Η ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

ΕΙΣ ΤΗΝ ΚΑΤΑΡΤΙΣΙΝ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Τοῦ κ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Α. ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ

Διδάκτορος τῆς Στατιστικῆς τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Καλιφορνίας (Berkeley)

1. Εἰσαγωγὴ

Ἡ παροῦσα μελέτη πραγματεύεται προβλήματα σχετικὰ πρὸς τὴν «ἀριστοποίησιν» τῶν μεθόδων ἐκτιμήσεως εἰς τὴν διὰ δειγματοληψίας κατάρτισιν «χρονολογικῶν σειρῶν».

Αἱ ὑπὸ κατάρτισιν χρονολογικαὶ σειραὶ δυνατὸν νὰ ἀναφέρωνται εἰς χαρακτηριστικὰ ἐκφραζόμενα διὰ «συνεχῶν» μεταβλητῶν ἢ εἰς τοιαῦτα ἐκφραζόμενα δι' «ἀσυνεχῶν» ἢ «κατηγορικῶν» τοιούτων (ὡς π.χ. τὸ φῦλον, τὸ ἐπάγγελμα κλπ.).

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ἀντικείμενον τῆς ἐκτιμήσεως εἶναι συνήθως ὁ «μέσος ὅρος» τοῦ πληθυσμοῦ μ_t κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν (ἢ περίοδον) $t = 1, 2, \ldots, \tau, \ldots, T$.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἔχει ἤδη τύχει τῆς προσοχῆς σημαντικοῦ ἀριθμοῦ μελετητῶν.

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν—ἥτις, παρ'ὅ,τι πλέον συνήθης εἰς τὴν πρᾶξιν, δὲν ἔχει τύχει ἀντιστοίχου προσοχῆς – ἡ ἔννοια τοῦ μέσου ὅρου στερεῖται νοήματος καὶ τὸ ἀντικείμενον τῆς ἐκτιμήσεως εἶναι ἡ διανυσματικὴ - παράμετρος $(p_0(t), p_1(t), \ldots, p_r(t),)$ ὅπου $\sum_{j=o}^{r} p_j(t) = 1$, ἥτις χαρακτηρίζει τὴν πολυωνυμικὴν κατανομὴν τοῦ πληθυσμοῦ ὡς πρὸς τὴν ὑπὸ μελέτην κατηγορικὴν μεταβλητὴν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν (ἢ περίοδον)

$$t = 0, 1, \ldots \tau, \ldots, T.$$

Κατωτέρω πραγματευόμεθα προβλήματα συνδεόμενα ἀποκλειστικῶς πρὸς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.

Τὰ ἀναφυόμενα κατὰ τὴν κατάρτισιν χρονολογικῶν σειρῶν διὰ δειγματοληψιῶν προβλήματα εἶναι συνήθως πολυπλοκώτερα ἐκείνων τῶν ἐφ' ἅπαξ δειγματοληπτικῶν ἐρευνῶν. Ἀντιθέτως, ἡ συσσώρευσις πληροφοριῶν ἀναφορικῶς πρὸς τὸ ὑπὸ μελέτην χαρακτηριστικὸν ἢ ἄλλα συναφῆ τοιαῦτα –ἀνέφικτος εἰς τὰς ἐφ' ἅπαξ διενεργουμένας δειγματοληψίας — ἐπιτρέπει συνήθως τὴν κατάρτισιν τῶν πλέον ἐνδεδειγμένων δειγματοληπτικῶν σχεδίων καὶ τὴν βελτίωσιν τῆς ἀκριβείας τῶν μεθόδων ἐκτιμήσεως. Προγενέστεραι πληροφορίαι καθιστοῦν ἐφικτὴν τὴν βελτίωσιν τῆς ἀκριβείας τῶν ἐκτιμήσεων, λόγῳ τῆς ὑφισταμένης — συνήθως ἰσχυρᾶς — συσχετίσεως μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν τιμῶν (μετρήσεων) τῆς αὐτῆς μονάδος τοῦ πληθυσμοῦ, ἥτις καὶ ἐπιτρέπει τὴν πρόβλεψιν — ὑπὸ πιθανοθεωρητικὴν ἔννοιαν — τῶν μελλοντικῶν τιμῶν ἐκ τῶν τοιούτων τοῦ παρελθόντος.

Τίνι τρόπῳ προγενέστεραι πληροφορίαι — δεδομένα συλλεγέντα πρὸ τῆς τρεχούσης χρονικῆς στιγμῆς τ — δύνανται νὰ ἀξιοποιηθοῦν διὰ τὴν βελτίωσιν τῆς ἀκριβείας τῶν ἐκτιμήσεων; Τί εἴδους πληροφορίαι εἶναι ἀξιοποιήσιμοι; Ὑπὸ ποίαν μορφὴν καὶ πῶς; Εἶναι μερικὰ ἐκ τῶν συγκεκριμένων προβλημάτων τὰ ὁποῖα θὰ μᾶς ἀπασχολήσουν κατωτέρω. Ἐρωτήματα ὡς τὰ «ποῖον τὸ κέρδος εἰς τὴν ἀκρίβειαν ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν βελτιωμένων μεθόδων ἐκτιμήσεως»; «ποῖαι αἱ προϋποθέσεις διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τῶν ἐν λόγῳ βελτιώσεων»; «ποῖα τὰ ἐνδεδειγμένα δειγματοληπτικὰ σχέδια»; ὡς καὶ ἄλλα συναφῆ προβλήματα ἀριστοποιήσεως τυγχάνουν ἐπίσης διερευνήσεως.

2. Βασικοὶ ὁρισμοὶ καὶ ὑποθέσεις

2.1. *Περὶ τοῦ δειγματοληπτουμένου πληθυσμοῦ*

Ὑποτεθείσθω ὅτι πληθυσμός τις — ἀπεριόριστος — δειγματοληπτεῖται κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς (ἢ περιόδους) $t = 0,1,2,\ldots,\tau,\ldots,T$ πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς ἐκτιμήσεως τῆς διανυσματικῆς παραμέτρου

$$P(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_r(t))$$

— ἥτις χαρακτηρίζει τὴν πολυωνυμικὴν κατανομὴν τοῦ πληθυσμοῦ ἀναφορικῶς πρὸς κατηγορικήν τινα μεταβλητὴν A — κατὰ τὴν τρέχουσαν χρονικὴν στιγμὴν $t = \tau$, ὡς καὶ τῶν μεταβολῶν τῆς ἐν λόγῳ παραμέτρου ἀπὸ τῆς μιᾶς χρονικῆς στιγμῆς εἰς τὴν ἑπομένην $(\tau - 1, \tau)$.

Ἔστω $\pi_{jk}(t)$, $j, k = 0, 1, 2, \ldots, r$; $t = 1, 2, \ldots, \tau, \ldots, T$ ἡ δεσμευμένη (conditional) πιθανότης ἵνα μονάς τις τοῦ πληθυσμοῦ ἀνήκει κατὰ τὴν στιγμὴν t εἰς τὴν A_k κατηγορίαν δεδομένου ὅτι τὴν προηγουμένην στιγμὴν $t - 1$ ἀνῆκε εἰς τὴν A_j τοιαύτην.

Αἱ ἐν λόγῳ πιθανότητες ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ βαθμοῦ συσχετίσεως τῶν διαδοχικῶν τιμῶν (θέσεων) τῆς αὐτῆς μονάδος τοῦ πληθυσμοῦ, προφανῶς δὲ ἐπιτρέπουν τὴν πρόβλεψιν — ὑπὸ πιθανοθεωρητικὴν ἔννοιαν — τῆς κατηγορίας εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἀνήκῃ μονάς τις τοῦ πληθυσμοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν t ἐκ τῆς κατηγορίας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆκε τὴν στιγμὴν $t - 1$. (Ἐὰν π.χ. $\pi_{11}(1) = 1,0$ δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ὅλαι αἱ μονάδες αἱ ὁποῖαι κατὰ τὴν στιγμὴν $t = 0$ ἀνῆκον εἰς τὴν κατηγορίαν A_1, θὰ συνεχίσουν νὰ ἀνήκουν εἰς τὴν ἰδίαν κατηγορίαν καὶ τὴν στιγμὴν $t = 1$, ἐνῷ ἐὰν $\pi_{11}(1) = 0{,}7$ ἀναμένομεν τὰ ἀνωτέρω μόνον διὰ τὸ 70% τῶν ἐν λόγῳ μονάδων).

