Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ κ. κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

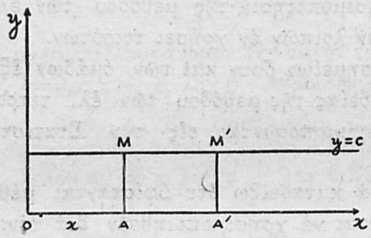
5. (Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

Ἀπόδειξις τῶν τύπων 1 — 4

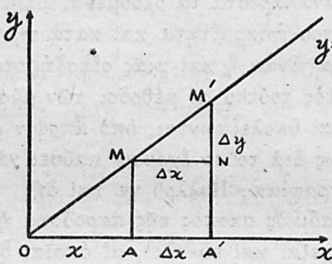
Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοὺς τύπους αὐτοὺς χρησιμοποιοῦμεν τὴν γενικὴν πορείαν εὑρέσεως τῆς παραγώγου.

Ἀπόδειξις 1η) Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = c$. Ἔστω Μ ἓν σημεῖον μὲ τεταγμένην x καὶ Δx ἡ αὔξησις. Ἡ αὔξησις Δy εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Ἑπομένως $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \quad (\Delta x \neq 0) \quad \text{καὶ} \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$



Σχ. 31



Σχ. 32

Ἀπόδειξις 2α) Ἔστω $y = x$. Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ ἔχῃ τεταγμένην x, τότε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{dy}{dx} = 1 .$$

Ἀπόδειξις 3η) Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = u + v$, ὅπου u καὶ v εἶναι συναρτήσεις τοῦ x. Ἔστω x ἡ ἀρχικὴ τιμὴ τοῦ x καὶ Δx ἡ μεταβολὴ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Ὀνομάζομεν μὲ Δu, Δv τὰς ἀντιστοίχους μεταβολὰς τῶν u καὶ v. Τότε ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως y εἶναι :

$$\Delta y = [\,(u + \Delta u) + (v + \Delta v)\,] - (u + v) .$$

Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος διὰ Δx καὶ λαμβάνοντες τὰ ὅρια ὅταν $\Delta x \to 0$ ἔχομεν :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} , \qquad \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \underset{\Delta x \to 0}{\text{ὁρ.}} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

καὶ $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} .$$

Ἀπόδειξις 4η) Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = uv$. Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν πορείαν ὅπως εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς (3) καὶ τὸν ἴδιον συμβολισμὸν ἔχομεν

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - (uv) = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

διαιροῦντες διὰ Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta u} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$$

καὶ λαμβάνοντες τὰ ὅρια

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad (\text{διατί});$$

Ἀπόδειξις 4΄) Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $u = c$ ἡ παράγωγος

$$\frac{du}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{d(cv)}{dx} = c\frac{dv}{dx}$$

Ἀπόδειξις 5η) $y = v^{\mu}$

Ἔστω Δy ἡ μεταβολὴ τοῦ y ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν μεταβολὴν Δx.

Τότε, $$\Delta y = (v + \Delta v)^{\mu} - v^{\mu}$$

Ὑποθέσωμεν ὅτι, μ εἶναι ἀκέραιος καὶ ἂς χρησιμοποιήσωμεν τὸ διώνυμον τοῦ Newton

$$\Delta y = \left[v^{\mu} + \mu v^{\mu-1}\Delta v + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}v^{\mu-2}(\Delta v)^2 + \ldots + (\Delta v)^{\mu} \right] - v^{\mu}$$

$$= \mu v^{\mu-1}\Delta v + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}v^{\mu-2}(\Delta v)^2 + \ldots + (\Delta u)^{\mu}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu v^{\mu-1}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}v^{\mu-2}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\Delta v + \ldots + \frac{\Delta v}{\Delta x}(\Delta v)^{\mu-1}.$$

Ὅλοι οἱ ὅροι ἔχουν ὡς ὅριον τὸ μηδὲν ἐκτὸς τοῦ πρώτου ὅταν $\Delta x \to 0$.

Ἑπομένως, $$\frac{dy}{dx} = \mu v^{\mu-1}\frac{dv}{dx}.$$

Ἡ ἀπόδειξις αὐτὴ ἰσχύει δι᾽ ἀκεραίας θετικὰς τιμὰς τοῦ μ ἀλλὰ ὁ τύπος ἰσχύει δι᾽ οἱασδήποτε πραγματικὰς τιμὰς τοῦ μ ὡς θὰ ἴδωμεν ἀργότερον.

Ἀπόδειξις 5΄) Ἐὰν $v = x$

τότε $$\frac{dv}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{d}{dx}x^{\mu} = \mu x^{\mu-1}$$

Ἀπόδειξις 6η) Ἐφαρμόζομεν τὴν αὐτὴν πορείαν εἰς τὴν συνάρτησιν $y = \frac{u}{v}$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta u}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

καὶ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Ἀπόδειξις 6΄) Ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ (6) καὶ ἰσοδύναμος τοῦ (4΄).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον δοθείσης συναρτήσεως συνήθως χρησιμοποιοῦμεν ὄχι ἕνα ἐκ τῶν τύπων αὐτῶν ἀλλὰ συνδυασμοὺς τῶν ἀνωτέρω τύπων εἰς κατάλληλον διαδοχήν.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

