Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ

ΥΠΟ ΤΩΝ κ. κ. Κ. ΠΛΗΘΕΙΔΗ - Β. ΜΕΤΑΞΑ

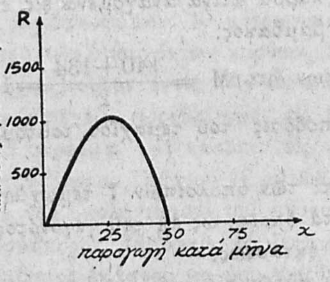
6. (Συνέχεια ἐκ τοῦ προηγουμένου)

Τὰ κατωτέρω διαγράμματα δεικνύουν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τοῦ ὁλικοῦ, μέσου καὶ διαφορικοῦ εἰσοδήματος.

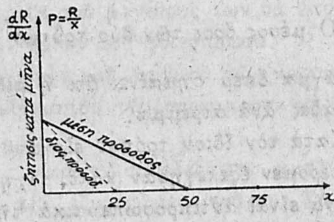
1) Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ζήτησις εἶναι γραμμικὴ καὶ παρίσταται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $p = \alpha - \beta x$. Ἡ ὁλικὴ πρόσοδος εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $R = \alpha x - \beta x^2$ καὶ ἡ διαφορικὴ εἶναι

$$\frac{dR}{dx} = \alpha - 2\beta x.$$

Τὸ διάγραμμα παριστᾷ τὴν ἀριθμητικὴν περίπτωσιν $p = 10 - \frac{1}{5}x$.



Σχ. 38



Σχ. 39

2) Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως δίδεται ὑπὸ ἑνὸς τριωνύμου $p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ὅπου α, β, γ, εἶναι καταλλήλως ἐκλελεγμένοι ἀριθμοὶ τότε,

$$R = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x \quad \text{καὶ} \quad \frac{dR}{dx} = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma.$$

Ἑπομένως, ἡ ὁλικὴ πρόσοδος δίδεται ὑπὸ μιᾶς καμπύλης τρίτου βαθμοῦ, ἐνῶ ἡ μέση καὶ διαφορικὴ πρόσοδος δίδονται ὑπὸ παραβολῶν, τῶν ὁποίων ἡ σχετικὴ θέσις εἰς τὸ διάγραμμα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν παραμέτρων α, β, γ.

εἰς 138 ὀκάδας κατὰ στρέμμα ἔναντι 139 ὀκάδων αἵτινες προεβλέφθησαν.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας, καθ' ἣν κατεβλήθη προσπάθεια διὰ τὴν ὅσον τὸ δυνατὸν τυχαίαν λῆψιν τῶν δειγμάτων, ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποφέρῃ ἐξαιρετικὰ ἀποτελέσματα καὶ ἐπὶ μεγαλυτέρας ἐκτάσεως εἰσέτι. Πρέπει μόνον νὰ λαμβάνηται μέριμνα κατὰ τὴν δειγματοληψίαν ὥστε νὰ μὴ ἐπεμβαίνῃ ἡ βούλησις τοῦ ἀνθρώπου ἀλλὰ τὰ δείγματα νὰ λαμβάνωνται τελείως τυχαίως καὶ ἄνευ οὐδενὸς ἐπηρεασμοῦ.

Προβλήματα

Πρόβλημα 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση αὔξησις τῆς x^3 ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ 1 εἰς 1,01. Πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν εἶναι τὸ λάθος ἀπὸ τὴν διαφορικὴν τιμὴν διὰ $x = 1{,}01$;

Πρόβλημα 2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μέση ἐλάττωσις τῆς συναρτήσεως $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ ὅταν τὸ x αὐξάνῃ ἀπὸ τὴν τιμὴν 4 εἰς ἑκάστην τῶν τιμῶν, 5, 4,5, 4,1, 4, 4,05, 4,01.

β) Νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν τιμῶν αὐτῶν μὲ τὴν διαφορικὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως διὰ $x = 4$.

Πρόβλημα 3ον) Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος ρ εἶναι $s = 4\pi\rho^2$ καὶ ὁ ὄγκος $\Omega = {}^4/_3\,\pi\rho^3$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ αὐξήσεις τῶν s καὶ Ω ὅταν τὸ ρ αὐξάνεται κατὰ μίαν ποσότητα $\Delta\rho$.

Πρόβλημα 4ον) Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου κατά τινα δοθεῖσαν στιγμήν, εἶναι $\alpha = 12$ ἑκ., $\beta = 10$ ἑκ. καὶ $\gamma = 8$ ἑκ. Ἐὰν αἱ διαστάσεις α καὶ γ αὐξάνωνται κατὰ 2 $^{\text{ἑκ}}/_{\text{ωρ}}$ καὶ 1 ἑκ. τὴν ὥραν ἀντιστοίχως, ἡ δὲ πλευρὰ β ἐλαττώνεται κατὰ 3 ἑκ. τὴν ὥραν, νὰ εὑρεθῇ ἂν ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτὴν καὶ κατὰ πόσον ;

Πρόβλημα 5ον) Ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως σημείου τινὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ x δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $x = 2 + \sqrt{t+2}$. Νὰ περιγραφῇ ἡ κίνησις καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης εἰς τὸ τέλος τῶν 7 λεπτῶν.

