ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΙΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ

Τοῦ κ. ΣΠΥΡΟΥ Α. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ – ΣΤΑΥΡΟΥ

1. Ἔστω ὅτι ἐξ ἑνὸς δείγματος ἐκ 1000 ἀτόμων ἔτυχον θεραπείας ἐναντίον μιᾶς παθήσεως μόνον 500 ἄτομα. Ἐν συνεχείᾳ διαπιστοῦται ἡ, ἐντὸς μιᾶς χρονικῆς περιόδου, συχνότης προσβολῆς ἐκ τῆς παθήσεως τοῦ συνόλου τοῦ δείγματος, κατανεμομένη εἰς 3 κατηγορίας : οὐδεμία προσβολὴ ἐκ τῆς παθήσεως – ἅπαξ προσβολὴ – 2 ἢ περισσότεραι περιπτώσεις προσβολῆς. Αἱ ἐν λόγῳ παρατηρήσεις δύνανται νὰ ταξινομηθοῦν εἰς πίνακα, ὡς κατωτέρω :

Παράγων Β / Παράγων Α (Συχνότης προσβολῆς)	B_1 Ἄτομα τυχόντα θεραπείας	B_2 Ἄτομα μὴ τυχόντα θεραπείας	Σύνολον
A_1 : 0	252	224	476
A_2 : 1	145	136	281
A_3 : $\geqslant 2$	103	140	243
Σύνολον	500	500	1000

Ἐρωτᾶται : ἡ ἐναντίον τῆς παθήσεως θεραπεία ὑπῆρξεν ἢ ὄχι ἀποτελεσματική ; Ἡ πιθανότης προσβολῆς ἐκ τῆς παθήσεως ἑνὸς ἀτόμου, τὸ ὁποῖον ἔτυχε τῆς σχετικῆς θεραπείας, εἶναι μικροτέρα ἢ ὄχι τῆς περιπτώσεως ἀτόμου, τὸ ὁποῖον δὲν ἔτυχε τῆς ἐν λόγῳ θεραπείας ; Τὰ χαρακτηριστικὰ Α καὶ Β, καὶ εἰδικώτερον αἱ κατηγορίαι αὐτῶν, εἶναι ἢ ὄχι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των ;

Ἐν γένει ἐνταῦθα ἀντιμετωπίζομεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἕνας ἀριθμὸς V παρατηρήσεων δύναται νὰ ταξινομηθῇ συμφώνως πρὸς διάφορα περιοριστικὰ τῶν παρατηρήσεων χαρακτηριστικὰ Α, Β, Γ, . . . , ἕκαστον τῶν ὁποίων περιλαμβάνει περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἐπίπεδα.

Ἑκάστη παρατήρησις – εἴσοδος εἰς τὸν σχετικὸν πίνακα συνίσταται ἐκ τῆς συχνότητος, ἤτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιπτώσεων τοῦ συνολικοῦ δείγματος, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζουν ἕνα δεδομένον συνδυασμὸν τῶν ἐπιπέδων τῶν ἐν λόγῳ χαρακτηριστικῶν. Οὕτω λ.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύο χαρακτηριστικῶν Α καὶ Β ἡ εἴσοδος (παρατήρησις) εἰς τὸ κελλίον κμ εἶναι ἡ τυχαία μεταβλητὴ $V_{\kappa\mu}$, ἡ ὁποία δίδει τὸν ἀριθμὸν τῶν περιπτώσεων τοῦ δείγματος, αἱ ὁποῖαι διακρίνονται ἐκ τῆς ταυτοχρόνου εἰς αὐτὰς ἐμφανίσεως τῶν ἐπιπέδων κ καὶ μ, τῶν χαρακτηριστικῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως.

Εἰς ἕκαστον κελλίον διακρίνομεν περαιτέρω τὴν πιθανότητα μιᾶς παρατηρήσεως τοῦ δείγματος νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ συγκεκριμένον τοῦτο κελλίον, ἤτοι $P_{\kappa\mu}$, τοιοῦτον ὥστε $\sum\limits_{\kappa}^{K}\sum\limits_{\mu}^{M} P_{\kappa\mu} = 1$, ὡς καὶ τὴν προσδοκωμένην συχνότητα τούτου $N_{\kappa\mu}$, δεδομένου τοῦ μεγέθους τοῦ συνολικοῦ δείγματος. Προφανῶς

$$\sum_{\kappa}\sum_{\mu} N_{\kappa\mu} = \sum_{\kappa}\sum_{\mu} V_{\kappa\mu} = V$$

$$\sum_{\mu}^{M} N_{\kappa\mu} = N_{\kappa.},\ \sum_{\mu}^{M} V_{\kappa\mu} = V_{\kappa.},\ \sum_{\mu}^{M} P_{\kappa\mu} = P_{\kappa.}$$

εἶναι τὰ ἀντίστοιχα (μερικὰ) σύνολα τῆς γραμμῆς $\kappa\,(=1, \ldots, K)$.

$$\sum_{\kappa}^{K} N_{\kappa\mu} = N_{.\mu},\ \sum_{\kappa}^{K} V_{\kappa\mu} = V_{.\mu},\ \sum_{\kappa}^{K} P_{\kappa\mu} = P_{.\mu},$$

εἶναι τὰ ἀντίστοιχα (μερικὰ) σύνολα τῆς στήλης $\mu\,(=1, \ldots, M)$.

Ἡ δειγματοληψία δύναται νὰ διενεργηθῇ κατὰ τρόπον ὥστε, λαμβανομένου ἐκ τῶν προτέρων ὡς σταθεροῦ μόνον τοῦ συνολικοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος, τὰ μερικὰ σύνολα τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν νὰ προκύπτουν ὡς τυχαῖαι μεταβληταί. Εἶναι ὅμως ἐπίσης δυνατὸν τὰ ἐν λόγῳ μερικὰ σύνολα νὰ καθορισθοῦν ἐκ τῶν προτέρων ὡς σταθερά.

Αἱ συχνότητες τῶν παρατηρήσεων εἰς τὰ κελλία εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναφέρωνται εἰς διαφόρους κατανομάς, ὡς λ.χ. εἰς πολυωνυμικὴν (multinomial) ἢ poisson κλπ.

2. Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ περιοριστικὰ τῶν παρατηρήσεων χαρακτηριστικὰ εἶναι μόνον δύο : Α καὶ Β, μὲ ἀντίστοιχα ἐπίπεδα Κ καὶ Μ. Αἱ συχνότητες τῶν κελλίων θεωροῦνται ὡς προερχόμεναι ἐκ πολυωνυμικῆς κατανομῆς [1]. Κατὰ τὴν δειγματοληψίαν μόνον τὸ συνολικὸν μέγεθος τοῦ δείγματος V καθωρίσθη ὡς σταθερόν, ὥστε τὸ γενικὸν ὑπόδειγμα Ω ἀναφέρεται εἰς μίαν μόνον πολυωνυμικὴν κατανομήν, μὲ ἀριθμὸν ἐνδεχομένων περιπτώσεων ΚΜ καὶ ἀντιστοίχους πιθανότητας $P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{KM}$, ὅπου $\sum\limits_{\kappa}^{K}\sum\limits_{\mu}^{M} P_{\kappa\mu} = 1$.

Ἡ συνδυασμένη πιθανότης τοῦ δείγματος (joint probability) ὑπὸ τὸ γενικὸν ὑπόδειγμα Ω εἶναι :

---

1) Διεύρυνσις τῆς διωνυμικῆς κατανομῆς, μὲ δυνατὰς περιπτώσεις περισσοτέρας τῶν δύο. Ἴδε σχ. Feller «Probability and its applications», σ. 157 - 8.

$$PR(N_{11} = V_{11},\ N_{12} = V_{12}, \ldots, N_{KM} = V_{KM} \mid P_{11}, \ldots, P_{KM}, \Omega) =$$

$$= L(\Omega) = \frac{V!}{\prod_{\kappa=1}^{K} \prod_{\mu=1}^{M} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\kappa=1}^{K} \prod_{\mu=1}^{M} P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}$$

Ἡ ὑπόθεσις ὅτι τὰ δύο χαρακτηριστικὰ Α καὶ Β εἶναι ἀνεξάρτητα μεταξύ των ἐκφράζεται στατιστικῶς ὡς:

$$\omega : P_{\kappa\mu} = P_{\kappa.}\, P_{.\mu}, \qquad \text{ὅπου } \sum_{\kappa} P_{\kappa.} = \sum_{\mu} P_{.\mu} = 1.$$

Ἡ διαζευκτικὴ (alternative) ὑπόθεσις εἶναι συνεπῶς

$\Omega - \omega : P_{\kappa\mu} \neq P_{\kappa.}\, P_{.\mu}$, ὑποδηλοῦσα τὴν ἐξάρτησιν τῶν δύο ἐπιπέδων κ καὶ μ.

Σημειωτέον ὅτι τόσον ἡ ὑπόθεσις πρὸς ἐπαλήθευσιν, ὅσον καὶ ἡ διαζευκτικὴ ταύτης, εἶναι σύνθετοι ὑποθέσεις (composite hypotheses), μὴ προσδιοριζόμεναι ἐπακριβῶς εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίπτωσιν, καθ' ὅσον ἡ πιθανότης $P_{\kappa\mu}$ δὲν προσδιορίζεται πέραν τῆς συνθήκης $\sum_{\kappa} \sum_{\mu} P_{\kappa\mu} = 1$.

Ὑπὸ τὴν ὡς ἀνωτέρω ὑπόθεσιν ω, ἡ συνδυασμένη πιθανότης τοῦ δείγματος εἶναι

$$\Lambda(\omega) = \frac{V!}{\prod_{\kappa} \prod_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\kappa} \prod_{\mu} (P_{\kappa.}\, P_{.\mu})^{V_{\kappa\mu}}$$

Θὰ ἐπιχειρήσωμεν ἐπαλήθευσιν τῆς ὑποθέσεως δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τὲστ τοῦ λόγου τῆς μεγίστης πιθανότητος (maximum likelihood ratio test) (1).

Πρὸς μεγιστοποίησιν τῆς συνδυασμένης πιθανότητος $L(\Omega)$, ἐν σχέσει πρὸς τὰς παραμέτρους $P_{\kappa\mu}$, ἀρκεῖ προφανῶς ἡ μεγιστοποίησις τοῦ γινομένου $\prod_{\kappa} \prod_{\mu} (P_{\kappa.}\, P_{.\mu})^{V_{\kappa\mu}}$. Πρὸς τοῦτο:

$$\frac{\vartheta \prod_{\kappa} \prod_{\mu} P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}}{\vartheta P_{\mu}} = V_{11}\, P_{11}^{V_{11}-1}\, P_{12}^{V_{12}} \ldots P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}} = V_{11}\, P_{11}^{-1} \left(\prod_{\kappa} \prod_{\mu} P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}\right) =$$

$$= \frac{V_{11}}{P_{11}} \prod_{\kappa} \prod_{\mu} P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}} = 0$$

καὶ γενικῶς θέτομεν:

$$\frac{V_{\kappa\mu}}{\bar{P}_{\kappa\mu}} \prod_{\kappa} \prod_{\mu} \bar{P}_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}} = 0 \qquad \text{ὅπου } \kappa = 1, \ldots, K \text{ καὶ } \mu = 1, \ldots, M$$

ἤτοι ἔχομεν ΚΜ ἐξισώσεις μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους $P_{11}, \ldots, P_{KM}$.