Κατὰ συνέπειαν, ἀκριβὴς ἢ καὶ κατ' ἐκτίμησιν γνῶσις τῶν πιθανοτήτων $\pi_{jk}(t)$, εἶναι δυνατὸν νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὴν βελτίωσιν τῆς ἀκριβείας τῆς ἐκτιμήσεως τῆς (διανυσματικῆς) παραμέτρου $P(t)$.

Τὸ τιθέμενον ἀνωτέρω πρόβλημα δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ἀπὸ ἄλλης – γενικωτέρας – σκοπιᾶς. Οὕτω, θεωροῦντες τὰς κατηγορίας A_j, $j = 0, 1 \ldots, r$, ὡς τὰ δυνατὰ «Στάδια» (States) «Μαρκοβίου Στοχαστικῆς Ἀκολουθίας» (Markov Chain), τὰς δεσμευμένας πιθανότητας $\pi_{jk}(t)$ ὡς τὰς πιθανότητας «Μεταστάσεως» (transition probabilities) καὶ τὰ στοιχεῖα τῆς διανυσματικῆς παραμέτρου $(p_0(t), p_1(t), \ldots, \ldots, p_r(t))$ ὡς τὰς ἀντιστοίχους «ἀπολύτους πιθανότητας» (absolute probabilities) κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t, τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα σχετίζεται ἀμέσως πρὸς συναφῆ προβλήματα ἐκτιμήσεως εἰς τὰς ἐν λόγῳ στοχαστικὰς ἀκολουθίας. Ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ταύτης τὸ πεδίον ἐφαρμογῆς τῶν ἐξαγομένων κατωτέρω συμπερασμάτων, ὡς καὶ τῶν ὑποδεικνυομένων μεθόδων διευρύνεται σημαντικῶς. Ἐξ ἄλλου, ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία ἐπιτρέπει τὴν χρῆσιν εἰς τὴν περαιτέρω διερεύνησιν τοῦ ἰδικοῦ μας προβλήματος ὁρολογίας καὶ βασικῶν τινων ἰδιοτήτων ἐκ τῶν «Μαρκοβίων Στοχαστικῶν Ἀκολουθιῶν».

Ἡ Μαρκόβιος Στοχαστικὴ Ἀκολουθία, ἡ ὁποία δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς τὸ πιθανοθεωρητικὸν ὑπόδειγμα (model) τοῦ ὑπὸ ἔρευναν προβλήματος ὑποτίθεται τῆς «πρώτης τάξεως» (of first order), ἤτοι, ὑποτίθεται ὅτι ἡ κατηγορία εἰς τὴν ὁποίαν μονάς τις τοῦ πληθυσμοῦ ἀνήκει κατὰ τὴν στιγμὴν t ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς κατηγορίας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνῆκε τὴν στιγμὴν $t-1$ καὶ ὄχι ἐκ προγενεστέρων τοιούτων. Ὑποτίθεται ἐπίσης ὅτι ἡ μήτρα τῶν πιθανοτήτων μεταστάσεως $\pi_{jk}(t)$ ὁριζομένη ἐκ τῆς σχέσεως

$$\Pi(t) = \begin{bmatrix} \pi_{00}(t), \pi_{01}(t) \ldots, \pi_{0r}(t) \\ \pi_{10}(t), \pi_{11}(t) \ldots, \pi_{1r}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_{r0}(t), \pi_{r1}(t) \ldots, \pi_{rr}(t) \end{bmatrix}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου t καὶ γνωστή, συμβολίζεται δὲ Π.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἀντίστοιχος στοχαστικὴ ἀκολουθία ὑποτίθεται «χρονικῶς ὁμογενὴς» (time homogeneous), ἤτοι ὅτι αἱ πιθανότητες μεταστάσεως $\pi_{jk}(t)$ δὲν μεταβάλλονται μετὰ τοῦ χρόνου, ἀλλ' ἔχουν σταθερὰς τιμὰς π_{jk}. Ὡρισμέναι τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων ἀντικαθίστανται ἀργότερον μὲ ἄλλας ὀλιγώτερον περιοριστικὰς καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ ἐξαγόμενα συμπεράσματα καθίστανται γενικώτερα. Π.χ. ἐνῷ ἀρχικῶς ὑποθέτομεν γνωστὴν τὴν μήτραν Π ἢ μᾶλλον τὴν ἐξ αὐτῆς προερχομένην μήτραν (r – τάξεως)

$$D = \begin{bmatrix} \pi_{11} - \pi_{01}, \ldots, \pi_{1k} - \pi_{0k}, \pi_{1r} - \pi_{0r} \\ \pi_{21} - \pi_{01}, \ldots, \pi_{2k} - \pi_{0k}, \pi_{2r} - \pi_{0r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_{r1} - \pi_{01}, \ldots, \pi_{rk} - \pi_{0k}, \pi_{rr} - \pi_{0r} \end{bmatrix}$$

ἀργότερον αὕτη ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ δείγματος προκυπτούσης ἐκτιμήσεως τῆς $\hat{D}$.

2.2. *Περὶ τοῦ δειγματοληπτικοῦ σχεδίου*

Καθ' ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau, \ldots, T$ ἐκλέγεται δι' ἁπλῆς τυχαίας δειγματοληψίας ἓν ἀντιπροσωπευτικὸν δεῖγμα μεγέθους n_t.

Ἵνα καταστῇ δυνατὴ ἡ χρῆσις προγενεστέρων πληροφοριῶν εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῆς παραμέτρου $P(\tau)$ — δηλούσης τὴν κατανομὴν τοῦ πληθυσμοῦ κατὰ τὴν «τρέχουσαν» στιγμὴν τ — ὡρισμέναι ἐκ τῶν μονάδων ἑκάστου δείγματος περιλαμβάνονται κατόπιν τυχαίας ἐκλογῆς των καὶ εἰς τὸ ἑπόμενον. Τὸ μέγεθος τοῦ «συνδετικοῦ» τούτου ὑποδείγματος συμβολίζεται γενικῶς $n_{t,t+1}$ Ἐπὶ τοῦ παρόντος καὶ χάριν τῆς γενικότητος οὐδεμία γίνεται ὑπόθεσις τόσον διὰ τὸ μέγεθος n_t ὅσον καὶ διὰ τὸ συνδετικὸν $n_{t,\,t+1}$.

Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς παρατηρήσεως — ἡ παρατήρησις — ἐπὶ τῆς $i = 1, 2, \ldots, n_t$ δειγματοληπτικῆς μονάδος κατὰ τὴν στιγμὴν t παρίσταται ὑπὸ τῆς διανυσματικῆς μεταβλητῆς $\underset{\sim}{y'_i}(t) = (y_{i1}(t), y_{i2}(t), \ldots, \ldots, y_{ir}(t))$

ὅπου:

$y_{ij}(t) = 1$ ἐὰν ἡ μονὰς ἀνήκῃ εἰς τὴν κατηγορίαν A_j, $j = 0, 1, 2, \ldots r$

$y_{ij}(t) = 0$ ἐὰν ἡ μονὰς ἀνήκῃ εἰς οἱανδήποτε ἄλλην κατηγορίαν

A_k, $k \neq j$

Τὰ διανύσματα—παρατηρήσεις $\underset{\sim}{y_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n_t$; $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ — ὑποτιθεμένου ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς τὴν χρονικὴν στιγμὴν (ἢ περίοδον) τ — διατεταγμένα εἰς $\tau + 1$ γραμμὰς καὶ εἰς τόσας στήλας ὅσος ὁ ἀριθμὸς τῶν διακεκριμένων δειγματοληπτικῶν μονάδων, ἀποτελοῦν τὴν καλουμένην «δειγματοληπτικὴν μήτραν» $S(\tau)$. Αἱ γραμμαὶ τῆς ἐν λόγῳ μήτρας αὐξάνουν μὲ τὴν πάροδον τοῦ χρόνου καὶ κατὰ τὴν ὑποτιθεμένην τελικὴν στιγμὴν δειγματοληψίας T εἶναι $T + 1$ εἰς ἀριθμόν, τῆς μήτρας συμβολιζομένης ἀντιστοίχως $S(T)$.

