ΑΠΛΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ ΠΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΝ ΤΗΣ ΙΣΟΝΟΜΙΑΣ ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Τοῦ κ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Ε. ΑΝΤΩΝΕΑ

1. Εἰσαγωγὴ (1)

Κατὰ τὴν μελέτην ποικίλων θεμάτων παρίσταται ἀνάγκη νὰ ἐλεγχθῇ δειγματοληπτικῶς ἐὰν οἱ νόμοι πιθανοτήτων δύο ἀνεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητῶν εἶναι οἱ αὐτοὶ ἤ, ἄλλως, ἐὰν οἱ σχηματιζόμενοι δύο «πληθυσμοὶ» διὰ τῶν δυνατῶν τιμῶν τῆς μιᾶς καὶ τῆς ἄλλης μεταβλητῆς ἔχουν ὁμοίαν κατανομὴν συχνοτήτων. Τὸ πρόβλημα δύναται νὰ τεθῇ κατὰ δύο τρόπους :

Οἱ πληθυσμοὶ ὁρίζονται εἰς ἓν στάδιον τῆς μελέτης καὶ ἀκολουθεῖ ἡ δειγματοληψία καὶ ἡ, μέσῳ ταύτης, σύγκρισις τῶν κατανομῶν των κατὰ συχνότητας.

Διατίθεται ἓν τυχαῖον δεῖγμα, τὸ ὁποῖον στρωματοποιεῖται ἐκ τῶν ὑστέρων καταλλήλως εἰς ὑποδείγματα, κατὰ τρόπον ὥστε νὰ καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐξέτασις τῆς ἐπιδράσεως ὡρισμένου παράγοντος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐλέγχεται κατὰ πόσον εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὅτι τὰ προκύπτοντα ὑποδείγματα προέρχονται ἢ ὄχι ἐκ πληθυσμῶν τῆς ἰδίας κατανομῆς συχνοτήτων, τοῦθ' ὅπερ ὁδηγεῖ εἰς συμπεράσματα περὶ τῆς ἐπιδράσεως τοῦ ἐξεταζομένου παράγοντος.

Ἡ προτεινομένη δοκιμασία (test) δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων, παραλλήλως πρὸς ἄλλας (2) δοκιμασίας, ἔχει δὲ τὸ προσὸν ὅτι εἶναι ἁπλοῦν καὶ ὅτι δύναται νὰ στηριχθῇ ἐπὶ τῶν στοιχείων μικροῦ σχετικῶς δείγματος, ἄνευ ἑτέρας ἐπ' αὐτοῦ στατιστικῆς ἐπεξεργασίας. Ἡ δοκιμασία εἶναι τόσον μᾶλλον ἰσχυρὰ ὅσον οἱ ἐλεγχόμενοι νόμοι πιθανοτήτων, εἴτε τῆς αὐτῆς οἰκογενείας (διαφέροντες μόνον ὡς πρὸς μίαν ἢ περισσοτέρους παραμέτρους), εἴτε διαφόρου οἰκογενείας, ἀπομακρύνονται περισσότερον ἀλλήλων.

---

1) Εὐχαριστίας ὀφείλω εἰς τὸν Καθηγητὴν τῆς Ἀνωτάτης Γεωπονικῆς Σχολῆς κ. Δ. Παπαμιχαὴλ διὰ τὰς λίαν χρησίμους παρατηρήσεις του.

2) Βλ. Κ. Δελῆ : Μελέτη τῆς συμπεριφορᾶς τῶν καταναλωτῶν—Ἐφαρμογὴ τῆς ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως. Ἐπιθεώρησις Οἰκον. καὶ Πολ. Ἐπιστημῶν, ἔτος 18ον, τεῦχος 3-4, 1963.

2. Νόμος πιθανοτήτων τῶν ἀκραίων τιμῶν ἑνὸς διατεταγμένου[1] δείγματος.

Ὡς γνωστόν, καλεῖται[2] *δεῖγμα μεγέθους* ν ἓν σύνολον ν ἀνεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητῶν[3]

$$X_1, X_2, \ldots, X_\nu$$

αἱ ὁποῖαι ἀκολουθοῦν τὸν αὐτὸν νόμον πιθανοτήτων F. Αἱ ἀνεξάρτητοι καὶ ἰσόνομοι μεταβληταὶ X_i, $i=1,2,\ldots,\nu$, θεωροῦνται προσηρτημέναι εἰς τὰ ἀποτελέσματα ἰσαρίθμων πειραματικῶν δοκιμῶν, γενομένων ὑπὸ σταθερὰς πειραματικὰς συνθήκας, ἐπὶ τῆς μεταβλητῆς X ἀκολουθούσης τὸν νόμον F.

