Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΛΥΣΕΩΝ ΜΑΡΚΩΦ ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΗΨΙΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Τῶν καθηγητῶν Business Administration κ. κ.

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΓΙΑΝΟΥΖΑ
εἰς τὸ Pennsylvania State University

καὶ

ΣΩΤΗΡΙΟΥ Δ. ΜΠΟΥΚΗ
εἰς τὸ Pierce University College

Αἱ πρόοδοι αἵτινες συνετελέσθησαν τὴν τελευταίαν δεκαετίαν εἰς τὸν τομέα τῆς Ὀργανωτικῆς (management science) καί, ἰδιαιτέρως, ἡ χρησιμοποίησις μαθηματικῶν ἢ οἰκονομομετρικῶν ὑποδειγμάτων (models) καὶ ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν [1] εἰς τὴν λῆψιν ἐπιχειρησιακῶν ἀποφάσεων, κατέστησαν τὰς διοικητικὰς ἀποφάσεις πλέον τεκμηριωμένας καὶ ἀξιοπίστους. Παραλλήλως, αἱ ἐν λόγῳ πρόοδοι ὑπεγράμμισαν τὸ γεγονός, ὅτι ἀνικανότης ἢ ἀδυναμία τῶν διοικήσεων οἰκονομικῶν μονάδων, ὅπως χρησιμοποιοῦν τὰ μέσα ταῦτα τῆς ἐπιστήμης ἀποστερεῖ τὰς ἐπιχειρήσεις τῆς δυνατότητος νὰ παρακολουθήσουν τὴν ἐπαναστατικὴν ταύτην περίοδον τῆς Ὀργανωτικῆς, τὴν ὁποίαν διανύομεν καί, ἐν τελικῇ δὲ ἀναλύσει καθιστᾷ προβληματικὴν τὴν ἐπιβίωσιν τῶν μονάδων τούτων μακροχρονίως.

Εἰς τὸν κόσμον τῶν ἐπιχειρήσεων ὑφίσταται πάντοτε ἡ ἀνάγκη διαρκοῦς προσαρμογῆς καὶ ἀναπροσαρμογῆς, εὐθυγραμμίσεως, ἐπανευθυγραμμίσεως, καὶ προσδιορισμοῦ τῶν παραγόντων, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ μεταβάλλωνται πρὸς ἀντιστάθμισιν ἀπροβλέπτων καταστάσεων, αἵτινες προκαλοῦνται τόσον ὑπὸ ἐσωτερικῶν ὅσον καὶ ὑπὸ ἐξωτερικῶν δυνάμεων καὶ ἑτέρων παραγόντων. Οἱ διοικοῦντες ἐπιχειρήσεις προσπαθοῦν νὰ προβλέπουν καὶ θέτουν ὑπὸ τὸν ἔλεγχόν των τὰς ἀπροβλέπτους αὐτὰς ἐξελίξεις, ἵνα ἐπιτύχουν οὕτω σταθερὰν κατάστασιν πραγμάτων, ἢ τοὐλάχιστον κάποιας μορφῆς εὐρυθμίαν καὶ ἰσορροπίαν. Ἡ ὀργανωτικὴ διάρθρωσις τῶν ἐπιχειρήσεων ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν εὔρυθμον ἐπίτευξιν ἀντικειμενικῶν σκοπῶν καὶ εἰς τὴν ἐξουδετέρωσιν τῶν οἱωνδήποτε στοιχείων ἀνωμαλίας, τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ διετάρασσον ἢ ἀπέτρεπον τὴν ἐπιδιωκομένην σταθερὰν κατάστασιν.

1) Περὶ αὐτῶν γενικώτερον, ἰδέ: Κ λ. Β. Μπαταλούκα: Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν μεθοδολογίαν τῆς οἰκονομικῆς ἐρεύνης, εἰς Σπουδὰς 1962-63, σσ. 157-89 καὶ 345-76, ὡς καὶ τοῦ αὐτοῦ: Ὀργανωτικὴ τῶν ἐπιχειρήσεων, διοικητικὴ καὶ ἐπιτελική. Πειραιεύς, 1963, σσ. 136-43.

᾿Εφ᾿ ὅσον αἱ ἐπιχειρήσεις ἀποβλέπουν εἰς σταθερὰν κατάστασιν πραγμάτων, ἀποτελεῖ πολύτιμον μέσον εἰς χεῖρας τῶν διοικούντων ἡ ὕπαρξις τρόπου ἀναλύσεως τῶν αἰτίων διαταραχῆς καὶ τῶν ὑφισταμένων τάσεων πρὸς σταθερότητα. Τὸ ἐπιχειρηματικὸν στέλεχος δέον νὰ γνωρίζῃ πλήρως, ἢ τοὐλάχιστον κατὰ προσέγγισιν, τὰ ἀποτελέσματα τῶν σχεδίων ἐνεργείας του. Πρέπει νὰ γνωρίζῃ εἰς ποῖον σημεῖον ὡρισμένον φαινόμενον θὰ σταθεροποιηθῇ ἢ ἐὰν πρόκειται τὸ φαινόμενον τοῦτο νὰ σταθεροποιηθῇ ἐν δεδομένῃ χρονικῇ περιόδῳ. Ὡσαύτως, ὁ διοικῶν εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζῃ τὴν χρονικὴν διάρκειαν, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται διὰ νὰ σταθεροποιηθῇ ἓν φαινόμενον, ἤτοι πρέπει νὰ γνωρίζῃ τὸν ρυθμὸν μὲ τὸν ὁποῖον ἓν φαινόμενον προσεγγίζει τὴν σταθεροποίησίν του. ᾿Επίσης ἐπιβάλλεται ὅπως οὗτος γνωρίζῃ καὶ τὴν ὁδὸν τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ τὸ φαινόμενον διὰ νὰ σταθεροποιηθῇ, καθ᾿ ὅσον ἡ ὁδὸς αὕτη θὰ ἀποκαλύψῃ ἐὰν ὑπάρχῃ σταθερὰ βελτίωσις κατὰ τὴν ἐξέλιξιν.

Ἅπαξ καὶ ὁ ἐπιχειρηματίας καταστῇ ἱκανὸς νὰ πιθανολογίσῃ τὸ ἀποτέλεσμα τῶν ἐνεργειῶν του, τὸν ρυθμὸν καὶ τὴν ὁδὸν σταθεροποιήσεως τῶν διαφόρων φαινομένων κλπ., δύναται τότε οὗτος νὰ προχωρήσῃ εἰς τὴν κατάστρωσιν νέου προγράμματος ἐνεργειῶν, ἢ εἰς τὴν ἀναπροσαρμογὴν τοῦ ὑφισταμένου τοιούτου, πρὸς ἐπίτευξιν τῶν ἀντικειμενικῶν του σκοπῶν.

Ὑπάρχουν διάφοροι τρόποι προβλέψεως τοῦ ἀποτελέσματος, τοῦ ρυθμοῦ καὶ τῆς ὁδοῦ σταθεροποιήσεως ἑνὸς φαινομένου. Ὁ πρῶτος τρόπος εἶναι ὁ διὰ τῆς μαθηματικῆς ἐκφράσεως, γνωστῶν ἢ κατὰ προσέγγισιν γνωστῶν, σχέσεων μεταξὺ διαφόρων μεταβλητῶν. Οὗτος εἶναι ὁ τελεολογικὸς (deterministic) τρόπος. Κατὰ γενικὸν ὅμως κανόνα, εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις δὲν εἶναι πάντοτε ἐφικτὸν αἱ προβλέψεις νὰ στηρίζωνται εἰς τὸν τελεολογισμόν. Ἂν καὶ ἡ συμπεριφορὰ τῶν διαφόρων παραγόντων εἰς τὰς ἐπιχειρήσεις εἶναι ἀδύνατον νὰ προβλεφθῇ μετ᾿ ἀκριβείας, δύναται πάντως αὕτη νὰ ὑπολογισθῇ πιθανολογικῶς. Ὁ τελευταῖος οὗτος τρόπος εἶναι ὁ πιθανολογικὸς (probabilistic). Μία τῶν συγχρόνων πιθανολογικῶν μεθόδων προβλέψεως ἀποτελεσμάτων εἶναι καὶ αἱ ἅλυσοι Μαρκὼφ (Markov Chains).

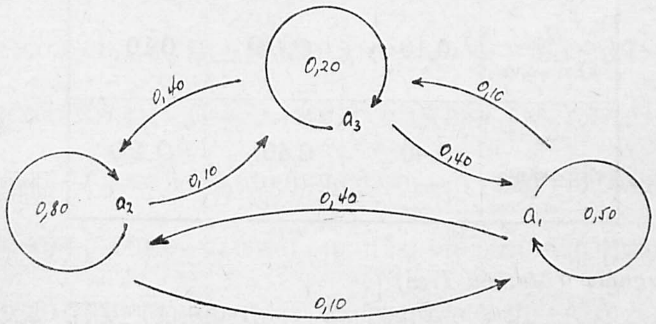
Διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁλύσεων Μαρκὼφ εἶναι δυνατὸν νὰ προβλεφθοῦν μέλλοντα ἀποτελέσματα, ἐπὶ τῇ βάσει στοιχείων τοῦ παρελθόντος.