Ἡ δειγματοληπτικὴ μήτρα $S(t)$ περιλαμβάνουσα, ἀφ' ἑνὸς ὅλας τὰς μέχρι τῆς στιγμῆς t συλλεγείσας πληροφορίας καὶ ἀφ' ἑτέρου καθορίζουσα διὰ τῆς μορφῆς της τὸ ἀκριβὲς δειγματοληπτικὸν σχέδιον, ἀποτελεῖ βασικὸν ὄργανον εἰς τὴν περαιτέρω διερεύνησίν μας.

Κατωτέρω διερευνῶνται καὶ ὑποδεικνύονται «ἄριστοι» (optimum) μέθοδοι ἐκτιμήσεως, ἀφ' ἑνὸς τῆς παραμέτρου P (τ) καὶ ἀφ' ἑτέρου τῶν διαδοχικῶν μεταβολῶν της ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ἀνωτέρω *γενικὴν* μορφὴν τῆς δειγματοληπτικῆς μήτρας S (τ). Ἀκολούθως, τὰ γενικὰ ταῦτα συμπεράσματα μερικεύονται καὶ διερευνῶνται περαιτέρω εἰς τὰς ἑξῆς δύο εἰδικὰς μορφὰς τῆς μήτρας S (τ).

(A) Δειγματοληψία «ἀμέσου» συνδέσεως.

Τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t = 0$ ἐκλέγεται τυχαῖον δεῖγμα μεγέθους n.

Καθ' ἑκάστην δὲ τῶν ἑπομένων διαδοχικῶν στιγμῶν $t = 1, 2, \ldots, \tau \ldots, T$ τυχαῖον δεῖγμα μεγέθους λn $(0 < \lambda < 1)$ ἐκλεγόμενον ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ ἀντικαθιστᾷ τυχαῖον δεῖγμα ἴσου μεγέθους ἐκλεγόμενον ἐκ τοῦ ἐρευνηθέντος τὴν ἀμέσως προηγουμένην στιγμὴν τοιούτου.

$$S(\tau) = \left[\begin{array}{l} \text{XXXXX} \\ \hspace{1.5em}\text{XXXXX} \\ \hspace{6em}\cdot \\ \hspace{7em}\cdot \\ \hspace{8em}\cdot \\ \hspace{9em}\cdot \\ \hspace{10em}\cdot \\ \hspace{11em}\cdot \\ \hspace{12em}\cdot \\ \hspace{13em}\cdot \\ \hspace{5em}\text{XXXXX} \\ \hspace{6.5em}\text{XXXXX} \end{array}\right] \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau - 1 \\ \tau \end{array}$$

Οὕτω, καθ' ἑκάστην στιγμὴν ὁ πληθυσμὸς ἀντιπροσωπεύεται διὰ δείγματος μεγέθους $n_t = n$ (σταθεροῦ), δύο δὲ οἱαδήποτε διαδοχικὰ δείγματα ἔχουν $n_{t,\,t+1} = (1 - \lambda)\, n$ κοινὰς μονάδας (συνδετικὸν ὑπόδειγμα). Ἡ δειγματοληπτικὴ μήτρα S (τ) ἔχει τὴν παραπλεύρως μορφήν.

(B) Δειγματοληψία «ἐμμέσου» συνδέσεως.

Νέον ἀνεξάρτητον δεῖγμα μεγέθους m ἐκλέγεται καθ' ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau, \ldots, T$ ἐκ τῶν μονάδων τοῦ ὁποίου ἐκτὸς τῶν δεδομένων τῆς τρεχούσης περιόδου – πρὸς διατήρησιν τοῦ συνδέσμου – συλλέγονται πληροφορίαι ἀναφερόμεναι καὶ εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην χρονικὴν στιγμήν. Οὕτω $n_t = 2m$ καὶ $n_{t,t+1} = m$ διὰ $t = 1, 2, \ldots, \tau$. Εἰς τὴν κατωτέρω μήτραν S (τ) αἱ τελεῖαι δηλοῦν τὰς συλλεγομένας πληροφορίας τῆς ἑκάστοτε προηγουμένης περιόδου.

$$
S(\tau) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{l} \cdot\,\cdot\,\cdot \\ XXX\ldots \\ \quad XXX \\ \\ \\ \\ \\ \\ \qquad\quad \cdot\,\cdot\,\cdot \\ \qquad\quad XXX\ldots \\ \qquad\qquad XXX \end{array}\right] \end{array}
\begin{array}{l} \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tau - 1 \\ - \end{array}
$$

Παραλλαγαὶ τῶν ἀνωτέρω μητρῶν δύνανται νὰ ἐπιτευχθοῦν δι' ἐκλογῆς δειγμάτων διαφόρου μεγέθους ἀπὸ χρονικῆς στιγμῆς εἰς ἄλλην ἢ δι' ἀλλαγῆς τοῦ συνδετικοῦ δείγματος (περίπτωσις A).

2. 3. ***Ροπαὶ τῶν διανυσματικῶν μεταβλητῶν*** $\underset{\sim}{y_i}(t)$

Αἱ μεταβληταὶ $\underset{\sim}{y_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots n_t$; $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ ἀποτελοῦν τὰ στοιχεῖα τῆς μήτρας $S(\tau)$.

α) Διανυσματικὸς μέσος ὅρος τῆς $\underset{\sim}{y_i}(t)$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι $E(\underset{\sim}{y_i}(t)) = P(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$

β) Μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων τῆς $\underset{\sim}{y_i}(t)$

Ἡ μήτρα ταύτη, συμβολιζομένη κατωτέρω $V(t)$, εἶναι τάξεως $r \times r$ καὶ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$
(2.3.1.) \quad V(t) = \begin{bmatrix} p_1(t)(1 - p_1(t)), & -p_1(t)p_2(t), & \ldots, & -p_1(t)p_r(t) \\ -p_2(t)p_1(t), & p_2(t)(1 - p_2(t)), & \ldots, & -p_2(t)p_r(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p_r(t)p_1(t), & -p_r(t)p_2(t), & \ldots, & p_r(t)(1 - p_r(t)) \end{bmatrix}
$$

Σημειωθήτω ὅτι ἡ ὁρίζουσα τῆς ἐν λόγῳ μήτρας, δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $/V(t)/ = p_0(t)\, p_1(t) \ldots p_r(t)$ καὶ εἶναι πάντοτε θετικὸς ἀριθμός.

γ) Μήτρα συνδιακυμάνσεων τῶν στοιχείων τῶν $\underset{\sim}{y_i}(t-h)$ καὶ $\underset{\sim}{y_i}(t)$.

Αἱ διανυσματικαὶ μεταβληταὶ $\underset{\sim}{y_i}(t-h)$ καὶ $\underset{\sim}{y_i}(t)$ δηλοῦν τὰς παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς αὐτῆς δειγματοληπτικῆς μονάδος i κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $t-h$ καὶ t.

Ἡ μήτρα τῶν συνδιακυμάνσεων τῶν στοιχείων των, συμβολιζομένη

$\mathrm{Cov}\,(y_i(t-h),\ y_i(t))$ εἶναι τάξεως $r \times r$

καὶ δίδεται ὡς ἀποδεικνύεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

(2.3.2) $$\mathrm{Gov}\ \underset{\sim}{y_i}(t-h),\ \underset{\sim}{y_i}(t)) = V(t-h)\,D^h$$

ὅπου $V(t-h)$ παριστᾷ τὴν μήτραν διακ. – συνδιακ. τῆς $\underset{\sim}{y_i}(t-h)$ καὶ D^h τὴν h δύναμιν τῆς μήτρας D ὁρισθείσης ἀνωτέρω. Χρῆσις τῶν ἀνωτέρω τύπων γίνεται εἰς τὴν περαιτέρω διερεύνησιν τοῦ προβλήματος.

