ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΙΣ ΤΑΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΣ *

ΥΠΟ ΤΟΥ κ. Κ. Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΟΥ

Γενικά:

1. Συνήθως διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἀπεικόνισιν τῶν χρονολογικῶν σειρῶν δηλ. διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν ἀντιστοίχων πρὸς ταύτας τάσεων, χρησιμοποιοῦνται ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$\breve{y}_i = \alpha + \beta t_i$, ἂν ἡ τάσις εἶναι εὐθύγραμμος

$\breve{y}_i = \alpha + \beta t_i + \gamma t_i^2$, ἂν ἡ τάσις εἶναι καμπυλόγραμμος β΄ βαθμοῦ

$\breve{y}_i = \alpha + \beta t_i + \gamma t_i^2 + \delta t_i^3$, ἂν ἡ τάσις εἶναι καμπυλόγραμμος γ΄ βαθμοῦ κ.λ.π.

$\breve{y}_i = \alpha \beta^{t_i}$, ἂν ἡ τάσις εἶναι ἐκθετική·

ἔτι δὲ καὶ ἄλλαι πολυπλοκώτεραι τούτων μορφαί, ὡς ἡ τῆς τροποποιημένης ἐκθετικῆς $\breve{y}_i = c + \alpha \beta^{t_i}$ ἢ τῆς Λογιστικῆς καμπύλης $\breve{y}_i = \dfrac{L}{1 + e^{\alpha + \beta t_i}}$ κλπ.

2. Αἱ παράμετροι τῶν ἄνω ἐξισώσεων προσδιορίζονται βάσει τῶν δεδομένων, κατὰ κανόνα, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς κλασικῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, ἐπιδιωκούσης νὰ καταστήσῃ ἐ λ ά χ ι σ τ ο ν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποκλίσεων (= διαφορῶν) μεταξὺ τῶν τιμῶν παρατηρήσεως καὶ τῶν τιμῶν ὑπολογισμοῦ δηλ. τὸ $\Sigma (y_i - \breve{y}_i)^2$. Ἐξυπακούεται ὅμως ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων δύναται νὰ γίνῃ καὶ δι' ἄλλων μεθόδων, ὡς ἡ μέθοδος τῶν ροπῶν, ἥτις συμπίπτει πρὸς τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, ὅταν ἡ παρεμβολικὴ ἐξίσωσις εἶναι εὐθύγραμμος ἢ ἀκέραιον πολυώνυμον, ἡ μέθοδος τῶν μέσων σημείων, ἡ μέθοδος ὁμάδων ἐξισώσεων, ἡ μέθοδος τῶν ὀρθογωνίων πολυωνύμων κλπ., ἢ ἐπίσης καὶ διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τῆς μεθόδου τῶς ἐλαχίστων τετραγώνων καὶ μιᾶς τῶν λοιπῶν μεθόδων.

---

* Ἀνακοίνωσις γενομένη εἰς τὴν Ἑλληνικὴν Στατιστικὴν Ἑταιρίαν τὴν 21ην Ἰανουαρίου 1956.

αὐτῆς περίπου περιόδου ἀποτελοῦν ἐξαίρεσιν.

Κατὰ τὸ ἔτος 1946 τὸ Ὑπουργεῖον τῆς Παιδείας ἐν Ἀγγλίᾳ ἠνοποίησε τὰ ἱδρύματα ταῦτα καὶ βραδύτερον συνεφωνήθη ὅπως συμφώνως πρὸς τὴν ἔκθεσιν Urwick, ἅπαντα τὰ Ἰνστιτοῦτα τῶν ἐπαγγελματικῶν διοικητικῶν στελεχῶν υἱοθετήσουν κοινὸν πρόγραμμα διὰ τὰς μέσας σπουδάς.

(Συνεχίζεται)

3. Ὅσον ἀφορᾷ δὲ τὴν ἐκλογὴν τῆς προσηκούσης μορφῆς ἐξισώσεως διὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἀπεικόνισιν τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς, ὥστε ἡ γραφικὴ ταύτης ἀναπαράστασις νὰ εἶναι ὁμαλή, ἄνευ ἀποτόμων κάμψεων (ἐξάρσεων ἢ ὑφέσεων), ὑφίστανται ὡρισμένα κριτήρια, ἀπορρέοντα ἐκ τῆς μαθηματικῆς ἰδιότητος τῶν καθ' ἕκαστον συναρτήσεων, ἅτινα καὶ καθοδηγοῦν ἡμᾶς διὰ τὴν ὀρθὴν ἐκλογὴν τοῦ προσήκοντος τύπου ἐξισώσεως.