Παράδειγμα 1ον) Ἔστω $y = 9x^5 - 5x^4 + 2x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(9x^5) - \frac{d}{dx}(5x^4) + \frac{d}{dx}(2x^2) \qquad (\text{χρησ. } 3)$$

$$= 9\frac{d}{dx}(x^5) - 5\frac{d}{dx}(x^4) + 2\frac{d}{dx}(x^2) \qquad (\text{χρησ. } 4')$$

$$= 9(5x^4) - 5(4x^3) + 2(2x) \qquad (\text{χρησ. } 5)$$

$$= 45x^4 - 20x^3 + 4x$$

Παράδειγμα 2ον) $y = (5x^3 + 3)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(5x^3+3)^2 \frac{d}{dx}(5x^3+3) \qquad (\text{χρησ. } 5)$$

$$= 3(5x^3+3)^2(15x^2)$$

$$= 45x^2(5x^3+3)^2 \qquad (\text{χρησ. } 3)$$

Παράδειγμα 3ον) $y = x\sqrt{x^2+3}$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+3}\,\frac{dx}{dx} \qquad (\text{χρησ. } 4)$$

$$= x\,\frac{1}{2}(x^2+3)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x^2+3) + \sqrt{x^2+3} \qquad (\text{χρησ. } 4', 2)$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} + \sqrt{x^2+3} = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

Παράδειγμα 4ον) $f(x) = \dfrac{5-x}{5+x}$

$$f'(x) = \frac{(5+x)\frac{d}{dx}(5-x) - (5-x)\frac{d}{dx}(5+x)}{(5+x)^2} = -\frac{10}{(5+x)^2} \qquad (\text{χρησ. } 6)$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

Ἄσκησις 1η) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων διὰ τῆς γενικῆς μεθόδου :

1) $y = x^2 + 1$

2) $y = x^2 + 3x + 1$

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

4) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

5) $f(x) = x^2 + 3$

6) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$

Ἄσκησις 2α) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἀνωτέρω τύπων.

1) $y = 4x^6 - 5x^4 + 2x^2$

2) $y = 3t^2 - 2t + 4$

3) $f(s) = \dfrac{1}{s} + s$

4) $x = x^3 + 3x^2 + 1 - \dfrac{15}{x} + \dfrac{10}{x^2}$

5) $y = x^{1/2} + 3x^{2/3}$

6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 13x^{5/3}$

7) $y = t^{-3} + t^{-4} + t^{-5}$

8) $f(x) = \dfrac{4}{x^4} + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{2}{x^2}$

9) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

10) $f(x) = \dfrac{x - \alpha}{x + \alpha}$

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 27}$

12) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 4}}{x^2 - 4}$

Ἄσκησις 3η) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς ἔναντι σημειουμένας τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

1) $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(x=0)$

2) $y = \dfrac{12}{t^2}$ $(t=4)$

3) $f(s) = \sqrt{s^3 + 2}$ $(s=2)$

4) $f(x) = x^2 + \dfrac{75}{x^3}$ $(x=5)$

5) $y = x^3 - x^2 + x - 1$ $(x=1$

6) $y = \dfrac{32}{x^2} - \dfrac{16}{x} + 8$ $(x=1/2)$

Προβλήματα

Πρόβλημα 1ον) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ τύπος (3) ἰσχύει δι' ὁσασδήποτε συναρτήσεις πεπερασμένας τὸ πλῆθος.

Πρόβλημα 2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος $y = (x^2 + 1)^2$ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου (5) καὶ ἄνευ αὐτῆς. Διατὶ ἡ παράγωγος δὲν ἰσοῦται μὲ $2(x^2+1)$;

Πρόβλημα 3ον) Δύναται ἡ συνάρτησις $y = x^2 + 2x - 3$ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν συναρτήσεων u καὶ v ; Δύναται ἡ γραφική της παράστασις νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν γραφικῶν παραστάσεων τῶν $u = x^2$ καὶ $v = 2x - 3$, διὰ προσθέσεως τῶν τεταγμένων ; Κατὰ τίνα τρόπον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τριῶν συναρτήσεων ;

Πρόβλημα 4ον) Διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἐπαγωγῆς καὶ τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (4) νὰ ἀποδειχθῇ ὁ τύπος (5).

Πρόβλημα 5ον) Ἐὰν u, v, καὶ w εἶναι τρεῖς συναρτήσεις παραγωγίσιμοι, δείξατε ὅτι $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx}$

Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου αὐτοῦ νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων

$y = x(x-2)(x+3)$, $y = x^2(x-1)(x+2)$, $y = x(x^2+1)(x^3+2)$.

Πρόβλημα 6ον) Νὰ ἐπεκταθῇ τὸ πρόβλημα (5) διὰ τέσσαρας συναρτήσεις καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως :

$$y = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως ἥτις εἶναι συνάρτησις μιᾶς συναρτήσεως (τύπος 7).

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις y δὲν εἶναι ἀπ' εὐθείας συνάρτησις τοῦ x ἀλλὰ ὅτι εἶναι συνάρτησις τοῦ t, ἥτις εἶναι συνάρτησις τοῦ x π.χ. ἔστω $y = t^2 - 4t + 3$ καὶ $t = 5x^2 + 2$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν λάβωμεν τὴν x ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τότε ἡ y εἶναι συνάρτησις τῆς x διὰ μέσου τοῦ t. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον τῆς y ὡς πρὸς τὴν x θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν μεταβλητὴν t διὰ ἀντικαταστάσεως καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω.

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἀποφύγωμεν τὴν κοπιώδη αὐτὴν πορείαν διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ τύπου

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Οὕτω, διὰ τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν ἔχομεν :

$$\frac{dy}{dt} = 2t - 4, \quad \frac{dt}{dx} = 10x$$

καὶ $\frac{dy}{dx} = (2t - 4) . 10x = [\,2(5x^2 + 2) - 4\,] . 10x = 10x^2 . 10x = 100x^3$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω τύπου παρατηροῦμεν ὅτι οἱ λόγοι

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ καὶ $\frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσοι ὅταν $\Delta x \neq 0$ καὶ $\Delta t \neq 0$.

