = \eta_{\gamma\lambda} - \eta_{\gamma.} - \eta_{.\lambda} + \eta_{..}$, εἶναι ἡ εἰδικὴ ἐπίδρασις, ἀποδοτέα ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν συνδυασμένην ἐπενέργειαν τῶν ἐπιπέδων γ καὶ λ, τῶν παραγόντων A καὶ B (interaction of the γ^{th} level of A with the λ^{th} level of B).

Τέλος, προκύπτει ὅτι: $\eta_{\gamma\lambda} = \delta_{\gamma\lambda} + \alpha_\gamma + \beta_\lambda + \mu$, ἤτοι ὁ μέσος ἑκάστου κελίου διασπᾶται εἰς τὰ κατὰ τὰ ἀνωτέρω 4 τμήματα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\delta_{\gamma\lambda} = 0$, ἔχομεν ὅτι $\eta_{\gamma\lambda} - \mu = \alpha_\gamma + \beta_\lambda$ ἤτοι ἡ ἀπόκλισις τοῦ μέσου τοῦ κελίου ($\gamma\lambda$) ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου ὀφείλεται ἀποκλειστικῶς εἰς τὴν κεχωρισμένην ἐπενέργειαν ἑκάστου τῶν ἐπιπέδων γ καὶ λ τῶν παραγόντων A καὶ B ἀντιστοίχως. Ἡ δὲ διαφορὰ τῶν μέσων τῶν κελίων ($\eta_{\gamma\lambda} > \eta_{\gamma'\lambda}$) ὑποδηλοῖ ὑπεροχὴν τοῦ ἐπιπέδου γ ἔναντι τοῦ ἐπιπέδου γ' τοῦ ἰδίου παράγοντος A, ἡ ὁποία εἶναι σταθερὰ ($\alpha_\gamma - \alpha_{\gamma'}$) εἰς ὅλα τὰ ἐπίπεδα τοῦ ἑτέρου παράγοντος B.

Τὸ ὑπόδειγμα εἶναι τὸ ἀκόλουθον:

$$\Omega: \quad \psi_{\gamma\lambda\kappa} = \eta_{\gamma\lambda} + \varepsilon_{\gamma\lambda\kappa} \qquad \kappa = 1, \ldots, K$$

($\varepsilon_{\gamma\lambda\kappa}$) ἔχει κανονικὴν κατανομὴν $(0, \sigma^2)$.

Πρὸς ἁπλοποίησιν τῶν ἐκτιμήσεων λαμβάνομεν ἴσον ἀριθμὸν παρατηρήσεων κατὰ κελίον $K > 1$, τοῦ συνόλου τῶν παρατηρήσεων ἀνερχομένου εἰς $N = \Gamma\Lambda K$.

Ὑπὸ μορφὴν μητρῶν ἔχομεν ἀντιστοίχως: $E(Y) = \eta = X'B$, ὅπου

$$B = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \vdots \\ \eta_{1\Lambda} \\ \eta_{21} \\ \vdots \\ \eta_{2\Lambda} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \eta_{\Gamma 1} \\ \vdots \\ \eta_{\Gamma\Lambda} \end{bmatrix} \text{ μὲ διαστάσεις } (\Gamma\Lambda \times 1) \qquad X' = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

μὲ διαστάσεις $(\Gamma\Lambda \times \Gamma\Lambda)$ καὶ τάξιν (rank) $\rho = \Gamma\Lambda$.

Ἡ ἐκτίμησις ἐλαχίστων τετραγώνων τοῦ μέσου τῶν κελίων εἶναι ἴση πρὸς

$$\bar{\eta}_{\gamma\lambda} = \frac{1}{K} \sum_{\kappa=1}^{K} \psi_{\gamma\lambda\kappa} = \psi_{\gamma\lambda.},$$

οὕτω δὲ
$$SS_\varepsilon = \sum_\gamma \sum_\lambda \sum_\kappa (\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{\gamma\lambda.})^2,$$

καὶ $\frac{SS_\varepsilon}{\sigma^2}$ ἔχει κατανομὴν χ^2 μὲ $(N-\rho) = \Gamma\Lambda K - \Gamma\Lambda = \Gamma\Lambda(K-1)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας.

Κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος Gauss - Markoff, ἔχομεν τὰς ἐκτιμήσεις ἐλαχίστων τετραγώνων τῶν ὑπολοίπων παραμέτρων :

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\Gamma\Lambda K} \sum_\gamma \sum_\lambda \sum_\kappa \psi_{\gamma\lambda\kappa} = \psi_{...}, \qquad \bar{\alpha}_\gamma = \psi_{\gamma..} - \psi_{...},$$

$$\bar{\beta}_\lambda = \psi_{.\lambda.} - \psi_{...} \qquad \text{καὶ} \qquad \bar{\delta}_{\gamma\lambda} = \psi_{\gamma\lambda.} - \psi_{\gamma..} - \psi_{.\lambda.} + \psi_{...}$$

Θὰ διερευνήσωμεν τὰς ἑξῆς ὑποθέσεις :

$$H_A: \quad \alpha_\gamma = 0, \qquad H_B: \quad \beta_\lambda = 0, \qquad \text{καὶ} \qquad H_{AB}: \quad \delta_{\gamma\lambda} = 0.$$

Τὸ πρὸς ἐλαχιστοποίησιν μέγεθος εἶναι

$$\sum_\gamma \sum_\lambda \sum_\kappa (\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \eta_{\gamma\lambda.})^2 = \sum_\gamma \sum_\lambda \sum_\kappa (\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \mu - \alpha_\gamma - \beta_\lambda - \delta_{\gamma\lambda})^2.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ποσότητα διὰ τῆς ἴσης πρὸς αὐτὴν

$$(\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \bar{\mu} - \bar{\alpha}_\gamma - \bar{\beta}_\lambda - \bar{\delta}_{\gamma\lambda}) + (\bar{\mu} - \mu) + (\bar{\alpha}_\gamma - \alpha_\gamma) + (\bar{\beta}_\lambda - \beta_\lambda) + (\bar{\delta}_{\gamma\lambda} - \delta_{\gamma\lambda})$$

(ὅπου ἡ γραμμὴ ἄνωθεν μιᾶς παραμέτρου δηλοῖ ὅτι πρόκειται περὶ τῆς ἀντιστοίχου ἐκτιμήσεως ἐλαχίστων τετραγώνων) προκύπτει ὅτι τὸ πρὸς ἐλαχιστοποίησιν μέγεθος ἰσοῦται πλέον πρὸς

$$\sum_\gamma \sum_\lambda \sum_\kappa (\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{\gamma\lambda.})^2 + \Gamma\Lambda K(\bar{\mu} - \mu)^2 + \Lambda K \sum_\gamma (\bar{\alpha}_\gamma - \alpha_\gamma)^2 + \Gamma K \sum_\lambda (\bar{\beta}_\lambda - \beta_\lambda)^2 + K \sum_\gamma \sum_\lambda (\bar{\delta}_{\gamma\lambda} - \delta_{\gamma\lambda}).$$

Τοῦτο ἐλαχιστοποιεῖται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν παραμέτρων διὰ τῶν ἀντιστοίχων ἐκτιμήσεων ἐλαχίστων τετραγώνων, πλὴν τῶν, κατὰ περίπτωσιν ὑποθέσεως, ὑποτιθεμένων ὡς ἴσων πρὸς μηδὲν παραμέτρων, αἱ ὁποῖαι καὶ ἀπαλείφονται. Οὕτως ἔχομεν :

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν H_A τὸ ἀνωτέρω ἐλάχιστον ἰσοῦται πρὸς

$$SS_A = \sum_\gamma \sum_\lambda \sum_\kappa (\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{\gamma\lambda.})^2 + \Lambda K \sum_\gamma \bar{\alpha}_\gamma^2, \qquad \text{ὅπου} \quad \bar{\alpha}_\gamma = \psi_{\gamma..} - \psi_{...},$$

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν H_B ἔχομεν :

$$SS_B = \sum_\gamma \sum_\lambda \sum_\kappa (\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{\gamma\lambda.})^2 + \Gamma K \sum_\lambda \bar{\beta}_\lambda^2, \qquad \text{ὅπου} \quad \bar{\beta}_\lambda = \psi_{.\lambda.} - \psi_{...},$$