Κριτήρια ἐπιλογῆς

Τάσις εὐθύγραμμος : Ἂν αἱ πρῶται διαφοραὶ τῶν τιμῶν τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς εἶναι περίπου (=προσέγγισιν) σταθεραί, τότε αἱ δεύτεραι διαφοραὶ τούτων θὰ εἶναι περίπου μηδέν, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν, πάντοτε, ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t_i (= χρόνος) σχηματίζουν πρόοδον ἀριθμητικὴν λόγου ἴσου πρὸς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου, δηλ. αἱ τιμαὶ τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς δίδονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Κατὰ συνέπειαν τότε λαμβάνεται : $\ddot{y}_i = \alpha + \beta t_i$.

Τάσις καμπυλόγραμμος Β' βαθμοῦ : Ἂν αἱ δεύτεραι διαφοραὶ τῶν τιμῶν τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς εἶναι περίπου (=προσέγγισιν) σταθεραὶ καὶ αἱ τρίται διαφοραὶ περίπου μηδέν, ὑπὸ τὴν αὐτὴν ὡς ἄνω προϋπόθεσιν δι' ὅ,τι ἀφορᾷ τὰς τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t_i (= χρόνος), τότε ἐκλέγεται διὰ τὴν ἀναπαράστασιν τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς ἡ : $\ddot{y}_i = \alpha + \beta t_i + \gamma t_i$.

Διὰ τάσιν καμπυλόγραμμον γ' βαθμοῦ, θὰ πρέπῃ, ἐπίσης, νὰ ἔχωμεν τὰς τρίτας διαφορὰς τῶν τιμῶν τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς περίπου (= προσέγγισιν) σταθερὰς καὶ τὰς τετάρτας διαφορὰς περίπου μηδέν, δηλ. θὰ ἐκλεγῇ τότε ἡ $\ddot{y}_i = \alpha + \beta t_i + \gamma t_i^2 + \delta t_i^3$ καὶ οὕτω ἐφεξῆς διὰ καμπυλογράμμους τάσεις ἀνωτέρων βαθμῶν, καὶ ὑπὸ τὰς λεχθείσας ἤδη προϋποθέσεις δι' ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν μεταβλητήν : t_i (= χρόνος) .

Τάσις Ἐκθετική : Ἂν αἱ τιμαὶ τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς σχηματίζουν κατὰ προσέγγισιν πρόοδον γεωμετρικήν, ἐνῶ αἱ τιμαὶ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς t_i (=χρόνος), πρόοδον ἀριθμητικήν, τότε ὡς ἐξίσωσις θὰ ληφθῇ ἡ : $\ddot{y}_i = \alpha \beta^{t_i}$...

Ἀρχαὶ τῆς προτεινομένης μεθόδου

4. Αὗται στηρίζονται ἐπὶ τῶν ὡς ἄνω καὶ μόνον κριτηρίων ὡς κατωτέρω θὰ ἐξηγηθῇ. Ὡς γνωστὸν ὅμως αἱ ἀποτυπώσεις τῶν ποσοτικῶν ἐκδηλώσεων τῶν χρονολογικῶν φαινομένων γίνονται, συνήθως, κατὰ μῆνα, πρὸς ἀποφυγὴν ὅμως περιττῶν ὑπολογισμῶν καὶ ἀπώλειαν χρόνου, διὰ τὴν Στατιστικὴν ἀνάλυσιν τούτων, τὰ κατὰ μῆνα δεδομένα συνοψίζονται εἴτε α) εἰς ἐτήσια ἀθροίσματα εἴτε β) εἰς μέσα ἐτήσια (μέσα ἀθροίσματα διὰ 12).