---

1) Τὸ ἐν λόγῳ τὲστ δίδει, ὑπὸ ὡρισμένας συνθῆκας, καὶ ἐφ' ὅσον ὑπάρχει, ἕνα ἄριστον τέστ. Ἴδε σχ. E. Lehman «Testing Statistical Hypothesis», σελ. 68. Ἐπίσης Neyman «Probability and Statistics», σελ. 342.

Προκύπτει ὅτι αἱ ἐκτιμήσεις μεγίστης πιθανότητος (maximum Likelihood estimates) τῶν παραμέτρων εἶναι :

$$\overline{P}_{\kappa\mu} = \frac{V_{\kappa\mu}}{V}.$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐκτιμήσεις ἐπιτυγχάνονται εὐχερέστερον διὰ τῆς ἀκολούθου μεθόδου :

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ γεωμετρικὸς μέσος εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῶν μεταβλητῶν $X_1,\ldots,X_N$: $\left[\prod_{\nu=1}^{N} X_\nu\right]^{\frac{1}{N}} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu$ (1).

Λαμβανομένης ὡς μεταβλητῆς τοῦ λόγου $\frac{P_{\kappa\mu}}{V_{\kappa\mu}}$, πολλαπλασιαζομένου $V_{\kappa\mu}$ φορὰς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$\left[\left(\frac{P_{11}}{V_{11}}\right)^{V_{11}}\left(\frac{P_{12}}{V_{12}}\right)^{V_{12}}\cdots\left(\frac{P_{\kappa\mu}}{V_{\kappa\mu}}\right)^{V_{\kappa\mu}}\right]^{\frac{1}{V}} \leqslant \left(\frac{1}{V}\right)\sum_\kappa\sum_\mu V_{\kappa\mu}\left(\frac{P_{\kappa\mu}}{V_{\kappa\mu}}\right)$$

$$\text{ἢ}\quad \left[\prod_\kappa\prod_\mu\left(\frac{P_{\kappa\mu}}{V_{\kappa\mu}}\right)^{V_{\kappa\mu}}\right]^{\frac{1}{V}} \leqslant \frac{1}{V}$$

$$\left[\prod_\kappa\prod_\mu\left(\frac{P_{\kappa\mu}}{V_{\kappa\mu}}\right)^{V_{\kappa\mu}}\right] \leqslant \frac{1}{V^V}$$

$$\prod_\kappa\prod_\mu P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}} \leqslant \frac{1}{V^V}\prod_\kappa\prod_\mu V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}} = \frac{1}{\prod\limits_\kappa\prod\limits_\mu (V^{V_{\kappa\mu}})}\prod_\kappa\prod_\mu V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}} = \prod_\kappa\prod_\mu\left(\frac{V_{\kappa\mu}}{V}\right)^{V_{\kappa\mu}}.$$

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ἡ μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ γινομένου $\prod\limits_\kappa\prod\limits_\mu P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}$, ἐκ τῆς ὁποίας μεγιστοποιεῖται καὶ ἡ $L(\Omega)$, ἐπιτυγχάνεται ὅταν

$$\prod_\kappa\prod_\mu P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}} = \prod_\kappa\prod_\mu\left(\frac{V_{\kappa\mu}}{V}\right)^{V_{\kappa\mu}} \quad \text{ἤτοι ὅταν} \quad P_{\kappa\mu} = \frac{V_{\kappa\mu}}{V}$$

Συνεπῶς : $$L(\overline{\Omega}) = \frac{V!}{\prod\limits_\kappa\prod\limits_\mu V_{\kappa\mu}!}\prod_\kappa\prod_\mu\left(\frac{V_{\kappa\mu}}{V}\right)^{V_{\kappa\mu}} = \frac{V!}{\prod\limits_\kappa\prod\limits_\mu V_{\kappa\mu}!}\prod_\kappa\prod_\mu V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}\frac{1}{V^V} =$$

$$= \frac{V!\prod\limits_\kappa\prod\limits_\mu V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}}{V^V\prod\limits_\kappa\prod\limits_\mu V_{\kappa\mu}!}.$$

---

1) Ἴδε σχετικῶς M. G. Kendall : «The advanced theory of statistics», vol. I, σ. 33 - 4.

Κατὰ παρόμοιον τρόπον εὑρίσκονται αἱ ἐκτιμήσεις μεγίστης πιθανότητος τῶν παραμέτρων $P_{\kappa.}$ καὶ $P_{.\mu}$ ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν ω, ὡς ἴσαι πρὸς

$$\overline{P}_{\kappa.} = \frac{V_{\kappa.}}{V}, \qquad \overline{P}_{.\mu} = \frac{V_{.\mu}}{V}$$

καὶ συνεπῶς:

$$L(\overline{\omega}) = \left[\frac{V!}{\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!}\right] \times \left[\prod_{\kappa}\prod_{\mu}\left(\frac{V_{\kappa.}\,V_{.\mu}}{V^{V}}\right)^{V_{\kappa\mu}}\right] =$$

$$= \frac{V!}{\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \cdot \frac{\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa.}^{V_{\kappa\mu}} \prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{.\mu}^{V_{\kappa\mu}}}{\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V^{2V_{\kappa\mu}}} = \frac{V!\prod\limits_{\kappa} V_{\kappa.}^{V_{\kappa.}} \prod\limits_{\mu} V_{.\mu}^{V_{.\mu}}}{V^{2V}\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!}$$

Τελικῶς τὸ κριτήριον τοῦ τὲστ τῆς μεγίστης πιθανότητος ἔχει ὡς κατωτέρω:

$$\lambda = \frac{L(\overline{\omega})}{L(\overline{\Omega})} = \frac{\dfrac{\prod\limits_{\kappa} V_{\kappa.}^{V_{\kappa.}} \prod\limits_{\mu} V_{.\mu}^{V_{.\mu}}\, V!}{V^{2V}\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!}}{\dfrac{V!\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}}{V^{V}\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!}} = \frac{\prod\limits_{\kappa} V_{\kappa.}^{V_{\kappa.}} \prod\limits_{\mu} V_{.\mu}^{V_{.\mu}}}{V^{V}\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}}$$

3. Ἐὰν τροποποιήσωμεν τὸ γενικὸν ὑπόδειγμα Ω, καθορίζοντας ἐκ τῶν προτέρων ὡς σταθερὰ τὰ μερικὰ σύνολα τῶν γραμμῶν (ἢ τῶν στηλῶν), τὸ δεῖγμα δὲν προέρχεται πλέον, ὡς πρότερον, ἐκ μιᾶς πολυωνυμικῆς κατανομῆς, ἀλλὰ ἐκ διαφόρων, Κ (ἢ Μ) τὸν ἀριθμὸν ἀνεξαρτήτων πολυωνυμικῶν κατανομῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς διαφόρους γραμμὰς (ἢ στήλας) τοῦ πίνακος:

	B_1	B_2	. . .	B_M	Σύνολον
A_1	V_{11} P_{11}	V_{12} P_{12}	. . .	V_{1M} P_{1M}	$\sum\limits_{\mu} V_{1\mu} = V_{1.}$ $\sum\limits_{\mu} P_{1\mu} = P_{1.}$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
A_K	V_{K1} P_{K1}	V_{K2} P_{K2}	. . .	V_{KM} P_{KM}	$V_{K.}$ $P_{K.}$

Ἡ συνδυασμένη πιθανότης τοῦ ὅλου δείγματος ἰσοῦται ἐν προκειμένῳ μὲ τὸ γινόμενον τῆς συνδυασμένης πιθανότητος ἑκάστου δείγματος—γραμμῆς, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑκάστην τῶν ἀνεξαρτήτων πολυωνυμικῶν κατανομῶν.

$$L(\Omega) = \frac{V_{1}.!\prod_{\mu}^{M} P_{1\mu}^{V_{1\mu}}}{\prod_{\mu} V_{1\mu}!} \frac{V_{2}.!\prod_{\mu}^{M} P_{2\mu}^{V_{2\mu}}}{\prod_{\mu} V_{2\mu}!} \cdots \frac{V_{K}.!\prod_{\mu} P_{K\mu}^{V_{K\mu}}}{\prod_{\mu} V_{K\mu}!} =$$

$$= \frac{\prod_{\kappa=1}^{K} (V_{\kappa.})!}{\prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\kappa}\prod_{\mu} P_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}, \quad \text{ὅπου} \quad \sum_{\mu=1} P_{\kappa\mu} = 1 \quad (\kappa=1,\ldots,K)$$

Ἡ ὑπόθεσις ἀνεξαρτήτου σχέσεως μεταξὺ τῶν χαρακτηριστικῶν A καὶ B ἐκφράζεται ἐν προκειμένῳ στατιστικῶς ὡς ἡ περίπτωσις ταυτότητος μεταξὺ τῶν K πολυωνυμικῶν κατανομῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς K γραμμὰς τοῦ πίνακος, ἤτοι :

$$\omega : \quad \begin{array}{l} P_{11} = P_{21} = \ldots = P_{K1} = P'_{1} \\ P_{12} = P_{22} = \ldots = P_{K2} = P'_{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{1M} = P_{2M} = \ldots = P_{KM} = P'_{M} \end{array}$$

ὅπου $\sum_{\mu=1}^{M} P'_{\mu} = 1$.

Ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω ὑπόθεσιν ἡ συνδυασμένη πιθανότης τοῦ συνολικοῦ δείγματος εἶναι :

$$L(\omega) = \left(\frac{V_{1}.!}{\prod_{\mu} V_{1\mu}!} \prod_{\mu} P'^{\,V_{1\mu}}_{\mu}\right)\left(\frac{V_{2}.!}{\prod_{\mu} V_{2\mu}!} \prod P'^{\,V_{2\mu}}_{\mu}\right)\ldots\left(\frac{V_{\kappa}.!}{\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\mu} P'^{\,V_{\kappa\mu}}_{\mu}\right) =$$

$$= \frac{\prod_{\kappa=1}^{K} V_{\kappa}.!}{\prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\mu=1}^{M} P'^{\,V_{.\mu}}_{\mu}$$

Ἡ μεγιστοποίησις τοῦ L (Ω) ἐπιτυγχάνεται διὰ τῶν τιμῶν

$$\bar{P}_{1\mu,\Omega} = \frac{V_{1\mu}}{V_{1.}}, \quad \bar{P}_{2\mu,\Omega} = \frac{V_{2\mu}}{V_{2.}}, \ \ldots, \ \bar{P}_{KM,\Omega} = \frac{V_{KM}}{V_{K.}}$$

Γενικῶς : $\bar{P}_{\kappa,\mu,\Omega} = \left(\frac{V_{\kappa,\mu}}{V_{\kappa.}}\right)$

καὶ

$$L(\bar{\Omega}) = \frac{\prod_{\kappa} (V_{\kappa.})!}{\prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\kappa}\prod_{\mu} \left(\frac{V_{\kappa\mu}}{V_{\kappa.}}\right)^{V_{\kappa\mu}} = \frac{\prod_{\kappa} V_{\kappa.}!\prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}}{\prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}!\prod_{\kappa} V_{\kappa.}^{V_{\kappa.}}}$$

῾Η μεγιστοποίησις τοῦ L (ω) ἐξ ἄλλου ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς τιμῆς

$$\bar{P}'_{\mu} = \frac{V_{.\mu}}{V}$$

ὥστε :

$$L(\bar{\omega}) = \frac{\prod_{\kappa} V_{\kappa.}!}{\prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\mu} \left(\frac{V_{.\mu}}{V}\right)^{V_{.\mu}} = \frac{\prod_{\kappa} V_{\kappa.}! \prod_{\mu} V_{.\mu}^{V_{.\mu}}}{\prod_{\kappa}\prod_{\mu} \Pi_{\nu\kappa\mu}! \, V^{\nu}}$$

Τελικῶς ἔχομεν ὡς κριτήριον

$$\lambda = \frac{L(\bar{\omega})}{L(\bar{\Omega})} = \frac{\dfrac{\prod_{\kappa} V_{\kappa}! \prod_{\mu} V_{.\mu}^{V_{.\mu}}}{\prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}! \, V^{V}}}{\dfrac{\prod_{\kappa} V_{\kappa.}! \prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}}{\prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}! \prod_{\kappa} V_{\kappa.}^{V_{\kappa.}}}} = \frac{\prod_{\kappa} V_{\kappa.}^{V_{\kappa.}} \prod_{\mu} V_{.\mu}^{V_{.\mu}}}{V^{V} \prod_{\kappa}\prod_{\mu} V_{\kappa\mu}^{V_{\kappa\mu}}}$$

Τὸ κριτήριον τοῦτο εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἴδιον ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν μόνον τὸ συνολικὸν μέγεθος τοῦ δείγματος (V) καθορίζεται ἐκ τῶν προτέρων.