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν H_{AB} ἔχομεν :

$$SS_{AB} = \sum_\gamma \sum_\lambda \sum_\kappa (\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{\gamma\lambda.})^2 + K \sum_\gamma \sum_\lambda \bar{\delta}_{\gamma\lambda}^2, \qquad \text{ὅπου} \; \bar{\delta}_{\gamma\lambda} = [\psi_{\gamma\lambda.} - \psi_{\gamma..} + \psi_{.\lambda.} + \psi_{...}]$$

Ἐφ' ὅσον $\sum_\gamma\sum_\lambda\sum_\kappa(\psi_{\gamma\lambda\kappa}-\psi_{\gamma\lambda\cdot})^2=SS_\varepsilon$, ἔχομεν :

$$\frac{SS_{HA}}{\sigma^2}=\frac{SS_A-SS_\varepsilon}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\Lambda K\sum_\gamma(\psi_{\gamma\cdot\cdot}-\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2$$ μὲ κατανομὴν χ^2 καὶ $(\Gamma-1)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας.

$$\frac{SS_{HB}}{\sigma^2}=\frac{SS_B-SS_\varepsilon}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\Gamma K\sum_\lambda(\psi_{\cdot\lambda\cdot}-\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2$$ μὲ κατανομὴν χ^2 καὶ $(\Lambda-1)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας.

καὶ $$\frac{SS_{HAB}}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}K\sum_\gamma\sum_\lambda\bar{\delta}^2_{\gamma\lambda}$$ μὲ κατανομὴν χ^2 καὶ $(\Gamma-1)(\Lambda-1)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας.

Τελικῶς τὸ κριτήριον ἐλέγχου ἑκάστης ὑποθέσεως εἶναι :

$$H_A:\quad \frac{\Gamma\Lambda(K-1)}{(\Gamma-1)}\frac{SS_{HA}}{SS_\varepsilon}=\frac{\Gamma\Lambda(K-1)}{\Gamma-1}\frac{\Lambda K\sum_\gamma(\psi_{\gamma\cdot\cdot}-\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2}{\sum_\gamma\sum_\lambda\sum_\kappa(\psi_{\gamma\lambda\kappa}-\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2},$$

τὸ ὁποῖον ἔχει κατανομὴν F μὲ $(\Gamma-1)$ καὶ $\Gamma\Lambda(K-1)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας.

$$H_B:\quad \frac{\Gamma\Lambda(K-1)}{\Lambda-1}\frac{\Gamma K\sum_\lambda(\psi_{\cdot\lambda\cdot}-\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2}{\sum_\gamma\sum_\lambda\sum_\kappa(\psi_{\gamma\lambda\kappa}-\psi_{\gamma\lambda\cdot})^2}$$ μὲ κατανομὴν $F(\Lambda-1),(\Gamma\Lambda K-\Gamma\Lambda)$

$$H_{AB}:\quad \frac{\Gamma\Lambda(K-1)}{(\Gamma-1)(\Lambda-1)}\frac{K\sum_\gamma\sum_\lambda\bar{\delta}^2_{\gamma\lambda}}{\sum_\gamma\sum_\lambda\sum_\kappa(\psi_{\gamma\lambda\kappa}-\psi_{\gamma\lambda\cdot})^2}$$ μὲ κατανομὴν $F(\Gamma-1)(\Lambda-),\Gamma\Lambda(K-1)$

Ἡ ἀπόκλισις τῶν μέσων ἑκάστου κελίου $\psi_{\gamma\lambda\cdot}$ ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου $\psi_{\cdot\cdot\cdot}$ εἶναι ἴση πρός :

$$SS_{\kappa\varepsilon\lambda.}=\sum_\gamma\sum_\lambda\sum_\kappa(\psi_{\gamma\lambda\cdot}-\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2=K\sum_\gamma\sum_\lambda\psi^2_{\gamma\lambda\cdot}+\Gamma\Lambda K\psi^2_{\cdot\cdot\cdot}-2\psi_{\cdot\cdot\cdot}\Gamma\Lambda K\psi_{\cdot\cdot\cdot}=$$
$$=K\sum_\gamma\sum_\lambda\psi^2_{\gamma\lambda\cdot}-\Gamma\Lambda K\psi^2_{\cdot\cdot\cdot}\,.$$