Τὰ ἀντίστοιχα ὅρια εἶναι $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dt}{dx}$ καὶ ἑπομένως : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

Ἡ παράγωγος τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως (τύπος 8)

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν y τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x διὰ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $x = \varphi(y)$. Ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὡς πρὸς y τότε εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστροφον συνάρτησιν $y = f(x)$. Ἡ λύσις ὅμως τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὡς πρὸς y εἶναι πολλάκις δυσκολωτάτη, ἐνίοτε δὲ ἀδύνατος. Ὡς ἐκ τούτου χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς ἀνωτέρω, δεδομένου ὅτι $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1.$

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ τῆς συναρτήσεως y ἥτις ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x = y^3 - 2y^2$.

Ἐὰν λάβωμεν τὴν y ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν $\frac{dx}{dy} = 3y^2 - 4y$ συμπεραίνομεν διὰ τοῦ τύπου (8) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2-4y}$.

Ἡ παράγωγος τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων

Ὡς εἴδομεν προηγουμένως, μία πεπλεγμένη συνάρτησις εἶναι δύσκολον, ἂν μὴ ἀδύνατον, νὰ σχισθῇ εἰς ἁπλὰς συναρτήσεις. Ὡς ἐκ τούτου, πρὸς παραγώγισιν πεπλεγμένης συναρτήσεως, λαμβάνομεν τὰς παραγώγους τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἥτις ὁρίζει τὴν συνάρτησιν y, θεωροῦντες τὴν y συνάρτησιν τοῦ x μὲ παράγωγον $\frac{dy}{dx}$ καὶ κατόπιν λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς $\frac{dy}{dx}$.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς πεπλεγμένης συναρτήσεως τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x^2 + 2yx + y^3 = 0$.
Λαμβάνοντες τὰς παραγώγους τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς x, ἔχομεν

$$2x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

καὶ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+2y}{2x+3y^2}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων εἶναι ἐνδεχόμενον ἡ ἐξίσωσις $f(x, y) = 0$ νὰ μὴν ὁρίζῃ τὴν συνάρτησιν y, ὡς ἐκ τούτου δὲ ἡ παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν. Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν τοιαύτης συναρτήσεως θὰ πρέπει πρῶτον νὰ ἐξετάζωμεν τὴν ὕπαρξιν συναρτήσεως.

Τὰ κατωτέρω δύο παραδείγματα ἐπεξηγοῦν τὴν περίπτωσιν αὐτήν.

Παράδειγμα 1ον) $x^4 + y^2 = 0$.

Ἐὰν λάβωμεν τὰς παραγώγους εὑρίσκομεν $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^3}{y}$. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται μόνον μὲ τὸ ζεῦγος (0,0) ἐνῷ ἡ παράγωγος εἶναι ἀπροσδιόριστος διὰ τὰς τιμὰς αὐτάς.

Παράδειγμα 2ον) $x^2 + (y + x)^2 - 2xy = y^2 + 32$.
Δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν νὰ ὁρίζεται τὸ y ὡς συνάρτησις τοῦ x, δεδομένου ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν $x^2 = 16$ ἥτις δὲν περιέχει τὸ y καὶ καθιστᾷ τὸ x σταθεράν.

Ἀσκήσεις

Ἄσκησις 1η) Δι' ἑκάστην τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως y ὡς πρὸς x.

1) $y = u^3, \quad u = 1 + 2\sqrt{x}$ 5) $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$

2) $y = \sqrt{2u - u^2}, \quad u = x^3 - x$ 6) $x = \dfrac{3}{3 + y}$

3) $y = \dfrac{3u}{u + 4} \quad u = \dfrac{2}{x^2}$ 7) $x = \dfrac{y + 1}{y - 1}$

4) $x = 15y + 5y^3 + 3y^5$ 8) $y = \dfrac{\alpha - u}{\alpha + u}, \quad u = \dfrac{\beta - x}{\beta + x}$.

Ἄσκησις 2α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου ἑκάστης τῶν συναρτήσεων διὰ τὰς ἀντιστοίχους τιμάς :

1) $x = \dfrac{8}{y^2 + 4}$ (1, 2) 5) $x^3 - \alpha xy + 3\alpha y^2 = 3\alpha^2$ (α, α)

2) $x = y^2 - 6y + 8$ (3, 5) 6) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 5$ (2, 4)

3) $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$ (2, —1) 7) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 6y = 0$ (0, 0)

4) $x^2 - 2y^3 - 8y^2 = 0$ (—4, —2) 8) $x^2 - 2\sqrt{xy} - y^2 = 52$ (8, 2)

Ἄσκησις 3η) Δι' ἑκάστην τῶν κάτωθι συναρτήσεων νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος: α) Ἀφοῦ λυθῇ ὡς πρὸς y. β) Ἄνευ λύσεως αὐτῆς ὡς πρὸς y. γ) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ ἴδιον.

1) $x^2 + y^2 = \alpha^2$ 5) $xy - y - 2x - 5 = 0$

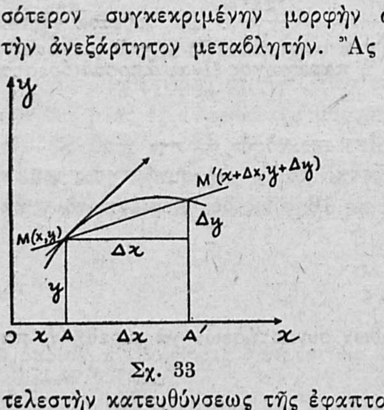
2) $y^2 = 2px$ 6) $\dfrac{x^3}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

3) $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ 7) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

4) $x^2 - y^2 = \alpha^2$ 8) $x^2 + y^2 = 6x$.