3. Ἄριστοι μέθοδοι ἐκτιμήσεως ὑπὸ δειγματοληπτικὴν μήτραν γενικῆς μορφῆς

3. 1. *Ἐκτίμησις τῆς τρεχούσης κατανομῆς* $P(\tau)$

Ὑποτίθεται ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς τὴν στιγμὴν (ἢ περίοδον) τ. Αἱ γενόμεναι κατὰ τὰς στιγμὰς $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ παρατηρήσεις $\underset{\sim}{y_i}(t)$ διατεταγμέναι εἰς $\tau + 1$ γραμμὰς ἀποτελοῦν τὴν μήτραν $S(\tau)$, ἡ ὁποία ὑποτίθεται ἐνταῦθα γενικῆς μορφῆς.

Ἡ ἐκτίμησις τῆς παραμέτρου $P(\tau)$ θὰ βασισθῇ ἐφ' ὅλων τῶν πληροφοριῶν (παρατηρήσεων) περιλαμβανομένων εἰς τὴν μήτραν $S(\tau)$ καὶ οὐχὶ μόνον ἐπ' αὐτῶν τῆς περιόδου τ. Συγκεκριμένως ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὸν ἄριστον — ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς ἐλαχίστης διακυμάνσεως ἢ μεγίστης ἀκριβείας — ἀμερόληπτον γραμμικὸν ἐκτιμητὴν τῆς $P(\tau)$ βασιζόμενον ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς μήτρας $S(\tau)$.

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον, ὁ κύριος ἀντικειμενικὸς σκοπὸς εἶναι ἡ ἀναζήτησις «ἀναγκαίων» καὶ «ἱκανῶν» συνθηκῶν ἵνα γραμμικός τις ἐκτιμητὴς εἶναι «ἀμερόληπτος» (unbiased) καὶ «ἐλαχίστης διακυμάνσεως» (minimum variance) ἢ ἄλλως πως «μεγίστης ἀκριβείας» (maximum efficiency) καὶ οὐχὶ ὁ ἀκριβὴς προσδιορισμὸς τῆς μορφῆς τοῦ ἐκτιμητοῦ. Τοῦτο εἶναι προφανῶς ἀδύνατον ἄνευ τοῦ προγενεστέρου ἐπακριβοῦς προσδιορισμοῦ τῆς μορφῆς τῆς μήτρας $S(\tau)$ ἢ ἄλλως τοῦ δειγματοληπτικοῦ σχεδίου.

Εἶναι προφανὲς ὅτι οἱοσδήποτε γραμμικὸς ἐκτιμητὴς τῆς $P(\tau)$ βασιζόμενος ἐπὶ τῆς μήτρας $S(\tau)$ ἔχει τὴν μορφὴν

(3.1.1.) $$L(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau} \sum_{i=1}^{n_t} C_i(t)\,\underset{\sim}{y_i}(t) = \sum_{S(\tau)} C_i(t)\,\underset{\sim}{y_i}(t)$$

ὅπου $C_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n_t$; $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ εἶναι μῆτραι — μὲ ἄγνωστα (ὑπὸ προσδιορισμὸν) σταθερὰ στοιχεῖα — τάξεως $r \times r$ καὶ $\underset{\sim}{y_i}(t)$ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς $S(\tau)$.

Θεώρημα 1*. Αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι ἵνα ὁ γραμμικὸς ἐκτιμητὴς $L(\tau)$ εἶναι ἀμερόληπτος, δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων :

$$(3.1.2.)\qquad \sum_{i=1}^{n} C_i(t) = 1_r \text{ διὰ } t = \tau \\ \qquad\qquad = 0_r \text{ διὰ } t = 0, 1, 2, \ldots, \tau - 1$$

ὅπου 1_r καὶ 0_r παριστοῦν ἀντιστοίχως τὴν μοναδιαίαν καὶ μηδενικὴν μήτραν τάξεων $r \times r$.

Θεώρημα 2*. Αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι ἵνα ἀμερόληπτός τις γραμμικὸς ἐκτιμητὴς $L(\tau)$ εἶναι ἄριστος (μεγίστης ἀκριβείας) δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων :

$$(3.1.3.)\qquad \mathrm{Cov}\,(L(\tau), \underset{\sim}{y_i}(\tau))\; K_\tau(t) \text{ δι᾽ ὅλα τὰ } (t,i) \in S(\tau)$$

ἤτοι ἡ μήτρα τῶν συνδιακυμάνσεων τοῦ $L(\tau)$ μὲ οἱανδήποτε διανυσματικὴν μεταβλητὴν $\underset{\sim}{y_i}(t)$ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς δειγματοληπτικῆς μονάδας i.

Ἐν συμπεράσματι, ἑπομένως, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ «ἄριστος ἀμερόληπτος γραμμικὸς ἐκτιμητὴς» τῆς διανυσματικῆς παραμέτρου $P(\tau)$ — βασιζόμενος ἐφ᾽ὅλων τῶν πληροφοριῶν, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται εἰς τὴν μήτραν $S(\tau)$ — εἶναι ἐκεῖνος ἐκ τῶν γραμμικῶν ἐκτιμητῶν $L(\tau)$ — ὁριζομένων ὑπὸ τῆς (3.1.1.) — ὅστις πληροῖ τὰς συνθήκας (3.1.2.) καὶ (3.1.3.). Ὁ ἐν λόγῳ ἐκτιμητὴς θὰ συμβολίζεται κατωτέρω $\hat{P}(\tau)$. Σημειωτέον ὅτι αἱ συνθῆκαι (3.1.2.) καὶ (3.1.3.) ἀποτελοῦνται ἐκ $\sum_{t=0}^{\tau} n_t + \tau + 1$ ἐξισώσεων – μητρῶν, ὅσαι δηλαδὴ καὶ αἱ ὑπὸ προσδιορισμὸν μῆτραι - συντελεσταὶ $C_i(t)$ καὶ αἱ ἄγνωστοι $(\tau + 1)$ μῆτραι $K_\tau(t)$. Κατὰ συνέπειαν αἱ μῆτραι $C_i(t)$ δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος.

3. 2. *Ἐκτίμησις γραμμικοῦ τινος συνδυασμοῦ τῶν διαδοχικῶν κατανομῶν τοῦ πληθυσμοῦ*

Ὑποτίθεται ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς τὴν στιγμὴν T καὶ ὅτι ὅλαι αἱ παρατηρήσεις $\underset{\sim}{y_i}(t)$ κατὰ τὰς στιγμὰς $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau, \ldots, T$, διατεταγμέναι εἰς $T + 1$ γραμμὰς ἀποτελοῦν τὴν γενικῆς μορφῆς μήτραν $S(T)$.

Ἔστω $P = \sum_{t=0}^{T} \alpha_t P(t)$ γραμμικός τις συνδυασμὸς τῶν διανυσματικῶν-παραμέτρων $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(\tau), \ldots P(T)$, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ἐκτίμησις ἐπὶ τῇ βάσει ὅλων τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὴν μήτραν $S(T)$ παρατηρήσεων (πληροφοριῶν).

---

* Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου ἴδε (12)

Ἐνδιαφερόμεθα πάλιν διὰ τὸν «ἄριστον ἀμερόληπτον γραμμικὸν ἐκτιμητὴν» τοῦ διανύσματος P.

Σημειωθήτω ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο περιλαμβάνει ὡς μερικὰς περιπτώσεις τὴν ἐκτίμησιν τῶν διαδοχικῶν μεταβολῶν τῆς P (τ), τὴν ἐκτίμησιν ἀνωτέρας τάξεως διαφορῶν (π.χ. διαφορᾶς διαφορῶν) ἢ τέλος τὴν ἐκτίμησιν κινητῶν μέσων ὅρων κλπ.

Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον (3.1.) εἴδομεν πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἄριστον ἐκτιμητὴν $\hat{P}(\tau)$ — τῆς παραμέτρου (P (τ) γενομένης χρήσεως ὅλων τῶν παρατηρήσεων-πληροφοριῶν συλλεγεισῶν μέχρι καὶ τῆς περιόδου τ (τρεχούσης). Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν, ἐκτὸς τῶν προγενεστέρων πληροφοριῶν ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας καὶ μεταγενεστέρας τοιαύτας τὰς ὁποίας πιθανὸν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὴν ἔτι περαιτέρω βελτίωσιν τῆς ἀκριβείας τοῦ ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$. (Π χ. πρὸς ἐκτίμησιν τῆς παραμέτρου P (τ) ἐκτὸς τῶν πληροφοριῶν ἐκ τῶν περιόδων 0,1,2, . . . , (τ-1), τ εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν διαθέτομεν πληροφορίας καὶ ἐκ τῶν περιόδων τ + 1, τ + 2, . . . , T.).