Πρόβλημα 6ον) Σημεῖον τι κινεῖται ἐπὶ τῆς παραβολῆς $y = x^2$ κατὰ τρόπον τοιοῦτον, ὥστε ἡ τεταγμένη αὐτοῦ νὰ αὐξάνῃ 2 μονάδας κατὰ λεπτόν. Κατὰ ποῖον λόγον μεταβάλλεται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου (κινητοῦ) ἀπὸ τὸ σημεῖον (—1,1) ὅταν τὸ κινητὸν σημεῖον διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (2,4) ;

Πρόβλημα 7ον) Δείξατε ὅτι ἡ διαφορικὴ πρόσοδος ἰσοῦται μὲ $p + x\dfrac{dp}{dx}$ δι᾿ ἑκάστην τῶν συναρτήσεων τοῦ προβλήματος (7, Κεφ. 4). Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορικὴ πρόσοδος εἶναι μηδὲν καὶ τὸ p θετικόν.

Πρόβλημα 8ον) Ἐργοστάσιόν τι παράγει x μονάδας ἐξ ἑνὸς εἴδους μὲ ὁλικὸν κόστος C. Τότε C/x εἶναι τὸ μέσον κόστος. Δείξατε ὅτι, ἐὰν M εἶναι τὸ διαφορικὸν κόστος, τότε ἡ μεταβολὴ τοῦ μέσου κόστους (διαφορικὴ) ὡς πρὸς x εἶναι $\dfrac{xM - C}{x^2}$. Συμπεραίνεται ὅτι τὸ μέσον κόστος εἶναι μία αὔξουσα ἢ φθίνουσα συνάρτησις τοῦ x ἐὰν τὸ μέσον κόστος εἶναι μικρότερον ἢ μεγαλύτερον τοῦ ὁριακοῦ.

Πρόβλημα 9ον) Ἐργοστάσιόν τι παράγει x μονάδας ἐξ ἑνὸς εἴδους καθ᾿ ἑβδομάδα, εἰς ὁλικὸν κόστος $\Pi = 5x^3 - 30x^2 + 60x + 160$. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ μέσου καὶ ὁριακοῦ κόστους καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ δύο καμπύλαι τέμνονται εἰς τὸ χαμηλότερον σημεῖον τῆς καμπύλης τοῦ μέσου κόστους.

Πρόβλημα 10ον) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ὁλικῆς προσόδου, τῆς συναρτήσεως τῆς ζητήσεως καὶ τῆς διαφορικῆς προσόδου, εἰς παραπλεύρως χαραττόμενον διάγραμμα, ὅταν $p = \frac{640}{x+9} - 40$. Διὰ ποίαν τιμὴν ἡ διαφορικὴ πρόσοδος εἶναι μηδέν;

Πρόβλημα 11ον) Ἐὰν $\Pi = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$ εἶναι, ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας, τὸ ὁλικὸν μεταβλητὸν κόστος παραγωγῆς x μονάδων ἑβδομαδιαίως, δείξατε ὅτι τὸ μέσον καὶ διαφορικὸν κόστος εἶναι παραβολαί. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις εἰς τὸ ἴδιον διάγραμμα ὅταν $\Pi = \frac{1}{10}x^3 - 3x^2 + 50x$.

Πρόβλημα 12ον) Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως εἶναι $p = (\alpha - \beta x)^2$, δείξατε ὅτι ἡ μέση καὶ διαφορικὴ πρόσοδος εἶναι παραβολαί. Ἐπίσης νὰ δειχθῇ γραφικῶς ὅτι ἡ παραβολὴ ἡ παριστῶσα τὴν διαφορικὴν πρόσοδον κεῖται κάτωθεν τῆς παραβολῆς τῆς μέσης προσόδου. Νὰ δειχθῇ ἀκόμη ὅτι ἡ παραβολὴ ἡ παριστῶσα τὴν διαφορικὴν πρόσοδον, λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμὰς καὶ ὅτι ἀρχίζει νὰ ἀνέρχεται πρὸς τὸ μηδὲν ὅταν ἡ παραγωγὴ αὐξάνῃ. Νὰ γίνουν αἱ γραφικαὶ παραστάσεις ὅταν $p = \left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$.