4. Ὑποθέτομεν ἐνταῦθα ὅτι τὰ περιοριστικὰ τῶν παρατηρήσεων χαρακτηριστικὰ εἶναι τρία: Α, Β, Γ, μὲ ἀντίστοιχα ἐπίπεδα Κ, Λ καὶ Μ.

Διατηροῦμεν τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ δεῖγμα προέρχεται ἐκ μιᾶς πολυωνυμικῆς κατανομῆς, μὲ ΚΛΜ πιθανὰς περιπτώσεις.

῾Η στατιστικὴ ὑπόθεσις Η: $P_{\kappa\lambda\mu} = P_{\kappa..}\, P_{.\lambda\mu}$

ὅπου $\sum_{\kappa}\sum_{\lambda}\sum_{\mu} P_{\kappa\lambda\mu} = 1, \quad P_{\kappa..} = \sum_{\lambda}\sum_{\mu} P_{\kappa\lambda\mu}, \quad P_{.\lambda\mu} = P_{\kappa\lambda\mu},$

ἐκφράζει τὴν ἔλλειψιν ἐξαρτήσεως μεταξὺ τοῦ χαρακτηριστικοῦ Α καὶ τῶν δύο ἄλλων Β καὶ Γ. Ἐν ἄλλοις λόγοις ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως τῶν ἐπιπ϶δων τοῦ παραγόντος Α δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ των μὲ τὰ ἐπίπεδα τῶν παραγόντων Β καὶ Γ, ὡς καὶ ἀντιστρόφως. Τοῦτο βεβαίως δὲν συνεπάγεται ἀναγκαίως καὶ ἔλλειψιν ἐξαρτήσεως μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων παραγόντων ἤτοι Β καὶ Γ.

῾Η στατιστικὴ ὑπόθεσις Η′ : $P_{\kappa\lambda\mu} = P_{\kappa..}\, P_{.\lambda.}\, P_{..\mu}$ συνεπάγεται ἔλλειψιν συσχετίσεως καὶ τῶν τριῶν παραγόντων μεταξύ των. ῾Η ὑπόθεσις Η″: $P_{\kappa\lambda\mu} = P_{\kappa..}$ ἐκφράζει ἐξάρτησιν τῶν παρατηρήσεων ἐκ μόνου τοῦ παράγοντος Α, ἐνῶ ἀντιθέτως ἡ ὑπόθεσις Η‴ : $P_{\kappa\lambda\mu} = P_{.\lambda\mu}$ ἀποκλείει οἱανδήποτε ἐπίδρασιν τοῦ παράγοντος Α ἐπὶ τῶν παρατηρήσεων.

Θὰ διερευνήσωμεν τὴν ὑπόθεσιν Η : $P_{\kappa\lambda\mu} = P_{\kappa..}\, P_{.\lambda\mu}$, ὅπου ὑπεισέρχονται (Κ – 1) (ΛΜ – 1) ἀνεξάρτητοι παράμετροι :

Ὑπὸ τὸ γενικὸν ὑπόδειγμα Ω, ὅπου $V_{\kappa\lambda\mu}$ προέρχεται ἐκ πολυωνυμικῆς κατανομῆς μὲ ΚΛΜ δυνατὰς περιπτώσεις, ἡ συνδυασμένη πιθανότης (joint probability) τοῦ δείγματος μεγιστοποιεῖται εἰς $\bar{P}_{\kappa\lambda\mu} = \frac{V_{\kappa\lambda\mu}}{V}$, ἤτοι

$$L(\bar{\Omega}) = \frac{V!\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\lambda}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\lambda\mu}^{V_{\kappa\lambda\mu}}}{V^{V}\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\lambda}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\lambda\mu}!}$$

Ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν Η, ἡ συνδυασμένη πιθανότης τοῦ δείγματος μεγιστοποιεῖται εἰς $\bar{P}_{\kappa..} = \frac{V_{\kappa..}}{V}$ καὶ $\bar{P}_{.\lambda\mu} = \frac{V_{.\lambda\mu}}{V}$, ἤτοι

$$L(\bar{\omega}) = \frac{V!\prod\limits_{\kappa} V_{\kappa..}^{V_{\kappa..}}\prod\limits_{\lambda}\prod\limits_{\mu} V_{.\lambda\mu}^{V_{.\lambda\mu}}}{V^{2V}\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\lambda}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\lambda\mu}!}$$

Συνεπῶς
$$\lambda = \frac{L(\bar{\omega})}{L(\bar{\Omega})} = \frac{\prod\limits_{\kappa} V_{\kappa..}^{V_{\kappa..}}\prod\limits_{\lambda}\prod\limits_{\mu} V_{.\lambda\mu}^{V_{.\lambda\mu}}}{V^{V}\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\lambda}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\lambda\mu}^{V_{\kappa\lambda\mu}}}.$$

5. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ τὲστ τοῦ λόγου τῆς μεγίστης πιθανότητος, ἤτοι διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν ὡς κριτήριον τὸν ὡς ἀνωτέρω λόγον, λ, δέον νὰ γνωρίζωμεν τὴν κατανομήν του, ἡ ὁποία δὲν θὰ πρέπει νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀγνώστου τιμῆς παραμέτρων, τουλάχιστον ὑπὸ τὴν ἐλεγχομένην σύνθετον ὑπόθεσιν. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἐκτιμηθὲν κριτήριον λ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀγνώστου τιμῆς τούτων παραμέτρων, αἱ ὁποῖαι ἐκ τοῦ λόγου τούτου ὀνομάζονται ἐν προκειμένῳ «ἐνοχλητικαί» (nuisance parameters). Βεβαίως, αἱ ἐν λόγῳ παράμετροι ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ τῶν ἐκτιμήσεών των, ἀλλὰ αἱ ἐκτιμήσεις αὗται μόνον ἀσυμπτωτικῶς (ἐφ' ὅσον $V \rightarrow \infty$) προσεγγίζουν τὴν ἀληθῆ τιμὴν τῶν παραμέτρων.

Συνεπῶς διὰ μικροῦ σχετικῶς μεγέθους δείγματα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ τὸ κριτήριον λ, διὰ δὲ μεγάλα δείγματα δὲν δίδει παρὰ μόνον ἀσυμπτωτικὸν τὲστ (asymptotic test), τὸ ὁποῖον καὶ θὰ ἀναπτύξωμεν βραδύτερον.

6. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ὑποθέσεως ἀνεξαρτήτου σχέσεως τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ πίνακος πολλαπλῆς εἰσόδου εἶναι δυνατὸν νὰ πραγματοποιηθῇ δι' ἑνὸς τέστ, τὸ ὁποῖον δὲν βασίζεται εἰς κριτήριον ἀσυμπτωτικὸν ἢ διαισθήσεως (intuitive criterion), ἀλλὰ ἐπιτυγχάνεται δι' ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογῆς τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος περὶ τοῦ καλλιτέρου τέστ τῶν Neyman - Pearson (1). Βεβαίως τὸ θεώρημα τοῦτο προϋποθέτει κατ'

1) Σχετικῶς μὲ τὸ θεώρημα τοῦτο ἴδε J. Neyman «Probability and Statistics», σ. 304 - 326.

ἀρχὴν ἁπλῆν ὑπόθεσιν (simple hypothesis) πρὸς ἐπαλήθευσιν, ἐνῷ ἡ ὑπόθεσις τοῦ ὑποδείγματός μας εἶναι σύνθετος. Θὰ ἀκολουθήσωμεν ὡς ἐκ τούτου μίαν εἰδικὴν διὰ τὴν περίπτωσιν μέθοδον, ἐκ τῆς ὁποίας τὸ τὲστ λαμβάνει ἰδιαιτέραν ὀνομασίαν: «similar test».

Εἰς γενικὰς γραμμὰς ἡ ἀκολουθουμένη μέθοδος ἔχει ὡς ἑξῆς: Ὁ χῶρος τοῦ δείγματος (sample space) διαχωρίζεται εἰς τμήματα τοιαῦτα ὥστε ἡ πιθανότης τῶν παρατηρήσεων εἰς ἓν ἕκαστον ἐκ τούτων – δοθέντος ὅτι εὑρισκόμεθα ἐντὸς τοῦ δεδομένου τούτου – δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀγνώστου τιμῆς παραμέτρων. Ἐντὸς δὲ ἑκάστου τῶν τμημάτων τούτων τοῦ χώρου τοῦ δείγματος δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν Neyman - Pearson καὶ νὰ προσδιορίσωμεν – κεχωρισμένως δι' ἓν ἕκαστον ἐξ αὐτῶν – τὴν περιοχὴν ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως (critical region). Ἡ δὲ ἕνωσις (union) ὅλων αὐτῶν τῶν κατὰ τμήματα περιοχῶν ἀπορρίψεως δίδει τὴν συνολικὴν περιοχὴν ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεώς μας.

Ὡς θὰ ἀποδειχθῇ ἀκολούθως, ἡ πιθανότης τῶν παρατηρήσεων δὲν ἐξαρτᾶται πλέον ἐκ τῶν ἐνοχλητικῶν παραμέτρων, ἐφ' ὅσον αὕτη ληφθῇ ὑπὸ συνθήκην (conditionally), ἤτοι δεδομένης τῆς τιμῆς τῶν ὁρίων (μερικῶν συνόλων τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν) τοῦ πίνακος. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀπαιτεῖται προηγουμένως ὁ καθορισμὸς ὡρισμένων ἐννοιῶν.