Αἱ ἅλυσοι Μαρκὼφ χρησιμοποιοῦνται συνήθως ὡς βοηθητικὸν μέσον ὀργανώσεως τῆς διανομῆς ἀγαθῶν (marketing) καὶ δὴ διὰ τὴν διερεύνησιν καὶ πρόρρησιν τῆς συμπεριφορᾶς τῶν καταναλωτῶν εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ εἰς τὴν σταθερότητα προτιμήσεως αὐτῶν δι᾿ ἓν προϊόν, τὰς μεταβολὰς προτιμήσεων τοῦ ἀγοραστικοῦ κοινοῦ ἐξ ἑνὸς προϊόντος εἰς ἕτερον, κλπ. Αἱ ἅλυσοι Μαρκὼφ ἐπιτρέπουν προβλέψεις ἀφορώσας εἰς τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἓν φαινόμενον θὰ σταθεροποιηθῇ, ἐὰν θὰ ὑπάρξῃ σταθεροποίησις αὐτοῦ εἴς τι σημεῖον, ὡς καὶ τὸν ρυθμὸν μὲ τὸν ὁποῖον τοῦτο προσεγγίζει τὴν σταθερότητα καὶ τὴν ἀκολουθουμένην ὁδόν. Παρέχουν, δηλ., αἱ ἅλυσοι Μαρκὼφ μέθοδον προβλέψεως τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς ἑνὸς συγκεκριμένου προγράμματος ἐνεργείας. Ἡ μέθοδος αὕτη ἀποκαλύπτει τὴν συμπεριφορὰν ἑνὸς φαινομένου, καθὼς τοῦτο διέρχεται μέσῳ διαδοχικῶν χρονικῶν περιόδων. Τὸ ἀποτέλεσμα ἑκάστης περιόδου ὑπόκειται, ὡς ἅπαντα τὰ φαινόμενα, εἰς τὸν νόμον τῶν πιθανοτήτων. Ἡ μέθοδος Μαρκώφ, βασικῶς, εἶναι μία ἀλληλουχία ἢ σειρὰ πιθανολογικῶν γεγονότων.

Εἰς περιστάσεις συνεπαγομένας ἀλληλουχίαν ἀποτελεσμάτων, κατὰ τὰς ὁποίας ἕκαστον ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου ἀποτελέσματος, ἡ ἀλληλουχία αὕτη καλεῖται «διαδικασία Μαρκὼφ ἢ ἅλυσοι Μαρκώφ» (2). Πράγματι, ἡ οὐσία τῆς διαδικασίας Μαρκὼφ συνίσταται εἰς τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑφίσταται μεταξὺ διαδοχικῶν ἀποτελεσμάτων (καταστάσεων). Ἡ ὕπαρξις τοιαύτης σχέσεως ἀποτελεῖ βασικὴν προϋπόθεσιν διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου. Ἕτερον ἀπαραίτητον στοιχεῖον εἶναι ἡ ὕπαρξις πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἀποτελεσμάτων. Τὰ ἀποτελέσματα μιᾶς ἁλύσου Μαρκὼφ καλοῦνται ἐπίσης «καταστάσεις» (states), εἶναι δὲ ἀναγκαῖον νὰ γνωρίζωμεν τὴν πιθανότητα μεταβάσεως ἐκ μιᾶς καταστάσεως εἰς ἄλλην. Αἱ πιθανότητες αὗται καλοῦνται «πιθανότητες μεταβάσεως» (transition probabilities). Ἐὰν ἓν φαινόμενον, ὡς π.χ. ἡ ἀγορὰ ἐλαστικῶν αὐτοκινήτων, δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ μορφὴν διαδοχικῶν καταστάσεων, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἅλυσον Μαρκὼφ μὲ διακεκριμένας ἀλλήλων καταστάσεις, ἤτοι τὰς α_1, α_2, καὶ α_3. Αἱ πιθανότητες αὗται μετακινήσεως ἐκ μιᾶς καταστάσεως εἰς ἄλλην εἶναι αἱ πιθανότητες μεταβάσεως, δεικνύονται δὲ αὗται εἰς τὸ Σχῆμα 1 καὶ τὸν Πίνακα 1.

ΣΧΗΜΑ 1

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΣ



Ὑποτεθείσθω ὅτι εἰς τὸ ἐμπόριον ἐλαστικῶν αὐτοκινήτων ὑπάρχουν τρεῖς κυρίως τύποι ἐλαστικῶν, ἤτοι οἱ «Ἄτλας», «Σαμψὼν» καὶ «Ἡρακλῆς», τοὺς ὁποίους ἐὰν παραστήσωμεν ὑπὸ μορφὴν καταστάσεων ὡς αἱ α_1, α_2, καὶ

2) Δι'ἐκτενεστέραν ἀνάλυσιν τῆς διαδικασίας Μαρκὼφ ἰδέ : John C. Kemeny, et.al. «Finite Mathematics with Business Application», Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, Inc., 1962, σελ. 192-7 καὶ 274-280.

α_3, ἀντιστοίχως, ἔχομεν μίαν ἅλυσον Μαρκώφ. Ἐάν, δηλαδή, εἷς πελάτης ἔχῃ ἀγοράσει ἐλαστικὰ τύπου «Ἄτλας», εὑρίσκεται εἰς τὴν κατάστασιν α_1, ἐὰν τύπου «Σαμψὼν» εἰς τὴν α_2, καὶ ἐὰν τύπου «Ἡρακλῆς» εἰς τὴν α_3.

Τὰ βέλη εἰς τὸ Σχῆμα 1 δεικνύουν τὰς μετακινήσεις, αἱ ὁποῖαι δυνατὸν νὰ λάβουν χώραν ἐκ μιᾶς καταστάσεως πρὸς τὰς ἄλλας, ἢ τῆς παραμονῆς εἰς συγκεκριμένην κατάστασιν. Οἱ σημειούμενοι εἰς τὸ Σχῆμα 1 καὶ τὸν Πίνακα 1 ἀριθμοί, εἶναι αἱ πιθανότητες μεταβάσεως ἐκ μιᾶς καταστάσεως εἰς ἑτέραν, ὡς καὶ τῆς παραμονῆς εἰς τὴν αὐτὴν κατάστασιν. Εἰς τὴν πρᾶξιν, αἱ δυνατότητες αὗται δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν βάσει τῆς προγενεστέρας πείρας, ἢ ἐρεύνης τῶν συνθηκῶν τῆς ἀγορᾶς. Αἱ εἰς τὸν Πίνακα 1, πιθανότητες δυνατὸν νὰ ἐξηγηθοῦν ὡς κάτωθι:

Ἡ πιθανότης διά τινα πελάτην νὰ μεταβάλῃ προτίμησιν τύπου ἐλαστικῶν, λ.χ. ἀπὸ τὸν α_1 εἰς τὸν α_2, εἶναι 40%, ἀπὸ τὸν α_1 εἰς τὸν α_3 εἶναι 10%, ἀπὸ τὸν α_2 εἰς τὸν α_1 εἶναι 10%, κ.ο.κ. Αἱ πιθανότητες τοῦ νὰ παραμείνουν οἱ πελάται πιστοὶ εἰς τὸν αὐτὸν τύπον ἐλαστικῶν, δεικνύεται διαγωνίως εἰς τὸν Πίνακα 1 (0,50, 0,80, 0,20).

Π ί ν α ξ 1

Πιθανότητες μεταβολῆς προτιμήσεων

	α_1 «Ἄτλας»	α_2 «Σαμψὼν»	α_3 «Ἡρακλῆς»
α_1 «Ἄτλας»	***0,50***	0,40	0,10
α_2 «Σαμψὼν»	0,10	***0,80***	0,10
α_3 «Ἡρακλῆς»	0,40	0,40	***0,20***

Δένδρον Μαρκὼφ *(Markov Tree)*

Διὰ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πιθανότης, ὅπως εὑρίσκεταί τις εἰς συγκεκριμένην κατάστασιν μετὰ παρέλευσιν ὡρισμένων ἀγοραστικῶν χρονικῶν περιόδων (purchase cycles), εἶναι ἀπαραίτητον νὰ εἶναι γνωστὰ ἡ ἀρχικὴ κατάστασις καὶ αἱ πιθανότητες μεταβολῆς της. Συνεπῶς, εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πιθανότητες τοῦ νὰ εὑρεθῇ τις εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς καταστάσεις, κατὰ διαδοχικὰς ἀλλήλων χρονικὰς περιόδους, εἰς τὴν διαδικασίαν Μαρκώφ. Εἰς τὸ χρησιμοποιούμενον παράδειγμα, μία χρονικὴ περίοδος εἶναι ἐκεῖνο τὸ σημεῖον ἐν χρόνῳ, κατὰ τὸ ὁποῖον εἷς πελάτης ἀγοράζει ἐλαστικὰ αὐτοκινήτων.