Εἰς τὴν πρᾶξιν ὀνομάζεται συνήθως δεῖγμα τὸ σύνολον

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu$$

τῶν ἰδιαιτέρων τιμῶν τῶν ἀνωτέρω μεταβλητῶν X_i ἢ τὸ σύνολον τῶν ἰδιαιτέρων ὡς ἄνω τιμῶν τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ μεταβλητὴ X κατὰ τὴν διάρκειαν ν δοκιμῶν ἐπ' αὐτῆς, γενομένων ὑπὸ σταθερὰς συνθήκας πειραματισμοῦ.

Ἓν διατεταγμένον δεῖγμα προκύπτει διὰ τῆς θέσεως κατὰ μίαν τάξιν (φθίνουσαν ἢ αὔξουσαν) τῶν τιμῶν X_i, π.χ.:

$$x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_\nu^*,$$

ὅπου x_i^* εἶναι μία ἐκ τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ἀλλὰ ἐν γένει διάφορος τῆς x_i.

Νόμος πιθανοτήτων τῆς ἐλαχίστης τιμῆς X_1^*. Ἔστω $\Theta(x_1^*)$ ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς X_1^*. Ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἡ X_1^* μεγαλυτέρα τῆς x_1^* ἰσοῦται μὲ τὴν πιθανότητα ὥστε ὅλαι αἱ ν τιμαὶ τοῦ δείγματος νὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς x_1^*. Αὕτη, λόγῳ τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν X_i, θὰ ἰσοῦται μὲ $[1-\Phi(x_1^*)]^\nu$, ὅπου διὰ τοῦ Φ παρίσταται ἡ συνάρτησις κατανομῆς τοῦ νόμου F. Οὕτω,

$$\text{Πιθ.}\{X_1^* > x_1^*\} = 1 - \Theta(x_1^*) = [1 - \Phi(x_1^*)]^\nu$$

ἐξ οὗ:

$$\Theta(x_1^*) = 1 - [1 - \Phi(x_1^*)]^\nu \tag{1}$$

Ἡ στοιχειώδης πιθανότης προκύπτει διὰ παραγωγίσεως τῆς (1), δηλαδή:

$$\theta(x_1^*)\,dx_1^* = \nu[1 - \Phi(x_1^*)]^{\nu-1}\,d\Phi(x_1^*) \tag{2}$$

Νόμος πιθανοτήτων τῆς μεγίστης τιμῆς X_ν^*. Ἔστω $\Lambda(x_\nu^*)$ ἡ συνάρ-

---

1) Βλ. Δ. Παπαμιχαὴλ καὶ Γ. Ἀντωνέα: Μελέτη διατεταγμένου δείγματος καὶ νόμος τῆς μεταξὺ δύο τιμῶν του ἀναλογίας τοῦ πληθυσμοῦ. Χρονικὰ τοῦ ἐν Θεσσαλονίκῃ Ἐπιστημονικοῦ-Παιδαγωγικοῦ Συνεδρίου τῶν Ἑλλήνων Μαθηματικῶν (21-24 Μαΐου 1964).

2) Βλ. M. Girault: Calcul des probabilités en vue des applications. Dunod, Paris 1960., σελ. 129.

3) Διὰ τῶν κεφαλαίων γραμμάτων παρίστανται αἱ μεταβληταὶ ποιοτικῶς. Αἱ ἰδιαίτεραι τιμαὶ αὐτῶν παρίστανται διὰ τῶν ἀντιστοίχων μικρῶν γραμμάτων.