7. Ἕνα σύνολον στατιστικῶν (Statistics: συναρτήσεις τῶν παρατηρήσεων) ἔστω $T_1, \ldots, T_K$, καλεῖται «ἐπαρκὲς» (sufficient statistics) διὰ τὰς παραμέτρους $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$, ἐν σχέσει πρὸς τὰς μεταβλητὰς $X_1, \ldots, X_\nu$, αἱ ὁποῖαι προέρχονται ἐκ πληθυσμοῦ ἡ κατανομὴ τοῦ ὁποίου περιέχει τὰς ἐν λόγῳ παραμέτρους, ἐὰν ἡ συνδυασμένη πιθανότης τῶν μεταβλητῶν, δεδομένης τῆς τιμῆς τῶν στατιστικῶν τούτων, εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν παραμέτρων, ἤτοι ἐάν: Ἡ Πιθανότης $(X_1, \ldots, X_\nu \mid T_1, \ldots, T_K)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$. Ἐὰν λοιπὸν αἱ «ἐνοχλητικαὶ» παράμετροι (nuisance parameters) $P_{11}, \ldots, P_{KM}$ τοῦ πίνακος πολλαπλῆς εἰσόδου ἔχουν «ἐπαρκεῖς» στατιστικάς, ἐν σχέσει πρὸς τὰς παρατηρήσεις $V_{11}, \ldots, V_{KM}$ τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ συνδυασμένη κατανομὴ τοῦ δείγματος, δεδομένης τῆς τιμῆς τῶν ἐπαρκῶν στατιστικῶν, δὲν θὰ ἐξαρτᾶται πλέον ἐκ τῶν (ἀγνώστου τιμῆς) παραμέτρων τούτων.

Τὸ κριτήριον τῶν Fisher - Neyman [1] διαπιστώσεως τοῦ ἐὰν ὑπάρχουν ἐπαρκεῖς στατιστικαὶ τῶν παραμέτρων κατανομῆς ἑνὸς πληθυσμοῦ ἔχει ὡς ἀκολούθως: Ἐπιζητεῖται ἡ διάσπασις τῆς συνδυασμένης κατανομῆς τοῦ δείγματος – ἐξαρτωμένης ἐκ τῶν ἐνοχλητικῶν παραμέτρων – εἰς δύο τμήματα: τοῦ ἑνὸς μόνον ἐκ τούτων περιλαμβάνοντος τὰς ἐνοχλητικὰς παραμέτρους, τοῦ ἑτέρου μὴ περιέχοντος ταύτας. Ἐὰν ἡ διάσπασις αὐτὴ εἶναι ἐφικτή, ἤτοι ἐὰν

$$F(X_1, \ldots, X_\nu) = [G(\beta_1, \ldots, \beta_\mu)][H(X_1, \ldots, X_\nu)]$$

1) Ἴδε E. Lehman «Testing Statistical Hypothesis», σελ. 48 - 49.

τότε αἱ ἐνοχλητικαὶ παράμετροι ($\beta_1, \ldots, \beta_\mu$) ἔχουν ἐν προκειμένῳ ἐπαρκεῖς στατιστικάς.

Αἱ ἐκτιμήσεις μεγίστης πιθανότητος τῶν παραμέτρων εἶναι συνήθως «ἐπαρκεῖς» στατιστικαὶ δι' αὐτάς. Ὡς ἐκ τούτου εἰς τὴν πρᾶξιν, παραλείποντες τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ κριτηρίου τῶν Fisher - Neyman, λαμβάνομεν τὰς ἐν λόγῳ ἐκτιμήσεις ὡς ἐπαρκεῖς στατιστικάς. Ἐὰν δὲ πράγματι προκύψῃ ὅτι ἡ ὑπὸ συνθήκην πιθανότης τοῦ δείγματος, δεδομένων τῶν ἐκτιμήσεων μεγίστης πιθανότητος τῶν ἐνοχλητικῶν παραμέτρων, δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν παραμέτρων τούτων, τότε βεβαιοῦται ὁ χαρακτηρισμὸς τῶν ἐν λόγῳ ἐκτιμήσεων ὡς ἐπαρκῶν στατιστικῶν διὰ τὰς παραμέτρους.

8. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πινάκων πολλαπλῆς εἰσόδου, ἐκτιμήσεις μεγίστης πιθανότητος τῶν παραμέτρων εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα αἱ ἀκόλουθοι :

$$\overline{P}_{\kappa\mu} = \frac{V_{\kappa\mu}}{V}, \quad \overline{P}_{\kappa.} = \frac{V_{\kappa.}}{V}, \quad \overline{P}_{.\mu} = \frac{V_{.\mu}}{V} \qquad \text{ὅπου} \quad \kappa = 1,\ldots,K, \ \mu = 1,\ldots,M.$$

Σημειωτέον ὅτι ἐὰν αἱ ἀνωτέρω ἐκτιμήσεις εἶναι ἐπαρκεῖς στατιστικαὶ διὰ τὰς παραμέτρους, τοῦτο ἀναφέρεται καὶ εἰς τὰ μεγέθη $V_{\kappa\mu}$, $V_{\kappa.}$ καὶ $V_{.\mu}$, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος πολλαπλῆς εἰσόδου.

Ἡ συνδυασμένη πιθανότης τοῦ δείγματος, δεδομένων τῶν ἐκτιμήσεων μεγίστης πιθανότητος τῶν ἐνοχλητικῶν παραμέτρων, ἔχει, ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν χαρακτηριστικῶν A καὶ B τοῦ πίνακός μας, ὡς κατωτέρω:

$$\text{Πιθανότης } (N_{11} = V_{11}, \ldots, N_{\kappa\mu} = V_{\kappa\mu} \mid V_{1.}, V_{2.}, \ldots, V_{\kappa.}, V_{.1}, \ldots, V_{.M}, H_0) =$$

$$= \frac{\text{Πιθαν. } (N_{11} = V_{11}, \ldots, N_{KM} V_{KM} \mid H_0)}{\text{Πιθαν. } (N_{1.} = V_{.}, \ldots, N_{.M} = V_{.M} \mid H_0)}$$

Ὁ *ἀριθμητὴς* τοῦ λόγου τούτου ἰσοῦται πρός :

$$\frac{V!}{\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\kappa}\prod_{\mu} (P_{\kappa.} P_{.\mu})^{V_{\kappa\mu}} = \frac{V!}{\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod_{\kappa} P_{\kappa.}^{V_{\kappa.}} \prod_{\mu} P_{.\mu}^{V_{.\mu}}$$

διότι :

$$\prod_{\kappa}\prod_{\mu} (P_{\kappa.} P_{.\mu})^{V_{\kappa\mu}} = (P_{1.} P_{.1})^{V_{11}} (P_{1.} P_{.2})^{V_{12}} \ldots (P_{K.} P_{.M})^{V_{KM}} =$$

$$= (P_{1.}^{V_{11}} P_{1.}^{V_{12}} \ldots P_{1.}^{V_{1M}}) (P_{2.}^{V_{21}} \ldots P_{2.}^{V_{2M}}) \ldots (P_{.M}^{V_{1M}} \ldots P_{.M}^{V_{KM}}) =$$

$$= P_{1.}^{V_{1.}} P_{2.}^{V_{2.}}, \ldots P_{.M}^{V_{.M}} = \prod_{\kappa} P_{\kappa.}^{V_{\kappa.}} \prod_{\mu} P_{.\mu}^{V_{.\mu}}.$$

Ὁ *παρονομαστὴς* τῆς ἐν λόγῳ σχέσεως ἰσοῦται ἐξ ἄλλου πρός :

$$\left(\frac{V!}{\prod V_{\kappa.}!} \prod P_{\kappa.}^{V_{\kappa.}}\right) \left(\frac{V!}{\prod V_{.\mu}!} \prod P_{.\mu}^{V_{.M}}\right)$$

διότι : ἡ δημιουργικὴ συνάρτησις («generating» function) (1) τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος εἶναι :

$$G_{V_{1\cdot}, V_{2\cdot}, \ldots, V_{K\cdot}, V_{\cdot 1}, \ldots, V_{\cdot M}}(U_1, U_2, \ldots, U_K, \tau_1, \ldots, \tau_M) =$$

$$= E\,[\, U_1^{V_{1\cdot}} U_2^{V_{2\cdot}} \ldots U_\kappa^{V_{K\cdot}}\, \tau_1^{V_{\cdot 1}}, \ldots, \tau_M^{V_{\cdot M}} \,] =$$

$$E\,[\,(U_1^{V_{11}} \ldots U_1^{V_{1M}})\,(U_2^{V_{21}} \ldots U_2^{V_{2M}}) \ldots (\tau_1^{V_{11}} \ldots \tau_1^{V_{K1}}) \ldots (\tau_M^{V_{1M}} \ldots \tau_M^{V_{KM}})\,]$$

$$= E\,[\,(U_1\,\tau_1)^{V_{11}}\,(U_1\,\tau_2)^{V_{12}} \ldots (U_K\,\tau_M)^{V_{KM}}] =$$

$$= G_{V_{11}, V_{12}, \ldots, V_{KM}}(U_1\tau_1, U_1\tau_2, \ldots, U_K\,\tau_M)$$

ἤτοι ἡ δημιουργικὴ συνάρτησις τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος, ἰσοῦται πρὸς τὴν δημιουργικὴν συνάρτησιν τῶν παρατηρήσεων μὲ τὴν προκύπτουσαν ὡς ἀνωτέρω εἰδικὴν μορφὴν τῶν ἐντὸς τῆς παρενθέσεως μεγεθῶν (2).

Γνωρίζομεν ὅτι αἱ παρατηρήσεις προέρχονται ἐκ πολυωνυμικῆς κατανομῆς (3) ὥστε, ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀνεξαρτήτου σχέσεως, τῶν δύο χαρακτηριστικῶν Α καὶ Β,

$$G_{V_{11}, V_{12}, \ldots, V_{KM}}(\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{KM}) = [\sum_\kappa \sum_\mu P_{\kappa\mu}\,\tau_{\kappa\mu}]^V = [\sum_\kappa \sum_\mu \tau_{\kappa\mu}\,P_{\kappa\cdot}\,P_{\cdot\mu}]^V .$$

Καὶ ἐφ' ὅσον ἡ δημιουργικὴ συνάρτησις τῶν μερικῶν συνόλων τοῦ πίνακος ἰσοῦται πρὸς τὴν δημιουργικὴν συνάρτησιν τῶν παρατηρήσεων, ὅταν ἀντικατασταθοῦν τὰ στοιχεῖα $\tau_{11}, \ldots, \tau_{KM}$ διὰ τῶν $U_1\,\tau_1, \ldots, U_K\,\tau_M$ ἔχομεν ὅτι

$$G_{V_{1\cdot}, \ldots, V_{\cdot M}} = [\sum_\kappa \sum_\mu U_\kappa\,\tau_\mu\,P_{\kappa\cdot}\,P_{\cdot\mu}]^V = [\sum_\kappa U_\kappa\,P_{\kappa\cdot}\,]^V\,[\sum_\mu \tau_\mu\,P_{\cdot\mu}\,]^V ,$$

ἤτοι διασπᾶται αὕτη εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι δημιουργικὴ συνάρτησις μιᾶς πολυωνυμικῆς κατανομῆς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ Κ ἐπίπεδα τοῦ παράγοντος Α (μὲ παρατηρήσεις $V_{1\cdot}, V_{2\cdot}, \ldots, V_{K\cdot}$ καὶ πιθανότητας δι' ἑκάστην τῶν Κ περιπτώσεων $P_{\kappa\cdot}$), ἡ δὲ

1) Ἴδε σχετ. W. Feller : Probability theory and its applications, σελ. 248-50.

