ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΤΗΣ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ «ΓΕΝΝΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΘΑΝΑΤΟΥ»

Τοῦ Δρος ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ Α. ΘΕΟΔΩΡΑΚΗ

Ἐντεταλμένου Καθηγητοῦ τῆς Σχολῆς Στατιστικῆς, παρὰ τῇ Α. Β. Σ. Πειραιῶς

1. Εἰσαγωγὴ

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ὑπολογίζονται αἱ ροπαὶ τάξεως $\leqslant 3$ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς «στασιμότητος», δι' ἀπ' εὐθείας ὑπολογισμοῦ καὶ οὐχὶ διὰ μεταβάσεως εἰς τὸ ὅριον, τῆς διμεταβλητῆς στοχαστικῆς διαδικασίας (ἢ ἄλλως πορείας) (stochastic process) ἀναπτύξεως ἀνθρωπίνου πληθυσμοῦ, ἥτις ἀπετέλεσεν ἀντικείμενον προγενεστέρας μελέτης μας (βλ. Θεοδωράκη Γερ. [5]).

Οὕτως, ὁλοκληροῦται ἡ μελέτη τοῦ προβλήματος τῶν βασικῶν ροπῶν τῆς διμεταβλητῆς διαδικασίας, ἀπαραιτήτων διὰ τὴν θεώρησιν τοῦ ἑτέρου προβλήματος, τῆς «ἀσυμμετρίας» δηλαδή, κατ' ἐπέκτασιν τῆς ἀντιστοίχου ἐννοίας ἐκ τῆς περιοχῆς τῶν στατιστικῶν κατανομῶν.

Διατηροῦμεν ἐνταῦθα τὸν συμβολισμόν, τὸν χρησιμοποιηθέντα ἐν τῇ ἀνωτέρω μνημονευθείσῃ ἐργασίᾳ ἡμῶν.

2. Αἱ ροπαὶ τάξεως < 3

Θεωροῦμεν τὸν βασικὸν τύπον [3 · 5]*,

$$\text{(1)} \quad \frac{d}{dt} E\{X^k Y^l\} = \sum_{x=o}^{+\infty} \sum_{y=o}^{+\infty} \{[(x+1)^k y^l p + x^k (y+1)^l q - x^k y^l]\lambda -$$

$$-[x^k y^l - (x-1)^k y^l]\mu\} x P_{x,y}(t) + \sum_{x=o}^{+\infty} \sum_{y=o}^{+\infty} x^k [(y-1)^l - y^l] \mu' y P_{x,y}(t),$$

ὁ ὁποῖος ὁρίζει τὰς ροπὰς οἱασδήποτε τάξεως (ὡς πρὸς ἀρχὴν τὸ 0) τῆς διαδικασίας.

Διὰ $k = 1$, $l = 0$ ἡ (1) διδει τὸν εὑρεθέντα τύπον [3 · 7]

$$\text{(2)} \qquad m'_{1.o}(t) = (\lambda p - \mu)\, m_{1.o}(t),$$

* Οἱ ἀριθμοὶ εἰς ἀγκύλας ἀποτελοῦν παραπομπὰς εἰς τὴν ἀνωτέρω μνημονευθεῖσαν ἐργασίαν ἢ ἀναφέρονται εἰς τὴν εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης ἐργασίας βιβλιογραφίαν, ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ εἰς παρενθέσεις ἀποτελοῦν παραπομπὰς εἰς τὸ κείμενον.

ὁ ὁποῖος εἰς τὴ περίπτωσιν τῆς «στασιμότητος» ($\lambda p = \lambda q = \mu = \mu' \equiv k$), (βλ. [§ 4. 2. 3]) γίνεται :

$$(2') \qquad m'_{1.o}(t) = 0$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἐξ ὑποθέσεως $m_{1.o}(0) = 1$, προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς (2') ἡ σχέσις (βλ. Κεφ. [2. 1]) :

$$(I) \qquad m_{1.o}(t) = 1$$

Διὰ $k = 0$, $l = 1$ ἡ (1) δίδει τὴν σχέσιν [3. 8] :

$$(3) \qquad m'_{o.1}(t) = \lambda q m_{1.o}(t) - \mu' m_{o.1}(t),$$

ἥτις εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς «στασιμότητος» γίνεται :