Τὰ κατὰ τὰ ἄνω δεδομένα (ἐτήσια ἀθροίσματα ἢ μέσα ἐτήσια) ἀναφέρονται πλέον εἰς διαδοχικὰ ἔτη, ἅτινα ἐκφράζονται ὡς γνωστὸν ὑπὸ τετραψηφίων ἀριθμῶν. Πρὸς ἔτι περαιτέρω ὅμως ἁπλοποίησιν τῆς μεταβλητῆς χρόνος εἰσάγεται ἡ νέα μεταβλητὴ $t_i = X_i - X_0$, ὅπου X_i τετραψήφιος ἀριθμὸς ἐκφράζων ἔτος τι,

X_0 ὁμοίως τετραψήφιος ἀριθμός, αὐθαιρέτως, λαμβανόμενος ὡς ἀρχὴ καὶ τοιοῦτος ὥστε $X_1 = X_0 + 1$. Τούτου τεθέντος οἱ ἀριθμοὶ t_1, t_2, t_3 κ.λ.π. οὐσιαστικῶς θὰ εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, ... δηλαδὴ ἡ σειρὰ τῶν t_i (διὰ $i=1, 2, 3, \ldots n$) θὰ εἶναι οἱ διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 2, 3, ... n.

5. ***Εὐθύγραμμος τάσις*** : Ἐὰν βάσει τοῦ ἐκτεθέντος κριτηρίου ληφθῇ, ἡ $\breve{y}_i = \alpha + \beta t_i$, τότε διὰ τὰ n δεδομένα τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς (t_i, y_i), θὰ ἔχωμεν διὰ ταῦτα τὰς κάτωθι σχέσεις :

θεωροῦντες τὰς πρώτας διαφορὰς τῶν y_i

$$\begin{array}{lcl}
y_1=\alpha+\beta t_1 & \text{ἢ} & \Delta y_1=\beta(t_2-t_1)=\beta \\
y_2=\alpha+\beta t_2 & \text{ἢ} & \Delta y_2=\beta(t_3-t_2)=\beta \\
y_3=\alpha+\beta t_3 & \text{ἢ} & \Delta y_3=\beta(t_4-t_3)=\beta \\
\ldots & & \ldots\ldots \\
y_{n-1}=\alpha+\beta t_{n-1} & \text{ἢ} & \Delta y_{n-1}=\beta(y_n-t_{n-1})=\beta \\
y_n=\alpha+\beta t_n & &
\end{array} \quad \Bigg\} \ (n-1) \text{ ἐν ὅλῳ σχέσεις}$$

ὅπου Δy_i παριστᾷ τὴν πρώτην διαφορὰν τῆς y_i δηλ. $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ καὶ ἐπὶ πλέον $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \ldots = t_n - t_{n-1} = 1$.

Ἐὰν τὰς ἄνω (n—1) σχέσεις προσθέσωμεν κατὰ μέλη λαμβάνομεν τότε

$$\sum_1^{n-1} \Delta y_i = (n-1)\beta \quad \text{ἢ} \quad \beta = \frac{\sum_1^{n-1} \Delta y_i}{n-1}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1)$$

πρὸς εὕρεσιν νῦν τῆς τιμῆς τῆς α, ἀθροίζομεν τήν : $y_i = \alpha + \beta t_i$ κατὰ μέλη, διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i ($i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$), ὁπόταν λαμβάνομεν :

$$\sum_1^n y_i = n\alpha + \beta \sum_1^n t_i$$

ἀλλὰ

$$\sum_1^n t_i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ἑπομένως

$$\alpha = \frac{\sum_1^n y_i}{n} - \beta \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{\sum_1^n y_i}{n} - \frac{\sum_1^{n-1} \Delta y_i}{n-1} \cdot \frac{n+1}{2}.$$

6. ***Ἐφαρμογή*** : Θεωρήσωμεν τὴν μαθηματικὴν συνάρτησιν $y_i = 3 + 2t_i$, τοῦ t_i λαμβάνοντος τὰς τιμὰς 1, 2, 3 ... 7, ὁπόταν θὰ ἔχωμεν :

t_i	y_i	Δy_i
1	5	2
2	7	2
3	9	2
4	11	2
5	13	2
6	15	2
7	17	
28	77	12

Ἐνταῦθα. $\Sigma t_i = \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{7\,.\,8}{2} = 28$

$$1)\ \beta = \frac{\sum_{1}^{6} \Delta y_i}{7-1} = \frac{12}{6} = 2$$

$$2)\ \alpha = \frac{\sum_{1}^{7} y_i}{7} - \beta . \frac{n+1}{2} = \frac{77}{7} - 2 . \frac{8}{2} = 11 - 8 = 3.$$