2) Τοῦτο ἀποτελεῖ μερικὴν περίπτωσιν τοῦ ἑξῆς γενικωτέρου θεωρήματος :

Ἔστω $X_1, \ldots, X_N$ τυχαῖαι ἀσυνεχεῖς μεταβληταὶ καὶ $Y_K = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{\kappa\nu} X_\nu$ ὅπου $\kappa = 1, \ldots, K \leqslant N$ καὶ $\alpha_{\kappa\nu}$ εἶναι γνωστὰ σταθερὰ μεγέθη. Ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$G_{Y_1, \ldots, Y_K}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_K) = G_{X_1, \ldots, X_N}\left(\prod_{\kappa=1}^{K} \tau_\kappa^{\alpha_{\kappa 1}}, \prod_{\kappa=1}^{K} \tau_\kappa^{\alpha_{\kappa 2}}, \ldots, \prod_{\kappa=1}^{K} \tau_\kappa^{\alpha_{\kappa\nu}}\right).$$

3) Ἡ δημιουργικὴ συνάρτησις τῆς πολυωνυμικῆς κατανομῆς εἶναι $G_X(\tau) = [\sum_{\kappa=1}^{K} P_K\,\tau_K\,]^V$, ὅπου P_K εἶναι ἡ πιθανότης τῆς ἀντιστοίχου ἐκ τῶν Κ ἐνδεχομένων περιπτώσεων καὶ V τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος.

δευτέρα ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ M ἐπίπεδα τοῦ παράγοντος B (μὲ παρατηρήσεις $V_{.1}, \ldots, V_{.M}$ καὶ πιθανότητας δι' ἑκάστην τῶν M περιπτώσεων $P_{.\mu}$).

Συνεπῶς ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν χαρακτηριστικῶν A καὶ B ($H: P_{\kappa\mu} = P_{\kappa.} P_{.\mu}$) ἡ κατανομὴ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος εἶναι ἴση πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνυμικῶν κατανομῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ μερικὰ σύνολα τῶν γραμμῶν ἀφ' ἑνὸς

$$\left(V_{\kappa.},\ P_{\kappa.},\ \sum_{\kappa}^{K} V_{\kappa.} = V,\ \sum_{\kappa}^{K} P_{\kappa.} = 1\right)$$

καὶ τῶν στηλῶν ἀφ' ἑτέρου

$$\left(V_{.\mu},\ P_{.\mu},\ \sum_{\mu}^{M} V_{.\mu} = V,\ \sum_{\mu}^{M} P_{.\mu} = 1\right)$$

τοῦ πίνακος τῆς πολλαπλῆς εἰσόδου. Συνεπῶς :

Πιθανότης

$$(N_{1.} = V_{1.}, \ldots, N_{.M} = V_{.M} \mid H) = \left(\frac{V!}{\prod\limits_{\kappa} V_{\kappa.}!} \prod_{\kappa} P_{\kappa.}^{V_{\kappa.}}\right) \left(\frac{V!}{\prod\limits_{\kappa} V_{.\mu}!} \prod_{\mu} P_{.\mu}^{V_{.\mu}}\right) \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Οὕτω τελικῶς προκύπτει ὅτι :

$$\text{Πιθανότης } (N_{11} = V_{11}, \ldots, N_{KM} = V_{KM} \mid V_{1.}, \ldots, V_{.M}, H) =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{V!}{\prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!} \prod\limits_{\kappa} P_{\kappa.}^{V_{\kappa.}} \prod\limits_{\mu} P_{.\mu}^{V_{.\mu}}\right)}{\left(\dfrac{V!}{\prod\limits_{\kappa} V_{\kappa.}!} \prod\limits_{\kappa} P_{\kappa.}^{V_{\kappa.}}\right) \left(\dfrac{V!}{\prod\limits_{\mu} V_{.\mu}!} \prod\limits_{\mu} P_{.\mu}^{V_{.\mu}}\right)} = \frac{\prod\limits_{\kappa} V_{\kappa.}! \prod\limits_{\mu} V_{.\mu}!}{V! \prod\limits_{\kappa}\prod\limits_{\mu} V_{\kappa\mu}!}$$

Σημειωτέον ὅτι αἱ τιμαὶ $V_{\kappa.}$ καὶ $V_{.\mu}$ δὲν ἀποτελοῦν πλέον ἐκτιμήσεις τῶν «ἐνοχλητικῶν» παραμέτρων ($P_{\kappa.}$ καὶ $P_{.\mu}$), αἱ ὁποῖαι ἀντιθέτως ἐξαλείφονται κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τῆς ἀνωτέρω πιθανότητος, ἀλλὰ σταθερὰ μεγέθη, μὲ δεδομένην τὴν τιμὴν τῶν ὁποίων ἐξετιμήθη ἡ πιθανότης αὕτη. Συνεπῶς ἡ ὑπὸ τὴν συνθήκην αὐτὴν προκύπτουσα πιθανότης τοῦ δείγματος δὲν ἐξαρτᾶται πλέον ἐκ τῶν «ἐνοχλητικῶν» παραμέτρων, ἔτι δὲ περισσότερον εἶναι προφανὲς ὅτι αὕτη προέρχεται ἐξ ὑπεργεωμετρικῆς κατανομῆς (hypergeometric distribution) μὲ περισσοτέρας τῶν δύο ὁμάδας στοιχείων ([1]).

Ἐκ τούτου συνάγεται ἐν πρώτοις ὅτι αἱ ἐκτιμήσεις μεγίστης πιθανότητος τῶν ἐνοχλητικῶν παραμέτρων εἶναι πράγματι «ἐπαρκεῖς» στατιστικαὶ δι' αὐτάς.

---

1) Ἴδε σχ. W. Feller «Probability Theory and its appication», σελ. 41–45,218. Ἐπίσης J. Neyman «Probability and statistics», σελ. 202, 211, 331, 335.

Ἡ στατιστικὴ τεχνικὴ ἐλέγχου τῆς πιθανότητος μὴ ἐξαρτήσεως τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ πίνακος βασίζεται εἰς τήν, κατὰ τὰ προηγούμενα, ὑπὸ συνθήκην (conditional) κατανομὴν τοῦ δείγματος καὶ συνίσταται εἰς τὸν περιορισμὸν τῆς ἀναλύσεως διαδοχικῶς ἐντὸς τῶν τμημάτων (subspaces) ἐκείνων τοῦ χώρου τοῦ δείγματος (sample space) ὅπου τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος ἔχουν σταθερὸν μέγεθος. Εἰς ἕκαστον τῶν τμημάτων τούτων κεχωρισμένως ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα περὶ τοῦ καλλιτέρου τὲστ τῶν Neyman - Pearson, τὸ ὁποῖον βεβαίως προϋποθέτει ἁπλῆν, πλήρως καθοριζομένην ὑπόθεσιν (simple hypothesis), ὡς καὶ διαζευκτικὴν ὑπόθεσιν, ἡ ὁποία εἴτε εἶναι ἐπίσης ἁπλῆ, εἴτε σύνθετος μέν, πλὴν ὅμως ἐξασφαλίζουσα ὁμοιομόρφως τὸ πλέον ἰσχυρὸν τὲστ (uniformly most powerful test) [1].

Ἐντὸς τοῦ τμήματος τοῦ χώρου τοῦ δείγματος, ὅπου τὰ μερικὰ ἀθροίσματα $V_{\kappa.}$, $V_{.\mu}$ ($\kappa = 1, \ldots, K$ $\mu = 1, \ldots, M$) εἶναι σταθερά, ἡ ὑπόθεσις $P_{\kappa\mu} = P_{\kappa.} P_{.\mu}$ καθίσταται πλέον πράγματι ἁπλῆ, προσδιοριζομένη ἐπακριβῶς: $P_{\kappa\mu} = V_{\kappa.} V_{.\mu}$. Ἐξ ἄλλου, εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπεργεωμετρικῆς κατανομῆς ὁ ἔλεγχος μιᾶς ἁπλῆς ὑποθέσεως, ἐν σχέσει πρὸς σύνθετον ἀλλὰ μονόπλευρον (one - sided) [2] διαζευκτικήν, δίδει πράγματι ὁμοιομόρφως τὸ πλέον ἰσχυρὸν τέστ [3].

Ἡ συνθήκη τῆς διατηρήσεως τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων $V_{\kappa.}$ καὶ $V_{.\mu}$ ὡς σταθερῶν, δέον νὰ συμβιβάζεται μὲ τὸ συνολικὸν μέγεθος τοῦ δείγματος, ἤτοι δέον ὅπως πάντοτε $\sum\limits_{\kappa} V_{\kappa.} = \sum\limits_{\mu} V_{.\mu} = V$. Ὑπὸ τὸν περιορισμὸν τοῦτον προσδιορίζομεν ὅλα τὰ δυνατὰ μεγέθη τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων, ἕκαστος δὲ σχετικὸς συνδυασμὸς (λ.χ. $V'_{\kappa.}$ καὶ $V'_{.\mu}$ ὅπου $\Sigma V'_{\kappa.} = \Sigma V'_{.\mu} = V$ ἢ $V''_{\kappa.}$ καὶ $V''_{.\mu}$ ὅπου ἐπίσης $\sum\limits_{\kappa} V''_{\kappa.} = \Sigma V''_{.\mu} = V$ κλπ.) προσδιορίζει ἓν τμῆμα τοῦ χώρου τοῦ δείγματος ὅπου εὑρίσκονται ὅλα τὰ στοιχεῖα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα συμβιβάζονται πρὸς τὰς συγκεκριμένας τιμὰς τῶν μερικῶν τούτων ἀθροισμάτων.

Δεδομένου ὅτι εὑρισκόμεθα ἐντὸς ἑνὸς τοιούτου τμήματος τοῦ χώρου τοῦ δείγματος, ἡ πιθανότης ἑνὸς σημείου ε εἶναι, ὑπὸ μὲν τὴν ὑπόθεσιν H_0: $PR(\varepsilon \mid V_{\kappa.}, V_{.\mu}, H_0)$, ὑπὸ δὲ τὴν διαζευκτικὴν ὑπόθεσιν H_1: $PR(\varepsilon \mid V_{\kappa.}, V_{.\mu}, H_1)$.

---

1) Ἴδε σχ. Neyman «Probability and statistics», σελ. 324 - 6.

2) Ἐφ' ὅσον ἡ ἁπλῆ ὑπόθεσις εἶναι $P_{\kappa\mu} = V_{\kappa.} V_{.\mu}$, ἤτοι μία συγκεκριμένη τιμή, μονόπλευρος θεωρεῖται ἡ σύνθετος διαζευκτικὴ $P'_{\kappa\mu} > V_{\kappa.} V_{.\mu}$ ἢ $P'_{\kappa\mu} < V_{\kappa.} V_{.\mu}$ καὶ ὄχι ἡ $P'_{\kappa\mu} \neq P_{\kappa.} P_{.\mu}$.

3) Ἴδε σχ. Neyman ὡς ἀν. σελ. 334. Σημειωτέον ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς διαζευκτικῆς ὑποθέσεως $P'_{\kappa\mu} \neq P_{\kappa.} P_{\mu.}$, ναὶ μὲν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ ἕνα ὁμοιομόρφως πλέον ἰσχυρὸν τέστ, ὅμως ἐπιτυγχάνεται ἐν προκειμένῳ ἕνα ἀμερόληπτον τὲστ (Unbiased test), εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις τῆς ἰσχύος τοῦ τὲστ (power function) ἔχει ἐλαχίστην τιμὴν ὅταν ἡ πρὸς ἐπαλήθευσιν ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής (Mood: Theory of statistics, σελ. 252 - 255).