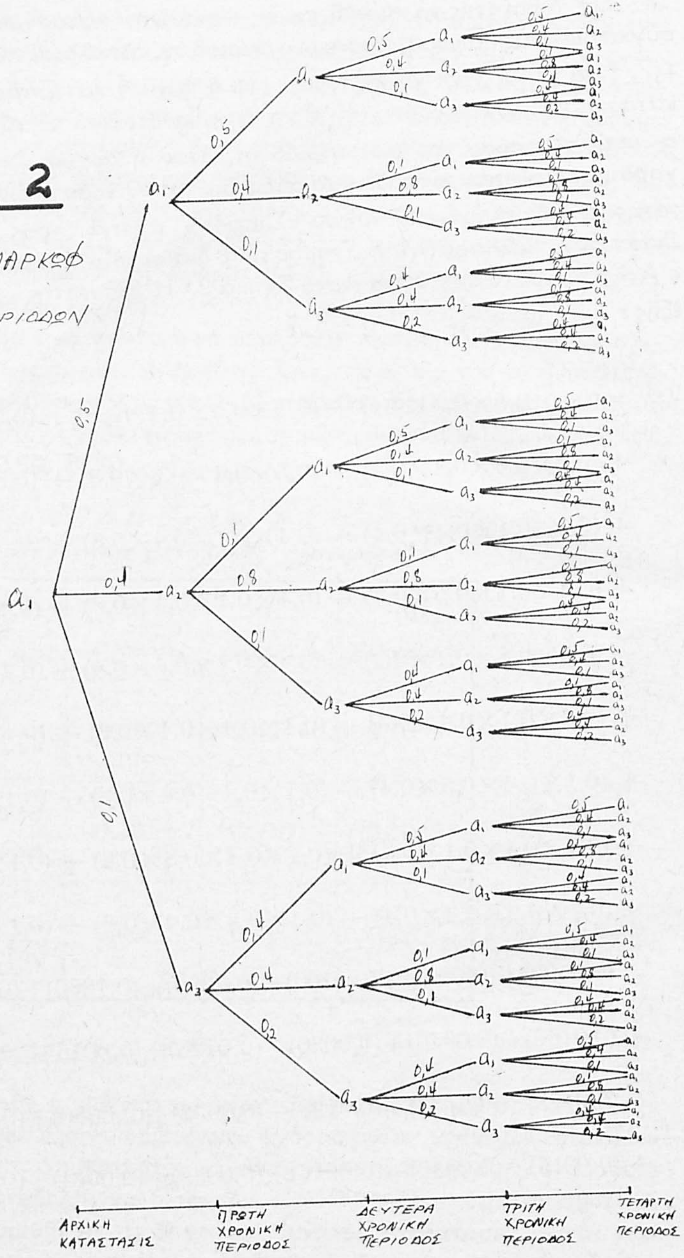
Ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς ὡρισμένην κατάστασιν μετὰ παρέλευσιν συγκεκριμένου ἀριθμοῦ χρονικῶν περιόδων, ὑπολογίζεται διὰ τοῦ τύπου $p_{ij}^{(t)}$, ἔνθα $t =$ ἡ χρονικὴ περίοδος, $i =$ ἡ ἀρχικὴ κατάστασις, καὶ $j =$ ἡ τελικὴ κατάστασις. Λόγου χάριν, $p_{12}^{(4)}$ εἶναι ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὴν θέσιν α_2 μετὰ τέσσαρας χρονικὰς περιόδους, ὅταν ἡ ἀρχικὴ θέσις εἶναι α_1. Εἰς τὸ χρησιμοποιούμενον παράδειγμα ἀλλαγῆς τύπου ἐλαστικῶν, $p_{12}^{(4)}$ εἶναι ἡ πιθανότης ἀγορᾶς ἐλαστικῶν τύπου «Σαμψὼν» μετὰ τρεῖς διαδοχικὰς ἀγορὰς ἐλαστικῶν, δοθέντος ὅτι ἡ ἀγοραστικὴ διαδικασία ἤρχισε μὲ ἐλαστικὰ τύπου «Ἄτλας». Τοῦτο δεικνύεται εἰς τὸ Σχῆμα 2. Ἡ πιθανότης $p_{12}^{(4)}$ ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς :

$$
\begin{aligned}
p_{12}^{(4)} &= (0{,}5\times0{,}5\times0{,}5\times0{,}4) + (0{,}5\times0{,}5\times0{,}4\times0{,}8) + (0{,}5\times0{,}5\times0{,}1\times0{,}4) \\
&+ (0{,}5\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}4) + (0{,}5\times0{,}4\times0{,}8\times0{,}8) + (0{,}5\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}4) \\
&+ (0{,}5\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}4) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}8) + (0{,}5\times0{,}1\times0{,}2\times0{,}4) \\
&+ (0{,}4\times0{,}1\times0{,}5\times0{,}4) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}8) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}1\times0{,}4) \\
&+ (0{,}4\times0{,}8\times0{,}1\times0{,}4) + (0{,}4\times0{,}8\times0{,}8\times0{,}8) + (0{,}4\times0{,}8\times0{,}1\times0{,}4) \\
&+ (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}4) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}8) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}2\times0{,}4) \\
&+ (0{,}1\times0{,}4\times0{,}5\times0{,}4) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}4\times0{,}8) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}4) \\
&+ (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}4) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}8\times0{,}8) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}4) \\
&+ (0{,}1\times0{,}2\times0{,}4\times0{,}4) + (0{,}1\times0{,}2\times0{,}4\times0{,}8) + (0{,}1\times0{,}2\times0{,}2\times0{,}4) \\
&= (0{,}0500)+(0{,}0800)+(0{,}0100)+(0{,}0080)+(0{,}1280)+(0{,}0080)+(0{,}0080) \\
&+ (0{,}0160)+(0{,}0040)+(0{,}0080)+(0{,}0128)+(0{,}0016)+(0{,}0128)+(0{,}2048) \\
&+ (0{,}0128)+(0{,}0064)+(0{,}0128)+(0{,}0032)+(0{,}0080)+(0{,}0128)+(0{,}0016) \\
&+ (0{,}0016)+(0{,}0256)+(0{,}0016)+(0{,}0032)+(0{,}0064)+(0{,}0016) = \underline{\underline{0{,}6496}}
\end{aligned}
$$

Πρὸς εὕρεσιν τῶν $p_{11}^{(4)}$ καὶ $p_{13}^{(4)}$ ἅπασαι αἱ ὁδοί, αἱ ὁποῖαι ὁδηγοῦν εἰς τὰς καταστάσεις α_1 καὶ α_2 εἰς τέσσαρας περιόδους, πρέπει νὰ ἀναγνωρισθοῦν καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πιθανότητες αὐτῶν, ὡς ἑξῆς :

ΣΧΗΜΑ 2

ΔΕΝΔΡΟΝ ΜΑΡΚΩΦ
ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ



$$p_{11}^{(4)} = (0{,}5\times0{,}5\times0{,}5\times0{,}5) + (0{,}5\times0{,}5\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}5\times0{,}1\times0{,}4)$$
$$+ (0{,}5\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}5) + (0{,}5\times0{,}4\times0{,}8\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}4)$$
$$+ (0{,}5\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}5) + (0{,}5\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}1\times0{,}2\times0{,}4)$$
$$+ (0{,}4\times0{,}1\times0{,}5\times0{,}5) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}1\times0{,}4)$$
$$+ (0{,}4\times0{,}8\times0{,}1\times0{,}5) + (0{,}4\times0{,}8\times0{,}8\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}8\times0{,}1\times0{,}4)$$
$$+ (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}5 + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}2\times0{,}4)$$
$$+ (0{,}1\times0{,}4\times0{,}5\times0{,}5) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}4)$$
$$+ (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}5) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}8\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}4)$$
$$+ (0{,}1\times0{,}2\times0{,}4\times0{,}5) + (0{,}1\times0{,}2\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}2\times0{,}2\times0{,}4)$$
$$= (0{,}0625)+(0{,}0100)+(0{,}0100)+(0{,}0100)+(0{,}0160)+(0{,}0080)+(0{,}0100)$$
$$+ (0{,}0020)+(0{,}0040)=(0{,}0100)+(0{,}0016)+(0{,}0016)+(0{,}0160)+(0{,}0256)$$
$$+ (0{,}0128)+(0{,}0080)+(0{,}0016)+(0{,}0032)=(0{,}0100)+(0{,}0016)+(0{,}0016)$$
$$+ (0{,}0020)+(0{,}0032)+(0{,}0016)+(0{,}0040)+(0{,}0008)+(0{,}0016) = \underline{\underline{0{,}2393}}$$