ἄρα : $\check{y}_i = 3 + 2t_i$

Ἐκ τῆς ἄνω ἐφαρμογῆς συνάγεται ὅτι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς εὐθείας εἶναι ἡ τυχοῦσα, πρώτη διαφορά, διότι πᾶσαι αἱ πρῶται διαφοραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

7. ***Ἐφαρμογή*** : Θεωρήσωμεν ὄχι πλέον μαθηματικὴν συνάρτησιν, ἀλλ' ἐμπειρικὴν τοιαύτην, ὡς κάτωθι :

t_i	y_i	Δy_i
1	2,0	2,1
2	4,1	2,2
3	6,3	2,0
4	8,3	2,3
5	10,6	2,2
6	12,8	
21	44,1	10,8

Ἐφαρμόσωμεν τοὺς ἐκτεθέντας τύπους :

$$1)\ \beta = \frac{\sum_{1}^{5} \Delta y_i}{n-1} = \frac{10,8}{5} = 2,16$$

$$2)\ \alpha = \frac{\sum_{1}^{6} y_i}{n} - \beta . \frac{n+1}{2} = \frac{44,1}{6} - 2,16\ .\ \frac{7}{2} =$$

$$7,35 - 7,56 = -0,21$$

ἄρα : $\check{y}_i = -0,21 + 2,16\, t_i$

Διὰ νὰ μετρήσωμεν νῦν τὴν ἐπιτευχθεῖσαν προσέγγισιν ἀναπαραστάσεως ἀναλυτικῶς τῆς δοθείσης χρονολογικῆς σειρᾶς ὑπὸ τῆς : $\check{y}_i = -0,21 + 2,16t_i$ καθορίζομεν τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου ἐκτιμήσεως s_y διδόμενον ὑπὸ

$$s_y^2 = \frac{\Sigma\,(y_i - \check{y}_i)^2}{n-2} = 0,005750 \text{ ἤτοι } s_y = \pm\ 0,0758 \text{ περίπου.}$$

Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω δεδομένων ἐφαρμόζομεν νῦν τὴν μέθοδον τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων εὑρίσκοντες $\bar{\bar{y}}_i = -0{,}199 + 2{,}157\ t_i$. Τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου ἐκτιμήσεως δίδεται ὑπὸ $s_y^{*2} = \dfrac{\Sigma (y_i - \bar{\bar{y}}_i)^2}{n-2} = 0{,}005714$, δηλαδὴ

$$s_y^* = \pm\ 0{,}0756 .$$

Δηλ. τὸ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων προκῦψαν μέσον σφάλμα τετραγώνου ἐκτιμήσεως τῆς ἐπιτευχθείσης ἀναπαραστάσεως εἶναι μικρότερον μόνον κατὰ 0,0002 τοῦ διὰ τῆς προτεινομένης μεθόδου ἐπιτευχθέντος.

8. ***Τάσις καμπυλόγραμμος β' βαθμοῦ*** : Ὑποθέσωμεν καὶ αὖθις ὅτι τὰ δεδομένα τῆς χρονολογικῆς σειρᾶς πληροῦν τὸ ἀντίστοιχον κριτήριον διὰ καμπυλόγραμμον τάσιν β' βαθμοῦ, κατὰ προσέγγισιν. Τούτου τεθέντος θὰ ἔχωμεν καὶ πάλιν n τιμὰς (t_i, y_i), ἑκάστη ὧν, ἐξ ὑποθέσεως, ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν

$$y_i = \alpha + \beta t_i + \gamma t_i^2 .$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν καὶ πάλιν τὰς κάτωθι n σχέσεις :