Δι' ἓν ἕκαστον σημεῖον τοῦ συγκεκριμένου τούτου τμήματος τοῦ χώρου τοῦ δείγματος εἰς τὸ ὁποῖον εὑρισκόμεθα, ἐκτιμῶμεν τὴν σχέσιν :

$$L(\varepsilon) = \frac{PR\,(\varepsilon \mid V_{\kappa.},\, V_{.\mu},\, H_0)}{PR\,(\varepsilon \mid V_{\kappa.},\, V_{.\mu},\, H_1)}\ .$$

Εἰς τὴν περιοχὴν ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως (critical region) εἰσέρχεται κατὰ προτεραιότητα τὸ σημεῖον ἐκεῖνο ε_1 διὰ τὸ ὁποῖον $L(\varepsilon_1)$ εἶναι μικροτέρα ὅλων τῶν ὑπολοίπων σημείων τοῦ δεδομένου τμήματος τοῦ χώρου. Ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων ἐκ τῶν ὁποίων θὰ ἀποτελεσθῇ ἡ περιοχὴ ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως, δέον νὰ εἶναι ἐπαρκής, ὥστε ἀθροιζομένων τῶν πιθανοτήτων, ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν H_0, τῶν σημείων τούτων νὰ ἔχωμεν $\sum_{\lambda=1,2,..} PR\,(\varepsilon_\lambda \mid H_0) = \alpha$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τοῦτο νὰ προσεγγίζῃ ἐκ τῶν κάτω τὸ μέγεθος ἐκεῖνο τῆς πιθανότητος, τὸ ὁποῖον ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἔχῃ συνολικῶς ἡ ζώνη ἀπορρίψεως, εἰς ἣν περίπτωσιν ἡ ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής.

Ἔστω ὅτι ὅλοι οἱ δυνατοὶ συνδυασμοὶ τιμῶν T, τὰς ὁποίας δύνανται νὰ λάβουν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος, συμβιβαζόμεναι πρὸς τὸ συνολικὸν μέγεθος τοῦ πίνακος, εἶναι $T = T_1, T_2, \ldots, T_\Gamma$. Δεδομένης τῆς περιπτώσεως $T = T_\gamma$, $\gamma = 1, 2, \ldots, \Gamma$, ἕκαστον σημεῖον ε ἐντὸς τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος τοῦ χώρου ἔχει, ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν, πιθανότητα $PR\,(\varepsilon \mid T_\gamma, H_0)$.

Προσδιοριζομένης τῆς περιοχῆς ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως ἐντὸς τοῦ τμήματος τοῦ χώρου T_γ ὡς C_γ, ἡ πιθανότης τοῦ σημείου τούτου ε νὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς C_γ εἶναι

$$PR\,(\varepsilon \in C_\gamma \mid T_\gamma,\, H) = \frac{PR\,(\varepsilon \in C_\gamma)}{PR\,(T = T_\gamma)} = \alpha \quad \text{ἢ} \quad PR\,(\varepsilon \in C_\gamma) = \alpha PR\,(T = T_\gamma)$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν ἕνωσιν (union) ὅλων τῶν ἐν λόγῳ περιοχῶν ἀπορρίψεως, ἤτοι δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ $\gamma = 1, \ldots, \Gamma$, ἔχομεν :

$$\alpha PR\,(T = T_1) + \alpha PR\,(T = T_2) + \ldots + \alpha PR\,(T = T_\Gamma) =$$
$$= \alpha\,[\,PR\,(T = T_1) + PR\,(T = T_2) + \ldots + PR\,(T = T_\Gamma)\,] = \alpha$$

διότι τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων ὅλων τῶν δυνατῶν τιμῶν τοῦ T εἶναι προφανῶς ἴσον πρὸς τὴν μονάδα.

Συνεπῶς ἡ ἕνωσις ὅλων τῶν ἐπὶ μέρους ζωνῶν ἀπορρίψεως (τῶν ἐντὸς ἑκάστου τμήματος χώρου) μὲ πιθανότητα ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως ὑπὸ ἑκάστης τούτων ἴσην πρὸς α, ὅταν ἡ ὑπόθεσις εἶναι ἀληθής, δίδει μίαν (συνολικὴν) ζώνην ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως, ὅταν αὕτη εἶναι ἀληθής, ἐπίσης ἴσην πρὸς α, ταυτοχρόνως δι' ὅλας τὰς δυνατὰς τιμὰς τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος (ἤτοι τῶν «ἐπαρκῶν στατιστικῶν»).

9. Θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ ἀνωτέρω τὲστ εἰς τὴν μερικὴν περίπτωσιν τῶν δύο χαρακτηριστικῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει δύο κατηγορίας ἤτοι $K=M=2$.

Ὑποτιθεμένου ὅτι μόνον τὸ συνολικὸν μέγεθος τοῦ δείγματος εἶναι καθωρισμένον ἐκ τῶν προτέρων, αἱ παρατηρήσεις προέρχονται ἐκ πολυωνυμικῆς κατανομῆς μὲ 4 δυνατότητας.

Ἡ ἤδη ἐκτιμηθεῖσα πιθανότης τοῦ δείγματος, δεδομένης τῆς τιμῆς τῶν ἐνοχλητικῶν παραμέτρων (ἤτοι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ πίνακος) ἰσοῦται ἐν προκειμένῳ πρός :

$$\text{Πιθανότης}\,(N_{11}=V_{11},\ N_{12}=V_{12},\ N_{21}=V_{21},\ N_{22}=V_{22}\mid N_{1.}=V_{1.},\ N_{2.}=V_{2.},$$

$$N_{.1}=V_{.1},\ N_{.2}=V_{.2},\ H)=\frac{\prod\limits_{\kappa=1}^{2}V_{\kappa.}!\ \prod\limits_{\mu=1}^{2}V_{.\mu}!}{V!\prod\limits_{\kappa=1}^{2}\prod\limits_{\mu=1}^{2}V_{\kappa\mu}!}=\frac{\binom{V_{11}}{V_{.1}}\binom{V_{12}}{V_{.2}}}{\binom{V_{1.}}{V}},$$

ἡ ὁποία εἶναι ὑπεργεωμετρικὴ κατανομὴ μὲ πληθυσμὸν V, μὲ δύο διακεκριμένας ὁμάδας ἐντὸς τοῦ πληθυσμοῦ $V_{.1}$ καὶ $V_{.2}$, μὲ μέγεθος δείγματος $V_{1.}$ καὶ μὲ ἀριθμὸν στοιχείων ἐκ τῆς πρώτης ἐκ τῶν ὡς προηγουμένως ὁμάδων ἐντὸς τοῦ δείγματος V_{11}.

Σημειωτέον ὅτι ἡ πιθανότης ὁλοκλήρου τοῦ δείγματος, συνισταμένου ἐκ 4 σημείων, μεταπίπτει εἰς τὴν παροῦσαν (2×2) περίπτωσιν, εἰς τὴν πιθανότητα τοῦ ἑνὸς μόνον σημείου ἐξ αὐτῶν. Τοῦτο διότι δεδομένων τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων ($V_{1.}$, $V_{2.}$, $V_{.1}$, $V_{.2}$) ἅπαξ καὶ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν σημείων – ἔστω τοῦ V_{11} – ἡ τιμὴ τῶν λοιπῶν σημείων προκύπτει ἀναγκαίως ὡς ἀκολούθως :

$$V_{12}=V_{1.}-V_{11},\quad V_{21}=V_{.1}-V_{11},\quad V_{22}=V_{.2}-V_{12}=V_{2.}-V_{21}$$

Ἡ περιοχὴ ἀπορρίψεως διαμορφώνεται ὡς ἑξῆς :

$$L(V_{11})=\frac{PR\,(V_{11}\mid V_{1.},V_{2.},V_{.1},V_{.2},H_0)}{PR\,(V_{11}\mid V_{1.},V_{2.},V_{.1},V_{.2},H_1)}=\frac{\dfrac{PR\,(V_{11}\mid H_0)}{PR\,(V_{1.},V_{2.},V_{.1},V_{.2}\mid H_0)}}{\dfrac{PR\,(V_{11}\mid H_1)}{PR\,(V_{1.},V_{2.},V_{.1},V_{.2}\mid H_1)}}=$$

$$=\frac{PR\,(V_{11}\mid H_0)}{PR\,(V_{11}\mid H_1)}=\frac{\dfrac{V!}{V_{11}!\,V_{12}!\,V_{21}!\,V_{22}!}\,P_{1.}^{V_{1.}}\,P_{2.}^{V_{2.}}\,P_{.1}^{V_{.1}}\,P_{.2}^{V_{.2}}}{\dfrac{V!}{V_{11}!\,V_{12}!\,V_{21}!\,V_{22}!}\,P_{11}^{\prime\,V_{11}}\,P_{12}^{\prime\,V_{12}}\,P_{21}^{\prime\,V_{21}}\,P_{22}^{\prime\,V_{22}}}.$$

Ἐὰν ἡ διαζευκτικὴ ὑπόθεσις H_1 προσδιορισθῇ ὡς $P'_{11}=\pi$, τότε προκύπτει ὅτι $P'_{12}=P'_{1.}-\pi$, $P'_{21}=P'_{.1}-\pi$, $P'_{22}=1-P'_{1.}-P'_{.1}+\pi$, γεγονὸς τὸ ὁποῖον καθιστᾷ ἐμφανὲς τὸ ὅτι ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ κατὰ τὴν διαζευκτικὴν ὑπόθεσιν ἡ πιθανότης τῆς παρατηρήσεως εἰς ἓν μόνον κελλίον τοῦ πίνακος (ἡ P'_{11}, λ.χ.).

Καὶ
$$L(V_{11}) = \frac{P_{1.}^{V_{1.}}\ P_{2.}^{V_{2.}}\ P_{.1}^{V_{.1}}\ P_{.2}^{V_{.2}}}{\pi^{V_{11}} (P'_{1.} - \pi)^{V_{12}} (P'_{.1} - \pi)^{V_{21}} (1 - P'_{1.} - P'_{.1} + \pi)^{V_{22}}}.$$

Κατὰ τὰ ἤδη γνωστά, εἰς τὴν ζώνην ἀπορρίψεως θὰ εἰσέλθουν τὰ σημεῖα μὲ τὴν μικροτέραν τιμὴν τοῦ $L(V_{11})$.

$$R(V_{11}, V_{11}+1) = \frac{L(V_{11})}{L(V_{11}+1)} = \frac{\pi^{V_{11}+1} (P'_{1.} - \pi)^{V_{1.}-V_{11}-1} (P'_{.1}-\pi)^{V_{.1}-V_{11}-1}}{\pi^{V_{11}} (P'_{1.} - \pi)^{V_{1.}-V_{11}} (P'_{.1} - \pi)^{V_{.1}-V_{11}}}$$

$$\frac{(1 - P'_{1.} - P'_{.1} + \pi)^{V-V_{1.}-V_{.1}+V_{11}+1}}{(1 - P'_{1.} - P'_{.1} + \pi)^{V-V_{1.}-V_{.1}+V_{11}}} = \frac{\pi (1 - P'_{1.} - P_{.1} + \pi)}{(P'_{1} - \pi)(P'_{.1} - \pi)}$$

Ὅταν $R(V_{11}, V_{11}+1) > 1$, ἤτοι ὅταν $\pi + \pi^2 - \pi P'_{1.} - \pi P'_{.1} > P'_{1.} P'_{.1} - \pi P'_{1.} - \pi P'_{.1} + \pi^2$

ἢ $\pi > P'_{1.} P'_{.1}$, τοῦτο συνεπάγεται ὅτι $L(V_{11}) > L(V_{11}+1)$ καὶ τότε τὸ σημεῖον $(V_{11}+1)$ εἰσέρχεται εἰς τὴν ζώνην ἀπορρίψεως κατὰ προτεραιότητα ἔναντι τοῦ V_{11}.