Ἐπίσης ἔχομεν

$$SS_{HA}=\Lambda K\sum_\gamma(\psi_{\gamma\cdot\cdot}-\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2=\Lambda K\sum_\gamma\psi^2_{\gamma\cdot\cdot}-\Gamma\Lambda K\psi^2_{\cdot\cdot\cdot},$$

$$SS_{HB}=\Gamma K\sum_\lambda(\psi_{\cdot\lambda\cdot}-\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2=\Gamma K\psi_{\cdot\lambda\cdot}-\Gamma\Lambda K\psi^2_{\cdot\cdot\cdot},$$

$$SS_{HAB}=K\sum_\gamma\sum_\lambda(\psi_{\gamma\lambda\cdot}-\psi_{\gamma\cdot\cdot}-\psi_{\cdot\lambda\cdot}+\psi_{\cdot\cdot\cdot})^2.$$

Δι' ἁπλῆς ἀλγεβρικῆς ἀποδείξεως προκύπτει ὅτι

$$SS_{HAB}=SS_{\kappa\varepsilon\lambda.}-SS_{HA}-SS_{HB}$$

ὥστε $$SS_{\kappa\varepsilon\lambda.}=SS_{HA}+SS_{HB}+SS_{HAB}$$

Ἡ ἀπόκλισις τῶν παρατηρήσεων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου εἶναι ἴση πρὸς

$$SS_{\sigma\upsilon\nu.} = \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}(\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{...})^2 = \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\psi^2_{\gamma\lambda\kappa} - \Gamma\Lambda K\psi^2_{...},$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀπόκλισις τῶν παρατηρήσεων ἑκάστου κελίου ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ἀντιστοίχου κελίου, ἤτοι

$$SS_{\varepsilon} = \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}(\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{\gamma\lambda.})^2 = [\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\psi^2_{\gamma\lambda\kappa} - K\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\psi^2_{\gamma\lambda.}]$$

ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν ($SS_{\sigma\upsilon\nu.} - SS_{\kappa\varepsilon\lambda.}$), διότι :

$$SS_{\sigma\upsilon\nu.} - SS_{\kappa\varepsilon\lambda.} = [\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\psi^2_{\gamma\lambda\kappa} - \Gamma\Lambda K\psi^2_{...}] - [K\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\psi^2_{\gamma\lambda.} - \Gamma\Lambda K\psi^2_{...}] =$$

$$= \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\psi^2_{\gamma\lambda\kappa} - K\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\psi^2_{\gamma\lambda.} = SS_{\varepsilon}$$

Οὕτω προκύπτει ὅτι

$$SS_{\sigma\upsilon\nu} = SS_{\varepsilon} + SS_{\kappa\varepsilon\lambda.},$$

ἢ

$$\sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}(\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{...})^2 = \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}(\psi_{\gamma\lambda\kappa} - \psi_{\gamma\lambda.})^2 + \sum_{\gamma}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}(\psi_{\gamma\lambda.} - \psi_{...})^2,$$

ἤτοι ἡ συνολικὴ ἀπόκλισις τῶν παρατηρήσεων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου διαχωρίζεται εἰς δύο τμήματα : εἰς τὰς ἀποκλίσεις τῶν παρατηρήσεων ἑκάστου κελίου ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ἀντιστοίχου κελίου (within groups sum of squares) καὶ εἰς τὰς ἀποκλίσεις τῶν μέσων τῶν κελίων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου (between groups sum of squares).

Ἐκ τῆς σχέσεως $SS_{\kappa\varepsilon\lambda.} = SS_{HA} + SS_{HB} + SS_{HAB}$ προκύπτει περαιτέρω ὅτι :

$$SS_{\sigma\upsilon\nu.} = SS_{\varepsilon} + SS_{HA} + SS_{HB} + SS_{HAB}$$

ἤτοι αἱ ἀποκλίσεις τῶν μέσων τῶν κελίων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου διασπῶνται περαιτέρω εἰς ἐπιδράσεις τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος, ἤτοι ἐκ τῶν διαφόρων ἐπιπέδων κεχωρισμένως τῶν παραγόντων A καὶ B (row and column main effects) ὡς καὶ εἰς ἐπιδράσεις, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς συνδυασμένης ἐπενεργείας τῶν ἐπιπέδων τῶν παραγόντων A καὶ B (interactions).

