ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Τοῦ κ. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Γ. ΔΡΑΚΑΤΟΥ

Ὑφηγητοῦ Στατιστικῆς τῆς Π.Α.Σ.Π.Ε.

Εἰς τὴν ποσοτικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν ἡ μεταξὺ δύο μεγεθῶν ὑφισταμένη σχέσις μετρεῖται συνήθως διὰ τῆς ἐλαστικότητος (1). Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς μεταβλητὰς χ, ψ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ χ εἶναι ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ ἡ ψ μία συνάρτησις τῆς χ, ἐκφραζομένη ἀναλυτικῶς διὰ τῆς σχέσεως :

$$\psi = f(\chi) \tag{1}$$

ἡ ἐλαστικότης τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον $[\chi, f(\chi)]$:

$$E[\psi, \chi] = \frac{d\psi}{d\chi} \cdot \frac{\chi}{\psi} \tag{2}$$

παρέχει, ὡς γνωστόν, τὴν ποσοστιαίαν μεταβολὴν τῆς τιμῆς τῆς ψ κατὰ μονάδα ποσοστιαίας μεταβολῆς τῆς χ.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι ἡ ἐλαστικότης μιᾶς συναρτήσεως – ὡς καὶ ἡ παράγωγος – εἶναι καὶ αὕτη μία συνάρτησις, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ γενικῶς μεταβάλλεται (2) εἰς διαφόρους τιμὰς τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως. Ὁμοίως καὶ εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν :

$$\psi = \alpha + b\chi \tag{3}$$

ἐνῷ ἡ παράγωγος εἶναι σταθερὰ ($d\psi/d\chi = b$), ἡ ἐλαστικότης, διδομένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως :

$$E[\psi, \chi] = \frac{d\psi}{d\chi} \cdot \frac{\chi}{\psi} = \frac{b\chi}{\alpha + b\chi} \tag{4}$$

λαμβάνει διαφορετικὰς τιμὰς μεταβαλλομένης τῆς χ.

---

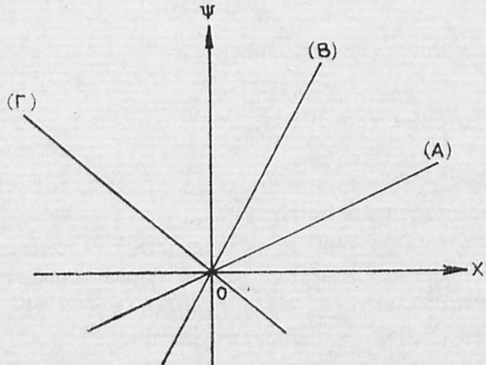
(1) Ἡ τιμὴ τῆς ἐλαστικότητος εἶναι «καθαρὸς» ἀριθμός, ἤτοι ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν χρησιμοποιουμένων μεταβλητῶν καὶ συνεπῶς παρουσιάζει τὸ πλεονέκτημα ὅτι προσφέρεται διὰ συγκρίσεις οἱωνδήποτε οἰκονομικῶν σχέσεων.

(2) Ὡς γνωστόν, μόνον αἱ συναρτήσεις τῆς μορφῆς $\psi = K\chi^{|\varepsilon|}$ ἔχουν ἐλαστικότητα σταθερὰν εἰς ὅλας τὰς τιμάς των καὶ ἴσην πρὸς τὸν ἐκθέτην $|\varepsilon|$.

Εἰς τὴν πρᾶξιν γίνεται συνήθως χρῆσις τῆς μέσης ἐλαστικότητος τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως, ἀλλὰ ἡ λύσις αὕτη δὲν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἱκανοποιητικὴ ἰδίως ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας καὶ δι' ὡρισμένους σκοπούς. Πρὸς πληρεστέραν περιγραφὴν τῶν μελετωμένων ποσοτικῶν σχέσεων εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως, ἐκτὸς τῆς μέσης ἐλαστικότητος, παρέχωνται καὶ συμπληρωματικαὶ πληροφορίαι περὶ τῆς διαμορφώσεως τῆς ἐλαστικότητος τῆς συναρτήσεως εἰς ὅλας τὰς χρησιμοποιουμένας τιμὰς τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ τὸ πεδίον μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ.