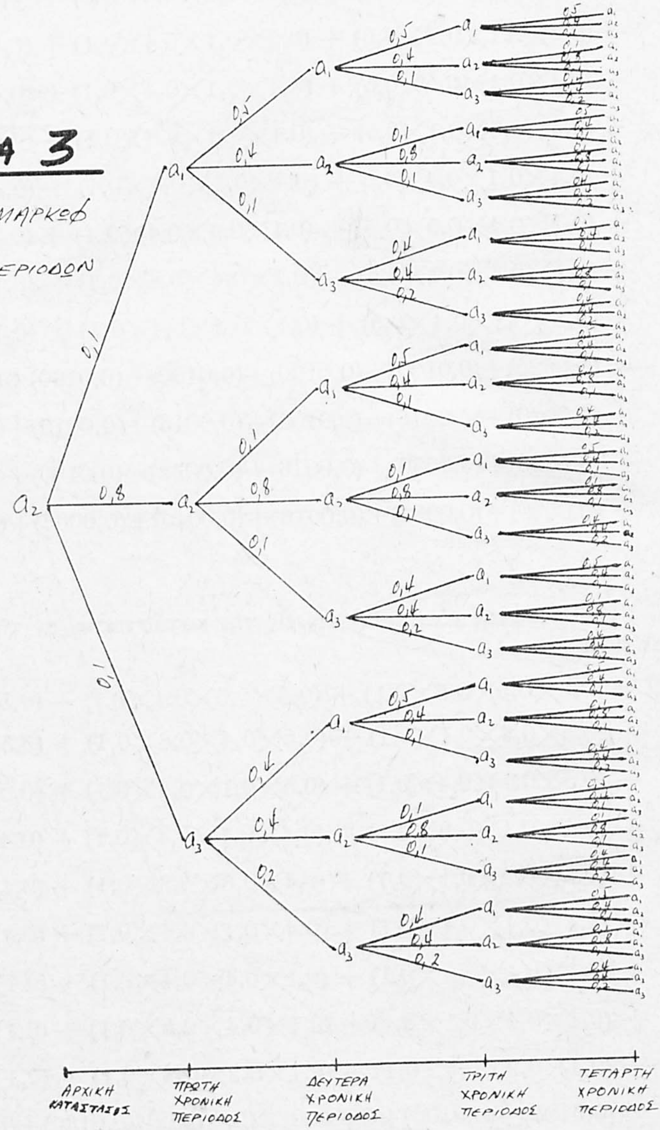
Ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὴν κατάστασιν α_3 τὴν τετάρτην περίοδον εἶναι :

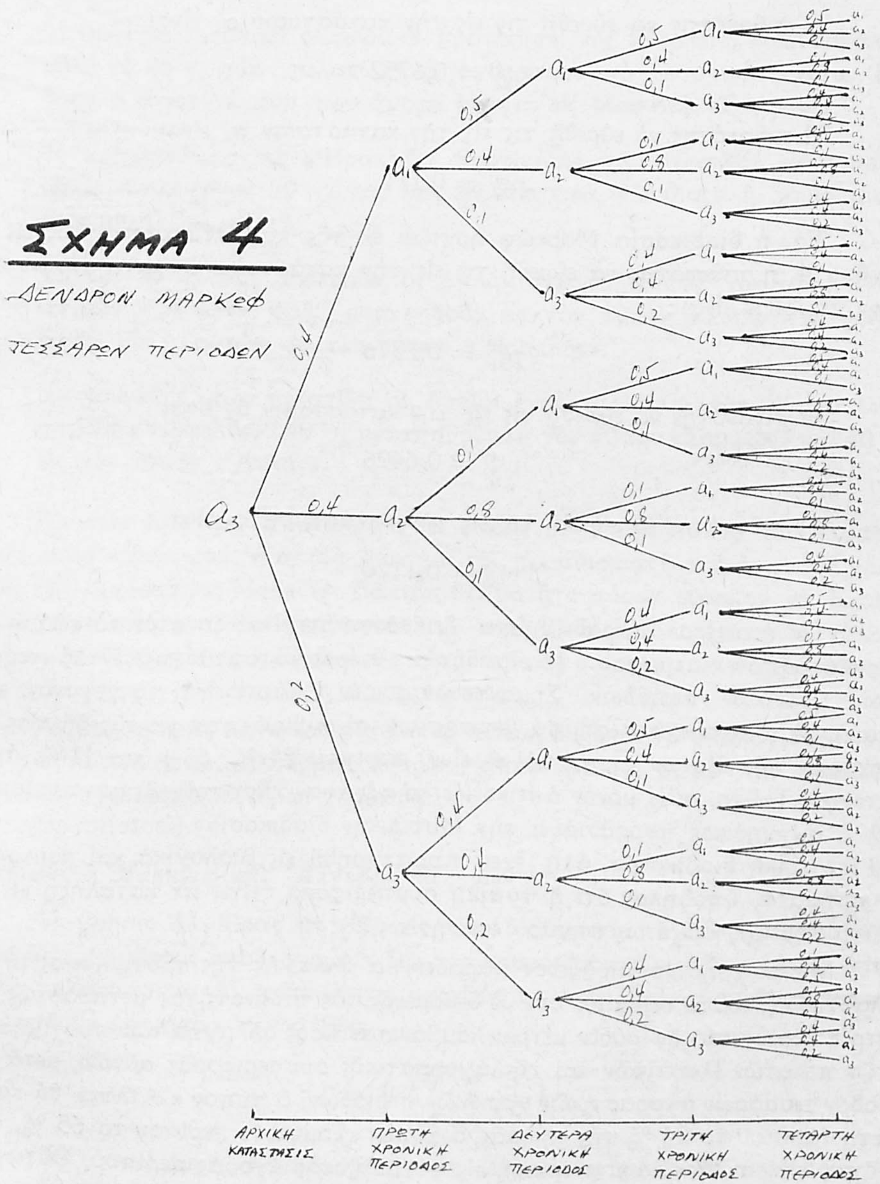
$$p_{13}^{(4)} = (0{,}5\times0{,}5\times0{,}5\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}5\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}5\times0{,}1\times0{,}2)$$
$$+ (0{,}5\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}4\times0{,}8\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}2)$$
$$+ (0{,}5\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}5\times0{,}1\times0{,}2\times0{,}2)$$
$$+ (0{,}4\times0{,}1\times0{,}5\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}1\times0{,}2)$$
$$+ (0{,}4\times0{,}8\times0{,}1\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}8\times0{,}8\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}8\times0{,}1\times0{,}2)$$
$$+ (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}4\times0{,}1\times0{,}2\times0{,}2)$$
$$+ (0{,}1\times0{,}4\times0{,}5\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}2)$$
$$+ (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}8\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}4\times0{,}1\times0{,}2)$$
$$+ (0{,}1\times0{,}2\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}2\times0{,}4\times0{,}1) + (0{,}1\times0{,}2\times0{,}2\times0{,}2)$$
$$= (0{,}0125)+(0{,}0100)+(0{,}0050)+(0{,}0020)+(0{,}0160)+(0{,}0040)+(0{,}0020)$$
$$+ (0{,}0020)+(0{,}0020)+(0{,}0020)+(0{,}0016)+(0{,}0008)+(0{,}0032)+(0{,}0256)$$
$$+ (0{,}0064)+(0{,}0016)+(0{,}0016)+(0{,}0016)+(0{,}0020)+(0{,}0016)+(0{,}0008)$$
$$+ (0{,}0004)+(0{,}0032)+(0{,}0008)+(0{,}0008)+(0{,}0008)+(0{,}0008) = \underline{\underline{0{,}1111}}$$

ΣΧΗΜΑ 3

ΔΕΝΔΡΟΝ ΜΑΡΚΟΦ

ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ





Ἐὰν ἡ διαδικασία Μαρκὼφ ἤρχιζεν ἐκ τῆς καταστάσεως α_2, ὡς εἰς τὸ Σχῆμα 3, ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὴν κατάστασιν α_1 κατὰ τὴν τετάρτην περίοδον εἶναι :

$$p_{21}^{(4)} = 0{,}2133$$

Ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὴν κατάστασιν α_2 εἶναι :

$$p_{22}^{(4)} = 0,6752$$

Ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὴν κατάστασιν α_3 εἶναι :

$$p_{23}^{(4)} = 0,111$$

Ἐὰν ἡ διαδικασία Μαρκὼφ ἤρχιζεν ἐκ τῆς καταστάσεως α_3, ὡς εἰς τὸ Σχῆμα 4, ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὴν κατάστασιν α_1 κατὰ τὴν τετάρτην περίοδον εἶναι :

$$p_{31}^{(4)} = 0,2376$$

Ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὴν κατάστασιν α_2 εἶναι :

$$p_{32}^{(4)} = 0,6496$$

Ἡ πιθανότης νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὴν κατάστασιν α_3 εἶναι :

$$p_{33}^{(4)} = 0,1120$$

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα δεικνύουν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ φθάσῃ τις εἰς οἱανδήποτε κατάστασιν ἐξ οἱασδήποτε ἑτέρας καταστάσεως, ἐντὸς τεσσάρων χρονικῶν περιόδων. Σημαντικώτερον ἐν τούτοις εἶναι τὸ γεγονός, ὅτι παρὰ τὰ διαφορετικὰ σημεῖα ἐκκινήσεως, αἱ πιθανότητες νὰ εὑρεθῇ τις εἰς ἑκάστην τῶν θέσεων α_1, α_2, καὶ α_3 εἶναι περίπου 24 %, 65 % καὶ 11 %, ἀντιστοίχως. Τοῦτο, οὐχὶ μόνον ἀπεικονίζει τὴν ἔννοιαν τῆς σταθερᾶς καταστάσεως, ἀλλὰ συγχρόνως παρουσιάζει τὴν ἰσοτελικὴν διαδικασίαν (isotelic process). Ἡ ἰσοτελικὴ διαδικασία, ἥτις ἔχει παρατηρηθῇ εἰς βιολογικὰ καὶ κοινωνικὰ συστήματα, ὑποδηλοῖ ὅτι ἡ τυπικὴ συμπεριφορὰ τείνει νὰ καταλήξῃ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἀσχέτως σημείου ἐκκινήσεως ([3]).