Συμβολίζοντες τὸν «ἄριστον ἀμερόληπτον γραμμικὸν ἐκτιμητὴν» — τῆς παραμέτρου P (τ) — ὁ ὁποῖος ποιεῖ χρῆσιν πληροφοριῶν μέχρι καὶ τῆς T περιόδου $\hat{P}(t, T)$, ἀποδεικνύεται, διὰ μεθόδων ἀναλόγων ἐκείνων τῆς (3.1.), ὅτι οὗτος ὁρίζεται ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$(3.2.1.)\quad \hat{P}(\tau, T) = \sum_{t=0}^{T} \sum_{i=1}^{n_t} C_i(t)\, \underset{\sim}{y_i}(t)$$

ὅπου αἱ μῆτραι $C_i(t)$, $(t, i) \in S(T)$, πληροῦν τὰς κάτωθι συνθήκας

$$(3.2.2.)\quad \sum_i C_i(t) = 1_r \quad t = \tau \qquad \text{(συνθῆκαι ἀμεροληψίας) καὶ}$$
$$= 0_r \quad t \neq \tau$$

$$(3.2.3.)\quad \mathrm{Cov}\,(\hat{P}(\tau, T), \underset{\sim}{y_i}(t)) = K_\tau(t), \quad (t, i) \in S(T)$$

(συνθῆκαι μεγίστης ἀκριβείας)

Ὁ ἄριστος ἀμερόλητος γραμμικὸς ἐκτιμητὴς $\hat{P}$ τοῦ ἀνωτέρω γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν διαδοχικῶν παραμέτρων P ἀποδεικνύεται τέλος ὅτι δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\hat{P} = \sum_{t=0}^{T} \alpha_t \hat{P}(t, T)$$

ἤτοι, διὰ τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ, ὅστις ἐπιτυγχάνεται δι' ἀντικαταστάσεως τῶν παραμέτρων P (t), t = 0, 1, 2, . . . , τ, . . . , T ὑπὸ τῶν ἐκτιμήσεών των $\hat{P}(t, T)$ αἱ ὁποῖαι βασίζονται ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς μήτρας $S(T)$.

Τὰ ἀνωτέρω γενικὰ συμπεράσματα ἐφαρμόζονται κατωτέρω εἰς τὰς περιπτώσεις τῆς «ἀμέσου» καὶ «ἐμμέσου» συνδέσεως τῶν διαδοχικῶν γραμμῶν τῆς δειγματοληπτικῆς μήτρας S (τ) καὶ ἐπιτυγχάνεται ὁ πλήρης προσδιορισμὸς τῶν ἀρίστων ἀντιστοίχως ἐκτιμητῶν, αἱ ἰδιότητες τῶν ὁποίων διερευνῶνται περαιτέρω.

4. Ἐκτιμητὴς τῆς τρεχούσης κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ, ἐφαρμογὴ δύο εἰδικῶν μορφῶν τῆς δειγματοληπτικῆς μήτρας

Ὁ «ἄριστος» ἐκτιμητὴς $\hat{P}(\tau)$ τῆς τρεχούσης διανυσματικῆς παραμέτρου $P(\tau)$ ὑπολογίζεται κατωτέρω διὰ τὰς περιπτώσεις δειγματοληψίας «ἀμέσου» καὶ «ἐμμέσου» συνδέσεως (ἴδε παράγρ. (2.2.)) δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἀναγκαίων καὶ ἱκανῶν συνθηκῶν τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου (ἴδε παράγρ. (3.1.)). Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις γίνεται χρῆσις τῶν πληροφοριῶν οὐχὶ μόνον τῆς περιόδου τ ἀλλὰ καὶ τῶν προγενεστέρων τοιούτων $t = 0, 1, 2, \ldots, (\tau - 1)$.

4. 1. *Δειγματοληψία ἀμέσου συνδέσεως*

Ὑπενθυμίζεται ὅτι καθ' ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ ὁ πληθυσμὸς ἀντιπροσωπεύεται διὰ τυχαίου δείγματος μεγέθους n καὶ ἀκόμη ὅτι δύο οἱαδήποτε διαδοχικὰ δείγματα ἔχουν $(1 - \lambda)\, n$ $(0 < \lambda < 1)$ κοινὰς μονάδας, τὸ καλούμενον «συνδετικὸν» ὑπόδειγμα.

Δι' ἐφαρμογῆς τῶν συνθηκῶν (3.1.2.) καὶ (3.1.3.) ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ἄριστος ἐκτιμητὴς $\hat{P}(\tau)$ δίδεται ὑπὸ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως (4.1.1.)

$$\hat{P}(\tau) = A(\tau)\, \underset{\sim}{\bar{y}_u}(\tau) + (I_r - A(\tau))\,(\underset{\sim}{\bar{y}_m}(\tau) + D'\,(\hat{P}(\tau-1) - \underset{\sim}{\bar{y}_m}(\tau-1)))$$

ὅπου $\underset{\sim}{\bar{y}_u}(\tau)$ δηλοῖ τὸν διανυσματικὸν μέσον ὅρον τοῦ νεοεκλεγέντος τὴν στιγμὴν τ ὑποδείγματος (u = unmatched)

$\underset{\sim}{\bar{y}_m}(\tau)$, $\underset{\sim}{\bar{y}_m}(\tau - 1)$ οἱ διανυσματικοὶ μέσοι ὅροι τοῦ κοινοῦ — συνδετικοῦ — ὑποδείγματος ἀντιστοίχως κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς τ καὶ $\tau - 1$ (m = matched)

D, ἡ μήτρα τῶν πιθανοτήτων π_{jk} ὁρισθεῖσα εἰς (2.1.). (D' προκύπτει ἐκ τῆς D διὰ τῆς ἐναλλαγῆς γραμμῶν καὶ στηλῶν — transpose matrix).

$\hat{P}(\tau - 1)$ ὁ ἄριστος ἐκτιμητὴς τῆς παραμέτρου $P(\tau - 1)$ βασιζόμενος ἐπὶ τῆς δειγματοληπτικῆς μήτρας $S(\tau - 1)$.

I_r ἡ μοναδιαία μήτρα τάξεως r x r καὶ τέλος

$A(\tau)$ σταθερὰ μήτρα τάξεως r x r, προσδιοριζομένη ἐκ τῆς κάτωθι ἀναδρομικῆς σχέσεως,

(4.1.2.)

$$I_r - A(\tau) = (1-\lambda)\,V(t).\ \left(V(t) - \lambda D'V(t-1)\,D + (1-\lambda)\,D'A(t-1)\,D\right)^{-1}$$

ὅπου $A(0) = \lambda I_r$ καὶ

$V(t)$ ἡ μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων τῆς διανυσματικῆς μεταβλητῆς $\underset{\sim}{y_i}(t)$ ὁρισθεῖσα εἰς (2.3.).

Ἡ μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων τοῦ ἀνωτέρω ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$, συμβολιζομένη $W(\tau)$ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$W(\tau) = A(\tau)\,\frac{V(\tau)}{\lambda n} \tag{4.1.3.}$$

Πρὸς διερεύνησιν τῆς ἀκριβείας τοῦ ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$ καὶ τὴν σύγκρισιν αὐτῆς πρὸς τὴν ἀκρίβειαν τοῦ κλασσικοῦ ἐκτιμητοῦ,

$$\underset{\sim}{\bar{y}}(\tau) = \lambda \underset{\sim}{\bar{y}_u}(\tau) + (1-\lambda)\,\underset{\sim}{\bar{y}_m}(\tau)$$

(ἤτοι, τοῦ ἁπλοῦ διανυσματικοῦ μέσου ὅρου τοῦ δείγματος τῆς τ περιόδου μὴ ποιοῦντος χρῆσιν προγενεστέρων πληροφοριῶν) γίνεται σύγκρισις τῆς ἀνωτέρω μήτρας $W(\tau)$ πρὸς τὴν μήτραν διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων τοῦ $\underset{\sim}{\bar{y}}(\tau)$, ἥτις, ὡς γνωστόν, εἶναι $\frac{1}{n}V(t)$.