Κατωτέρω ἐπιχειρεῖται διερεύνησις τῶν μεταβολῶν τῆς ἐλαστικότητος εἰς τὰς γραμμικὰς συναρτήσεις εἰς τὰς ὁποίας ὑπάρχει μία μόνον ἀνεξάρτητος μεταβλητή. Τὰ σχετικὰ ἀποτελέσματα, πέραν τοῦ θεωρητικοῦ ἐνδιαφέροντος τὸ ὁποῖον παρουσιάζουν, ἐνδέχεται νὰ ἀποβοῦν καὶ πρακτικῶς χρήσιμα εἰς τὴν ἐμπειρικὴν οἰκονομικὴν ἔρευναν, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἁπλαῖ γραμμικαὶ συναρτήσεις ἐφαρμόζονται εὐρύτατα.

Α'. Ἐὰν $\alpha = 0$, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς σχέσεως (4) $E[\psi,\chi] = 1$. Συνεπῶς, πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων (ὡς αἱ (Α), (Β), (Γ) εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 1) ἔχει εἰς ὅλα τὰ σημεῖα της μοναδιαίαν ἐλαστικότητα.



Σχ. 1

Β'. Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $\alpha \neq 0$, ἡ ἐλαστικότης τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι μία συνάρτησις τῆς χ, ἡ μορφὴ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται κατωτέρω:

1) Δέον κατ' ἀρχὴν νὰ ἐξετασθῇ *ὑπὸ ποίας προϋποθέσεις ἡ ἐλαστικότης εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα συνάρτησις τῆς χ*. Πρὸς τοῦτο παραγωγίζομεν τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν (4) καὶ ἔχομεν :

$$(5) \qquad \frac{d}{d\chi}\Big\{E[\psi,\chi]\Big\} = \frac{(\alpha+b\chi)b - b\chi b}{(\alpha+b\chi)^2} = \frac{\alpha b + b^2\chi - b^2\chi}{(\alpha+b\chi)^2} = \frac{\alpha b}{(\alpha+b\chi)^2}$$

Ὁπότε, ἐὰν $\alpha b > 0$, ἤτοι ἐὰν αἱ παράμετροι α, b εἶναι ὁμόσημοι, ἡ ἐλαστικότης εἶναι αὔξουσα συνάρτησις, διότι ἡ τιμὴ τῆς πρώτης παραγώγου εἶναι θετική, ἐὰν δὲ $\alpha b < 0$, ἤτοι ἐὰν αἱ παράμετροι α, b εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ ἐλαστικότης εἶναι φθίνουσα συνάρτησις, διότι ἡ τιμὴ τῆς πρώτης παραγώγου εἶναι ἀρνητική.

2) ***Μορφὴ τῆς συναρτήσεως ἐλαστικότητος.*** Πρὸς προσδιορισμὸν τῆς μορφῆς τῆς συναρτήσεως ἐλαστικότητος χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (4), ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$E[\psi, \chi] = \frac{b\chi}{\alpha + b\chi} = \frac{\chi}{\frac{\alpha}{b} + \chi} \tag{6}$$