$$(3') \qquad m'_{o.1}(t) = -k m_{o.1}(t) + k m_{1.o}(t)$$

Λόγῳ τῆς (I) ἡ 3' γίνεται :

$$(3'') \qquad m'_{o.1}(t) = -k m_{o.1}(t) + k$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m_{o.1}(0) = 0$ (βλ. [§ 4. 1. 2]), ἐκ τῆς λύσεως τῆς γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (3'') προκύπτει ἡ σχέσις :

$$(II) \qquad m_{o.1}(t) = 1 - e^{-kt}$$

Οὕτως, ἐπανεύρομεν τὴν σχέσιν [3. 17], ἄνευ μεταβάσεως εἰς τὸ ὅριον, ὡς ἐγένετο εἰς τὴν προαναφερθεῖσαν μελέτην μας.

Διὰ $k = 2$, $l = 0$ ἡ (1) δίδει τὴν σχέσιν [3. 9] :

$$(4) \qquad m'_{2.o}(t) = 2(\lambda p - \mu) m_{2.o}(t) + (\lambda p + \mu) m_{1.o}(t),$$

ἡ ὁποία εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς στασιμότητος γίνεται :

$$(4') \qquad m'_{2.o}(t) = 2k m_{1.o}(t)$$

Λόγῳ τῆς (I) ἡ (4') γίνεται :

$$(4'') \qquad m'_{2.o}(t) = 2k$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m_{2.o}(0) = 1$ (βλ. [§ 4. 2. 2]), τότε ἐκ τῆς λύσεως τῆς (4'') προκύπτει ἡ συνάρτησις :

$$(III) \qquad m_{2.o}(t) = 1 + 2kt$$

Ἐκ τῆς γνωστῆς τώρα σχέσεως :

$$(\Sigma_1) \qquad \mu_{2.o}(t) \equiv \text{Var.}\{X(t)\} = m_{2.o}(t) - m_{1.o}^2(t)$$

καὶ λόγῳ τῶν (I), (III); προκύπτει :

$$(\text{III}') \qquad \mu_{2.o}(t) = 2kt \, .$$

Ἐπανευρίσκομεν οὕτω τὴν σχέσιν [3. 17] ἐπὶ τῆς διακυμάνσεως τῆς διαδικασίας ὡς πρὸς τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν X (t) :

Διὰ $k = 1$, $l = 1$ ἡ (1) δίδει τὸν τύπον [3. 10] :

$$(5) \qquad m'_{1.1}(t) = (\lambda p - \mu - \mu')\, m_{1.1}(t) + \lambda q m_{2.o}(t),$$

ὁ ὁποῖος εἰς περίπτωσιν τῆς στασιμότητος γίνεται :

$$(5') \qquad m'_{1.1}(t) = - k m_{1.1}(t) + k m_{2.o}(t)$$

Λόγῳ τῆς (III) ἡ (5') γίνεται :

$$(5'') \qquad m'_{1.1}(t) = - k m_{1.1}(t) + k\,(1 + 2kt)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m_{1.1}(0) = 0$ (βλ. [5, σελ. 66]), τότε ἡ λύσις τῆς γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (5'') δίδει τὴν ἀκόλουθον συνάρτησιν ἐπὶ τῆς *ἁπλῆς* ροπῆς $m_{1.1}(t)$, 2ας τάξεως ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς (X, Y) :

$$(\text{IV}) \qquad m_{1.1}(t) = - 1 + 2kt + e^{-kt} \, .$$

Ἐκ τῆς σχέσεως τῆς «συνδιακυμάνσεως» (covariance) (βλ. [5, σελ. 67])

$$\mu_{1\cdot1}(t) \equiv \text{Cov.}\,[X(t),\, Y(t)] = m_{1.1}(t) - m_{1.o}(t) \cdot m_{o.1}(t)$$

λαμβάνομεν, λόγῳ τῶν (I), (II) καὶ (IV), τελικῶς τὴν συνάρτησιν τῆς συνδιακυμάνσεως τῶν μεταβλητῶν X (t), Y (t)

$$(\text{IV}') \qquad \mu_{1.1}(t) = - 2 + 2kt + 2e^{-kt}$$

Ἐπανεύρομεν οὕτω τὴν γνωστὴν τροποποιημένην ἐκθετικὴν συνάρτησιν [5. 3. 19] δι' ἁπλοῦ τρόπου, ἄνευ μεταβάσεως δηλαδὴ εἰς τὸ ὅριον.