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 = \alpha + \beta t_1 + \gamma t_1^2 \quad \text{ἢ} \\
\qquad \Delta y_1 = \beta\,(t_2 - t_1) + \gamma\,(t_2^2 - t_1^2) = \beta + \gamma\,(t_2 + t_1) \\
y_2 = \alpha + \beta t_2 + \gamma t_2^2 \quad \text{ἢ} \\
\qquad \Delta y_2 = \beta\,(t_3 - t_2) + \gamma\,(t_3^2 - t_2^2) = \beta + \gamma\,(t_3 + t_2) \\
y_3 = \alpha + \beta t_3 + \gamma t_3^2 \quad \text{ἢ} \\
\qquad \Delta y_3 = \beta\,(t_4 - t_3) + \gamma\,(t_4^2 - t_3^2) = \beta + \gamma\,(t_4 + t_3) \\
y_4 = \alpha + \beta t_4 + \gamma t_4^2 \quad \text{ἢ} \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
y_{n-1} = \alpha + \beta t_{n-1} + \gamma t_{n-1}^2 \quad \text{ἢ} \\
\qquad \Delta y_{n-1} = \beta\,(t_n - t_{n-1}) + \gamma\,(t_n^2 - t_{n=1}^2) = \beta + \gamma(t_n + t_{n-1}) \\
y_n = \alpha + \beta t_n + \gamma t_n^2 \quad \text{ἢ}
\end{array}\right\} \begin{array}{c} (n-1) \\ \text{ἐν ὅλῳ σχέσεις} \\ (\alpha) \end{array}$$

Τῶν ἄνω, ἐν ὅλῳ, (n—1) σχέσεων λαμβάνομεν καὶ αὖθις τὰς πρώτας διαφορὰς ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ θεωροῦμεν τὰς δευτέρας διαφορὰς τῆς y_i διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = \beta + \gamma\,(t_3 + t_2) - \beta - \gamma\,(t_2 + t_1) = \gamma(t_3 - t_1) \\
\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \gamma(t_4 - t_2) \\
\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \gamma(t_5 - t_3) \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \gamma(t_n - t_{n-2})
\end{array}\right\} \begin{array}{c} (n-2) \text{ ἐν ὅλῳ} \\ \text{σχέσεις} \end{array}$$

τὰς ἄνω (n—2) σχέσεις ἀθροίζομεν νῦν κατὰ μέλη λαμβάνοντες

$$\sum_{1}^{n-2} \Delta^2 y_i = \gamma\,(t_3-t_1+t_4-t_2+t_5-t_3+\dots+t_n-t_{n-2}) \quad [i=1,2,3\dots(n-2)]$$

$$= \gamma\,[t_n + t_{n-1} - (t_1+t_2)] \qquad (\beta)$$

ἐκ τῆς σχέσεως (β) λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ γ.

Ἐὰν νῦν τὰς σχέσεις (α) ἀθροίσωμεν κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\sum_{1}^{n-1} \Delta y_i = (n-1)\beta+\gamma\,[t_1+t_n+2(t_2+t_3+\dots+t_{n-1})], \quad [i=1,2,3\,(n-1)]$$

$$= (n-1)\beta+\gamma\,[t_1+t_n+2\Sigma t_\kappa] \quad [\kappa=2,3,\dots(n-1)].$$

Ἐξ ἧς σχέσεως λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ β, γνωστῆς ἤδη οὔσης τῆς τιμῆς γ. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τώρα τὴν τιμὴν τοῦ α, ἀθροίζομεν τήν: $y_i=\alpha+\beta t_i+\gamma t_i^2$ κατὰ μέλη διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i (i=1, 2, 3 . . . n), ὅτε ἔχομεν

$$\sum_{1}^{n} y_i = n\alpha + \beta\Sigma t_i + \gamma\Sigma t_i^2$$

ἀλλὰ $\quad \Sigma t_i^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \quad$ καὶ $\quad \Sigma t_i = \dfrac{n(n+1)}{2}.$

Ἑπομένως $\quad \alpha = \dfrac{\sum_{1}^{n} y_i}{n} - \beta\,.\,\dfrac{n+1}{2} - \gamma\,.\,\dfrac{(n+1)\,(2n+1)}{6}.$

9. ***Ἐφαρμογή***: Θεωρήσωμεν τὴν μαθηματικὴν συνάρτησιν $y_i=3+2t_i+4t_i^2$ τοῦ t_i λαμβάνοντες τὰς τιμὰς 1, 2, 3, . . . 7. Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν,

t_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
1	9	14	8
2	23	22	8
3	45	30	8
4	75	38	8
5	113	46	8
6	159	54	
7	213		
28	637	204	40

ἐφαρμόζοντες τὰ ἀνωτέρω εἰς τεθέντα:

1) $\sum_{1}^{n-2} \Delta^2 y_i = \gamma\,[t_n+t_{n-1}-(t_1+t_2)]$

ἢ $40 = \gamma\,[7+6-(1+2)] = \gamma\,10$

δηλ. $\gamma = 4$.