Ἀλλὰ ἡ συνάρτησις $E[\psi, \chi] = \dfrac{\chi}{\frac{\alpha}{b} + \chi}$ εἶναι ἡ λεγομένη ὁμογραφικὴ ἢ ρητογραμμικὴ συνάρτησις, ἡ ὁποία, ὡς κατωτέρω ἀποδεικνύεται, ἐκφράζει ὀρθογώνιον ἰσοσκελῆ ὑπερβολήν. Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις (6) δύναται νὰ γραφῇ :

$$E[\psi, \chi] = \psi' = \frac{\chi}{\frac{\alpha}{b} + \chi} = \frac{\chi + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha}{b}}{\chi + \frac{\alpha}{b}} = 1 + \frac{-\frac{\alpha}{b}}{\chi + \frac{\alpha}{b}}$$

$$\text{ἢ} \qquad \psi' - 1 = \frac{-\frac{\alpha}{b}}{\chi + \frac{\alpha}{b}} \tag{7}$$

Ἐὰν θέσωμεν : $\psi' - 1 = \Psi$, $\chi + \dfrac{\alpha}{b} = X$ καὶ $-\dfrac{\alpha}{b} = k$, ἡ ἐξίσωσις (7) γίνεται :

$$\Psi X = k \tag{8}$$

Οὕτω προκύπτει ἡ γνωστὴ ἐξίσωσις τῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν ὡς πρὸς ἄξονας τὰς ἀσυμπτώτους των.

3) ***Προσδιορισμὸς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς*** $\psi' = \dfrac{b\chi}{\alpha + b\chi}$. Ἡ ἀσύμπτωτος, ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων, εὑρίσκεται, ἐὰν ἀναζητήσωμεν τὰς πεπερασμένας τιμὰς τῆς χ, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν ψ' ἀπείρως μεγάλην. Πρὸς τοῦτο μηδενίζομεν τὸν παρονομαστὴν $\alpha + b\chi$. Ἀλλὰ $\alpha + b\chi = 0$, ὅταν $\chi = -\dfrac{\alpha}{b}$. Ἄρα ἡ παράλληλος εὐθεῖα $\chi = -\dfrac{\alpha}{b}$ εἶναι ἡ μία ἀσύμπτωτος, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῆς $\psi = \alpha + b\chi$ μετὰ

τοῦ ἄξονος τῶν χ. Ἡ ἀσύμπτωτος, ἡ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων, εὑρίσκεται δι' ἀναζητήσεως τοῦ $\lim\psi$ ὅταν $\chi \to \pm\infty$. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τὴν μορφήν :

$$\psi' = \frac{b\chi}{\alpha + b\chi} = \frac{1}{\frac{\alpha}{b\chi} + 1} \tag{9}$$

ἡ ὁποία διὰ $\chi \to \pm\infty$ δίδει $\psi' = 1$. Ἄρα ἡ παράλληλος εὐθεῖα $\psi = 1$ εἶναι ἡ δευτέρα ἀσύμπτωτος. Τὸ σημεῖον $\chi = -\frac{\alpha}{b}$, ἐφ' ὅσον δίδει $\psi' = \pm\infty$ εἶναι σημεῖον ἀσυνεχείας, ὅπως καὶ ἀντιστρόφως τὸ $\psi = 1$ εἶναι ἐπίσης σημεῖον ἀσυνεχείας.

4) ***Πορίσματα ἐκ τῆς διερευνήσεως τῆς συναρτήσεως ἐλαστικότητος διὰ διαφόρους τιμὰς τῶν παραμέτρων*** α, b.

I) Ἐὰν $b > 0$, δέον νὰ διακρίνωμεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

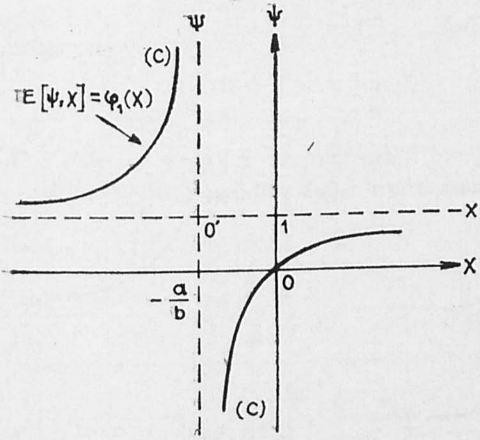
α) Ὅταν $\alpha > 0$, ἐπειδὴ $\alpha b > 0$, ἡ ἐλαστικότης κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς χ καὶ ἀσυνεχὴς διὰ $\chi = -\frac{\alpha}{b}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν :

Ὅταν $\chi \to +\infty$	$E[\psi, \chi] \to 1$
» $\chi \to 0$	$E[\psi, \chi] \to 0$
» $\chi \to -\frac{\alpha}{b}$ (ἐκ δεξιῶν)	$E[\psi, \chi] \to -\infty$
» $\chi \to -\frac{\alpha}{b}$ (ἐξ ἀριστερῶν)	$E[\psi, \chi] \to +\infty$
» $\chi \to -\infty$	$E[\psi, \chi] \to 1$

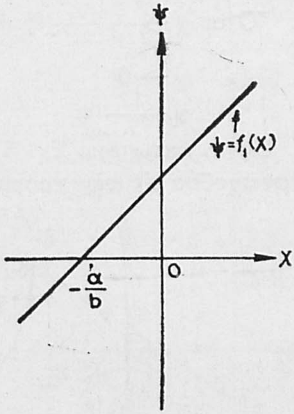
Εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 2 εἰκονίζεται ἡ συνάρτησις $E[\psi, \chi] = \varphi_1(\chi)$ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν $f_1(\chi)$ τοῦ Σχ. 3

β) Ὅταν $\alpha < 0$, εἶναι $\alpha b < 0$ καὶ συνεπῶς ἡ ἐλαστικότης εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τῆς χ καὶ ἀσυνεχὴς διὰ $\chi = -\frac{\alpha}{b}$. Καὶ ἐνταῦθα ἔχομεν :

Ὅταν $\chi \to +\infty$	$E[\psi, \chi] \to 1$
» $\chi \to -\frac{\alpha}{b}$ (ἐκ δεξιῶν)	$E[\psi, \chi] \to +\infty$
» $\chi \to -\frac{\alpha}{b}$ (ἐξ ἀριστερῶν)	$E[\psi, \chi] \to -\infty$
» $\chi \to 0$	$E[\psi, \chi] \to 0$
» $\chi \to -\infty$	$E[\psi, \chi] \to 1$



Σχ. 2

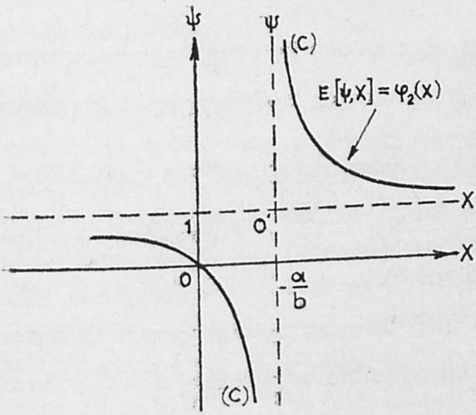


Σχ. 3

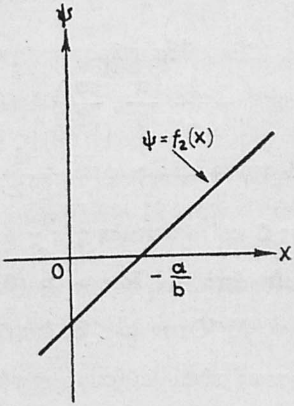
Εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 4 εἰκονίζεται ἡ συνάρτησις $E[\psi, \chi] = \varphi_2(\chi)$ ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν $f_2(\chi)$ τοῦ Σχ. 5.