Τώρα διὰ $k = 0$, $l = 2$ ἡ (1) δίδει τὴν σχέσιν [5, 3. 11] :

$$(6) \qquad m'_{o.2}(t) = 2\lambda q m_{1.1}(t) + \lambda q m_{1.o}(t) - 2\mu' m_{o.2}(t) + \mu' m_{o.1}(t),$$

ἡ ὁποία εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς στασιμότητος γίνεται :

$$(6') \qquad m'_{o.2}(t) = - 2k m_{o.2}(t) + 2k m_{1.1}(t) + k m_{1.o}(t) + k m_{o.1}(t) \, .$$

Λόγῳ τῶν (I), (II) καὶ (IV), ἐκ τῆς (6') προκύπτει ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις :

(6′′) $$m'_{o.2}(t) = -2km_{o.2}(t) + 4k^2t - ke^{-kt}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m_{o.2}(0) = 0$ (βλ. [5, σελ. 68]), ἐκ τῆς λύσεως τῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως (6′′) προκύπτει ἡ συνάρτησις :

(V) $$m_{o.2}(t) = -1 + 2kt + e^{-kt}$$

Τώρα ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως τῆς διακυμάνσεως ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν $Y(t)$:

(Σ_3) $$\mu_{o.2}(t) \equiv \mathrm{Var.}\,[Y(t)] = m_{o.2}(t) - m_{o.1}^{2}(t)$$

λαμβάνομεν, λόγῳ τῶν (II) καὶ (V), τὴν σχέσιν :

(V′) $$\mu_{o.2}(t) = -2 + 2kt + 3e^{-kt} - e^{-2kt}$$

Ἤτοι, ἡ διακύμανσις τῆς $Y(t)$, μεταβαλλομένη ἐν τῷ χρόνῳ, ἀκολουθεῖ ἐκθετικὴν συνάρτησιν ἐν γένει, τροποποιημένης μορφῆς. Οὕτως, ἐπανεύρομεν τὴν σχέσιν [5, 3. 18].

3. Αἱ ροπαὶ 3ης τάξεως

Προβαίνομεν τώρα εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ροπῶν 3ης τάξεως, εἰς τὰς ὁποίας κυρίως ἀναφέρεται ἡ παροῦσα μελέτη.

3 · 1 Διὰ $k = 3$, $l = 0$ ἡ (1) δίδει :

$$\frac{d}{dt}[m_{3.o}(t)] = \sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty}\{[(x+1)^3p + x^3q - x^3]\lambda - [x^3 - (x-1)^3]\mu\}\,x\cdot P_{x,y}(t) +$$

$$+\sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty} x^3\,[(y-1)^0 - y^0]\,\mu' y P_{x,y}(t) =$$

$$= \sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty}[3(\lambda p - \mu)x^2 + 3(\lambda p + \mu)x + (\lambda p - \mu)]\,x\cdot P_{x,y}(t),$$

ὅθεν

(7) $$m'_{3.o}(t) = 3(\lambda p - \mu)m_{3.o}(t) + 3(\lambda p + \mu)m_{2.o}(t) + (\lambda p - \mu)m_{1.o}(t)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς στασιμότητος ἡ (7) γίνεται :

(7′) $$m'_{3.o}(t) = 6\,km_{2.o}(t),$$

λόγῳ δὲ τῆς (III), προκύπτει ἡ σχέσις :

(7′′) $$m_{3.o}(t) = 6k(1 + 2kt).$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m_{3.o}(0) = 1$, ἐκ τῆς (7′′) προκύπτει ἡ συνάρτησις :

(VI) $$m_{3.0}(t) = 1 + 6kt + 6k^2t^2$$

ἡ ὁποία παριστᾷ *παραβολὴν* ἐν γένει, ἐξαρτωμένην ἐκ τοῦ σταθεροῦ ποσοστοῦ k.

Ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως τῆς Στατιστικῆς Ἀναλύσεως (*) :

(Σ_4) $$\mu_{3.0}(t) = m_{3.0}(t) - 3m_{2.0}(t)\, m_{1.0}(t) + 2m^3_{1.0}(t)$$

λαμβάνομεν τελικῶς, λόγῳ τῶν (I), (III) καὶ (IV), τὴν συνάρτησιν :

(VI′) $$\mu_{3.0}(t) = 6k^2t^2$$

ἥτις παριστᾶ, ὡς γνωστόν, *παραβολὴν* μὲ ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα τῶν τιμῶν τῆς $\mu_{3.0}(t)$ καὶ ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφήν της τὸν ἄξονα τῶν t. Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\mu_{3.0}(t)$, δι' ὡρισμένον t, χαρακτηρίζει τὴν *ἀσυμμετρίαν* τῆς *στιγμιαίας* κατανομῆς ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν X(t), ἣν διαμορφώνει ὁ ἐν ἀναπτύξει πληθυσμὸς εἰς τὴν κατάστασιν τῆς «στασιμότητος».

3.2. Διὰ k = 2, l = 1 ἡ (1) δίδει :

$$\frac{d}{dt}[m_{2.1}(t)] = \sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty}\{[(x+1)^2yp + x^2(y+1)q - x^2y]\lambda -$$

$$-[x^2y-(x-1)^2y]\mu\}\, x P_{x,y}(t) - \sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty}\mu' x^2yP_{x,y}(t) =$$

$$= \sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty}[(2\lambda p - 2\mu - \mu')x^2y + (\lambda p + \mu)xy + \lambda q x^3]\, P_{x,y}(t),$$

ὅθεν

(8) $$m'_{2.1}(t) = (2\lambda p - 2\mu - \mu')\, m_{2.1}(t) + (\lambda p + \mu)\, m_{1.1}(t) + \lambda q m_{3.0}(t).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς στασιμότητος ἡ (8) γίνεται :

(8′) $$m'_{2.1}(t) = -km_{2.1}(t) + 2km_{1.1}(t) + km_{3.0}(t).$$

Λόγῳ τῶν (IV) καὶ (VI) ἡ (8′) γίνεται :

(8″) $$m'_{2.1}(t) = -km_{2.1}(t) - k + 10k^2t + 6k^3t^2 + 2ke^{-kt}$$

Ἐκ τῆς (8″) λαμβάνομεν :

(8‴) $$m_{2.1}(t) = [c + \int(-k + 10k^2t + 6k^3t^2 + 2ke^{-kt})e^{kt}dt]\, e^{-kt} =$$

$$= ce^{-kt} + 1 - 2kt + 6k^2t^2 + 2kte^{-kt}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m_{2.1}(0) = 0$, τότε πρέπει νὰ λάβωμεν c = − 1 .

(*) Ἴδε Θεοδωράκη Γερ. [6], σελ. 39.

Ὅθεν προκύπτει τελικῶς ἡ ἀκόλουθος συνάρτησις τῆς ῥοπῆς 3ης τάξεως:

(VII) $$m_{2.1}(t) = 1 - 2kt + 6k^2t^2 + (-1 + 2kt)\,e^{-kt}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (*):

(Σ_5) $$\mu_{2.1}(t) = m_{2.1}(t) - 2m_{1.1}(t)m_{1.0}(t) + 2m_{0.1}(t)m_{1.0}^2(t) - m_{0.1}(t)m_{2.0}(t),$$

καὶ λόγῳ τῶν (I), (II), (III), (IV) καὶ (VII), προκύπτει τελικῶς ἡ ἀκόλουθος ἀναλυτικὴ ἔκφρασις διὰ τὴν *κεντρικὴν* ῥοπὴν 3ης τάξεως ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς [X(t), Y(t)]:

(VII') $$\mu_{2.1}(t) = 4 - 8kt + 6k^2t^2 + (-4 + 4kt)\,e^{-kt}$$

3.3 Διὰ $k = 1$, $l = 2$ ἡ (1) δίδει:

$$\frac{d}{dt}[m_{1.2}(t)] = \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{y=0}^{+\infty}\{[(x+1)y^2p + x(y+1)^2q - xy^2]\lambda -$$

$$-[xy^2 - (x-1)y^2]\mu\}\,xP_{x,y}(t) + \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{y=0}^{+\infty} x(-2y+1)\,\mu' y P_{x,y}(t) =$$

$$= \sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{y=0}^{+\infty}[(\lambda p - \mu - 2\mu')xy^2 + 2\lambda q x^2 y + \lambda q x^2 + \mu' xy]\cdot P_{x,y}(t), \quad \text{ὅθεν}$$

(9) $$m'_{1.2}(t) = (\lambda p - \mu - 2\mu')m_{1.2}(t) + 2\lambda q m_{2.1}(t) + \lambda q m_{2.0}(t) + \mu' m_{1.1}(t).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς «στασιμότητος» ἡ (9) γίνεται:

(9') $$m'_{1.2}(t) = -2km_{1.2}(t) + 2km_{2.1}(t) + km_{2.0}(t) + km_{1.1}(t)\,.$$

Λόγῳ τῶν (III), (IV) καὶ (VII) ἡ (9') γίνεται:

(9'') $$m'_{1.2}(t) = -2km_{1.2}(t) + 2k + 12k^3t^2 + (-k + 4k^2t)\,e^{-kt}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν:

$$m_{1.2}(t) = e^{-2kt}[C + \int[2k + 12k^3t^2 + (-k + 4k^2t)e^{-kt}]e^{2kt}dt] =$$

$$= ce^{-2kt} + 4 - 6kt + 6k^2t^2 + (-5 + 4kt)\,e^{-kt}\,.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἰσχύει: $m_{1.2}(0) = 0$, πρέπει νὰ λάβωμεν $c = -1$. Ὅθεν, προκύπτει τελικῶς ἡ συνάρτησις:

(VIII) $$m_{1.2}(t) = 4 - 6kt + 6k^2t^2 + (-5 + 4kt)\,e^{-kt} + e^{-2kt}\,.$$

Ἐκ τῆς ἀντιστοίχου πρὸς τὴν (Σ_5) σχέσεως:

(*) Ἴδε Kendall M. G. [3], σελ. 78 — 82.

$$\mu_{1.2}(t)=m_{1.2}(t)-2m_{1.1}(t)\,m_{o.1}(t)+2m_{1.o}(t)\,m_{o.1}^{2}(t)-m_{1.o}(t)\cdot m_{o.2}(t),$$

καὶ τῶν (I), (II), (IV), (V) καὶ (VII), λαμβάνομεν τελικῶς τὴν συνάρτησιν τῆς *κεντρικῆς* ροπῆς 3ης (1,2) τάξεως ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς (X(t),Y(t)):

$$\text{(VIII')}\quad \mu_{1.2}(t)=9-12kt+6k^2t^2+(-14+8kt)\,e^{-kt}+5e^{-2kt}.$$

3. 4. Διὰ $k=0$, $l=3$ ἡ (1) δίδει :

$$\frac{d}{dt}[\,m_{o.3}(t)=\sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty}\{[\,y^3p+(y+1)^3q-y^3]\,\lambda-[\,y^3-y^3]\,\mu\}\,xP_{x,y}(t)+$$

$$+\sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty}[\,(y-1)^3-y^3]\,\mu' yP_{x,y}(t)=$$

$$=\sum_{x=o}^{+\infty}\sum_{y=o}^{+\infty}(\,3\lambda qxy^2+3\lambda qxy+\lambda qx-3\mu' y^3+3\mu' y^2-\mu' y\,)\,P_{x,y}(t),$$

ὅθεν

$$\text{(10)}\quad m'_{o.3}(t)=-3\mu' m_{o.3}(t)+3\lambda q m_{1.2}(t)+3\lambda q m_{1.1}(t)+\lambda q m_{1.o}(t)+$$
$$+3\mu' m_{o.2}(t)-\mu' m_{o.1}(t).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς «στασιμότητος» ἡ (10) γίνεται :

$$\text{(10')}\quad m'_{o.3}(t)=-3km_{o.3}(t)+3km_{1.2}(t)+3km_{1.1}(t)+$$
$$+km_{1.o}(t)+3km_{o.2}(t)-km_{o.1}(t).$$