Εἰς τὸ χρησιμοποιούμενον παράδειγμα ἀλλαγῆς τῆς προτιμήσεως τύπου ἐλαστικῶν, τοῦτο σημαίνει ὅτι μὲ δεδομένας τὰς πιθανοτήτας μεταβάσεως, εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν οὐδὲν μέτρον λαμβάνεται πρὸς ἀλλαγὴν τῶν προτιμήσεων τῶν πελατῶν ἐλαστικῶν καὶ τῆς ἀγοραστικῆς συμπεριφορᾶς αὐτῶν, μετὰ πάροδον τεσσάρων ἀγοραστικῶν χρονικῶν περιόδων, ὁ τύπος «Ἄτλας» θὰ καλύπτῃ περίπου τὸ 24 % τῆς ἀγορᾶς, ὁ τύπος «Σαμψὼν» περίπου τὸ 65 %, ὁ δὲ τύπος «Ἡρακλῆς» θὰ περιορισθῇ εἰς τὸ 11% τῆς ἀγορᾶς περίπου. Οὕτως, ἡ ἀγορὰ θὰ σταθεροποιηθῇ, ἀσχέτως τοῦ σημείου ἐκκινήσεως.

Ἡ πρὸς τὰ ἐλαστικὰ «Σαμψὼν» προτίμησις εἶναι ἐμφανὴς ἐκ τῆς μήτρας τῶν πιθανοτήτων μεταβάσεως, ὡς δεικνύεται εἰς τὸν Πίνακα 1. Ἐπὶ πλέον, εὐκόλως δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι :

---

3) Ἰδὲ Ludwig von Bertalanffy, «General Systems Theory», General Systems, τόμ. 1 (1950).

1) Ἡ πρὸς τὰ ἐλαστικὰ «Σαμψὼν» προτίμησις τῆς πελατείας εἶναι μεγάλη, δηλ. τὸ 80 % τῶν πελατῶν θὰ ἀγοράσουν τὰ ἐλαστικὰ ταῦτα, ἐφ' ὅσον ἡ προηγουμένη των ἀγορὰ ἐγένετο εἰς ἐλαστικὰ «Σαμψών».

2) Ἡ πρὸς τὰ ἐλαστικὰ «Ἡρακλῆς» προτίμησις τῆς πελατείας εἶναι πολὺ μικρά, δηλ. μόνον 20 %, ἐνῷ διὰ τὰ ἐλαστικὰ «Ἄτλας» ἡ προτίμησις εἶναι μέση, δηλ. 50 %.

3) Ἐκ τοῦ 50 % τῶν πελατῶν, οἱ ὁποῖοι ἐγκαταλείπουν τὸν τύπον ἐλαστικῶν «Ἄτλας», 40 % μεταπηδοῦν εἰς τὸν τύπον «Σαμψών», μόνον δὲ τὸ 10 % αὐτῶν εἰς τὸν τύπον «Ἡρακλῆς».

4) Ἐκ τοῦ 80 % τῶν πελατῶν, οἱ ὁποῖοι ἐγκαταλείπουν τὸν τύπον ἐλαστικῶν «Ἡρακλῆς», 40 % μεταπηδοῦν εἰς τὸν τύπον «Σαμψὼν» καὶ 40 % εἰς τὸν τύπον «Ἄτλας».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποκαλύπτεται σαφὴς προτίμησις ὑπὲρ τῶν ἐλαστικῶν τύπου «Σαμψών», ἡ ὁποία δύναται νὰ προσδιορισθῇ καὶ ἄνευ τῆς χρήσεως τῆς διαδικασίας Μαρκώφ. Πάντως δὲν θὰ ἦτο τόσον εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ἡ τάσις αὕτη, ἐὰν ἐπρόκειτο λ.χ. περὶ 10 ἢ 20 διαφορετικῶν τύπων ἐλαστικῶν. Ἐπὶ πλέον, ἡ διαδικασία Μαρκὼφ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πιθανότητας τῆς σταθερᾶς καταστάσεως.

Αἱ πιθανότητες τῆς σταθερᾶς καταστάσεως δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ἀλγέβρας μητρῶν, ἀποφεύγοντες οὕτω τὴν κοπιώδη ἐργασίαν σχεδιάσεως δένδρων Μαρκώφ.

Διαδικασία Μαρκὼφ καὶ Ἄλγεβρα Μητρῶν

Ἡ χρῆσις ἀλγέβρας μητρῶν εἰς τὴν διαδικασίαν Μαρκώφ, ἁπλοποιεῖ τοὺς ἀπαιτουμένους ὑπολογισμοὺς διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν πιθανοτήτων σταθερᾶς καταστάσεως. Αἱ πιθανότητες μεταβάσεως τοῦ Πίνακος 1, δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν ὡς μήτρα P, ὡς ἑξῆς:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Ἐφ' ὅσον, ὅμως, ἡ κατάστασις εἰς ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον, ὡς π.χ. τῆς χρονικῆς περιόδου $t+1$, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς καταστάσεως κατὰ τὴν ἀμέσως προηγουμένην χρονικὴν περίοδον, t, ἡ γενικὴ ἐξίσωσις μιᾶς διαδικασίας Μαρκὼφ δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ, ὡς ἀκολούθως:

$$p^{(t+1)} = p^{(t)} \cdot P$$

Ἐὰν ἡ ἀρχικὴ κατάστασις, $p^{(t)}$, καὶ ἡ μήτρα μεταβάσεως P εἶναι γνωσταί, εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς πιθανότητας τῶν καταστάσεων διὰ οἱανδήποτε χρονικὴν περίοδον, ὡς κατωτέρω:

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P$$
$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P$$
$$p^{(3)} = p^{(2)} \cdot P$$
$$p^{(4)} = p^{(3)} \cdot P$$
$$********$$
$$p^{(t)} = p^{(t-1)} \cdot P$$
$$p^{(t+1)} = p^{(t)} \cdot P$$

Ἡ ἀρχικὴ κατάστασις δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς $p_i^{(0)}$. Ὁ δείκτης i δηλοῖ τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν, ἐνῷ ὁ δείκτης (0) δηλοῖ τὴν χρονικὴν περίοδον. Ἐάν, π.χ., ἡ διαδικασία ἤρχιζεν εἰς τὴν κατάστασιν α_1, ἡ ἀνυσματικὴ σειρὰ (row vector) θὰ ἦτο $p_1^{(0)} = (1\ 0\ 0)$. Οὕτω, διὰ τὸ χρησιμοποιούμενον παράδειγμα ἀλλαγῆς προτιμήσεως ἐξ ἑνὸς τύπου ἐλαστικοῦ εἰς ἕτερον, ἔχομεν :

$$p_1^{(1)} = p_1^{(0)} \cdot P = (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} = (0{,}5\ \ 0{,}4\ \ 0{,}1)$$

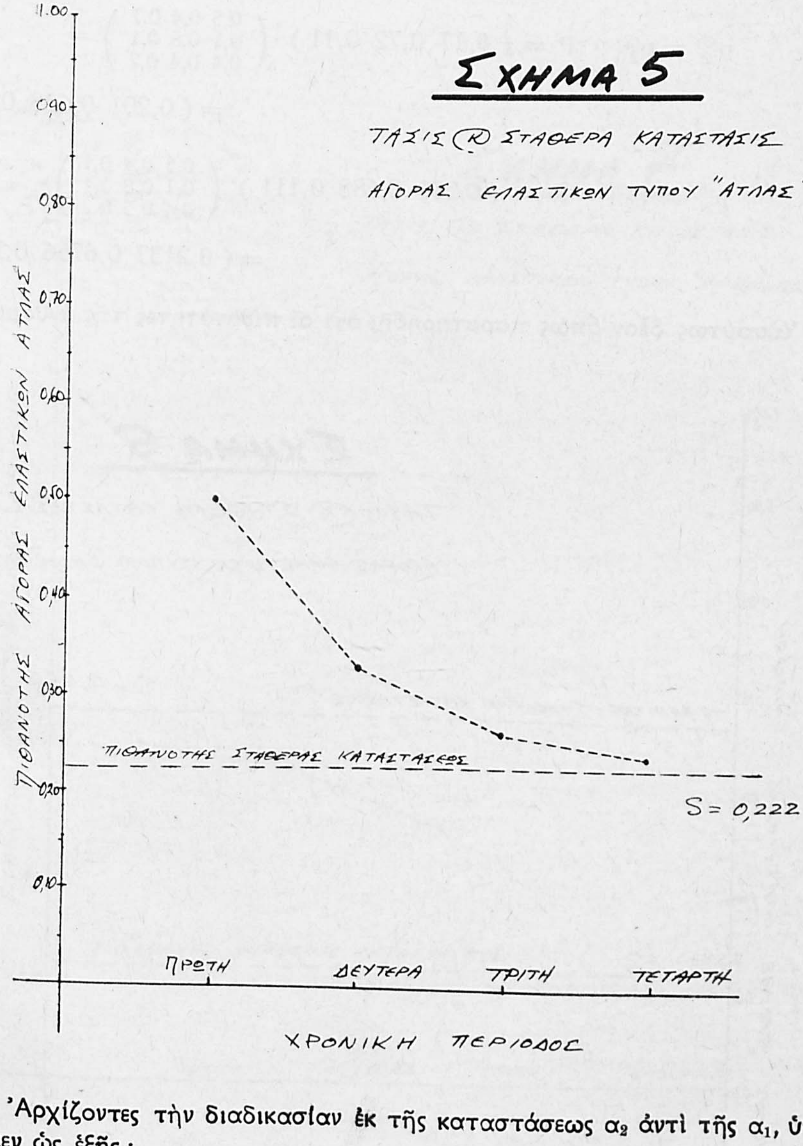
$$p_1^{(2)} = p_1^{(1)} \cdot P = (0{,}5\ 0{,}4\ 0{,}1) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} = (0{,}33\ \ 0{,}56\ \ 0{,}11)$$

$$p_1^{(3)} = p_1^{(2)} \cdot P = (0{,}33\ \ 0{,}56\ \ 0{,}11) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} = (0{,}265\ \ 0{,}624\ \ 0{,}111)$$

$$p_1^{(4)} = p_1^{(3)} \cdot P = (0{,}265\ \ 0{,}624\ \ 0{,}111) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} = $$
$$= (0{,}2393\ \ 0{,}6496\ \ 0{,}1111)$$