τησις κατανομῆς τῆς X_ν^*. Ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἡ X_ν^* μικροτέρα ἢ ἴση τῆς x_ν^*, θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν πιθανότητα νὰ εἶναι ὅλαι αἱ τιμαὶ τοῦ δείγματος μικρότεραι ἢ ἴσαι τῆς x_ν^*. Αὕτη, λόγῳ τῆς ἀνεξαρτησίας τῶν X_i, εἶναι $[\Phi(x_\nu^*)]^\nu$. Οὕτως, ἡ συνάρτησις κατανομῆς τῆς X_ν^* καὶ ἡ πυκνότης αὐτῆς θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\Lambda(x_\nu^*) = [\Phi(x_\nu^*)]^\nu \tag{3}$$

καὶ

$$\lambda(x_i^*) = \nu[\Phi(x_\nu^*)]^{\nu-1} d\,\Phi(x_\nu^*) \tag{4}$$

3. Ἡ θεωρητικὴ βάσις τῆς δοκιμασίας (test)

Θεωροῦμεν τὰς ἀνεξαρτήτους μεταβλητὰς X καὶ Y, ἐπὶ τῶν ὁποίων κάμνομεν 2ν ἀνεξαρτήτους παρατηρήσεις, ἤ, ἄλλως, ἐξ ἑκάστης τῶν ὁποίων λαμβάνομεν ἀνεξάρτητα τυχαῖα δείγματα μεγέθους 2ν μονάδων, ἠριθμημένων κατὰ τὴν τάξιν τοῦ πειράματος. Αἱ μεταβληταὶ X καὶ Y θὰ εἶναι ἐν γένει τῆς ἰδίας φύσεως, π.χ., δαπάνη καταναλώσεως οἱουδήποτε ἀγαθοῦ ὑπὸ τῶν νοικοκυριῶν δύο ὁμάδων κ.λ.π.

Σχηματίζομεν τώρα τὰ ν ζεύγη τῶν τιμῶν ἑκάστου δείγματος :

$$(x_{2i-1}, x_{2i}) \quad \text{καὶ} \quad (y_{2i-1}, y_{2i}), \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu \tag{5}$$

καὶ διατάσσομεν τὰ δύο στοιχεῖα ἑκάστου κατ' αὔξουσαν τάξιν, ἔστω δὲ

$$(x_\rho^*, x_{\rho+1}^*) \quad \text{καὶ} \quad (y_\rho^*, y_{\rho+}^*) \tag{5'}$$

δύο ἀντίστοιχα ἐκ τῶν διατεταγμένων τούτων ζευγῶν. Τὰ ὁριζόμενα ὑπ' αὐτῶν δύο διαστήματα δύνανται νὰ εἶναι ξένα (ἡ τομή των νὰ εἶναι κενή) ἢ μὴ ξένα (ἡ τομή των νὰ περιλαμβάνῃ ἓν τοὐλάχιστον κοινὸν σημεῖον).

Ἔστω k τὸ πλῆθος τῶν ἀντιστοίχων ξένων ζευγῶν διαστημάτων ἐκ τῶν ν. Εἶναι εὔλογον νὰ ὑποτεθῇ ὅτι, ἐὰν αἱ μεταβληταὶ X καὶ Y εἶναι ἰσόνομοι, ὁ k ὀφείλει νὰ εἶναι μικρὸς ἀριθμός. Ἀντιθέτως, ὁ k θὰ εἶναι μεγάλος, μὴ δικαιολογούμενος ἐκ τῶν σφαλμάτων δειγματοληψίας, ἐὰν οἱ νόμοι τῶν X καὶ Y εἶναι διάφοροι. Θὰ ἐξετασθῇ κατωτέρω ἐὰν πράγματι ὁ k δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς κριτήριον τῆς περὶ ἧς πρόκειται ἰσονομίας.

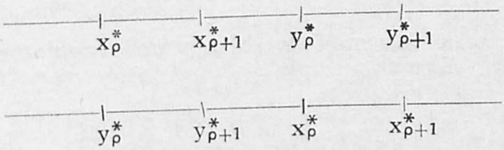
Καλοῦμεν P τὴν πιθανότητα ὥστε τὰ διαστήματα ἑνὸς ἐκ τῶν ν ζευγῶν (βλ. (5')) νὰ εἶναι ξένα. Τὰ διαστήματα ταῦτα θὰ εἶναι ξένα ἐάν :

$$y_\rho^* > x_{\rho+1}^* \quad \text{ἢ} \quad x_\rho^* > y_{\rho+1}^*$$

Ἐὰν αἱ μεταβληταὶ X καὶ Y εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ διάστημα [1] $(-\infty, +\infty)$, ἡ πιθανότης P θὰ εἶναι :

---

1) Ἡ πιθανότης διὰ τὰς τιμὰς ἑκάστης μεταβλητῆς τὰς εὑρισκομένας ἐκτὸς τοῦ πεδίου μεταβολῆς της καὶ ἐντὸς τοῦ διαστήματος $(-\infty, +\infty)$ εἶναι μηδενική.