Λόγῳ τῶν (I), (II), (IV), (V) καὶ (VIII) ἐκ τῆς (10') τελικῶς προκύπτει :

$$\text{(10'')}\quad m'_{o.3}(t)=-3km_{o.3}(t)+6k-6k^2t+18k^3t^2+$$
$$+(-8k+2k^2t)\,e^{-kt}+3ke^{-2kt}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν :

$$m_{o.3}(t)=e^{-3kt}\Big(c+\int[6k-6k^2t+18k^3t^2+(-8k+2k^2t)e^{-kt}+3ke^{-2kt}]\cdot e^{3kt}dt\Big)=$$
$$=ce^{-3kt}+4-6kt+6k^2t^2+(-7+6kt)e^{-kt}+3e^{-2kt}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως $m_{o.3}(0)=0$, πρέπει νὰ ληφθῇ $c=0$.

Ὅθεν, ἡ συνάρτησις τῆς ροπῆς 3ης τάξεως τῆς διαδικασίας ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν Y(t) ἔχει ὡς ἀκολούθως :

$$\text{(IX)}\quad m_{o.3}(t)=4-6kt+6k^2t^2+(-7+6kt)\,e^{-kt}+3e^{-2kt}$$

Ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως :

$$(\Sigma_7) \qquad \mu_{o.3}(t) = m_{o.3}(t) - 3m_{o.2}(t)\, m_{o.1}(t) + 2m_{o.1}^3(t)$$

καὶ τῶν (II), (V) καὶ (IX) λαμβάνομεν τελικῶς :

$$(IX') \qquad \mu_{o.3}(t) = 9 - 12kt + 6k^2t^2 - 19e^{-kt} + 12kte^{-kt} + 12e^{-2kt} - 2e^{-3kt}.$$

4. Συμπέρασμα

Αἱ συναρτήσεις $m_{3.o}(t)$ καὶ $\mu_{3.o}(t)$ τῶν ροπῶν 3ης τάξεως, ὡς πρὸς τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν X(t), τῆς στοχαστικῆς διαδικασίας εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς «στασιμότητος» παριστοῦν ἐν γένει *παραβολήν*, ἥτις διὰ τὴν κεντρικὴν ροπὴν ἀναφέρεται ὡς πρὸς ἄξονας : τὸν ἄξονα συμμετρίας της καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὴν κορυφήν της.

Αἱ συναρτήσεις τῶν ροπῶν 3ης τάξεως ὡς πρὸς τὴν τυχαίαν μεταβλητὴν Y(t), ὡς καὶ αἱ τοιαῦται τῶν ὑπολοίπων ροπῶν γ' τάξεως :

$$m_{2.1}(t),\ \mu_{2.1}(t),\ m_{1.2}(t),\ \mu_{1.2}(t),$$

εἶναι ἐν γένει τροποποιημένης *ἐκθετικῆς* μορφῆς ὡς πρὸς τὸν χρόνον, περιλαμβάνουσαι δηλαδὴ συγχρόνως καὶ πολυωνυμικοὺς ὅρους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Arley, N. : «On the Theory of Stochastic Processes and their Application to the Theory of Cosmic Radiation», Copenhaguen (1943), p.p. 114-120.

2) Kendall, D. G. Stochastic Processes and Population Growth, J. R. S. S., B' Vol. 11 (1949), p.p. 230 - 64.

3) Kendall, M. G. : Advanced Theory of Statistics, I. Griffin & Cy, London (1951), p.p. 78 - 82.

4) Bharucha A. - Reid : Elements of the Theory of Markov Processes and Their Application, Mc Graw - Hill Cy, N.Y. (1960), p.p. 175 - 179.

5) Θεοδωράκη, Γερ. : Ἀναλυτικὴ σπουδὴ μιᾶς κατηγορίας διμεταβλητῶν στοχαστικῶν ὑποδειγμάτων ἀναπτύξεως ἀνθρωπίνου πληθυσμοῦ, Δελτίον Ἑλλην. Μαθημ. Ἑταιρείας, Τόμ. 6, (1965), σ.σ. 60 - 72.

6) » Στοιχεῖα Στατιστικῆς Ἀναλύσεως, Ἀθῆναι (1961).