Σημειωτέον, ὅτι αἱ πιθανότητες τῆς ἀνυσματικῆς σειρᾶς $p_1^{(4)}$ προσεγγίζουν τὰ ἐξαχθέντα διὰ τοῦ δένδρου Μαρκὼφ ἀποτελέσματα. Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ δένδρου, ἤτοι αἱ πιθανότητες νὰ εὑρεθῇ τις εἰς τὰς καταστάσεις α_1, α_2, καὶ α_3, εἶναι 0,2393, 0,6496, καὶ 0,1191, ἐνῷ τὰ ἀντίστοιχα ἀποτελέσματα ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀλγέβρας μητρῶν εἶναι 0,2393, 0,6496 καὶ 0,1111.

Ἡ τάσις πρὸς αὐτὰς τὰς πιθανότητας σταθερᾶς καταστάσεως δι᾽ ἕκαστον τύπον ἐλαστικῶν, δεικνύεται εἰς τὰ Σχήματα 5, 6, καὶ 7.



Ἀρχίζοντες τὴν διαδικασίαν ἐκ τῆς καταστάσεως α_2 ἀντὶ τῆς α_1, ὑπολογίζομεν ὡς ἑξῆς :

$$p_2^{(0)} = (0\ 1\ 0)$$

$$p_2^{(1)} = p_2^{(0)} \cdot P = (0\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} = (0,1\ \ 0,8\ \ 0,1)$$

$$p_2^{(2)} = p_2^{(1)} \cdot P = (0,1\ \ 0,8\ \ 0,1)\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = (0,17\ 0,72\ 0,11)$$

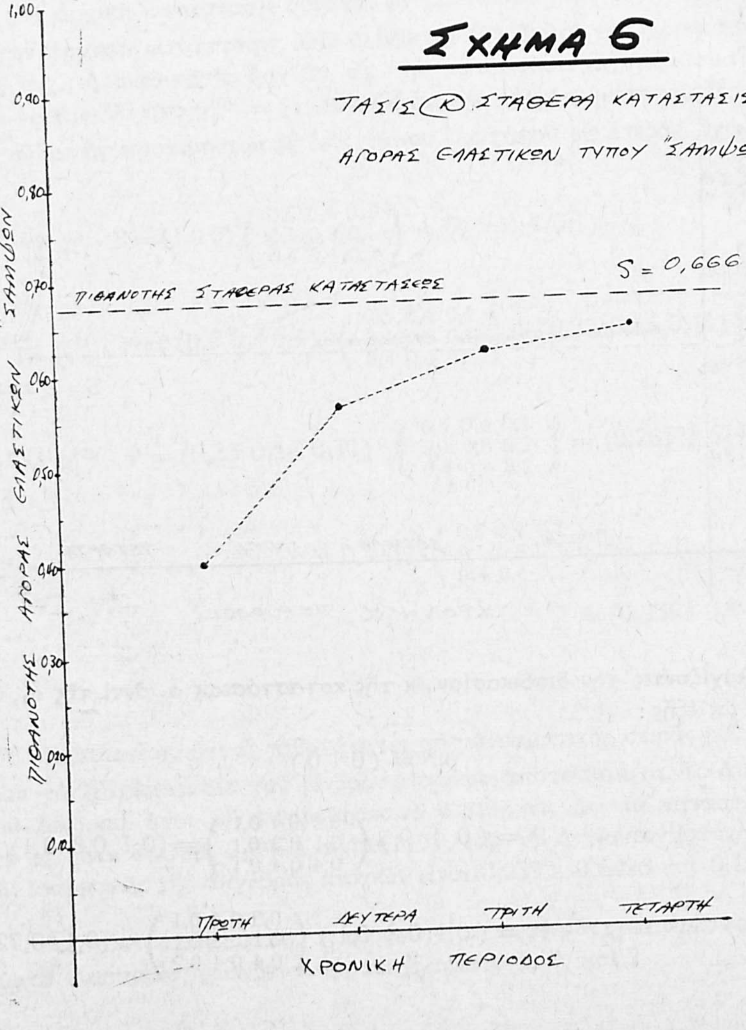
$$p_2^{(3)} = p_2^{(2)} \cdot P = (\,0{,}17\;\; 0{,}72\;\; 0{,}11\,) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} =$$

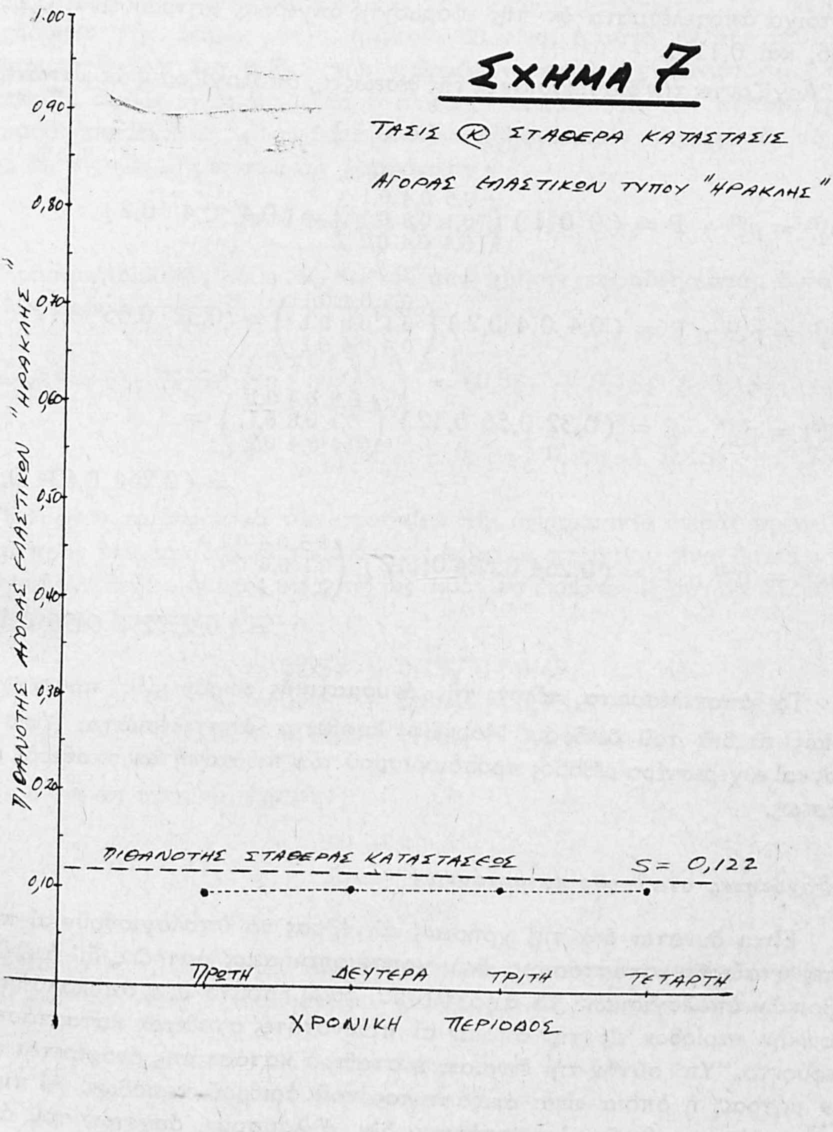
$$= (\,0{,}201\;\; 0{,}688\;\; 0{,}111\,)$$

$$p_2^{(4)} = p_2^{(3)} \cdot P = (\,0{,}201\;\; 0{,}688\;\; 0{,}111\,) \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$= (\,0{,}2137\;\; 0{,}6756\;\; 0{,}1111\,)$$

Ὡσαύτως δέον ὅπως παρατηρηθῇ, ὅτι αἱ πιθανότητες τῆς ἀνυσματικῆς




ΣΧΗΜΑ 7
ΤΑΣΙΣ ® ΣΤΑΘΕΡΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΙΣ
ΑΓΟΡΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΤΥΠΟΥ "ΗΡΑΚΛΗΣ"
1.00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ "ΗΡΑΚΛΗΣ"
ΠΙΘΑΝΟΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ
S= 0,122
ΠΡΩΤΗ
ΔΕΥΤΕΡΑ
ΤΡΙΤΗ
ΤΕΤΑΡΤΗ
ΧΡΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

σειρᾶς $p_2^{(4)}$ προσεγγίζουν τὰ διὰ τοῦ δένδρου Μαρκὼφ ληφθέντα ἀποτελέσματα.