2) $\sum_{1}^{n-1} \Delta\, y_i = (n-1)\beta+\gamma[t_1+t_n+2\Sigma t_\kappa]$

$204=6\beta+4[1+7+2(2+3+4+5+6)]$

$=6\beta+4[8+2\,.\,20]=6\beta+4\,.\,48=6\beta+192$

ἢ $204-192=12=6\beta$ ἢ $\beta=2$

3) $\sum_{1}^{n} y_i = n\alpha+\beta\Sigma t_i+\gamma\Sigma t_i^2$

$637 = 7\alpha+\beta\,.\,28+\gamma\,140,$

διότι $\quad \Sigma t_i^2 = \dfrac{7\,.\,8\,.\,15}{6} = 140, \quad$ δηλ. $\quad 637 = 7\alpha + 56 + 560$

ἢ $\quad 7\alpha = 637 - 617 = 21 \quad$ ἤτοι $\quad \alpha = 3$.

Ἑπομένως $\quad y_i = 3 + 2t_i + 4t_i^2$. Δηλ. ἡ τιμὴ τοῦ γ εἶναι ἡ τυχοῦσα δευτέρα διαφορά, διαιρεθεῖσα διὰ τοῦ βαθμοῦ (2) τῆς ληφθείσης ἐξισώσεως τάσεως.

10. ***Ἐφαρμογή*** : Θεωρήσωμεν νῦν τὴν κάτωθι ἐμπειρικὴν συνάρτησιν (χρονολογικὴν σειράν).

t_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
1	9,8	9,4	3,7
2	19,2	13,1	3,3
3	32,3	16,4	4,6
4	48,7	21,0	4,7
5	69,7	25,7	2,6
6	95,4	28,3	4,8
7	123,7	33,1	4,3
8	156,8	37,4	—
9	194,2	—	—
45	194,2	184,4	28,0

Ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα :

$$1)\quad \gamma = \frac{\sum_{1}^{n-2} \Delta^2 y_i}{[t_n + t_{n-1} - (t_1 - t_2)]} = \frac{28}{9+8-(1+2)} = \frac{28}{14} = 2$$

$$2)\quad \beta = \frac{\sum_{1}^{n-1} \Delta y_i}{n-1} - \frac{\gamma}{(n-1)}[t_1 + t_n + 2\Sigma t_\kappa] = \frac{184,4}{8} - \frac{2}{8}[1+9+2.35] = 23,05 - 20 = 3,05$$

$$3)\quad \alpha = \frac{\sum_{1}^{n} y_i}{n} - \beta \,.\, \frac{n+1}{2} - \gamma \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{749,8}{9} - 3,05 \,.\, 5 - 2 \,.\, \frac{10 \,.\, 19}{6}$$

$$= 83,33 - 15,25 - 63,33 = 83,33 - 78,58 = 4,75.$$

Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις τῆς τάσεως εἶναι : $\check{y}_i = 4,74 + 3,05t_i + 2t_i^2$

ὅσον ἀφορᾷ νῦν τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνου ἐκτιμήσεως s_y τοῦτο δίδεται ὑπὸ

$$s_y^2 = \frac{\Sigma(y_i - \check{y}_i)^2}{n-3} = 0,14 \qquad \text{δηλ.} \qquad s_y = \pm\, 0,37 .$$

Ἐπὶ τῶν αὐτῶν δεδομένων ἐφαρμόζομεν καὶ αὖθις τὴν μέθοδον τῶν ἐλ. τετραγώνων εὑρίσκοντες : $\overset{=}{y}_i = 4,98 + 2,998t_i + 2t_i^2$.

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο ἐξισώσεων διαπιστοῦμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν παραμέτρων εἶναι ἐγγύτατα ἀλλήλων. Ἤδη προσδιορίζομεν τὸ μέσον σφάλμα τετραγώνων ἐκτιμήσεως τῆς τελευταίας s_y^* διδόμενον ὑπό :

$$s_y^{*2} = \frac{\Sigma(y_i - \overset{=}{y}_i)^2}{n-3} = 0,1159, \qquad \text{δηλ.} \qquad s_y^* = \pm\, 0,34 .$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν δύο μέσων σφαλμάτων τετραγώνου ἐκτιμήσεως προκύπτει ὅτι τὸ τοιοῦτον, ὅπερ προκύπτει ἐκ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχ. τετραγώνων, εἶναι μικρότερον κατὰ $\pm$ 0,03.