4. Ὑποθέτομεν τὴν σύγχρονον ἐπενέργειαν τριῶν παραγόντων A, B καὶ Γ ἐπὶ μιᾶς μεταβλητῆς, ἕκαστος τῶν ὁποίων περιλαμβάνει περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἐπίπεδα (three - way lay out). Οὕτω λ.χ. ὡς μεταβλητὴν ἔχομεν τὴν στρεμματικὴν ἀπόδοσιν, ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς ποικιλίας τοῦ χρησιμοποιουμένου σπόρου (παράγων A, ὑποδιαιρούμενος εἰς Δ κατηγορίας), ἐκ τῆς τοποθεσίας εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ὁ καλλιεργούμενος ἀγρὸς (παράγων B, ὑποδιαιρούμενος εἰς Λ κατηγορίας) καὶ ἐκ τῆς μεθόδου καλλιεργείας (παράγων Γ, ὑποδιαιρούμενος εἰς K κατηγορίας).

Ἡ ἀνωτέρω περίπτωσις τῶν τριῶν παραγόντων δύναται βεβαίως νὰ μεταπέσῃ εἰς τὴν ὡς προηγουμένως ἀναπτυχθεῖσαν περίπτωσιν τῶν δύο παραγόντων, ἐφ' ὅσον ὁ εἷς ἐκ τῶν τριῶν παραγόντων ὑποτεθῇ σταθερός, μεταβαλλομένων μόνον τῶν ἑτέρων δύο. Ἔστω ὅτι σταθεροποιεῖται ὁ παράγων Γ εἰς τὸ ἐπίπεδον κ (=1, ... , Κ). Ἡ εἰδικὴ ἐπίδρασις ἐκ τῆς συνδυασμένης ἐπενεργείας τῶν ἐπιπέδων δ καὶ λ τῶν δύο ἑτέρων παραγόντων (interaction) εἶναι τότε ἴση πρὸς

$$\eta_{\delta\lambda\kappa} - \eta_{\delta.\kappa} - \eta_{.\lambda\kappa} + \eta_{..\kappa}$$

Ἡ μέση τιμὴ τῆς ἀνωτέρω ποσότητος, ἐν σχέσει πρὸς ὅλας τὰς κατηγορίας τοῦ παράγοντος Γ, ἤτοι

$$\alpha^{AB}_{\delta\lambda} = \eta_{\delta\lambda.} - \eta_{\delta..} - \eta_{.\lambda.} + \eta_{...}$$

δίδει τὴν εἰδικὴν ἐπίδρασιν ἐκ τῆς συνδυασμένης ἐπενεργείας τῶν ἐπιπέδων δ καὶ λ, ἀντιστοίχως τῶν παραγόντων Α καὶ Β, εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν τριῶν παραγόντων, ὅταν καὶ ὁ παράγων Γ μεταβάλλεται.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀνωτέρω ποσοτήτων, ἤτοι

$$\alpha^{AB\Gamma}_{\delta\lambda\kappa} = \eta_{\delta\lambda\kappa} - \eta_{\delta\lambda.} - \eta_{\delta.\kappa} - \eta_{.\lambda\kappa} + \eta_{\delta..} + \eta_{.\lambda.} + \eta_{..\kappa} - \eta_{...}$$

δίδει τὴν εἰδικὴν ἐπίδρασιν ἐκ τῆς συνδυασμένης ἐπενεργείας τῶν ἐπιπέδων δ, λ καὶ κ, ἀντιστοίχως τῶν παραγόντων Α, Β καὶ Γ.

Ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ἀνωτέρω

$$\alpha^{B\Gamma}_{\lambda\kappa} = \eta_{.\lambda\kappa} - \eta_{.\lambda.} - \eta_{..\kappa} + \eta_{...}$$

$$\alpha^{A\Gamma}_{\delta\kappa} = \eta_{\delta.\kappa} - \eta_{\delta..} - \eta_{..\kappa} + \eta_{...}$$

δίδουν τὴν εἰδικὴν ἐπίδρασιν ἐκ τῆς συγχρόνου ἐπενεργείας τῶν ἐπιπέδων λ καὶ κ, τῶν παραγόντων Β καὶ Γ, καὶ τῶν ἐπιπέδων δ καὶ κ, τῶν παραγόντων Α καὶ Γ (interactions).