II) Ἐὰν $b < 0$, διακρίνομεν ὁμοίως τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

α) Ὅταν $\alpha > 0$, ἐπειδὴ $\alpha b < 0$, ἡ ἐλαστικότης τῆς γραμμικῆς συναρτή-



Σχ. 4



Σχ. 5

σεως εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τῆς χ καὶ ἀσυνεχὴς διὰ $\chi = -\frac{\alpha}{b}$. Ἐν προκειμένῳ ἔχομεν:

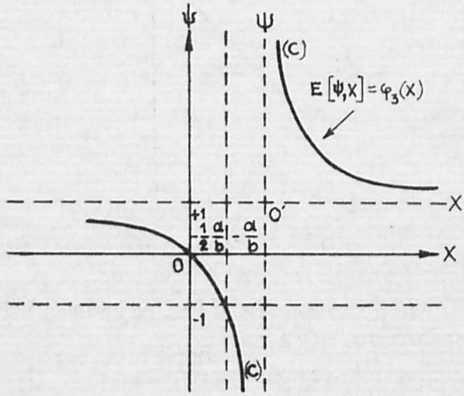
Ὅταν $\chi \to +\infty$	$E[\psi, \chi] \to 1$
» $\chi \to -\frac{\alpha}{b}$ (ἐκ δεξιῶν)	$E[\psi, \chi] \to +\infty$

Όταν $\chi \to -\frac{\alpha}{b}$ (ἐξ ἀριστερῶν) $\quad E[\psi, \chi] \to -\infty$

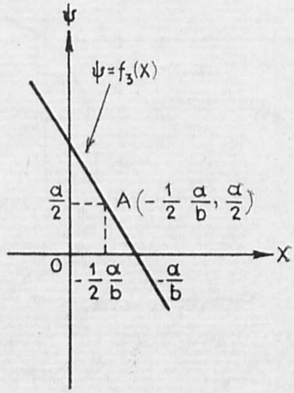
» $\chi \to 0 \quad E[\psi, \chi] \to 0$

» $\chi \to -\infty \quad E[\psi, \chi] \to 1$

Εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 6 εἰκονίζεται ἡ συνάρτησις $E[\psi, \chi] = \varphi_3(\chi)$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν $f_3(\chi)$ τοῦ Σχ. 7.



Σχ. 6



Σχ. 7

Ἐνταῦθα παρατηρεῖται ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τῆς καμπύλης τῆς συναρτήσεως $\left(-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{b}, \frac{\alpha}{2}\right)$ ἡ τιμὴ τῆς ἐλαστικότητος ἰσοῦται πρὸς -1. Ἑπομένως, διὰ τιμὰς τῆς χ ἀπὸ $-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{b}$ ἕως 0 ἡ ἐλαστικότης λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ -1 ἕως 0 καὶ διὰ τιμὰς τῆς χ ἀπὸ $-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{b}$ ἕως $-\frac{\alpha}{b}$ ἡ ἐλαστικότης λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ -1 ἕως $-\infty$ (βλ. Σχ. 6 καὶ 7).

β) Ὅταν $\alpha < 0$, ἐπειδὴ $\alpha b > 0$, ἡ ἐλαστικότης τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς χ καὶ ἀσυνεχὴς διὰ $\chi = -\frac{\alpha}{b}$. Ἐνταῦθα ἔχομεν :

Ὅταν $\chi \to +\infty \quad E[\psi, \chi] \to 1$

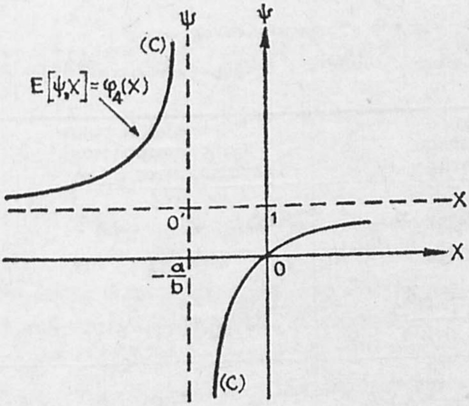
» $\chi \to 0 \quad E[\psi, \chi] \to 0$