γ. Πρακτικαὶ ἐφαρμογαὶ τῆς παραγώγου

Εἰς τὰ ἐφηρμοσμένα μαθηματικά, ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου λαμβάνει περισσότερον συγκεκριμένην μορφὴν ὡς λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν. Ἂς ἐξετάσωμεν πρῶτον τὴν γεωμετρικὴν σημασίαν τῆς παραγώγου. Ἐκ τοῦ σχήματος 33 βλέπομεν ἀμέσως ὅτι τὸ κλάσμα $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς τεμνούσης ΜΜ' ὅταν $\Delta x \to 0$ καὶ τὸ Μ' κινῆται συνεχῶς ἐπὶ τῆς καμπύλης πλησιάζον συνεχῶς τὸ Μ. Ἡ τέμνουσα στρέφεται συνεχῶς περὶ τὸ Μ καὶ τείνει νὰ γίνῃ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ Μ. Ἑπομένως, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραγώγου εἰς τὸ σημεῖον Μ ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ.



Σχ. 33

Ὁ λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ εἶναι ὁ μέσος λόγος τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως Δy ὡς πρὸς τὴν μεταβολὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x. Οὕτω, ἐὰν διὰ μίαν αὔξησιν 0,001 τοῦ x ἔχωμεν μίαν αὔξησιν 0,005 διὰ τὴν συνάρτησιν y θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις y αὐξάνεται πέντε φορὰς συντομώτερον ἀπὸ τὸ x. Ὅταν τὸ Δx τείνῃ πρὸς τὸ 0, αἱ τιμαὶ τοῦ λόγου ἀποτελοῦν μίαν ἀκολουθίαν (βλ. πίνακα 9) τῆς ὁποίας τὸ ὅριον, ἐὰν ὑπάρχῃ, εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως. Ὥστε δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν παράγωγον συναρτήσεώς τινος ὡς τὸ ὅριον τῶν μέσων λόγων τῶν μεταβολῶν της ὡς πρὸς τὰς μεταβολὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν αἱ μεταβολαὶ αὐταὶ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐφαρμογὰς τῆς ἐννοίας ταύτης τῆς παραγώγου εὑρίσκομεν εἰς τὴν Φυσικὴν π.χ. ταχύτητα, ἐπιτάχυνσιν κ. λ. Γενικώτερον, διὰ κάθε μεταβλητὴν ποσότητα διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει ἡ ἔννοια τοῦ μέσου λόγου μεταβολῆς, ἰσχύει καὶ ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος εἶναι συνεχής.

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραγώγου διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, δίδει τὴν ὁριακὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως. Τὴν μεταβολὴν αὐτὴν ὀνομάζομεν στιγμιαίαν, ὅταν ὡς ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ λαμβάνεται ὁ χρόνος.

Σχετιζόμενοι λόγοι μεταβολῆς μιᾶς συναρτήσεως

Ὅπως εἴδομεν προηγουμένως, ἡ στιγμιαία μεταβολὴ συναρτήσεώς τινος $y = f(x)$ εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως διὰ μίαν ὡρισμένην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Συνήθως, ἡ μεταβλητὴ **x** εἶναι μία συνάρτησις τοῦ χρόνου t καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι μία συνάρτησις συναρτήσεως.

Ἑπομένως ἐὰν $x = \varphi(t)$, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου (7)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

δηλαδή, ὁ στιγμιαῖος λόγος μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως y ὡς πρὸς t εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ὁριακοῦ λόγου τῆς συναρτήσεως y ὡς πρὸς x ἐπὶ τὸν στιγμιαῖον λόγον μεταβολῆς τῆς x, ὡς πρὸς t.

Διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων μὲ τὴν βοήθειαν τῶν παραγώγων συνήθως ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν :

α) Ἀπὸ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ἐκλέγομεν τὰς δύο μεταβλητάς, τῶν ὁποίων οἱ λόγοι μεταβολῆς δίδονται, καὶ τὴν μεταβλητὴν τῆς ὁποίας ὁ λόγος μεταβολῆς ζητεῖται.

β) Ἐκφράζομεν συναρτησιακῶς τὴν σχέσιν μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν, δηλαδὴ εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $y = f(x)$ ἢ $\varphi(x, y) = 0$.

γ) Ἀπὸ τὴν εὑρεθεῖσαν συναρτησιακὴν σχέσιν, διὰ παραγωγίσεως, εὑρίσκομεν τὴν $\frac{dy}{dx}$ καὶ ἀπὸ τὸν τύπον $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}$ εὑρίσκομεν τὴν $\frac{dy}{dt}$.

δ) Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν x καὶ y καὶ τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ t εὑρίσκομεν τὸν λόγον $\frac{dy}{dt}$.

Σημείωσις. Ἡ ἀντικατάστασις τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν εἰς τὸ (δ) πρέπει νὰ γίνεται ἀφοῦ ἐκτελεσθοῦν ὅλαι αἱ ἀπαραίτητοι πράξεις διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν παραγώγων.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ον) Ἡ ἀκτὶς μεταλλικοῦ δίσκου διαστέλλεται ὑπὸ τῆς θερμότητος κατὰ ἕνα λόγον 0,005 ἑκατοστομέτρων κατὰ δευτερόλεπτον. Κατὰ ποῖον λόγον διαστέλλεται ἡ ἐπιφάνεια ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ δίσκου εἶναι 4 ἑκατοστόμετρα ;

α) Παριστῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου μὲ y καὶ τὴν ἀκτῖνα μὲ x.