11. ***Ἐκθετικὴ τάσις*** : Ἐὰν νῦν ἡ χρονολογικὴ σειρὰ πληροῖ τὸ κριτήριον

τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως, θὰ θέσωμεν $y_i = \alpha\beta^{t_i}$ ἢ $\lambda o\gamma\, y_i = \lambda o\gamma\, \alpha + t_i\, \lambda o\gamma\, \beta$ ὁπόταν διὰ τὰς n τιμὰς (t_i, λογ. y_i) θὰ ἔχωμεν τὰς κάτωθι σχέσεις :

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda o\gamma\, y_1 = \lambda o\gamma\, \alpha + t_1\, \lambda o\gamma\, \beta \quad \text{ἢ} \\
\qquad \Delta\, \lambda o\gamma\, y_1 = \lambda o\gamma\, y_2 - \lambda o\gamma\, y_1 = \lambda o\gamma\, \beta\, (t_2 - t_1) = \lambda o\gamma\, \beta \\
\lambda o\gamma\, y_2 = \lambda o\gamma\, \alpha + t_2\, \lambda o\gamma\, \beta \quad \text{ἢ} \\
\qquad \Delta\, \lambda o\gamma\, y_2 = \lambda o\gamma\, y_3 - \lambda o\gamma\, y_2 = \qquad\qquad = \lambda o\gamma\, \beta \\
\lambda o\gamma\, y_3 = \lambda o\gamma\, \alpha + t_3\, \lambda o\gamma\, \beta \quad \text{ἢ} \\
\qquad \Delta\, \lambda o\gamma\, y_3 = \lambda o\gamma\, y_4 - \lambda o\gamma\, y_3 = \qquad\qquad = \lambda o\gamma\, \beta \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots \\
\lambda o\gamma\, y_n = \lambda o\gamma\, \alpha + t_n\, \lambda o\gamma\, \beta \quad \text{ἢ} \\
\qquad \Delta\, \lambda o\gamma\, y_{n-1} = \lambda o\gamma\, y_n - \lambda o\gamma\, y_{n-1} \qquad\qquad = \lambda o\gamma\, \beta
\end{array}\right\} \begin{array}{c}(n-1) \\ \text{ἐν ὅλῳ} \\ \text{σχέσεις}\end{array}$$

Ἀθροίζοντες νῦν τὰς ἄνω σχέσεις κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\sum_{i}^{n-1} \lambda o\gamma\, \Delta y_i = (n-1)\, \beta. \qquad [\, (i=1, 2, 3 \ldots (n-1)\,]$$

ἐξ ἧς σχέσεως λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ λογ β. Ἐὰν νῦν τὴν : $\lambda o\gamma\, y_i = \lambda o\gamma \alpha + t_i\, \lambda o\gamma\, \beta$ ἀθροίσωμεν κατὰ μέλη διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ i ($i = 1, 2, 3, \ldots n$), λαμβάνομεν τέλος :

$$\sum_{i}^{n} \lambda o\gamma\, y_i = n\, \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma\, \beta\, \Sigma t_i = n\, \lambda o\gamma\, \alpha + \lambda o\gamma\, \beta \,.\, \frac{n\,(n+1)}{2}$$

ἢ

$$\lambda o\gamma\, \alpha = \frac{\sum_{i}^{n} \lambda o\gamma\, y_i}{n} - \lambda o\gamma\, \beta . \frac{n+1}{2}$$

12. ***Ἐφαρμογή***: Ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω εἰς τὴν μαθηματικὴν συνάρτησιν.