» $\chi \to -\frac{\alpha}{b}$ (ἐκ δεξιῶν) $\quad E[\psi, \chi] \to -\infty$

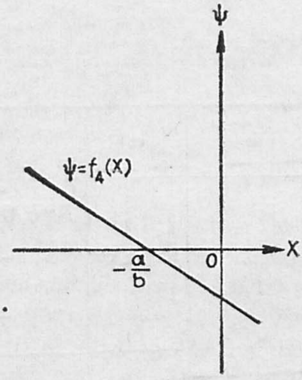
» $\chi \to -\frac{\alpha}{b}$ (ἐξ ἀριστερῶν) $\quad E[\psi, \chi] \to +\infty$

» $\chi \to -\infty \quad E[\psi, \chi] \to 1$

Εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 8 εἰκονίζεται ἡ συνάρτησις $E[\psi, \chi] = \varphi_4(\chi)$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν γραμμικὴν συνάρτησιν $f_4(\chi)$ τοῦ Σχ. 9.



Σχ. 8



Σχ. 9

Τὰ ἀνωτέρω πορίσματα τῆς διερευνήσεως τῶν μεταβολῶν τῆς ἐλαστικότητος εἰς τὰς γραμμικὰς συναρτήσεις ἐμφανίζονται συνοπτικῶς εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα.

Οὕτω, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν προσήμων τῶν παραμέτρων α, b ὡρισμένης γραμμικῆς συναρτήσεως δυνάμεθα νὰ διαγνώσωμεν, ἐὰν ἡ ἐλαστικότης εἴς τινα τιμὴν ἢ διάστημα τιμῶν τῆς συναρτήσεως εἶναι μικρότερα ἢ μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, ὡς καὶ ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος συνάρτησις ἐλαστικότητος εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα συνάρτησις τῆς χ. Μολονότι ὡρισμέναι ἐκ τῶν ἐξεταζομένων περιπτώσεων δὲν παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον εἰς τὴν ποσοτικὴν ἀνάλυσιν τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων, ἐν τούτοις ἐκρίθη σκόπιμον ὅπως περιληφθοῦν καὶ αὗται εἰς τὸν σχετικὸν πίνακα διὰ λόγους πληρότητος τῆς ἐμφανίσεως τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς διερευνήσεως.

Τιμαὶ τῆς ἐλαστικότητος εἰς τὰς γραμμικὰς συναρτήσεις ἀντιστοιχοῦσαι εἰς χαρακτηριστικάς τινας τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς

b	α	Τιμαὶ ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ	Ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως ἐλαστικότητος Ε [ψ, χ]
$b > 0$	$\alpha > 0$	Ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$	Ἀπὸ 0 ἕως 1
		» $-\frac{\alpha}{b}$ » 0	» $-\infty$ » 0
		» $-\infty$ » $-\frac{\alpha}{b}$	» 1 » $+\infty$
	$\alpha < 0$	Ἀπὸ $-\frac{\alpha}{b}$ ἕως $+\infty$	Ἀπὸ $+\infty$ ἕως 1
		» 0 » $-\frac{\alpha}{b}$	» 0 » $-\infty$
		» $-\infty$ » 0	» 1 » 0
$b < 0$	$\alpha > 0$	Ἀπὸ $-\frac{\alpha}{b}$ ἕως $+\infty$	Ἀπὸ $+\infty$ ἕως 1
		» $-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{b}$ » $-\frac{\alpha}{b}$	» -1 » $-\infty$
		» 0 » $-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{b}$	» 0 » -1
		» $-\infty$ » 0	» 1 » 0
	$\alpha < 0$	Ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$	Ἀπὸ 0 ἕως 1
		» $-\frac{\alpha}{b}$ » 0	» $-\infty$ » 0
		» $-\infty$ » $-\frac{\alpha}{b}$	» 1 » $+\infty$