Ἐκ τῆς ἐν λόγῳ συγκρίσεως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ μήτρα

$$\frac{1}{n}V(t) - W(t)$$

εἶναι πάντοτε «ὁριστικῶς θετική» (positive definite) τουτέστιν ὅτι ὁ ἐκτιμητὴς $\hat{P}(\tau)$ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρας ἀκριβείας τοῦ κλασσικοῦ τοιούτου.

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ κέρδος εἰς ἀκρίβειαν I_τ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$I_\tau = \frac{1 - \left|\frac{A(\tau)}{\lambda}\right|}{\left|\frac{A(\tau)}{\lambda}\right|} \tag{4.1.4.}$$

ὅπου $\left|\frac{A(\tau)}{\lambda}\right|$ δηλοῖ τὴν ὁρίζουσαν τῆς μήτρας $\frac{1}{\lambda}A(\tau)$.

Ἡ ἀκολουθία $\left|\frac{A(\tau)}{\lambda}\right|$, $\tau = 0, 1, 2, \ldots$ ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι μονοτόνως φθίνουσα καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ κέρδος εἰς ἀκρίβειαν I_τ προϊόντος τοῦ χρόνου — καὶ συσσωρευομένων περισσοτέρων πληροφοριῶν — εἶναι ὁλονὲν καὶ μεγαλύτερον.

Τὸ ποσοστὸν λ — ἢ μᾶλλον $(1-\lambda)$ — ὅπερ καθορίζει τὸ μέγεθος τοῦ συνδετικοῦ δείγματος καθορίζεται εἰς τρόπον ὥστε τὸ ὁριακὸν κέρδος εἰς ἀκρίβειαν I_o νὰ μεγιστοποιεῖται. Ἄλλως, καὶ πρὸς ἀποφυγὴν πολυπλόκων μαθηματικῶν τύπων εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ χρῆσις πληροφοριῶν μόνον ἐκ τῆς ἀμέσως προηγουμένης περιόδου $\tau - 1$, ὅτε ἡ ἀρίστη τιμὴ τοῦ λ ἐπιτυγχάνεται ὡς λύσις τῆς ἐξισώσεως

(4.1.2.) $$\frac{\vartheta}{\vartheta_\lambda}\left(\frac{/\,V(1) - \lambda D' V(0) D\,/}{/\,V(1) - \lambda^2 D' V(0) D\,/}\right) = 0$$

4.2. ***Δειγματοληψία ἐμμέσου συνδέσεως***

Ὑπενθυμίζεται ἐπίσης ὅτι καθ' ἑκάστην περίοδον $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ ἐκλέγεται νέον — ἀνεξάρτητον — δεῖγμα μεγέθους m ἐκ τῶν μονάδων τοῦ ὁποίου ζητοῦνται ἐκτὸς τῶν πληροφοριῶν τῆς περιόδου t καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τῆς προηγουμένης $t - 1$. Οὕτω, καθ' ἑκάστην στιγμὴν ὁ πληθυσμὸς ἀντιπροσωπεύεται διὰ δείγματος μεγέθους 2m, ἐνῷ τὸ συνδετικὸν δεῖγμα εἶναι μεγέθους m.

Διὰ μεθόδων ἀναλόγων ἐκείνων τῆς παραγρ. (4.1.) ἀποδεικνύονται τὰ ἑξῆς:

Ὁ ἄριστος ἐκτιμητὴς $\hat{P}(\tau)$ — ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῆς τῆς μορφῆς τῆς μήτρας $S(\tau)$ — δίδεται ὑπὸ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως

(4.2.1.) $$\hat{P}(\tau) = \underset{\sim}{\bar{y}_c}(\tau) + \Lambda(\tau)\left(\hat{P}(\tau-1) - \underset{\sim}{\bar{y}_c}(\tau-1)\right)$$

ὅπου $\underset{\sim}{\bar{y}_c}(\tau)$, $\underset{\sim}{\bar{y}_c}(\tau-1)$ οἱ διανυσματικοὶ μέσοι ὅροι τῶν περιόδων τ καὶ $\tau-1$ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἐκλεγέντος τὴν τρέχουσαν περίοδον τ δείγματος (c = current).

$\hat{P}(\tau - 1)$ ὁ ἄριστος ἐκτιμητὴς τῆς παραμέτρου $P(\tau - 1)$ βασιζόμενος ἐπὶ τῆς ἀντιστοίχου μήτρας $S(\tau - 1)$.

$\Lambda(\tau)$ σταθερὰ μήτρα τάξεως $r \times r$ προσδιοριζομένη ἐκ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως.

(4.2.2.) $$A(\tau) = D'V(t-1)\left(2V(t-1) - \Lambda(\tau-1)V(t-2)D\right)^{-1}$$

ὅπου $\Lambda(o) = 0_r$ (ἡ μηδενικὴ μήτρα τάξεως

καὶ $V(t)$, D ὡς ὁρίσθησαν ἀνωτέρω (παρ. (4.1.)).

Ἡ μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων τοῦ παρόντος ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$, συμβολιζομένη $U(\tau)$, δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

(4.2.3.) $$U(\tau) = \frac{1}{m}\left(V(\tau) - \Lambda(\tau)\, V(\tau-1)\, D\right).$$

Διὰ συγκρίσεώς της πρὸς τὴν μήτραν διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων τοῦ κλασσικοῦ ἐκτιμητοῦ $\underset{\sim}{\bar{y}}(\tau)$, ἤτοι τὴν μήτραν $\frac{1}{m} V(\tau)$, ἀποδεικνύεται ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ὅτι ἡ ἀκρίβεια τοῦ ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς τοιαύτης τοῦ κλασσικοῦ ἐκτιμητοῦ καὶ ὅτι τὸ κέρδος εἰς ἀκρίβειαν προϊόντος τοῦ χρόνου εἶναι — ὡς καὶ προηγουμένως — ὁλονὲν καὶ μεγαλύτερον.

Π.χ. ὁ κατωτέρω πίναξ παρουσιάζει τὴν βελτίωσιν εἰς ἀκρίβειαν ἐκ τῆς χρήσεως τοῦ ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$ ἀντὶ τοῦ κλασσικοῦ τοιούτου εἰς τὴν περίπτωσιν δειγματοληψίας ἀμέσου συνδέσεως μὲ $\lambda = 0{,}50$. Πρὸς ἁπλούστευσιν τῶν πράξεων οἱ ὑπολογισμοὶ ἐγένοντο διὰ τὴν δυωνυμικὴν κατανομὴν (0,25 , 0,75).

Αὔξησις τῆς ἀκριβείας ἐκ τῆς χρήσεως τοῦ ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$ ἀντὶ τοῦ κλασσικοῦ τοιούτου, διὰ διαφόρους ἐνδεικτικὰς τιμὰς τῶν πιθανοτήτων μεταστάσεως π_{11}, π_{01}

π_{11}	π_{01}	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	...	I
.97	.02	.00	.40	.66	.82	.91	.96	.99		1.00
.93	.03	.00	.33	.50	.59	.61	.62			.64
.90	.05	.00	.27	.37	.41	.42				.45
.87	.07	.00	.22	.29	.31					.33
.80	.10	.00	.15	.18	.19					.20
.72	.12	.00	.10	.12						.13
.65	.15	.00	.07							.08

5. Ἐκτίμησις τῶν διαδοχικῶν μεταβολῶν τῶν διανυσματικῶν παραμέτρων $P(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau, \ldots, T$

Πολλάκις ἐκτὸς τῆς διανυσματικῆς παραμέτρου $P(\tau)$ ἐνδιαφερόμεθα καὶ διὰ τὰς μεταβολὰς αὐτῆς ἀπὸ τῆς μιᾶς χρονικῆς στιγμῆς εἰς τὴν ἑπομένην, ἤτοι τὴν διαφορὰν $P(\tau+1) - P(\tau)$.