Ἡ ἐπίδρασις τοῦ ἐπιπέδου δ τοῦ παράγοντος Α (main effect of the δ^{th} level of A) εἶναι

$$\alpha^{A}_{\delta} = \eta_{\delta..} - \eta_{...}$$

Ἀντιστοίχως διὰ τὰ ἐπίπεδα λ καὶ κ τῶν παραγόντων Β καὶ Γ ἔχομεν

$$\alpha^{B}_{\lambda} = \eta_{.\lambda.} - \eta_{...} \qquad \alpha^{\Gamma}_{\kappa} = \eta_{..\kappa} - \eta_{...}$$

Ὁ μέσος ἑκάστου κελίου ἰσοῦται πρὸς

$$\eta_{\delta\lambda\kappa} = \mu + \alpha^{A}_{\delta} + \alpha^{B}_{\lambda} + \alpha^{\Gamma}_{\kappa} + \alpha^{AB}_{\delta\lambda} + \alpha^{B\Gamma}_{\lambda\kappa} + \alpha^{A\Gamma}_{\delta\kappa} + \alpha^{AB\Gamma}_{\delta\lambda\kappa}$$

Τὸ γενικὸν ὑπόδειγμα ἔχει ἐν προκειμένῳ ὡς ἀκολούθως :

Ω : $\psi_{\delta\lambda\kappa\tau} = \eta_{\delta\lambda\kappa} + \varepsilon_{\delta\lambda\kappa\tau}$

$\varepsilon_{\delta\lambda\kappa\tau}$ ἔχει κανονικὴν κατανομὴν $(0,\sigma^2)$

$\tau = 1, \ldots, T > 1$ εἶναι αἱ παρατηρήσεις ἑκάστου κελίου

$N = \Delta\Lambda K T$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν παρατηρήσεων.

Ἡ ἐκτίμησις ἐλαχίστων τετραγώνων τοῦ μέσου ἑκάστου κελίου, ἡ ὁποία ἐλαχιστοποιεῖ τὴν ποσότητα

$$\sum_{\delta}^{\Delta}\sum_{\lambda}^{\Lambda}\sum_{\kappa}^{K}\sum_{\tau}^{T}(\psi_{\delta\lambda\kappa\tau} - \eta_{\delta\lambda\kappa})^2$$

εἶναι

$$\bar{\eta}_{\delta\lambda\kappa} = \frac{1}{T}\sum_{\tau=1}^{\Gamma}\psi_{\delta\lambda\kappa\tau} = \psi_{\delta\lambda\kappa\cdot}\,.$$

Κατ᾽ ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος Gauss - Markoff ἔχομεν περαιτέρω τὰς ἀκολούθους ἐκτιμήσεις ἐλαχίστων τετραγώνων

τοῦ γενικοῦ μέσου : $\bar{\mu} = \bar{\eta}_{\ldots} = \dfrac{1}{\Delta\Lambda K}\sum_{\delta}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\psi_{\delta\lambda\kappa\cdot} = \psi_{\cdots\cdot}\,,$

τῶν ἐπιδράσεων τῶν ἐπιπέδων τῶν παραγόντων (main effects) :

$$\bar{\alpha}_{\delta}^{A} = \psi_{\delta\ldots} - \psi_{\cdots\cdot} \qquad \bar{\alpha}_{\lambda}^{B} = \psi_{\cdot\lambda\cdot\cdot} - \psi_{\cdots\cdot} \qquad \bar{\alpha}_{\kappa}^{\Gamma} = \psi_{\cdot\cdot\kappa\cdot} - \psi_{\cdots\cdot}$$

τῶν ἐπιδράσεων ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν διαφόρων ἐπιπέδων (interactions) :