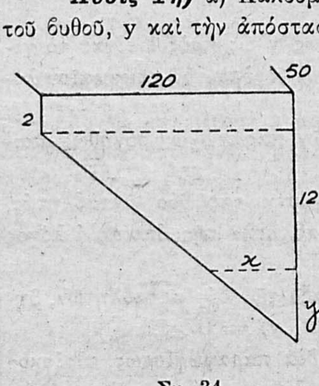
β) Τότε $y = \pi x^2$.

γ) Λαμβάνομεν τὰς παραγώγους ὡς πρὸς τὸν χρόνον, $\dfrac{dy}{dt} = 2\pi y \dfrac{dx}{dt}$, δηλαδὴ ὁ λόγος κατὰ τὸν ὁποῖον διαστέλλεται ὁ δίσκος εἶναι $2\pi x$ ἐπὶ τὸν στιγμιαῖον λόγον μεταβολῆς τῆς ἀκτῖνος.

δ) Ἐκ τοῦ προβλήματος μᾶς δίδονται $x = 4$ ἑκ., $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}005$ ἑκ. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν, $\dfrac{dx}{dt} = 2\pi \,.\, 4 \,.\, 0{,}005 = 0{,}040$ τετ. ἑκ.

Παράδειγμα 2ον) Ὁ βυθὸς κολυμβητηρίου μήκους 120 μέτρων καὶ πλάτους 50 μέτρων εἶναι ἐσχηματισμένος ἐν εἴδει κεκλιμένου ἐπιπέδου. Τὰ ὑψόμετρα τοῦ κατωτέρου καὶ ἀνωτέρου ἄκρου τοῦ βυθοῦ εἶναι ἀντιστοίχως 12 καὶ 2 μέτρα ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ὅταν τὸ κολυμβητήριον εἶναι πλῆρες. Τὸ κολυμβητήριον πληροῦται διὰ σωλῆνος ροῆς 60 κυβ. μέτρων κατὰ λεπτόν. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ταχέως ἀνέρχεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ὅταν τὸ βάθος ἀπὸ τὸ κατώτερον ἄκρον εἶναι : 1) 4 μέτρα, 2) 11 μέτρα.

Λύσις 1η) α) Καλοῦμεν τὸ βάθος, μετρούμενον ἐκ τοῦ κατωτέρου ἄκρου τοῦ βυθοῦ, y καὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κεκλιμένου βυθοῦ, ἐκ τῆς κατακορύφου παριστῶμεν μὲ x.



Σχ. 34

β) Ὁ ἀντίστοιχος ὄγκος ὅταν $y \leqslant 10$ εἶναι $\Omega = 1/2\, x \,.\, 0{,}50\, y$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\dfrac{x}{120} = \dfrac{y}{10}$ καὶ $x = 12\, y$.

Ἑπομένως, $\Omega = 25 \,.\, 12\, y^2 = 300\, y^2$.

γ) Λαμβάνομεν τὰς παραγώγους ὡς πρὸς τὸν χρόνον $\dfrac{d\Omega}{dt} = 600\, y \dfrac{dy}{dt}$. Δηλαδή, ὁ λόγος αὐξήσεως τοῦ ὄγκου ἰσοῦται μὲ 600 y ἐπὶ τὸν ἀντίστοιχον λόγον αὐξήσεως τοῦ ὕψους.

δ) Ἐκ τοῦ προβλήματος ἔχομεν $\dfrac{d\Omega}{dt} = 60 \dfrac{\text{κυβ}}{\text{λεπ}}$ καὶ $y = 4$ μέτρα.

Δι' ἀντικαταστάσεως

$$60 = 2\,400 \frac{dy}{dt} \quad \text{καὶ} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{60}{2\,400} = 0{,}025\ \frac{\text{μέτρα}}{\text{λεπτά}}.$$

Λύσις 2α) α) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν $y > 10$ καὶ ὁ ὄγκος Ω δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\Omega = \frac{1}{2}\, 10 \,.\, 50 \,.\, 120 + 120 \,.\, 50\, y_1$

ὅπου $y = 10 + y_1$ καὶ $\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt}$.

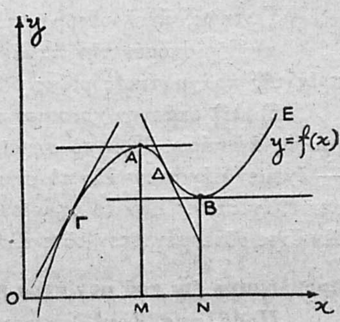
β) $\frac{d\Omega}{dt} = 120 \,.\, 50 \frac{dy_1}{dt}$.

γ) $60 = 120 \,.\, 50 \,.\, \frac{dy}{dt}$ καὶ ἑπομένως, $\frac{dy}{dt} = \frac{60}{6\,000} = 0.001 \frac{\text{μέτρα}}{\text{λεπτά}}$.

V. 5. Πρώτη μέθοδος εὑρέσεως τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς συναρτήσεως λέγεται ***σχετικὸν μέγιστον (ἢ ἐλάχιστον)*** ἐὰν εἶναι μεγαλυτέρα (ἢ μικροτέρα) ἀπὸ ὅλας τὰς ἀμέσως προηγουμένας ἢ ἑπομένας τιμάς.

Τὸ σχετικὸν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἡ μεγαλυτέρα ἢ μικροτέρα τιμὴ τῆς συναρτήσεως. Π.χ. εἰς τὸ σχῆμα 35 ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ τῆς ὁποίας ἡ γραφικὴ παράστασις εἶναι ἡ καμπύλη, λαμβάνει τιμὰς μεγαλυτέρας ἀπὸ τὸ σχετικὸν μέγιστον ΜΑ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Β καὶ τιμὰς μικροτέρας τοῦ σχετικοῦ ἐλαχίστου ΒΝ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Γ.