Σχ. 1

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\iota\theta. \{ x_{\rho+1}^* < X_{\rho+1}^* < x_{\rho+1}^* + d\, x_{\rho+1}^* \} \; \pi\iota\theta. \{ Y_\rho^* > x_{\rho+}^* \} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\iota\theta. \{ y_{\rho+1}^* < Y_{\rho+1}^* < y_{\rho+1}^* + d\, y_{\rho+1}^* \} \; \pi\iota\theta. \{ X_\rho^* > y_{\rho+1}^* \}$$

Ἤ, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν (1) – (4), διὰ $\nu = 2$:

$$P = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi (x_{\rho+1}^*) [1 - \Omega (x_{\rho+1}^*)]^2 d\, \Phi (x_{\rho+1}^*) +$$

$$+ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega (y_{\rho+1}^*) [1 - \Phi (y_{\rho+1}^*)]^2 d\, \Omega (y_{\rho+1}^*),$$

ὅπου Φ καὶ Ω παριστοῦν τὰς συναρτήσεις κατανομῆς ἀντιστοίχως τῶν μεταβλητῶν X καὶ Y.

Ἤ, πρὸς ἁπλούστευσιν τοῦ συμβολισμοῦ :

$$P = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi (1 - \Omega)^2 d\, \Phi + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega (1 - \Phi)^2 d\, \Omega \qquad (6)$$

Ἡ πιθανότης P δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$P = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \Omega)\, \Phi^2 d\, \Omega + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \Phi)\, \Omega^2 d\, \Phi \qquad (7)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (6) καὶ (7), λαμβάνομεν :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} [\Omega (1 - \Phi)^2 + (1 - \Omega)\, \Phi^2]\, d\Omega + \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi (1 - \Omega)^2 + (1 - \Phi)\, \Omega^2]\, d\, \Phi$$

Ἤ, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ τὴν προσθαφαίρεσιν τῶν $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2 \, d\,\Phi$ καὶ $\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 \, d\,\Omega$:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi - \Omega)^2 \, d\,(\Phi + \Omega) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega d\Omega + \phi d\phi - \Phi^2 d\Phi - \Omega d^2\Omega \qquad (8)$$

Ἀλλὰ (βλ. (4) διὰ $\gamma = 2$) :

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \, d\,\Phi = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \, d\,\Phi = \frac{1}{2}$$

καὶ

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega \, d\,\Omega = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega \, d\,\Omega = \frac{1}{2}\,.$$

Ἐπίσης (βλ. (4) διὰ $\gamma = 3$) :

$$3 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2 \, d\,\Phi = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2 \, d\,\Phi = \frac{1}{3}$$

καὶ

$$3 \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 \, d\,\Omega = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega^2 \, d\,\Omega = \frac{1}{3}$$

Ἑπομένως :

$$P = \frac{1}{3} + \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi - \Omega)^2 \, d\,(\Phi + \Omega) \qquad (8')$$

ἢ

$$\Phi = \frac{1}{3} + \Delta\,. \qquad (8'')$$

Ἡ σχέσις (8'') ἐπιτρέπει τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀριθμοῦ k πρὸς ἔλεγχον τῆς ἰσονομίας τῶν X καὶ Y. Πράγματι, ἐὰν $\Phi = \Omega$, τότε $\Delta = 0$, $P = \frac{1}{3}$ καί :

$$P_k = \text{πιθ.}\{K=k\} = \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu-k} \tag{9}$$

Ἐὰν ὅμως $\Phi \neq \Omega$, τότε προστίθεται εἰς τὴν P ἡ θετικὴ πάντοτε ποσότης Δ καὶ $P = \frac{1}{3} + \Delta > \frac{1}{3}$, θὰ εἶναι δέ:

$$P_k = \text{πιθ.}\{K=k\} = \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}\left(\frac{1}{3}+\Delta\right)^k\left(\frac{2}{3}-\Delta\right)^{\nu-k} \tag{9'}$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ὁ ἔλεγχος τῆς ἰσονομίας τῶν μεταβλητῶν X καὶ Y, ποὺ μᾶς ἀπασχολεῖ, ἀνάγεται εἰς τὸν ἔλεγχον τῆς ὑποθέσεως ὅτι $P = \frac{1}{3}$ (ὑπόθεσις H_0) ἔναντι τῆς ὑποθέσεως ὅτι $P > \frac{1}{3}$ (ὑπόθεσις H_1) ἐπὶ τῇ βάσει τῶν καταμετρηθέντων ξένων ζευγῶν διαστημάτων μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν ν ζευγῶν διαστημάτων (5').