Ἀντιθέτως ὅταν $R(V_{11}, V_{11}+1) < 1$, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ εἰς $\pi < P'_{1.} P'_{.1}$, τὸ σημεῖον V_{11} προηγεῖται τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου του $(V_{11}+1)$ εἰς τὴν ζώνην ἀπορρίψεως (C.R.).

Συνεπῶς ἐφ' ὅσον ἡ διαζευκτικὴ ὑπόθεσις εἶναι μὲν σύνθετος ἀλλὰ μονόπλευρος καὶ δὴ πρὸς τὴν πλευρὰν τῶν τιμῶν τῆς πιθανότητος π μεγαλυτέρων τῆς πιθανότητος τοῦ σημείου V_{11} βάσει τῆς ὑποθέσεως, ἤτοι ἐὰν $H_1 : \pi > P'_{1.} P'_{.1}$ (θετικὴ ἐξάρτησις) τότε ἡ ζώνη ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως μὴ ἐξαρτήσεως συνίσταται ἐκ τῶν μεγαλυτέρων δυνατῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς V_{11}.

Ἐὰν ἀντιθέτως ἡ διαζευκτικὴ ὑπόθεσις εἶναι τῆς μορφῆς $H_1 : \pi < P'_{1.} P'_{.1}$ (σύνθετος, ἀρνητικῆς ἐξαρτήσεως) τότε ἡ ζώνη ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως μὴ ἐξαρτήσεως συνίσταται ἐκ τῶν μικροτέρων δυνατῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς V_{11}.

10. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ πίνακος τὰ μερικὰ ἀθροίσματα εἶναι καθωρισμένα πρὸ τῆς δειγματοληψίας (ἔστω τὰ $V_{1.}$ καὶ $V_{2.}$), αἱ δύο σειραὶ τοῦ πίνακος ἀντιστοιχοῦν πλέον εἰς δύο δυωνυμικὰς κατανομὰς (Binomials).

	B_1	B_2	
A_1	V_{11} $H_0 : P$ $H_1 : P$	V_{12} $H_0 : 1-P$ $H_1 : 1-P$	$V_{1\cdot}$
A_2	V_{21} $H_0 : P$ $H_1 : \Theta P$	V_{22} $H_0 : 1-P$ $H_1 : 1-\Theta P$	$V_{2\cdot}$

Ἡ ὑπόθεσις H_0 μὴ ἐξαρτήσεως τῶν δύο χαρακτηριστικῶν ἐκφράζεται ἐν προκειμένῳ στατιστικῶς ὡς ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ δύο αὐταὶ δυωνυμικαὶ κατανομαὶ ἔχουν ἀκριβῶς τὴν ἰδίαν παράμετρον, ἤτοι $\Theta=1$.

Μία ἐπαρκὴς στατιστικὴ διὰ μὲν τὴν πιθανότητα P εἶναι $V_{\cdot 1}$, διὰ δὲ τὴν (1–P) εἶναι $V-V_{\cdot 1}=V_{\cdot 2}$, ἤτοι τὰ μερικὰ σύνολα τῶν στηλῶν τοῦ πίνακος.

Ἡ κατὰ συνθήκην (conditional) πιθανότης τῶν παρατηρήσεων τοῦ δείγματος, δεδομένης τῆς ἐπαρκοῦς στατιστικῆς διὰ τὴν ἐνοχλητικὴν παράμετρον, ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν $H_0 : \Theta = 1$ εἶναι

$$\text{Πιθανότης}\quad (N_{11}=V_{11},\ N_{12}=V_{12},\ N_{21}=V_{21},\ N_{22}=V_{22} \mid V_{\cdot 1},\ V_{\cdot 2},\ H_0) =$$

$$=\frac{\text{Πιθανότης}\ (V_{11}, V_{12}, V_{21}, V_{22} \mid H_0)}{\text{Πιθανότης}\ (V_{\cdot 1}, V_{\cdot 2} \mid H_0)} = \frac{\left(\dfrac{V_{1\cdot}!}{V_{11}!\,V_{12}!} P_{11}^{V_{11}} P_{12}^{V_{12}}\right)\left(\dfrac{V_{2\cdot}!}{V_{21}!\,V_{22}!} P_{21}^{V_{21}} P_{22}^{V_{22}}\right)}{\dfrac{V!}{V_{\cdot 1}!\,V_{\cdot 2}!} P^{V_{\cdot 1}} (1-P)^{V_{\cdot 2}}} \quad (^1) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{\kappa=1}^{2} V_{\kappa\cdot}!\ \prod\limits_{\mu=1}^{2} V_{\cdot\mu}!}{V!\ \prod\limits_{\kappa=1}^{2}\ \prod\limits_{\mu=1}^{2} V_{\kappa\mu}!} = \frac{\binom{V_{11}}{V_{\cdot 1}}\binom{V_{12}}{V_{\cdot 2}}}{\binom{V_{1\cdot}}{V}},$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδία ὑπεργεωμετρικὴ κατανομὴ τῆς περιπτώσεως δειγματοληψίας μὲ μόνον τὸ συνολικὸν μέγεθος τοῦ δείγματος προκαθωρισμένον. Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος Neyman - Pearson ἔχει ὡς ἀκολούθως:

$$L(V_{11}) = \frac{PR\,(V_{11} \mid V_{1\cdot}, V_{2\cdot}, H_0 : \Theta=1)}{PR\,(V_{11} \mid V_{1\cdot}, V_{2\cdot}, H_1 : \Theta' \neq 1)} =$$

$$= \frac{\left[\binom{V_{11}}{V_{1\cdot}} P^{V_{11}} (1-P)^{V_{1\cdot}-V_{11}}\right]\left[\binom{V_{21}}{V_{2\cdot}} P^{V_{21}} (1-P)^{V_{2\cdot}-V_{21}}\right]}{\left[\binom{V_{11}}{V_{1\cdot}} P'^{V_{11}} (1-P')^{V_{1\cdot}-V_{11}}\right]\left[\binom{V_{21}}{V_{2\cdot}} (\Theta'P')^{V_{21}} (1-\Theta'P')^{V_{2\cdot}-V_{21}}\right]}$$

1) Ὁ ἐν λόγῳ παρονομαστὴς προκύπτει ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος σελ. (51), ὑποσ. 2 τοῦ παρόντος.

ὅπου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι τὸ γινόμενον δύο δυωνυμικῶν κατανομῶν μὲ κοινὴν τὴν παράμετρον P, ἐνῶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι τὸ γινόμενον δύο δυωνυμικῶν κατανομῶν μὲ διάφορον τὴν ἐν λόγῳ παράμετρον (P' καὶ Θ'P' ἀντιστοίχως).

Τέλος ἔχομεν $$L(V_{11}) = \frac{P^{V_{11}} (1-P)^{V_{1\cdot}-V_{11}} P^{V_{21}} (1-P)^{V_{2\cdot}-V_{21}}}{P'^{V_{11}} (1-P')^{V_{1\cdot}-V_{11}} (\Theta' P')^{V_{21}} (1-\Theta' P')^{V_{2\cdot}-V_{21}}}$$

καὶ $$R_{(V_{11},\ V_{11}+1)} = \frac{L(V_{11})}{L(V_{11}+1)} = \frac{1-\Theta' P'}{\Theta' (1-P')}\,.$$

Ὅταν $R_{(V_{11},\ V_{11}+1)} > 1$, τοῦτο συνεπάγεται $H_1 : \Theta' < 1$, ἤτοι ἡ διαζευκτικὴ ὑπόθεσις H_1 ἀναφέρεται εἰς θετικὴν ἐξάρτησιν, καὶ ἡ ζώνη ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως H_0 μὴ ἐξαρτήσεως συνίσταται ἐκ τῶν μεγαλυτέρων δυνατῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς V_{11}. Ὅταν $R_{(V_{11},\ V_{11}+1)} < 1$, ἔχομεν $H_1 : \Theta' > 1$, ἡ διαζευκτικὴ ὑπόθεσις ἀναφέρεται εἰς ἀρνητικὴν ἐξάρτησιν καὶ ἡ ζώνη ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως H_0 συνίσταται ἐκ τῶν μικροτέρων δυνατῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς V_{11}, ἀκριβῶς ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν ὅλων τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων ἐλευθέρων κατὰ τὴν δειγματοληψίαν.

11. Κατωτέρω προβαίνομεν εἰς ἐφαρμογὴν τοῦ κατὰ τὰ ἀνωτέρω τέστ, εἰς τὴν περίπτωσιν πίνακος 2×2.

Ἔστω ὅτι $V = 15$. Λαμβάνομεν ὅλας τὰς δυνατὰς τιμὰς τῶν $V_{1\cdot}$, $V_{2\cdot}$, $V_{\cdot 1}$, $V_{\cdot 2}$, συνεπεῖς πρὸς $V_{1\cdot} + V_{2\cdot} = V_{\cdot 1} + V_{\cdot 2} = 15$

$V_{1\cdot}$	$V_{2\cdot}$	$V=15$	$V_{\cdot 1}$	$V_{\cdot 2}$
0	15	15	0	15
0	15	15	1	14
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
0	15	15	15	0
1	14	15	0	15
1	14	15	1	14
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
1	14	15	15	0
....	...	...	...	....
....	...	...	...	....
....	...	...	...	....
15	0	15	0	15
15	0	15	1	14
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
15	0	15	15	0

Ἐν συνεχείᾳ δι' ἑκάστην ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁμάδων, ἔστω διὰ $V_{1.} = 9$, $V_{2.} = 6$, $V_{.1} = 10$, $V_{.2} = 5$, λαμβάνομεν ὅλα τὰ δυνατὰ σημεῖα παρατηρήσεων, συνεπῆ πρὸς τὰ ἐν λόγῳ μερικὰ ἀθροίσματα :

V_{11}	V_{12}	V_{21}	V_{22}
9	0	1	5
8	1	2	4
7	2	3	3
6	3	4	2
5	4	5	1

Ἀρκεῖ βεβαίως, δεδομένου τοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος $V = 15.$, νὰ προσδιορίσωμεν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα $V_{1.}$ καὶ $V_{.1}$. Μεγίστη δυνατὴ τιμὴ τοῦ V_{11} εἶναι, σημειωτέον, ἡ ἐλαχίστη μεταξὺ τῶν $V_{1.}$ καὶ $V_{.1}$.

Ἡ πιθανότης ἑνὸς σημείου, ὡς γνωστόν, εἶναι

$$PR\,(V_{11} \mid V_{1.},\, V_{2.},\, V_{.1},\, V_{.2},\, H_0) = \frac{\binom{V_{1.}}{V_{11}}\binom{V_{12}}{V_{.2}}}{\binom{V_{.1}}{V}},$$

ἐξ ὑπεργεωμετρικῆς κατανομῆς. Ἡ ἐκτίμησις τῆς πιθανότητος αὐτῆς, ὡς καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα θὰ εἰσέλθουν εἰς τὴν περιοχὴν ἀπορρίψεως, δύναται νὰ γίνῃ εἴτε δι' ἀπ' εὐθείας ἀριθμητικῶν πράξεων μὲ τὴν βοήθειαν, ἐνδεχομένως, πινάκων παραγωντικῶν (factorials) ἢ διωνυμικῶν συντελεστῶν, εἴτε διὰ χρησιμοποιήσεως τῶν εἰδικῶν πινάκων ὑπεργεωμετρικῆς κατανομῆς, οἱ ὁποῖοι κατηρτίσθησαν ὑπὸ τοῦ Finney [1] (διὰ $V_{1.}, V_{2.} \leqslant 15$) καὶ τοῦ Latscha [2] (διὰ $31 \leqslant V \leqslant 40$).