Σχ. 35

Ἐὰν ἡ παράγωγος $f'(x)$ εἶναι θετικὴ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α ($x < \alpha$) καὶ ἀρνητικὴ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Α ($x > \alpha$), δηλαδὴ ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ φθίνουσα πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Α, τότε ἡ $f'(x)$ πρέπει νὰ εἶναι μηδὲν διὰ $x = \alpha$, ὅπου α εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ Α. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ εἶναι συνεχὴς λαμβάνει τὴν μεγίστην της τιμὴν ὅταν $x = \alpha$. Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ αὔξουσα πρὸς τὰ δεξιὰ ἑνὸς σημείου τότε ἡ συνάρτησις λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην της τιμὴν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου μεταβάλλεται ἀπὸ ἀρνητικὸν εἰς θετικόν. Οὕτω, εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ ἔχει μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον Β.

Αἱ τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας ἡ y' εἶναι μηδὲν λέγονται ***κρίσιμα σημεῖα.*** Ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι ὁριζοντία καὶ ὡς ἐκ τούτου αὐτὰ εἶναι τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ καμπύλη ἀλλάζει κατεύθυνσιν.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου ἀντικαθιστῶμεν τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν μὲ τιμὰς κατά τι μικροτέρας καὶ μεγαλυτέρας, ἀντιστοίχως, διὰ τὰ ἀριστερὰ καὶ δεξιὰ σημεῖα ὡς πρὸς τὸ κρίσιμον σημεῖον. Ἐὰν ἔχωμεν διὰ τὰς μικροτέρας τιμὰς + (σὺν) διὰ δὲ τὰς μεγαλυτέρας — (πλὴν) τότε ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον εἰς τὸ κρίσιμον σημεῖον. Ἐὰν ἔχωμεν πρῶτον — καὶ κατόπιν + ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον.

Ἂς ζητήσωμεν πρῶτον τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$$

Εὑρίσκομεν τὴν πρώτην παράγωγον

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2).$$

Θέτομεν $f'(x) = 6(x-1)(x-2) = 0$ καὶ τὰ κρίσιμα σημεῖα εἶναι $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Τώρα λαμβάνομεν τιμὰς διὰ τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν εἰς τὰς περιοχὰς τῶν κρισίμων σημείων καὶ ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου.

Διὰ $x < 1$ σημ. $f'(x) = (-)(-) = +$

Διὰ $1 < x < 2$ σημ. $f'(x) = (+)(-) = -$

Ἑπομένως ἡ συνάρτησις $f(x)$ ἔχει μέγιστον καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τιμή του εἶναι

$$f(1) = 4.$$

Διὰ $1 < x < 2$ σημ. $f'(x) = (+)(-) = -$

Διὰ $2 < x$ σημ. $f'(x) = (+)(+) = +$

καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x = 2$. Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐλαχίστου εἶναι $f(2) = 3$.

Γενικῶς, ἀκολουθοῦμεν τὴν κάτωθι πορείαν :

α) Εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον $f'(x)$ καὶ λύομεν τὴν ἐξίσωσιν $f'(x) = 0$, ὡς πρὸς τὰς πραγματικὰς ρίζας διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν κρισίμων σημείων.

β) Δι' ἑκάστην κρίσιμον τιμὴν τοῦ x ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου ὡς ἀνωτέρω. Ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου εἶναι πρῶτον + καὶ κατόπιν — ἔχομεν μέγιστον· ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου εἶναι — καὶ κατόπιν + ἔχομεν ἐλάχιστον. Ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου δὲν ἀλλάζῃ, τότε ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον οὔτε ἐλάχιστον.

Προβλήματα ἐπὶ τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου μιᾶς συναρτήσεως

Πρόβλημα 1ον) Νὰ κατασκευασθῇ κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ βάσιν τετράγωνον, χωρητικότητος 108 κυβ. μέτρων, τοῦ ὁποίου ἡ ἀξία τοῦ ὑλικοῦ τῆς βάσεως, τῆς ἄνω βάσεως (πώματος) καὶ τῶν πλευρῶν εἶναι ἀντιστοίχως, 1, 5, 6 δρ. Πῶς μεταβάλλεται ἡ ἀξία ἐν σχέσει μὲ τὰς διαστάσεις ;

Λύσις. Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὸ ὕψος ἢ τὴν ἀκμὴν τῆς βάσεως. Λαμβάνομεν τὴν ἀκμὴν καὶ ὡς ἐξηρτημένην μεταβλητὴν τὴν ἀξίαν Α. Ἐὰν ὀνομάσωμεν x τὴν ἀκμὴν τότε τὸ ὕψος εἶναι $\frac{108}{x^2}$. Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τῶν τεσσάρων ἑδρῶν εἶναι $x\,\frac{108}{x^2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τῶν βάσεων x^2. Ἑπομένως ἡ ἀξία Α συμφώνως πρὸς τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος εἶναι :

$$A = x^2 + 5x^2 + 6\,.\,4\,\frac{108}{x} = 6\left(x^2 + \frac{432}{x}\right).$$

Ἡ συνάρτησις Α δεικνύει πῶς μεταβάλλεται ἡ ἀξία ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἀκμήν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν ἀξίαν χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀνωτέρω μέθοδον.

α) Λαμβάνομεν τὴν παράγωγον $A' = 6\left(2x - \frac{432}{x^2}\right)$

καὶ λύομεν τὴν ἐξίσωσιν $2x - \frac{432}{x^2} = 0$

ὡς πρὸς τὰς πραγματικὰς ρίζας. Τὸ κρίσιμον σημεῖον εἶναι $x = 6$.

β) Ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον τῆς παραγώγου $A' = 12(x-6)(x^2+6x+36)$.