4. Δοκιμασία (test) πρὸς ἔλεγχον τῆς ὑποθέσεως $P = \rho_0$ ἔναντι τῆς ὑποθέσεως $P > \rho_0$ εἰς ἕνα διωνυμικὸν νόμον (P, ν).

Ὡς εἶναι γνωστὸν [1], οἱονδήποτε σύνολον ν παρατηρήσεων ἤ, ἄλλως, οἱονδήποτε δυνατὸν δεῖγμα ν μονάδων δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἑνὸς σημείου, ἔστω x, ἐντὸς ἑνὸς ν-διαστάτου χώρου, τοῦ «χώρου τῶν παρατηρήσεων». Μία δοκιμασία (test) δὲν εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα τίποτε ἄλλο παρὰ ἕνα τμῆμα w τοῦ χώρου τούτου τῶν παρατηρήσεων, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἀπορρίπτεται ἡ ὑπόθεσις H_0 (ἐν προκειμένῳ ὅτι $\rho = \rho_0$) καὶ γίνεται δεκτὴ ἡ ὑπόθεσις H_1 (ἐν προκειμένῳ ὅτι $P > \rho_0$).

Ὑπενθυμίζεται ἀκόμη ὅτι ἡ ἐκλογὴ τῆς δοκιμασίας, δηλαδὴ ἡ ἐκλογὴ τοῦ χώρου w, δέον νὰ γίνῃ κατὰ τρόπον ὥστε ἡ πιθανότης (ἢ κίνδυνος) α νὰ ἀπορριφθῇ διὰ τῆς δοκιμασίας ἡ ὑπόθεσις H_0 r, ἐνῷ εἶναι ὀρθή, δηλαδή:

$$\alpha = \text{πιθ.}\{x \in w / H_0\} \tag{10}$$

νὰ εἶναι δεδομένη, καὶ ἡ πιθανότης (ἢ κίνδυνος) β νὰ ἀπορριφθῇ ἡ ὑπόθεσις H_1, ἐνῷ εἶναι ὀρθή, δηλαδή:

$$\beta = \text{πιθ.}\{x \notin w / H_1\} \tag{11}$$

νὰ εἶναι ἐλαχίστη, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό,

$$1 - \beta = \text{πιθ.}\{x \in w / H_1\} = \text{μεγίστη} \tag{11'}$$

---

1) Βλ., π.χ., G. Morlat: Statistique Mathématique—Les tests. Πολυγραφημένη ἔκδοσις τοῦ I.S.U.P.

Εἶναι γνωστόν, ἐπίσης, ὅτι ἐὰν L_0 καὶ L_1 εἶναι αἱ πυκνότητες πιθανοτήτων τοῦ σημείου τοῦ δείγματος εἰς τὸν χῶρον τῶν παρατηρήσεων ὑπὸ τὰς ὑποθέσεις H_0 καὶ H_1 ἀντιστοίχως, ἡ ἀπαίτησις (11') πληροῦται ἐὰν

$$\begin{aligned} &\frac{L_0}{L_1} = \lambda \text{ ἐπὶ τῶν ὁρίων τοῦ } w \\ &\frac{L_0}{L_1} \leqslant \lambda \text{ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν } w \qquad (12) \\ &\frac{L_0}{L_1} > \lambda \text{ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν } w \end{aligned}$$

Εἰς τὴν περίπτωσίν μας θὰ ἔχωμεν (1):

$$L_0 = \frac{\nu\,!}{k\,!\,(\nu-k)\,!}\,P_0^k(1-\rho_0)^{\nu-k} \text{ καὶ } L_1 = \frac{\nu\,!}{k\,!\,(\nu-k)\,!}\,P_1^k(1-\rho_1)^{\nu-k}, \text{ μὲ } P_1 > P_0.$$