Ἔστω ὅτι αἱ παρατηρήσεις εἶναι

$V_{11} = 7$	$V_{12} = 2$	$V_{1.} = 9$
$V_{21} = 3$	$V_{22} = 3$	$V_{2.} = 6$
$V_{.1} = 10$	$V_{.2} = 5$	$V = 15$

Ἔστω ὅτι ἡ διαζευκτικὴ ὑπόθεσις εἶναι τῆς μορφῆς $H_1 : P'_{11} > P'_{1.}\, P'_{.1}$.
Ἡ ὑπόθεσις μὴ ἐξαρτήσεως H_0 ἀπορρίπτεται ἐὰν ἡ παρατηρουμένη τιμὴ τοῦ $V_{11}(=7)$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς τιμῆς $V_{11}(\alpha)$ ὅπου $V_{11}(\alpha)$ εἶναι τοιοῦτον ὥστε :

$$\text{Πιθανότης}\ (N_{11} \geqslant V_{11}(\alpha) \mid V_{1.},\, V_{2.},\, V_{.1},\, V_{.2},\, H_0) \leqslant \alpha.$$

1) Εἰς Hartley - Pearson «Tables for Statisticians».
2) Εἰς Biometrika, vol. 40, parts 1 and 2, June 1953.

Εἰς τοὺς πίνακας Finney εὑρίσκομεν ὅτι V_{11} $(\alpha = 0{,}05) = 8$. Συνεπῶς εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν ὅπου $V_{11} = 7 < 8$, ἡ ὑπόθεσις μὴ ἐξαρτήσεως H_0 δὲν ἀπορρίπτεται ἐντὸς τοῦ συγκεκριμένου τούτου τμήματος τοῦ χώρου τοῦ δείγματος ὅπου $V_{1.} = 9$, $V_{2.} = 6$, $V_{.1} = 10$, $V_{.2} = 5$.

Διὰ ἐκτιμήσεις εἰς περίπτωσιν πίνακος 2×2 καὶ ἐφ' ὅσον τὸ δεῖγμα εἶναι μεγάλον, εἶναι ἐπίσης δυνατὸν νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀσυμπτωτικὴν προσέγγισιν τῆς ὑπεργεωμετρικῆς πρὸς τὴν κανονικὴν κατανομήν [1]. Ἡ ὑπεργεωμετρικὴ μεταβλητὴ N_{11} τείνει, ὅταν $N \to \infty$, πρὸς κανονικὴν μεταβλητὴν

μὲ μέσον $$E(N_{11}) = VP_{11} = \frac{V_{1.}\, V_{.1}}{V}$$

καὶ διακύμανσιν $$\sigma^2_{V_{11}} = \frac{V_{1.}\, V_{2.}\, V_{.1}\, V_{.2}}{V^2 (V-1)}\,. \quad [2]$$

12. Ὁ S. S. Wilks [3] ἀπέδειξεν ὅτι, ὑπὸ ὡρισμένας γενικὰς συνθήκας, ἡ μεταβλητὴ $(-2 \log \lambda)$, ὅπου λ ὁ γνωστὸς λόγος $\dfrac{L(\overline{\omega})}{L(\overline{\Omega})}$, τείνει, ἀσυμπτωτικῶς, εἰς κατανομὴν χ^2. Ἤτοι

Πιθανότης $\left(-2 \log \lambda > \chi^2_{F,\alpha} \mid H\right) \xrightarrow[\eta \to \infty]{} \alpha$, ὅπου οἱ βαθμοὶ ἐλευθερίας F ἰσοῦνται πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνεξαρτήτων παραμέτρων εἰς τὸ γενικὸν ὑπόδειγμα Ω, μεῖον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνεξαρτήτων παραμέτρων ὑπὸ τὴν ἐλεγχομένην ὑπόθεσιν. Οὕτως, εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν δύο παραγόντων, μὲ ἐπίπεδα Κ καὶ Λ ἀντιστοίχως, ἔχομεν

$$F = (K\Lambda - 1) - (K + \Lambda - 2) = (K-1)(\Lambda - 1).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν 3 παραγόντων μὲ ἐπίπεδα ἀντιστοίχως Κ, Λ καὶ Μ, ἔχομεν, ἐφ' ὅσον ἐλέγχεται ἡ ὑπόθεσις $H0 : P_{\kappa\lambda\mu} = P_{\kappa..}\, P_{.\lambda\mu}$

$$F = [K\Lambda M - 1] - [(K-1) + (\Lambda M - 1) = (K-1)(\Lambda M - 1)\,.$$

Ἡ ὑπόθεσις ἀπορρίπτεται ἐφ' ὅσον $(-2 \log) > \chi^2_{F,\alpha}$, ὅπου α ἡ ἐπιθυμητὴ πιθανότης ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως, ὅταν αὕτη εἶναι ἀληθής.

---

1) Ἡ προσέγγισις αὕτη ἐπιτυγχάνεται μέσῳ τῆς προσεγγίσεως τῆς ὑπεργεωμετρικῆς πρὸς τὴν διωνυμικὴν καὶ τῆς τελευταίας ταύτης πρὸς τὴν κανονικὴν κατανομήν. Ἡ προσέγγισις αὕτη συνεπῶς δὲν ἰσχύει ὅταν ὁ πίναξ εἶναι μεγέθους μεγαλυτέρου τοῦ 2×2 (πολυωνυμικὴ ἀντὶ διωνυμικῆς). Ἴδε σχ. Feller «Probability theory and its applications», σελ. 180 καὶ Neyman «Probability and statistics», σελ. 211 - 2.

2) Feller, ἐνθ. ἀν. σελ. 219.

3) Εἰς «The large sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses».

13. Ἐὰν αἱ παρατηρήσεις ὑποτεθοῦν ὡς προερχόμεναι ὄχι πλέον ἐκ πολυωνυμικῆς κατανομῆς, ἀλλὰ ἐξ ἄλλης τινὸς μορφῆς, δὲν προκύπτει προφανῶς τὸ ἴδιον κριτήριον τέστ μὲ ὑπεργεωμετρικὴν κατανομήν, ὡς ἀνωτέρω.

Οὕτως, εἰς ἣν περίπτωσιν αἱ παρατηρήσεις προέρχονται ἐκ κατανομῆς Poisson (1) καταλήγομεν εἰς κριτήριον, τὸ ὁποῖον ἔχει πολυωνυμικὴν κατανομήν, ἐνῷ εἰς διαφόρους ἄλλας μορφὰς κατανομῆς —ὡς γεωμετρικῆς, ἀρνητικῆς ἐυωνυμικῆς (negative binomial) ἢ ὑπεργεωμετρικῆς— ἡ ὡς προηγουμένως ἀναπτυχθεῖσα μέθοδος ἐπαληθεύσεως τῆς ὑποθέσεως (the similar test) ὁδηγεῖ εἰς περιπεπλεγμένα ἀποτελέσματα—κριτήρια, ὁ προσδιορισμὸς τῆς κατανομῆς τῶν ὁποίων εἶναι δυσχερής, ἐὰν ὄχι ἀδύνατος.

Πλὴν τοῦ ἤδη ἀναπτυχθέντος ἀσυμπτωτικοῦ τέστ τοῦ Wilks, εἶναι εἰς πᾶσαν περίπτωσιν δυνατὸν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ γνωστὸν X^2 τέστ τοῦ K. Pearson (2), τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι βεβαίως ἕνα ἀκριβὲς τέστ (exact test), ὡς τὸ ἀναπτυχθὲν προηγουμένως (the similar test) ἀλλὰ ἕνα τέστ στηριζόμενον εἰς κριτήριον θεμελιούμενον ἐπὶ διαισθήσεως (an intuitive test), τὸ ὁποῖον, ὅμως, κατὰ τὰ γνωστά, τείνει ἀσυμπτωτικῶς πρὸς τὸ χ^2 τέστ.

Δέον ἐπίσης νὰ σημειωθῇ ὅτι σχετικὰ προσφάτως ἔχουν ἀναπτυχθῆ διάφοροι μέθοδοι ἐπαληθεύσεως ὑποθέσεων, αἱ μὴ παραμετρικαὶ (non-parametric ἢ distribution-free tests), αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦν ἓν ἐλάχιστον προϋποθέσεων σχετικῶς μὲ τὰς παρατηρήσεις. Τοιαῦται μέθοδοι εἶναι τοῦ Fisher ἡ μέθοδος «ἀκριβείας» (exact method) καὶ ἡ μέθοδος βασιζομένη εἰς τυχαῖαν ταξινόμησιν (method of randomization), τὸ τέστ τοῦ Wilcoxon, τὸ τέστ τῶν Mann - Whitmey κλπ.

Τέλος, δέον νὰ σημειωθῇ τὸ γεγονὸς ὅτι εἰς οὐδεμίαν περίπτωσιν ἐξετιμήθη ἡ συνάρτησις τῆς ἰσχύος τοῦ τέστ (Power Function) ὅταν ὑποτεθῇ ὡς ἀληθὴς μία ἁπλῆ διαζευκτικὴ ὑπόθεσις, βασικῶς ἐκ λόγων ἀποφυγῆς περαιτέρω ἐπεκτάσεως τῆς παρούσης ἀναλύσεως. Συνεπείᾳ ὅμως τῆς παραλείψεως ταύτης εἰς ἣν περίπτωσιν καταλήγομεν εἰς ἀπόρριψιν τῆς ὑποθέσεως, δὲν ὁδηγούμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ἀποδοχῆς τῆς ἁπλῆς διαζευκτικῆς αὐτῆς ὑποθέσεως, ἀποδοχὴ ἡ ὁποία θὰ ἦτο αὐθαίρετος ἐν προκειμένῳ. Σημειοῦται ὅτι, εἰς τὴν ἀναπτυχθεῖσαν περίπτωσιν τῆς πολυωνυμικῆς κατανομῆς τῶν παρατηρήσεων, μόνον ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν χαρακτηριστικῶν προκύπτει κριτήριον ἐπαληθεύσεώς της μὲ ὑπεργεωμετρικὴν κατανομήν.

---

1) Παρατηρήσεις κατανεμόμεναι εἰς τὸν χρόνον ἢ τὸν χῶρον θεωροῦνται ὅτι ἀκολουθοῦν κατανομὴν poisson. Ἡ πιθανότης ἐμφανίσεως Κ παρατηρήσεων εἰς τὴν μονάδα τοῦ χώρου ἢ τοῦ χρόνου εἶναι: $\frac{e^{-\lambda}\lambda^{K}}{K!}$, ὅπου λ ἡ παράμετρος τῆς κατανομῆς. Ἴδε σχετικῶς Feller ἔνθ. ἀν. 66.142–164.

2) Ἴδε σχετ. Cramer «Mathematical methods of Statistics», ΚΕΦ. 30.