Διὰ $x < 6$ σημ. $A' = (-)(+) = -$

Διὰ $x > 6$ σημ. $A' = (+)(+) = +$

Ἑπομένως ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x = 6$ καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμή της εἶναι

$$A = 6\left(36 + \frac{432}{6}\right) = 648 \text{ δραχμαί.}$$

Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι διὰ τῆς γραφικῆς παραστάσεως εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

Πρόβλημα 2ον) Κυλινδρικὸν δοχεῖον πρέπει νὰ περιέχῃ 600 κυβ. μέτρα. Ἡ ὕλη ἀπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι κατασκευασμένη ἡ ἄνω βάσις του (πῶμα) ἀξίζει 3 δραχμὰς κατὰ τετρ. ἑκατοστόμετρον, ἡ δὲ ὑπόλοιπος 1 δρχ. κατὰ τετρ. ἑκ. 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τῆς ὕλης ἀπὸ τὴν ὁποίαν εἶναι κατεσκευασμένον ὡς συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως. 2) Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν ἀκτῖνα ἔχομεν τὴν ἐλαχίστην ἀξίαν;

Λύσις 1η) Ἔστω x ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως. Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι $\Omega = \pi x^2 v$ ὅπου v εἶναι τὸ ὕψος. Ἄρα τὸ ὕψος εἶναι $v = \frac{600}{\pi x^2}$. Ἡ ἀξία τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ τῆς κάτω βάσεως εἶναι :

$$\left(2\pi x \frac{600}{\pi x^2} + \pi x^2\right).1 = 2\frac{600}{x} + \pi x^2.$$

Ἡ ἀξία τῆς ἄνω βάσεως εἶναι $3\pi x^2$ καὶ ἑπομένως ἡ ὁλικὴ ἀξία

$$A = 4\left(\pi x^2 + \frac{300}{x}\right)$$

α) $A' = 4\left(2\pi x - \frac{300}{x^2}\right)$. Ἐκ τῆς $2\pi x - \frac{300}{x^2} = 0$ ἔχομεν :

$$x^3 = \frac{300}{2\pi} = \frac{150}{3,14} = 47,75 \quad \text{καὶ} \quad x = 3,6 \text{ ἑκ.}$$

β) Διὰ $x < 3,6$ σημ. $A' = (-)(+) = -$

Διὰ $x > 3,6$ σημ. $A' = (+)(+) = +$

Ἑπομένως, ἡ συνάρτησις εἶναι ἐλαχίστη ὅταν $x = 3,6$ ἑκ.

Πρόβλημα 3ον) Ξενοδοχεῖόν τι ἔχει 24 δωμάτια. Ὁ διευθυντὴς ὑπολογίζει ὅτι δύναται νὰ ἔχῃ ὅλα τὰ δωμάτια ἐνοικιασμένα μὲ 16 δρχ. τὸν μῆνα. Ἐὰν αὐξήσῃ τὸ ἐνοίκιον, δι᾽ ἑκάστην δραχμὴν εἰσπραττομένην κατὰ μῆνα θὰ ἔχῃ ἓν δωμάτιον κενὸν (δηλαδὴ ἐὰν τὸ ἐνοίκιον γίνῃ 17 δρχ. θὰ ἔχῃ ἐνοικιασμένα 23 δωμάτια). Ἐκ τῶν κενῶν δωματίων ὁ ξενοδόχος κερδίζει 2 δρχ. κατὰ μῆνα λόγῳ τῆς μὴ χρησιμοποιήσεως ὑπηρεσίας δι᾽ αὐτά.

Νὰ εὑρεθῇ ποῖον εἶναι τὸ κατάλληλον ἐνοίκιον διὰ νὰ ἔχῃ ὁ ξενοδόχος τὰς μεγαλυτέρας εἰσπράξεις ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτῆς;

Λύσις. Ἐὰν ὁ ξενοδόχος αὐξήσῃ τὸ ἐνοίκιον κατὰ x δρχ. τότε θὰ ἔχῃ x δωμάτια κενὰ καὶ θὰ εἰσπράττῃ $(24 - x)(16 + x)$. Ἐπίσης θὰ ὠφελῆται 2x ἀπὸ τὴν μὴ χρῆσιν ὑπηρεσίας. Ὥστε ὁ ξενοδόχος θὰ ἔχῃ καθαρὰς εἰσπράξεις

$$A = (24 - x)(16 + x) + 2x = 384 + 10x - x^2 .$$

Ἐργαζόμεθα ὡς καὶ προηγουμένως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως:

α) $A' = 10 - 2x = 2(5 - x)$. Ἐκ τῆς $A' = 0 \quad x = 5$.

β) Διὰ $x < 5 \quad A' = 2(5 - x)$ σημ. $A' = +$

Διὰ $x < 5 \quad A' = 2(5 - x)$ σημ. $A' = -$

Ἑπομένως, διὰ $x = 5$ ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον καὶ τὸ κατάλληλον ἐνοίκιον εἶναι 21 δρ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς εἰσπράξεις τοῦ ξενοδόχου ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν συνάρτησιν τὸ x μὲ 5 καὶ οὕτως ἔχομεν $A(5) = 409$ δρχ.

V. 6. Ἐφαρμογαὶ τῆς ἐννοίας τῆς παραγώγου εἰς τὰ οἰκονομικὰ

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μεταβολὴ μιᾶς ποσότητος y ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μεταβολὴν μιᾶς ποσότητος x. Ἐὰν ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος y εἶναι συνεχὴς καὶ ὁμαλή, τότε ἡ παράγωγος τῆς y ὡς πρὸς x ὑπάρχει πάντοτε, ἡ δὲ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x ἔχει εἰς ἕκαστον σημεῖον μίαν ἐφαπτομένην.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, αἱ βασικαὶ ἔννοιαι τοῦ μέσου λόγου μεταβολῆς καὶ τοῦ ὁριακοῦ λόγου, δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν διὰ τὴν συνάρτησιν y. Ἑπομένως, ἐὰν ἡ συνάρτησις y καὶ ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x ἀντιπροσωπεύουν οἰκονομικὰς ποσότητας ἡ δὲ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν εἶναι συνεχής, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰς ἐννοίας αὐτὰς ὡς καὶ προηγουμένως.

Ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν τοῦ κόστους $\Pi = F(x)$. Ἐὰν ἡ παραγωγὴ αὐξηθῇ κατὰ μίαν ποσότητα Δx ὑπεράνω τῆς παραγωγῆς x καὶ ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τοῦ κόστους εἶναι $\Delta\Pi$, τότε ἡ μεταβολὴ τοῦ κόστους δι᾽ ἑκάστην μονάδα αὐξήσεως τῆς παραγωγῆς εἶναι $\frac{\Delta\Pi}{\Delta x}$. Τὸ διαφορικὸν κόστος ἰσοῦται ἀλγεβρικῶς μὲ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως καὶ δίδει μίαν προσέγγισιν τοῦ κόστους, ὅταν ἡ αὔξησις εἶναι πολὺ μικρὰ ὑπεράνω τῆς παραγωγῆς x. Οὕτω, εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν τοῦ ὁλικοῦ κόστους, ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης (Κεφ. V. 4) δίδει τὴν τιμὴν τοῦ διαφορικοῦ κόστους. Τὸ διαφορικὸν κόστος ὡς παράγωγος τοῦ ὁλικοῦ κόστους, εἶναι μία συνάρτησις τῆς παραγωγῆς καὶ ἑπομένως εἰς τὴν συνάρτησιν αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ μία γραφικὴ παράστασις. Συνήθως χαράσσομεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τοῦ μέσου κόστους καὶ τοῦ διαφορικοῦ κόστους εἰς τὸ αὐτὸ διάγραμμα ὥστε ἡ σύγκρισις νὰ εἶναι εὐκολωτέρα.

Ἔστω $\Pi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἡ συνάρτησις τοῦ ὁλικοῦ κόστους.

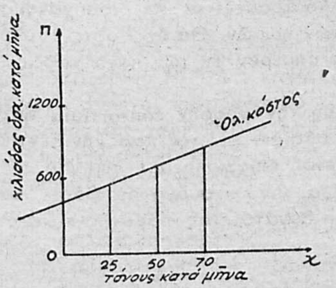
Τότε μέσον κόστος $\Pi_M = \frac{\Pi}{x} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x}$, διαφ. κόστος $\frac{d\Pi}{dx} = 2\alpha x + \beta$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ καμπύλη τοῦ ὁλικοῦ κόστους εἶναι τὸ μέρος τῆς παραβολῆς τὸ κείμενον εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον τῶν ἀξόνων· τὸ μέσον κόστος εἶναι μία καμπύλη σχήματος U καὶ τὸ διαφορικὸν κόστος εἶναι μία εὐθεῖα μὲ συντελεστὴν κατευθύνσεως 2α.

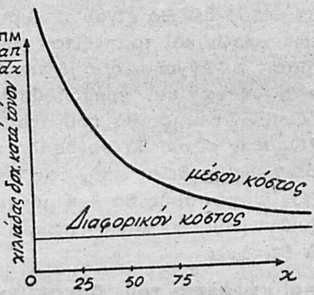
Ἔστω τὸ ἀριθμητικὸν παράδειγμα $\Pi = 5x + 400$

Μέσον κόστος $\Pi_M = 5 + \frac{401}{x}$ καὶ τὸ διαφορικὸν κόστος $\frac{d\Pi}{dx} = 5$.

Εἰς τὸ κατωτέρω διάγραμμα δεικνύεται ἡ καμπύλη τοῦ μέσου κόστους ἥτις εἶναι βραχίων μιᾶς ὑπερβολῆς μὲ ἀσύμπτωτον τὴν εὐθεῖαν $\Pi = 5$, ἥτις παριστᾷ τὸ δια-



Σχ. 36



Σχ. 37

φορικὸν κόστος. Δηλαδή, τὸ διαφορικὸν κόστος μετὰ τοῦ μέσου κόστους ἔχουν κοινὸν τὸ κατώτερον σημεῖον ἐπὶ τῆς καμπύλης τοῦ μέσου κόστους ὡς πρὸς τὸν ἄξονα X. Εἰς τὸ πρόβλημα 18 (Κεφ. V 9) δεικνύεται θεωρητικῶς ὅτι αὐτὸ ἰσχύει δι' ὅλας τὰς συναρτήσεις αἵτινες δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς συναρτήσεις κόστους.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸ ὁλικὸν εἰσόδημα, τὸ μέσον καὶ τὸ διαφορικόν, ὅταν μία κατάλληλος συνάρτησις δίδεται ὡς συνάρτησις τῆς ζητήσεως. Ἔστω $p = \psi(x)$ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις τῆς ζητήσεως. Τὸ ἀντίστοιχον ὁλικὸν εἰσόδημα δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $R = x\psi(x)$. Ἑπομένως, τὸ μέσον εἰσόδημα $= \frac{R}{x} = p = \psi(x)$· δηλαδή, ἀριθμητικῶς ἰσοῦται πρὸς τὴν ζήτησιν. Τὸ διαφορικὸν εἰσόδημα εἶναι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως R ὡς πρὸς x.

Ἄρα $$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\psi(x) \right).$$

Ἐπίσης, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν χρησιμοποιοῦμεν τοὺς ἰδίους ἄξονας διὰ τὰς γραφικὰς παραστάσεις τοῦ μέσου καὶ διαφορικοῦ εἰσοδήματος.

(Συνεχίζεται)