$y_i = 3 \,.\, 2^{t_i}$. ($t = 1, 2, 3 \ldots 7$).

t_i	y_i	$\lambda o\gamma\, y_i$	$\Delta\, \lambda o\gamma\, y_i$
1	6	0,77815	0,30103
2	12	1,07918	0,30103
3	24	1,38021	0,30103
4	48	1,68124	0,30103
5	96	1,98227	0,30103
6	192	2,28330	0,30103
7	384	2,58433	
28		11,76868	1,80618

θὰ ἔχωμεν :

$$\lambda o\gamma\, \beta = \frac{\sum_{i}^{n-1} \Delta \lambda o\gamma y_i}{n-1} = \frac{1,80618}{6} = 0,30103$$

ἢ $\beta = 2$

$$\lambda o\gamma\, \alpha = \frac{\sum_{i}^{n} \lambda o\gamma y_i}{n} - \lambda o\gamma\, \beta . \frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{11,76868}{5} - 0,30103 . 4$$

$$= 1,68124 - 1,20412 = 0,47712$$

δηλ. $\alpha = 3$

Ἑπομένως $\check{y}_i = 3 \,.\, 2^{t_i}$

Συμπεράσματα

Ἐκφράζων τὴν γνώμην τῆς ταπεινότητός μου, πιστεύω ὅτι ἡ προτεινομένη μέθοδος προσδιορισμοῦ τῶν παραμέτρων τῶν τάσεων, **ἀπολύτως πρωτότυπος**, ἔχει ὑπὲρ ἑαυτῆς τὸ πλεονέκτημα τῆς ἁπλότητος καὶ τῆς ταχύτητος ἐν τοῖς ὑπολογισμοῖς.

Δὲν παραγνωρίζω, βεβαίως, τὸ γεγονὸς ὅτι αὐστηρὸς ἀκριβέστερος προσδιορισμὸς τῶν παραμέτρων τῶν τάσεων ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλ. τετραγώνων, ἀλλὰ ἡ τοιαύτη ἀκρίβεια ἐξικνουμένη εἰς τὸ τελευταῖον ἀκέραιον ψηφίον καὶ τὰ δεκαδικὰ μέρη τῆς ὑπολογιζομένης θεωρητικῆς τιμῆς, ἐλαχίστην, ἂν ὄχι οὐδεμίαν, κέκτηται οὐσιαστικὴν σημασίαν εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς, ὅπου τὰς καθοριζομένας θεωρητικὰς τιμάς, στρογγυλεύομεν πάντοτε εἰς τὸν ἐγγύτερον ἀκέραιον, οὐδέποτε χρησιμοποιοῦντες κλασματικοὺς ἀριθμούς.

Ἡ προτεινομένη μέθοδος ἀπορρέει ἐκ τῆς ἰδιότητος ἑκάστης τῶν καθ' ἕκαστον θεωρηθεισῶν συναρτήσεων, χωρὶς νὰ υἱοθετῇ οὐδεμίαν ὑπόθεσιν. Ἑπομένως ὅσον ἡ δοθεῖσα χρονολογικὴ σειρὰ πληροῖ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον τὸ ἀντίστοιχον κριτήριον, ἡ βάσει τῆς προτεινομένης μεθόδου καθοριζομένη ἐξίσωσις ταύτης, πιστότερον ἀναπαριστᾷ τὰ δεδομένα. Σημειωτέον ὅμως ὅτι τὰ ἐκτεθέντα κριτήρια εἶναι ἐξ ἴσου ἀπαραίτητα καὶ κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ἢ καὶ μιᾶς οἱασδήποτε τῶν λοιπῶν ἐν χρήσει τοιούτων.

Ἐκτὸς τούτου αἱ μέθοδοι τῶν μέσων σημείων ὅσον καὶ τῶν ὁμάδων ἐξισώσεων ἂν καὶ ὑπολείπωνται, ὑπὸ ἄποψιν ἀκριβείας τῆς μεθόδου τῶν ἐλ. τετραγώνων, μήπως διὰ τοῦτο ἔχουσιν παύσει νὰ χρησιμοποιῶνται εἰς τὴν Στατιστικὴν καὶ Δημογραφίαν ; Πολλοῦ γε καὶ δή.

Μοναδικὸς σκοπὸς τῆς παρούσης ἦτο νὰ καταδείξω ὅτι ὑφίστανται μέθοδοι ἁπλαῖ, ταχεῖαι καὶ εὔκολοι, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τόν, βάσει τῶν δεδομένων τῶν χρονολογικῶν σειρῶν, προσδιορισμὸν τῶν παραμέτρων τῶν ἀντιστοίχων πρὸς ταύτας τάσεων, χωρὶς αἱ καθοριζόμεναι τάσεις νὰ ὑπολείπωνται σοβαρῶς ὑπὸ ἄποψιν ἀκριβείας τῶν διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλ. τετρωγώνων προσδιοριζομένων τοιούτων.