Ἡ δοκιμασία ἢ ὁ χῶρος w θὰ ἐκλεγῇ ἑπομένως, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, κατὰ τρόπον ὥστε:

$$\frac{L_0}{L_1} = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^k \left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{\nu-k} \leqslant \lambda$$

$$\text{ἢ} \qquad k \log\left(\frac{P_0}{P_1}\right) + (\nu-k)\log\frac{1-P_0}{1-P_1} \leqslant \lambda', \quad \lambda' = \log\lambda$$

$$\text{ἢ} \qquad k\left[\log\frac{P_0}{P_1} - \log\frac{1-P_0}{1-P_1}\right] \leqslant \lambda'', \quad \lambda'' = -\nu\log\frac{1-P_0}{1-P_1} + \lambda' \qquad (13)$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως προκύπτει ὅτι ἐὰν $P_1 > P_0$, τότε ἡ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης παράστασις δίδει ἀρνητικὸν ἀποτέλεσμα καὶ ἑπομένως:

$$k \geqslant \lambda''', \quad \lambda''' = \lambda'' \,/\, \log\frac{P_0}{P_1} - \log\frac{1-P_0}{1-P_1} \qquad (13')$$

Ἡ σχέσις (13') μᾶς δίδει τὴν δοκιμασίαν, ἡ ὁποία εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι τὸ διάστημα (λ''', ∞). Θὰ ἀπορρίπτεται οὕτως ἡ ὑπόθεσις H_0 ἐὰν (2) ὁ προκύπτων ἐκ τῆς παρατηρήσεως ἀριθμὸς k εἶναι τοὐλάχιστον ἴσος μὲ λ'''.

Τὸ θέμα ποὺ ἀπομένει εἶναι νὰ ὁρισθῇ τὸ ὅριον λ'''. Ὁ προσδιορισμὸς τούτου γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς (10). Ἐάν, ὡς συνήθως, γίνῃ δεκτός, ἕνας

1) Ἐὰν ἐλέγχεται ἡ ὑπόθεσις $H_0 : P = P_0$ ἔναντι τῆς ὑποθέσεως $H_1 : P \leqslant P_0$ τότε $k \leqslant \lambda'''$, δηλαδὴ ἡ δοκιμασία θὰ ὁρίζεται διὰ τοῦ διαστήματος (0, λ''').

2) Ἡ μεταβλητὴ K δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν προσηρτημένων εἰς τὰς ν δοκιμὰς μεταβλητῶν X_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, ἑκάστη τῶν ὁποίων λαμβάνει τὴν τιμὴν 1, ἐὰν τὰ διαστήματα τοῦ ζεύγους εἶναι ξένα, καὶ 0 εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν.

κίνδυνος $\alpha = 0{,}05$, τότε τὸ λ''' θὰ εἶναι τοιοῦτον ὥστε :

$$\text{Πιθ.}\{K \geqslant \lambda''' / H_0\} = \text{πιθ.}\{x \in w / H_0\} = 0{,}05.$$

Ἤ, ἐπειδὴ ἡ μεταβλητὴ K ἀκολουθεῖ διωνυμικὸν νόμον (P_0, ν) (Βλ. καὶ (9)), τὸ λ''' θὰ ὁρισθῇ ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\sum_{k=\lambda'''}^{\nu} \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!} P_0^k (1-P_0)^{\nu-k} = 0{,}05 \tag{14}$$

τῇ βοηθείᾳ ἑνὸς πίνακος πιθανοτήτων τοῦ διωνυμικοῦ νόμου.

Ἐδῶ ὅμως δημιουργεῖται ἓν πρόβλημα. Λόγῳ τῆς ἀσυνεχείας τῆς μεταβλητῆς K, εἶναι μᾶλλον συμπτωματικὸν νὰ εὑρεθῇ μία τιμὴ αὐτῆς $k = \lambda'''$, τοιαύτη ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ (14). Ἡ συνήθης περίπτωσις εἶναι ἡ πιθανότης 0,05 νὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀθροιστικῶν πιθανοτήτων τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς δύο διαδοχικὰς ἀκεραίας τιμὰς τῆς K.