$\bar{\alpha}_{\delta\lambda}^{AB} = \psi_{\delta\lambda\cdot\cdot} - \psi_{\delta\ldots} - \psi_{\cdot\lambda\cdot\cdot} + \psi_{\cdots\cdot}\,,$ καὶ ἀντιστοίχως διὰ $\bar{\alpha}_{\lambda\kappa}^{B\Gamma}$ καὶ $\bar{\alpha}_{\delta\kappa}^{A\Gamma}$

$$\bar{\alpha}_{\delta\lambda\kappa}^{AB\Gamma} = \psi_{\delta\lambda\kappa\cdot} - \psi_{\delta\lambda\cdot\cdot} - \psi_{\delta\cdot\kappa\cdot} + \psi_{\delta\ldots} + \psi_{\cdot\lambda\cdot\cdot} + \psi_{\cdot\cdot\kappa} - \psi_{\cdots\cdot}$$

Τὸ «ἐντὸς τῶν ὁμάδων» ἄθροισμα ἐλαχίστων τετραγώνων ἰσοῦται πρὸς

$$SS_{\varepsilon} = \sum_{\delta}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\sum_{\tau}(\psi_{\delta\lambda\kappa\tau} - \psi_{\delta\lambda\kappa\cdot})^2$$

μὲ βαθμοὺς ἐλευθερίας $N - \rho = \Delta\Lambda K T - \Delta\Lambda K = \Delta\Lambda K\,(T-1)$

Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδίαν μέθοδον ἐκτιμήσεως, ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύο παραγόντων, προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι στατιστικαὶ κατὰ ἐξεταζομένην ὑπόθεσιν :

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν H_A : $\alpha_\delta^A = 0$ ἔχομεν

$$SS_{HA} = \Lambda K T \sum_{\delta=1}^{\Delta} (\bar{\alpha}_\delta^A)^2 \qquad \text{μὲ } (\Delta-1) \text{ βαθμοὺς ἐλευθερίας}$$

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν H_B : $\alpha_\lambda^B = 0$ ἔχομεν

$$SS_{HB} = \Delta K T \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} (\bar{\alpha}_\lambda^B)^2 \qquad \text{μὲ } (\Lambda-1) \text{ βαθμοὺς ἐλευθερίας}$$

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν H_Γ : $\alpha_\kappa^\Gamma = 0$ ἔχομεν

$$SS_{H\Gamma} = \Delta \Lambda T \sum_{\kappa=1}^{K} (\bar{\alpha}_\kappa^\Gamma)^2 \qquad \text{μὲ } (K-1) \text{ βαθμοὺς ἐλευθερίας}$$

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν H_{AB} : $\alpha_{\delta\lambda}^{AB} = 0$ ἔχομεν

$$SS_{HAB} = K T \sum_\delta \sum_\lambda (\bar{\alpha}_{\delta\lambda}^{AB})^2 \qquad \text{μὲ } (\Delta-1)(\Lambda-1) \text{ βαθμοὺς ἐλευθερίας}$$

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν $H_{B\Gamma}$: $\alpha_{\lambda\kappa}^{B\Gamma} = 0$ ἔχομεν

$$SS_{HB\Gamma} = \Delta T \sum_\lambda \sum_\kappa (\bar{\alpha}_{\lambda\kappa}^{B\Gamma})^2 \qquad \text{μὲ } (\Lambda-1)(K-1) \text{ βαθμοὺς ἐλευθερίας}$$

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν $H_{A\Gamma}$: $\alpha_{\delta\kappa}^{A\Gamma} = 0$ ἔχομεν

$$SS_{HA\Gamma} = \Lambda T \sum_\delta \sum_\kappa (\bar{\alpha}_{\delta\kappa}^{A\Gamma}) \qquad \text{μὲ } (\Delta-1)(K-1) \text{ βαθμοὺς ἐλευθερίας}$$

Διὰ τὴν ὑπόθεσιν $H_{AB\Gamma}$: $\alpha_{\delta\lambda\kappa}^{AB\Gamma} = 0$ ἔχομεν

$$SS_{HAB\Gamma} = T \sum_\delta \sum_\lambda \sum_\kappa (\bar{\alpha}_{\delta\lambda\kappa}^{AB\Gamma})^2 \text{ μὲ } (\Delta-1)(\Lambda-1)(K-1) \text{ βαθμοὺς ἐλευθερίας.}$$