Τὰ ἀποτελέσματα τοῦ δένδρου εἶναι 0,2133, 0,6752 καὶ 0,1111, ἐνῷ τὰ ἀντίστοιχα ἀποτελέσματα ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς ἀλγέβρας μητρῶν εἶναι 0,2137, 0,6756, καὶ 0,1111.

Ἀρχίζοντες τὴν διαδικασίαν ἐκ τῆς θέσεως α_3, ὑπολογίζομεν ὡς κατωτέρω:

$$p_3^{(0)} = (0\ 0\ 1)$$

$$p_3^{(1)} = p_3^{(0)} \cdot P = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = (0,4\quad 0,4\quad 0,2)$$

$$p_3^{(2)} = p_3^{(1)} \cdot P = (0,4\ 0,4\ 0,2) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = (0,32\quad 0,56\quad 0,12)$$

$$p_3^{(3)} = p_3^{(2)} \cdot P = (0,32\ 0,56\ 0,12) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = $$
$$= (0,264\ 0,624\ 0,112)$$

$$p_3^{(4)} = p_3^{(3)} \cdot P = (0,264\ 0,624\ 0,112) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = $$
$$= (0,2392\ 0,6496\ 0,1112)$$

Τὰ ἀποτελέσματα, τέλος, τῆς ἀνυσματικῆς σειρᾶς $p_3^{(4)}$, προσεγγίζουν ὁμοίως τὰ διὰ τοῦ δένδρου Μαρκὼφ ληφθέντα ἀποτελέσματα. Ὑφίσταται ὅμως καὶ εὐχερεστέρα μέθοδος προσδιορισμοῦ τῶν πιθανοτήτων σταθερᾶς καταστάσεως.

Πιθανότητες σταθερᾶς καταστάσεως

Εἶναι δυνατὸν διὰ τῆς χρήσεως ἀλγέβρας νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πιθανότητες σταθερᾶς καταστάσεως, ἄνευ χρησιμοποιήσεως μητρῶν, δι' ἁπλῶν ἀλγεβρικῶν ὑπολογισμῶν. Τὸ ἀποτέλεσμα, ὅμως, τοῦτο δὲν ἀποκαλύπτει τὴν χρονικὴν περίοδον εἰς τὴν ὁποίαν αἱ πιθανότητες σταθερᾶς καταστάσεως θὰ ἀνεφύοντο. Ὑπ' αὐτὴν τὴν ἔννοιαν, ἡ σταθερὰ κατάστασις ἀναφέρεται εἰς σειρὰν μήτρας, ἡ ὁποία εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἀριθμοῦ περιόδων. Αἱ τιμαὶ εἰς τὴν σειρὰν σταθερᾶς καταστάσεως δὲν ἀλλάσσουν, ἀσχέτως τοῦ ἀριθμοῦ χρονικῶν περιόδων αἱ ὁποῖαι παρέρχονται.

Ἡ τάσις πρὸς σταθερὰν κατάστασιν εἶναι φυσικὸν φαινόμενον εἰς τὴν συμπεριφορὰν τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῶν ζώων. Πάντοτε οἱ ἄνθρωποι προσπαθοῦν νὰ σταθεροποιήσουν τὴν συμπεριφορὰν καὶ τὰς σχέσεις των. Ἡ χρησιμοποίησις τῆς διαδικασίας Μαρκὼφ μᾶς παρέχει μέσον πρὸς ἀξιοποίησιν αὐτῆς τῆς ἐμφύτου τάσεως. Εἰς τὴν μαθηματικὴν ὁρολογίαν λέγομεν, ὅτι ὅσον αὐξάνει τὸ t, τόσον τὸ $p^{(t)}$ προσεγγίζει μίαν περιοριστικὴν ἀξίαν καί, παρὰ τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν, ἑκάστη διαδικασία τείνει πρὸς τὴν αὐτὴν σειρὰν περιοριστικῶν ἀξιῶν. Οὕτως, ἐὰν τὸ $p^{(t)}$ εἶναι μία σειρὰ πιθανοτήτων σταθερᾶς καταστάσεως, πολλαπλασιάζοντες τοῦτο ἐπὶ τὴν μήτραν μεταβάσεως (P), θὰ δημιουργήσωμεν τὴν σειρὰν $p^{(t+1)}$, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τοῦ $p^{(t)}$. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ S τὴν πιθανότητα σταθερᾶς καταστάσεως τῆς ἀνυσματικῆς σειρᾶς, ἡ ὁποία εἶναι ἡ σταθερὰ κατάστασις τῶν πιθανοτήτων ἐξ ὁρισμοῦ ἀμετάβλητος, εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν ἀλγεβρικῶς τὸ S. Οὕτως, ἐκ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως λαμβάνομεν :

$$p^{(t+1)} = p^{(t)}\, P = SP = S$$

Χρησιμοποιοῦντες τὰ στοιχεῖα τοῦ ὑπὸ χρῆσιν παραδείγματος, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς S, ὡς κατωτέρω :

$$S = SP = (S_1\ S_2\ S_3)\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0'8 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} = (0{,}5S_1 + 0{,}1S_2 + 0{,}4S_3\,,$$
$$0{,}4S_1 + 0{,}8S_2 + 0{,}4S_3\,,\ 0{,}1S_1 + 0{,}1S_2 + 0{,}2S_3)$$

Ἐφ᾽ ὅσον τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῆς ἀνυσματικῆς σειρᾶς πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα, αἱ πιθανότητες ἑκάστου στοιχείου εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν κεχωρισμένως, λύοντες ὡς πρὸς ἕνα ἕκαστον ἐξ αὐτῶν. Αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐξισώσεις εἶναι :

$$\begin{aligned} S_1 &= 0{,}5S_1 + 0{,}1S_2 + 0{,}4S_3 \\ S_2 &= 0{,}4S_1 + 0{,}8S_2 + 0{,}4S_3 \\ S_3 &= 0{,}1S_1 + 0{,}1S_2 + 0{,}2S_3 \end{aligned}$$

Λύοντες ὡς πρὸς S_1, ἔχομεν :

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1 \\ S_2 &= 3S_1 \\ S_3 &= 0{,}5S_1 \end{aligned}$$

Ἐξισοῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων πρὸς τὴν μονάδα, λύομεν ὡς πρὸς S_1 καί, κατόπιν, ἀντικαθιστῶμεν καὶ λύομεν ὡς πρὸς S_1 καὶ S_3.

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= 1 \\ S_1 + 3S_1 + 0{,}5S_3 &= 1 \\ 4{,}5S_1 &= 1 \\ S_1 &= 0{,}222 \\ S_2 &= 0{,}666 \\ S_3 &= 0{,}122 \end{aligned}$$

Αἱ πιθανότητες σταθερᾶς καταστάσεως εἶναι ὅτι τελικῶς ἡ ἀγορὰ ἐλαστικῶν θὰ κατανεμηθῇ μεταξὺ τῶν τύπων «Ἄτλας», «Σαμψὼν» καὶ «Ἡρακλῆς» εἰς 22,2%, 66,6%, καὶ 12.2% ἀντιστοίχως. Αἱ πιθανότητες σταθερᾶς καταστάσεως, αἱ ὑπολογισθεῖσαι διὰ τῆς μεθόδου τοῦ δένδρου καὶ διὰ τῆς ἐφαρμογῆς ἀλγέβρας μητρῶν μέχρι καὶ τῆς τετάρτης χρονικῆς περιόδου, ἀρχίζουν νὰ προσεγγίζουν τὰ 22,2 %, 66,6 %, καὶ 12,2 %. Διὰ νὰ προσδιορισθῇ, ἐν τούτοις, μετ' ἀκριβείας εἰς ποίαν περίοδον αἱ πιθανότητες θὰ φθάσουν εἰς τὴν σταθερὰν κατάστασιν, δέον τὸ δένδρον Μαρκὼφ καὶ οἱ μητρικοὶ ὑπολογισμοὶ νὰ ἐπεκταθοῦν καὶ εἰς ἑτέρας περιόδους.

Ἄλλαι ἐφαρμογαὶ τῆς ἁλύσου Μαρκὼφ

Ἡ ἐφαρμογὴ αὐτῆς τῆς μεθόδου δὲν περιορίζεται μόνον εἰς προβλήματα σχετικὰ πρὸς μεταβολὰς προτιμήσεως τύπων ἐμπορευμάτων, ὡς εἰς τὸ χρησιμοποιηθὲν παράδειγμα. Ἡ μέθοδος δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπὶ οἱουδήποτε προβλήματος, πληροῦντος τὰς ἀνωτέρω προσδιορισθείσας προϋποθέσεις τῆς διαδικασίας Μαρκώφ. Δύναται, λ.χ., ἡ μέθοδος αὕτη νὰ χρησιμοποιηθῇ καὶ διὰ τὴν ἀνάλυσιν καὶ διερεύνησιν προβλημάτων προσωπικοῦ.