Ὡς ἤδη ἀπεδείχθη εἰς τὴν παράγρ. (3.2.) ὁ ἄριστος ἐκτιμητὴς τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ $P = \sum_{t=0}^{T} \alpha_t P(t)$ ὁ βασιζόμενος ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν πληροφοριῶν τῆς μήτρας $S(T)$ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\hat{P} = \sum_{t=0}^{T} \alpha_t \hat{P}(t, T)$$

ὅπου $\hat{P}(t, T)$ εἶναι ὁ βελτιωμένος ἐκτιμητὴς — ἐν σχέσει πρὸς τὸν $\hat{P}(\tau)$ — τῆς παραμέτρου $P(t)$ ἐπὶ τῇ βάσει ὁλοκλήρου τῆς μήτρας $S(T)$.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, ὁ ἄριστος ἐκτιμητὴς τῆς μεταβολῆς $P(\tau+1) - P(\tau)$ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $\hat{P}(\tau+1, T) - \hat{P}(\tau, T)$.

Ἡ πλέον ἐνδιαφέρουσα εἰς τὴν πρᾶξιν περίπτωσις εἶναι ἡ καθ' ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν ἐκτίμησις τῆς μεταβολῆς ἐν σχέσει πρὸς τὴν προηγουμένην περίοδον, ἤτοι ἡ ἐκτίμησις τῆς διαφορᾶς $P(\tau+1) - P(\tau)$ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μήτρας $S(\tau+1)$.

Δεδομένου ὅτι $\hat{P}(\tau+1, \tau+1) = \hat{P}(\tau+1)$, ὁ ἄριστος ἐκτιμητὴς τῆς ἐν λόγῳ διαφορᾶς δίδεται ὑπὸ τῆς ἐκφράσεως

$$\hat{P}(\tau+1) - \hat{P}(\tau, \tau+1)$$

ὅπου $\hat{P}(\tau+1)$ ὁ ἄριστος ἐκτιμητὴς τῆς $P(\tau+1)$ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς $S(\tau+1)$

καὶ $\hat{P}(\tau, \tau+1)$ ὁ βελτιωμένος ἐκτιμητὴς τῆς $P(\tau)$ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς μήτρας $S(\tau+1)$ τουτέστιν ὁ ἐκτιμητὴς ὅστις ἐκτὸς τῶν προγενεστέρων πληροφοριῶν ποιεῖ χρῆσιν καὶ πληροφοριῶν τῆς ἑπομένης περιόδου.

Κατὰ συνέπειαν τὸ πρόβλημα περιορίζεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau, \tau+1)$ τῆς $P(\tau)$ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς $S(\tau+1)$.

Κατωτέρω παρατίθενται αἱ ἐκφράσεις τοῦ $\hat{P}(\tau, \tau+1)$ διὰ τὰς περιπτώσεις «ἀμέσου» καὶ «ἐμέσου» δειγματοληψίας.

5.1. ***Δειγματοληψία ἀμέσου συνδέσεως***

Ἡ δειγματοληπτικὴ μήτρα $S(\tau+1)$ εἶναι ταυτόσημος ἐκείνης τῆς παραγ. (4.1.) μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἔχει $\tau+2$ ἀντὶ $\tau+1$ γραμμάς.

Ὡς ἀποδεικνύεται ὁ βελτιωμένος ἄριστος ἐκτιμητὴς τῆς $P(\tau)$ δίδεται ὑπὸ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως

(5.1.1.)

$$\hat{P}(\tau, \tau+1) = \hat{P}(\tau) - A(\tau)\,V(\tau)\,D\,V^{-1}(\tau+1)\,(P(\tau+1)\,\tilde{y}_u\,(\tau+1))$$

Ἡ ἐπεξήγησις τῶν ὑπεισερχομένων συμβόλων δίδεται εἰς τὴν σχέσιν (4.1.1.).

Ὁ βελτιωμένος ἄριστος ἐκτιμητὴς $\hat{P}(\tau, T)$ — ὁ βασιζόμενος ἐπὶ τῆς μήτρας $S(T)$, ἤτοι ὁ ποιῶν χρῆσιν πληροφοριῶν ἐξ ὅλων τῶν περιόδων $0, 1, \ldots, \tau, \ldots T$ — ἀποδεικνύεται ὅτι δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$(5.1.2.) \qquad \hat{P}(\tau, T) = \hat{P}(\tau, T-1) + A(\tau, T) \cdot (\hat{p}(T) - \underset{\sim}{\bar{y}_u}(T))$$

ὅπου σταθερὰ τάξεως $r \times r$ μήτρα $A(\tau, T)$ δίδεται ὑπὸ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως :

$$A(\tau, T) = A(\tau, T-1)(I_r - A(T-1)) \cdot V(T-1) DV^{-1}(T)$$

ὅπου $\quad A(\tau, \tau+1) = -A(\tau) \cdot V(\tau) \cdot DV^{-1}(\tau+1)$

Ἡ ἀκρίβεια τοῦ ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau, T)$ ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς T. Τοῦτο ἀντανακλᾷ ἀντιστοίχως καὶ εἰς τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἐκτιμήσεως τῆς διαφορᾶς $P(\tau+1) - P(\tau)$.

5.2. *Δειγματοληψία ἐμμέσου συνδέσεως*

Ἡ δειγματοληπτικὴ μήτρα $S(\tau+1)$ εἶναι ταυτόσημος ἐκείνης τῆς παραγρ. (4.2.). Διὰ μεθόδων ἀναλόγων πρὸς αὐτὰς τῆς προηγουμένης παραγράφου ὑπολογίζεται καὶ ἡ μορφὴ τῶν ἀντιστοίχων βελτιωμένων ἐκτιμητῶν $\hat{P}(\tau, \tau+1)$ καὶ $\hat{p}(\tau, T)$.

Οὕτως, ὁ ἐκτιμητὴς $\hat{P}(\tau, \tau+1)$ ἐνταῦθα δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$(5.2.1.) \qquad \hat{P}(\tau, \tau+1) = A(\tau) \cdot \hat{p}(\tau) + B(\tau) \underset{\sim}{\bar{y}_r}(\tau)$$

ὅπου αἱ σταθεραὶ καὶ τάξεως $r \times r$ μῆτραι $A(\tau)$ καὶ $B(\tau)$ δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$A(\tau) = V(\tau)(mU(\tau) + V(\tau))^{-1}$$

$$\text{καὶ} \quad B(\tau) = mU(\tau) \cdot (mU(\tau) + V(\tau))^{-1}$$

Ἀντίστοιχος τῆς (5.1.2.) ἔκφρασις ἐπιτυγχάνεται καὶ διὰ τὸν $\hat{P}(\tau, T)$. Τὰ σχετικὰ πρὸς τὴν ἀκρίβειαν τῶν ἐκτιμητῶν τούτων συναγόμενα συμπεράσματα εἶναι ἀνάλογα ἐκείνων τῆς προηγουμένης παραγράφου.

6. Ἡ περίπτωσις δειγματοληπτικῆς ἐκτιμήσεως τῶν πιθανοτήτων μεταστάσεως

Συνήθως αἱ δεσμευμέναι πιθανότητες (πιθανότητες μεταστάσεως) π_{jk} εἶναι ἄγνωστοι καὶ ἐκτιμοῦνται ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ ἐρευνηθέντος κατὰ τὰς χρονικὰς στιγμὰς $t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ δείγματος.

6.1. *Ἐκτίμησις τῶν πιθανοτήτων μεταστάσεως* π_{jk}

Ἡ δειγματοληπτικὴ μήτρα $S(\tau)$ ὑποτίθεται γενικῆς μορφῆς (ἰδὲ παράγρ. (2.2.)).

Ἔστωσαν $m(t-1)$, τὸ μέγεθος τοῦ συνδετικοῦ δείγματος μεταξὺ τῶν στιγμῶν (ἢ περιόδων) $t-1$ καὶ t,

$m_j(t-1)$, ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ συνδετικοῦ δείγματος $m(t-1)$ αἱ ὁποῖαι κατὰ τὴν στιγμὴν $t-1$ ἀνῆκον εἰς τὴν κατηγορίαν A_j, $j=0, 1, 2, \ldots r$

$m_{jk}(t)$, ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων τοῦ συνδετικοῦ δείγματος $m(t-1)$ αἱ ὁποῖαι κατὰ τὴν στιγμὴν $t-1$ ἀνῆκον εἰς τὴν κατηγορίαν A_j, $j=0, 1, 2, \ldots, r$ καὶ κατὰ τὴν στιγμὴν t εἰς τὴν κατηγορίαν A_k, $k=0, 1, 2, \ldots, r$

Προφανῶς $m_j(t-1) = \sum_{k=0}^{r} m_{jk}(t)$, $j=0, 1, 2, \ldots, r : t=1, 2, \ldots, \tau$

καὶ $m(t-1) = \sum_{j=0}^{r} m_j(t-1) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{r} m_{jk}(t)$ $t=1, 2, \ldots, \tau$.

Διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν δεσμευμένων πιθανοτήτων π_{jk} διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

(i) Αἱ δεσμευμέναι πιθανότητες $\pi_{jk}(t)$ ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ χρόνου t, ἤτοι ἡ Μαρκόβιος Στοχαστικὴ Ἀκολουθία δὲν εἶναι χρονικῶς ὁμογενής. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ ἐκτιμήσεις μεγίστης πιθανότητος τῶν πιθανοτήτων $\pi_{jk}(t)$ δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$(6.1.1.) \quad \hat{\pi}_{jk}(t) = \frac{m_{jk}(t)}{m_j(t-1)}, \; j, k = 0, 1, 2, \ldots, r \quad t=1, 2, \ldots, \tau$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐκτιμήσεις εἶναι ἀμερόληπτοι.

(ii) Αἱ πιθανότητες π_{jk} δὲν ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ χρόνου t, ἤτοι ἡ Μαρκόβιος Στοχαστικὴ Ἀκολουθία εἶναι χρονικῶς ὁμογενής. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ πιθανότητες π_{jk} δύνανται νὰ ἐκτιμηθοῦν ἐπὶ τῇ βάσει ὅλων τῶν συνδετικῶν δειγμάτων εἰς τὴν μήτραν $S(\tau)$ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἐκτιμήσεις δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων

$$(6.1.2.) \quad \hat{\pi}_{jk} = \frac{m_{jk}}{m_j}, \; j, k = 0, 1, 2, \ldots, r$$

ὅπου $\quad m_{jk} = \sum_{t=1}^{\tau} m_{jk}(t) \quad$ καὶ $\quad m_j = \sum_{k=0}^{r} m_{jk}$

Αἱ ἐκτιμήσεις π_{jk} εἶναι ἐπίσης ἀμερόληπτοι.

6.2. *Τροποποιημένος ἐκτιμητὴς τῆς τρεχούσης κατανομῆς τοῦ πληθυσμοῦ καὶ ἀκρίβεια αὐτοῦ*

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ πιθανότητες π_{jk} ἐκτιμῶνται ἐκ τοῦ δείγματος, εἰς τὰς ἐκφράσεις τοῦ ἀρίστου ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$ τῆς τρεχούσης παραμέτρου $P(\tau)$ ἡ μήτρα D ἀντικαθίσταται διὰ τῆς ἐκτιμήσεως τῆς $\hat{D}$ — ἥτις ἐπιτυγχάνεται δι' ἀντικαταστάσεως τῶν π_{jk} ὑπὸ τῶν ἐκτιμήσεών των — ἐνῷ κατὰ τὰ ἄλλα, ἡ ὅλη ἔκφρασις παραμένει ἀναλλοίωτος. Τοῦτο ἰσχύει τόσον διὰ τὴν δειγματοληψίαν ἀμέσου συνδέσεως ὡς καὶ διὰ τὴν τοιαύτην ἐμμέσου.

Οὕτως, οἱ τροποποιημένοι ἐκτιμηταί, συμβολιζόμενοι $\hat{\hat{P}}(\tau)$, δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων :

(i) Ἄμεσος σύνδεσις :

(6.2.1.)

$$\hat{\hat{P}}(\tau) = \hat{A}(\tau)\,\underset{\sim}{\bar{y}_u}(\tau) + (I_r - \hat{A}(\tau)) \cdot (\underset{\sim}{\bar{y}_m}(\tau) + \hat{D}'(\hat{\hat{P}}(\tau-1) - \underset{\sim}{\bar{y}_m}(\tau-1))$$

ὅπου $\hat{A}(\tau)$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως

$$I_r - \hat{A}(\tau) = (1-\lambda)\,V(\tau) \cdot (V(\tau) - \lambda \hat{D}' V(t-1)\,\hat{D} + (1-\lambda)\,\hat{D}'\hat{A}(t-1)\,V(t-1)\,\hat{D})^{-1}$$

$$A(0) = \lambda I_r$$

(ii) Ἔμμεσος σύνδεσις :

$$\hat{\hat{P}}(\tau) = \underset{\sim}{\bar{y}_c}(\tau) + \hat{\Lambda}(\tau)\,(\hat{\hat{P}}(\tau-1) - \underset{\sim}{\bar{y}_c}(\tau-1)) \qquad (6.2.2.)$$

ὅπου $\hat{\Lambda}(\tau)$ ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$\hat{\Lambda}(\tau) = \hat{D}' V(\tau-1)\,(2V(\tau-1) - \hat{\Lambda}(\tau-1)\,V(\tau-2)\,\hat{D})^{-1}, \; \hat{\Lambda}(0) = \Lambda(0) = 0_r$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ὁ ἐκτιμητὴς $\hat{\hat{P}}(\tau)$ εἶναι ἀμερόληπτος.

Αἱ μῆτραι διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων τῶν ἀνωτέρω ἐκτιμητῶν $\hat{\hat{P}}(\tau)$ ὡς καὶ αἱ δειγματοληπτικαὶ ἐκτιμήσεις αὐτῶν ὑπολογίζονται εὐκόλως δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω γενικῶν τύπων.

Διὰ συγκρίσεως τῶν ἐν λόγῳ μητρῶν πρὸς τὰς τοιαύτας τοῦ κλασσικοῦ ἐκτιμητοῦ $\underset{\sim}{\bar{y}}(\tau)$ ὡς καὶ τοῦ ἀρχικοῦ ἐκτιμητοῦ $\hat{p}(\tau)$ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀκρίβεια τοῦ τροποποιημένου ἐκτιμητοῦ $\hat{\hat{P}}(\tau)$ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα τῆς τοιαύτης τοῦ κλασσικοῦ ἐκτιμητοῦ, ἀλλὰ ἐλαφρῶς μικροτέρα τῆς τοῦ ἀρίστου ἐκτιμητοῦ $\hat{P}(\tau)$, τὴν ὁποίαν προσεγγίζει ἀσυμπτωτικῶς (ὅταν $t \rightarrow \infty$).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Anderson, T. W. Probability Models for Analyzing Time Changes in Attitudes. *Mathematical Thinking in the Social Sciences*. Edited by P. F. Lazarsfeld. The Free Press, Glencoe, Illinois, 1959.

2) Anderson, T. W. *An Introduction to Multivariate Stat. Analysis*. J. Wiley and Sons, N.Y. (1958).

3) Anderson, T. W. and Goodman, L A. (1957). Statistical Inference about Markov Chains. *Annals Mathematical Statistics*, (28).

4) Billingsley, P. (1961). Statistical Methods in Markov Chains. *Annals Math. Statistics*, (32).

5) Cochran, W.G. *Samnling Techniques*. Second Edition : J. Wiley and Sons, Inc. N. Y. (1963).

6) Eckler, A. R. (1955). Rotation Sampling. *Annals of Mathematical Statistics*, (26).

7) Hansen, M. H., Hurwitz, W. N. and Madow, W. G. *Sample Survey Methods and Theory*, Vols, I and II. J. Wiley and Sons (1953).

8) Lehmann, E. *Notes on the Theory of Estimation*. Univ. of California (1950).

9) Patterson, H. D. (1950). Sampling on Successive Occasions with Partial Replacement of Units. *Journal of Royal Statistical Society*. Series B, (12).

10) Rao, C. R. *Linear Stat. Inference and Its Anplication*. J. Wiley and Sons. N.Y. (1965).

11) Tikkawal, B. D. (1953). Optimum Allocation in Successive Sampling. *Journ. Ind. Soc. Agric. Stat.* (5).

12) D. Athanasopoulos. *Sampling for Time Series*. Doctoral Dissertation in Statistics. University of California, Berkeley, (1966).