Τὸ κριτήριον ἐλέγχου τῆς ὑποθέσεως H_{AB}, λ.χ., ἔχει ὡς ἀκολούθως :

$$\frac{\Delta\Lambda K(T-1)}{(\Delta-1)(\Lambda-1)} \; \frac{SS_{HAB}}{SS_\varepsilon} = \frac{\Delta\Lambda K(T-1)}{(\Delta-1)(\Lambda-1)} \; \frac{K T \sum_\delta \sum_\lambda (\bar{\alpha}_{\delta\lambda}^{AB})^2}{\sum_\delta \sum_\lambda \sum_\kappa \sum_\tau (\psi_{\delta\lambda\kappa\tau} - \psi_{\delta\lambda\kappa.})^2}$$

ὅπου $\bar{\alpha}_{\delta\lambda}^{AB} = \psi_{\delta\lambda..} - \psi_{\delta...} - \psi_{.\lambda..} + \psi_{....})$

Τὸ κριτήριον τοῦτο ἔχει F κατανομὴν μὲ $(\Delta-1)(\Lambda-1)$ καὶ $\Delta\Lambda K(T-1)$ βαθμοὺς ἐλευθερίας.

Ἀντιστοίχως εὑρίσκομεν τὰ κριτήρια τῶν λοιπῶν ὑποθέσεων.

Καὶ εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν, ὡς καὶ τὴν περίπτωσιν τῶν δύο παραγόντων, δυνάμεθα νὰ διασπάσωμεν τὴν συνολικὴν ἀπόκλισιν τῶν παρατηρήσεων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου ($SS_{\sigma\upsilon\nu.}$) εἰς δύο βασικὰ τμήματα, τοῦ πρώτου ἐκφράζοντος τὰς ἀποκλίσεις τῶν παρατηρήσεων ἑκάστου κελίου ἐκ τοῦ μέσου τοῦ ἀντιστοίχου κελίου (SS_{ε} – within groups sum of squares), καὶ τοῦ δευτέρου δίδοντος τὰς ἀποκλίσεις τῶν μέσων τῶν κελίων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου ($SS_{\kappa\epsilon\lambda.}$)

$$SS_{\sigma\upsilon\nu.} = SS_{\varepsilon} + SS_{\kappa\epsilon\lambda.}$$

ἤτοι $\sum_{\delta}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\sum_{\tau}(\psi_{\delta\lambda\kappa\tau} - \psi_{....})^2 = \sum_{\delta}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\sum_{\tau}(\psi_{\delta\lambda\kappa\tau} - \psi_{\delta\lambda\kappa.})^2 + \sum_{\delta}\sum_{\lambda}\sum_{\kappa}\sum_{\tau}(\psi_{\delta\lambda\kappa.} - \psi_{....})^2.$

Ἐπίσης τὸ δεύτερον ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο τμημάτων διασπᾶται περαιτέρω εἰς ἐπιδράσεις ἀποδοτέας εἰς ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων τῶν παραγόντων Α, Β καὶ Γ (main effects) καὶ εἰς ἐπιδράσεις, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς συνδυασμένης ἐπενεργείας τῶν ἐπιπέδων τῶν παραγόντων Α, Β καὶ Γ μεταξύ των. Οὕτω :

$$SS_{\sigma\upsilon\nu.} = SS_{\varepsilon} + SS_{HA} + SS_{HB} + SS_{H\Gamma} + SS_{HAB} + SS_{HA\Gamma} + SS_{HB\Gamma} + SS_{HAB\Gamma}$$

Αἱ ἀποδείξεις ἐν προκειμένῳ εἶναι παρόμοιαι τῆς περιπτώσεως τῶν δύο παραγόντων.

Καθ' ὅμοιον πρὸς τὸν ἀνωτέρω τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀναχθῶμεν εἰς τὴν περίπτωσιν παραγόντων περισσοτέρων τῶν τριῶν. Σημειωτέον ὅτι εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῶν π παραγόντων ἡ συνολικὴ ἀπόκλισις τῶν παρατηρήσεων ἐκ τοῦ γενικοῦ μέσου ($SS_{\sigma\upsilon\nu.}$) διασπᾶται συνολικῶς εἰς 2^{π} τμήματα.