Ἂν καὶ τὸ πρόβλημα λύεται πολλάκις εἰς τὴν πρᾶξιν διὰ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ α ὡς ἴσου τὸ πολὺ πρὸς ὡρισμένον ἐπίπεδον, π.χ. $\alpha \leqslant 0{,}05$, εἶναι, ἐν τούτοις, δυνατὸν νὰ ἐπιτευχθῇ καὶ ὡρισμένον ἐπίπεδον διὰ τὸ α, π.χ. $\alpha = 0{,}05$, δι' ἐξαρτήσεως τῆς ἀποφάσεως περὶ ἀποδοχῆς ἢ ἀπορρίψεως τῆς ὑποθέσεως H_0 ἐκ τοῦ ἀποτελέσματος μιᾶς προσθέτου δειγματοληψίας.

Ἔστω, οὕτως, ὅτι διὰ τῶν $\lambda''' - 1$, λ''', $\lambda''' + 1$ ὁρίζονται tests τῶν ἐπιπέδων πιθανοτήτων α ἴσων ἀντιστοίχως πρός : α_1, α_2, α_3 καὶ εἶναι :

$$\alpha_1 > \alpha_2 > 0{,}05 > \alpha_3$$

τότε, ἐὰν $k \geqslant \lambda''' + 1$, ἀπορρίπτεται ἡ H_0

ἐὰν $k \leqslant \lambda''' - 1$, ἡ H_0 γίνεται δεκτὴ

ἐὰν ὅμως $k = \lambda'''$, γίνεται πρόσθετος βοηθητικὴ δειγματοληψία ἀπὸ μίαν κάλπην δύο κατηγοριῶν A καὶ B ὑπὸ τὰς ἀναλογίας γ καὶ 1–γ ἀντιστοίχως, ὁριζομένας κατὰ τρόπον ὥστε :

$$(\alpha_2 - \alpha_3)\gamma = 0{,}05 - \alpha_3$$

Ἐὰν ἡ ἐξαγομένη τυχαίως ἐκ τῆς κάλπης μονὰς εἶναι τῆς κατηγορίας A, ἡ ὑπόθεσις H_0 ἀπορρίπτεται, ἄλλως γίνεται δεκτή.

Τέλος, παρατηρεῖται ὅτι ἂν καί, ὡς εἶναι γνωστόν, ὁ καθορισμὸς τῆς ἀνωτέρω δοκιμασίας, θὰ ἠδύνατο νὰ γίνῃ προσεγγιστικῶς διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κανονικοῦ νόμου, πρὸς τὸν ὁποῖον τείνει ὁ διωνυμικὸς διὰ P_0 ὄχι πολὺ μικρὸν καὶ ν μέγα, τοῦτο σπανίως θὰ συμβῇ διότι εἰς τὴν πρᾶξιν διατίθενται συνήθως μικρὰ δείγματα, λόγῳ τῆς ἀνάγκης ἐξειδικεύσεως πρὸς ἀπομόνωσιν τοῦ ἐλεγχομένου παράγοντος.

5. Πρακτικὴ τῆς προτεινομένης δοκιμασίας

Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω, συνοψίζομεν ὡς ἑξῆς τὴν πρακτικὴν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς προτεινομένης δοκιμασίας :

α) Λαμβάνονται (ἢ διατίθενται) ἐκ τῶν δύο πληθυσμῶν δύο ἀνεξάρτητα δείγματα 2ν μονάδων ἕκαστον, κατὰ τὴν σειρὰν τῆς λήψεώς των.

β) Λαμβάνονται αἱ μονάδες ἑκάστου ἀνὰ δύο. Σχηματίζονται, οὕτω, ν ζεύγη ἐξ ἑκάστου δείγματος, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν ἀντίστοιχα διαστήματα (εἰς ἕκαστον ζεῦγος ἡ μικροτέρα ὁρίζει τὸ κατώτερον ὅριον τοῦ διαστήματος καὶ ἡ μεγαλυτέρα τὸ ἀνώτερον).

γ) Συγκρίνονται τὰ διαστήματα τῶν δύο δειγμάτων ἀνὰ δύο (ἓν διάστημα ἐξ ἑκάστου δείγματος), κατὰ τὴν σειρὰν καθ' ἣν ἐσχηματίσθησαν, καὶ ἐπισημαίνονται τὰ ξένα ζεύγη.

δ) Ἐφαρμόζεται ἡ δοκιμασία τῆς παραγρ. 4 μὲ ἐλεγχομένας ὑποθέσεις

$$H_0 : p = \frac{1}{3} \quad \text{καὶ} \quad H_1 : P > \frac{1}{3} .$$