Ὑποτεθείσθω, ὅτι μία βιομηχανία, ἡ ὁποία ἀπασχολεῖ 100 χειριστὰς μηχανῶν, ἀντιμετωπίζει ὁλονὲν καὶ μεγαλυτέραν καθυστέρησιν εἰς τὴν ἐργασίαν, λόγῳ ἀπουσιῶν τοῦ προσωπικοῦ. Ἐπὶ τῇ βάσει στοιχείων τοῦ παρελθόντος, ἀφορώντων εἰς τὴν ἐπιχείρησιν, αἱ πιθανότητες ἐργατικῶν ἀπουσιῶν ἐμφανίζονται εἰς τὸν Πίνακα 2. Αἱ ἑξῆς διαπιστώσεις δυνατὸν νὰ συναχθοῦν ἐκ τοῦ ὡς ἄνω πίνακος. Ἐάν, λ.χ., εἷς ἐργάτης ἀπουσίασε 2 ἡμέρας κατὰ τὴν παρελθοῦσαν ἑβδομάδα, ὑπάρχει πιθανότης 75 % ὅτι οὗτος δὲν θὰ ἀπουσιάσῃ οὔτε μίαν ἡμέραν κατὰ τὴν παροῦσαν ἑβδομάδα, ἢ ἐὰν ἀπουσίασε μίαν ἡμέραν κατὰ τὴν παρεθοῦσαν ἑβδομάδα, ἡ πιθανότης ὅτι οὗτος θὰ ἀπουσιάσῃ δύο ἡμέρας κατὰ τὴν παροῦσαν ἑβδομάδα εἶναι 10 %.

Πίναξ 2

Πιθανότητες ἀπουσιῶν ἐκ τῆς ἐργασίας

	Παροῦσα ἑβδομὰς				
	Ἡμέραι	0	1	2	3
Παρελθοῦσα ἑβδομὰς	0	0,45	0,30	0,15	0,10
	1	0,60	0,30	0,10	0
	2	0,75	0,15	0,10	0
	3	0,75	0,15	0,10	0

Ὁ Πίναξ 2 δὲν περιλαμβάνει περισσοτέρας τῶν 3 ἀπουσιῶν. Τοῦτο ὑποδηλοῖ, ὅτι ἡ πιθανότης δι' ἓν τοιοῦτον γεγονὸς εἶναι 0. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι: α) ὁ ὄγκος ἐργασιῶν διὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος εἶναι γνωστός, β) ὅλοι οἱ χειρισταὶ μηχανῶν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἱκανότητα ἐργασίας καὶ γ) ὅλαι αἱ μηχαναὶ εἶναι τῆς αὐτῆς δυναμικότητος. Τὰ ἐρωτήματα τὰ ὁποῖα θὰ μᾶς ἀπασχολήσουν εἶναι: 1) Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος ἡμερῶν κατὰ τὰς ὁποίας εἷς ἐργάτης θὰ ἀπουσιάζῃ ἀνὰ ἑβδομάδα, καὶ 2) πόσοι ἐφεδρικοὶ χειρισταὶ θὰ πρέπει νὰ προσληφθοῦν διὰ νὰ πληρώσουν τὰς κενὰς θέσεις τῶν ἀπόντων;

Αἱ πιθανότητες σταθερᾶς καταστάσεως, ὑπολογιζόμεναι ἀλγεβρικῶς, ἤτοι $p^{(t+1)} = p^{(t)} \cdot P = SP = S$, λαμβάνονται ὡς ἑξῆς:

$$S = SP = (S_0\ S_1\ S_2\ S_3) \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}60 & 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}0 \\ 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}0 \\ 0{,}75 & 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0{,}45S_0 + 0{,}60S_1 + 0{,}75S_2 + 0{,}75S_3,\ 0{,}30S_0 + 0{,}30S_1 + 0{,}15S_2 + \\ + 0{,}15S_3,\ 0{,}15S_0 + 0{,}10S_1 + 0{,}10S_2 + 0{,}10S_0).$$

Οὕτως, αἱ πρὸς ἐπίλυσιν ἐξισώσεις εἶναι αἱ κάτωθι:

$$\begin{aligned} S_0 &= 0{,}45S_0 + 0{,}60S_1 + 0{,}75S_2 + 0{,}75S_3 \\ S_1 &= 0{,}30S_0 + 0{,}30S_1 + 0{,}15S_2 + 0{,}15S_3 \\ S_2 &= 0{,}15S_0 + 0{,}10S_1 + 0{,}10S_2 + 0{,}10S_3 \\ S_3 &= 0{,}10S_0 \end{aligned}$$

Λύοντες ὡς πρὸς S_0, λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} S_0 &= S_0 \\ S_1 &= 0{,}50S_0 \\ S_2 &= 0{,}081S_0 \\ S_3 &= 0{,}10S_0 \end{aligned}$$

Ἐξισοῦντες τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων πρὸς τὴν μονάδα, λύομεν ὡς πρὸς S_0, κατόπιν δὲ ἀντικαθιστῶμεν διὰ νὰ λάβωμεν τὰς τιμὰς τῶν S_1, S_2 καὶ S_3, ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} S_0 + S_1 + S_2 + S_3 &= 1 \\ S_0 + 0{,}50S_0 + 0{,}08S_0 + 0{,}10S_0 &= 1 \\ 1{,}68S_0 &= 1 \\ S_0 &= 0{,}595 \\ S_1 &= 0{,}298 \\ S_2 &= 0{,}048 \\ S_3 &= 0{,}067 \end{aligned}$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω δύναται νὰ ἀναμένῃ τις, ὅτι εἷς χειριστὴς μηχανῶν θὰ ἀπουσιάζῃ : 0,595 (0) + 0,298 (1) + 0,048 (2) + 0,067 (3) = 0,595 ἡμέρας ἀνὰ ἑβδομάδα. Οὕτως, οἱ 100 χειρισταὶ θὰ ἔχουν 59,5 ἡμέρας ἀπουσίας ἀνὰ ἑβδομάδα. Ἄρα ὁ συνολικὸς ἀριθμὸς ἀπουσιῶν, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ ἀναμένεται κατ' ἔτος, εἶναι 2975 (59,5 × 50) ἑβδομάδες.

Ἐπὶ πλέον, ἐὰν ἕκαστος χειριστὴς μηχανῶν ἐργάζεται 300 ἡμέρας κατ' ἔτος, τὸ ἀνωτέρω σημαίνει ὅτι ἐργασία 9,9 χειριστῶν (2975 : 300) χάνεται λόγῳ ἀπουσιῶν καὶ ὅτι 109,9 ἢ 110 χειρισταὶ μηχανῶν πρέπει νὰ προσληφθοῦν διὰ νὰ ἐκτελέσουν τὴν ἐργασίαν τῶν 100 χειριστῶν.

Περίληψις

Ἡ ἅλυσος Μαρκὼφ εἶναι ἓν γενικὸν οἰκονομετρικὸν ὑπόδειγμα, χρήσιμον εἰς τὴν πρόγνωσιν ἀποτελεσμάτων. Στηρίζεται ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ κατὰ τὴν κατάστρωσιν προγράμματος ἐνεργειῶν καὶ κατὰ τὴν λῆψιν ἐπιχειρηματικῶν ἀποφάσεων. Αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν ἐφαρμογήν της εἶναι : ὅτι 1) ὑπάρχει πεπερασμένος ἀριθμὸς ἀποτελεσμάτων, 2) ἕκαστον ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ἀμέσως προηγουμένου τοιούτου. Τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπαραίτητα διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς ἁλύσου Μαρκὼφ εἶναι τὰ ἑξῆς : 1) ἅπασαι αἱ καταστάσεις, 2) αἱ ἀπὸ κατάστασιν εἰς κατάστασιν δυναταὶ ὁδοί, καὶ 3) αἱ πιθανότητες μεταβάσεως. Μερικοὶ ἐκ τῶν τρόπων μὲ τοὺς ὁποίους ἡ διαδικασία αὕτη δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ εἶναι : i) τὸ δένδρον Μαρκώφ, 2) ἡ μέθοδος μητρῶν καὶ 3) ἡ ἀλγεβρικὴ τοιαύτη.

Οἱ σοβαρώτεροι περιορισμοὶ τῆς διαδικασίας Μαρκὼφ ἔγκεινται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν καὶ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν πιθανοτήτων μεταβάσεως. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν πιθανοτήτων μεταβάσεως ἀπαιτεῖ τὴν ὕπαρξιν πείρας τοῦ παρελθόντος ἢ τὴν ἐξεύρεσιν στοιχείων μέσῳ ἐρεύνης. Ἡ χρῆσις τῶν πιθανοτήτων προϋποθέτει ὅτι δὲν θὰ μεσολαβήσουν ἀλλαγαί, αἱ ὁποῖαι θὰ ἠκύρουν (κατέστρεφον) τὰς πιθανότητας.