Πρόβλημα 13ον) Νὰ ἐξετασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς μέσης καὶ διαφορικῆς προσόδου ὅταν $p = \sqrt{\alpha - \beta x}$. Νὰ μελετηθῇ τὸ ἀριθμητικὸν παράδειγμα $p = \sqrt{225 - 9x}$

Πρόβλημα 14ον) Ὅταν $p = \alpha - \beta x^2$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ μέση καὶ διαφορικὴ πρόσοδος συνεχῶς ἐλαττοῦνται ὅταν ἡ παραγωγὴ αὐξάνῃ. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x ἡ διαφορικὴ πρόσοδος εἶναι μηδέν;

Πρόβλημα 15ον) Ἐὰν $\Pi = \sqrt{\alpha x + \beta} + \gamma$ νὰ μελετηθοῦν ἡ μεταβολὴ τοῦ μέσου καὶ διαφορικοῦ κόστους.

Πρόβλημα 16ον) Ἐὰν f (x) εἶναι μία συνάρτησις συνεχὴς καὶ παραγωγίσιμος νὰ ἐπεκταθοῦν αἱ ἔννοιαι τῆς μέσης καὶ διαφορικῆς τιμῆς διὰ τὴν συνάρτησιν αὐτήν.

V.—7 Διαδοχικαὶ παράγωγοι

Παράγωγοι ἀνωτέρας τάξεως.

Ὡς ἀνεφέραμεν προηγουμένως, ἡ παράγωγος συναρτήσεώς τινος f (x) εἶναι καὶ αὐτὴ μία συνάρτησις (ἢ σταθερὰ) ἥτις ἐνδέχεται νὰ εἶναι παραγωγίσιμος. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν παράγωγον τῆς f′(x), ἥτις ὀνομάζεται δευτέρα παράγωγος τῆς f (x). Τὰ σύμβολα τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν διὰ τὴν παράστασιν τῆς δευτέρας παραγώγου εἶναι:

$$f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''$$

Ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\frac{d}{dx} f'(x) = f''(x)$ καὶ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Ὁμοίως, ἡ παράγωγος τῆς f″(x) ὀνομάζεται τρίτη παράγωγος τῆς f (x) καὶ οὕτω καθεξῆς. Σχεδὸν ὅλαι αἱ συναρτήσεις τὰς ὁποίας συναντῶμεν εἰς τὰς συνήθεις ἐφαρμογὰς τῆς Φυσικῆς, τῆς Γεωμετρίας, καὶ τῶν Οἰκονομικῶν ἔχουν παραγώγους ὅλων τῶν τάξεων ἐκτὸς εἰς ὡρισμένα μεμονωμένα σημεῖα.

Παράδειγμα 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα καὶ τρίτη παράγωγος τῆς $y = x^3 - 3x^2 + 5$. $y' = 3x^2 - 6x$. Λαμβάνομεν τὴν παράγωγον τῆς y' ὡς πρὸς x, $y'' = 6x - 6$. Ὁμοίως $y''' = 6$.

Παράδειγμα 2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς $y = \dfrac{x-3}{x^2+1}$

$$y' = \frac{(x^2+1)\dfrac{d}{dx}(x-3) - (x-3)\dfrac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{x^2+1-2x^2+6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(x^2+1)^2\dfrac{d}{dx}(-x^2+6x+1) - (-x^2+6x+1)\dfrac{d}{dx}(x^2+1)^2}{(x^2+1)^4} =$$

$$\frac{(x^2+1)(-2x+6) - (-x^2+6x+1)\,2\,(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-18x^2-6x+6}{(x^2+1)^4}$$

Διαδοχικαὶ παράγωγοι πεπλεγμένων συναρτήσεων

Ἐὰν ἡ συνάρτησις y ὁρίζεται διὰ μιᾶς ἐξισώσεως μὴ λελυμένης ὡς πρὸς αὐτήν, τότε ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὸ ἑπόμενον παράδειγμα :

Παράδειγμα 1ον) $xy = \alpha^2$. Λαμβάνομεν τὰς παραγώγους τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς x. $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ ἢ $\dfrac{dy}{dx} = -y/x$. Ἡ δευτέρα παράγωγος ὡς πρὸς x τῆς δοθείσης εἶναι ἡ πρώτη παράγωγος τῆς $\dfrac{dy}{dx}$ ὡς πρὸς x. Ἐπομένως $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}(-y/x) = -\dfrac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{x^2}$

δι' ἀντικαταστάσεως τῆς $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{x(-y/x) - y}{x^2} = -\dfrac{-xy-y}{x^2} = \dfrac{xy+y}{x}$. Ἐπειδὴ δι' ἕκαστον ζεῦγος τιμῶν (x, y), $xy = \alpha^2$ λαμβάνομεν, $y = \dfrac{\alpha^2}{x}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{x}}{x^2} = \alpha^2\,\dfrac{x+1}{x^3}$.

Παράδειγμα 2ον) $y^2 + x^2 = 9$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \quad ἢ \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\;;\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{-y + x\dfrac{dy}{dx}}{y^2} =$$

$$\frac{-y-\dfrac{x^2}{y}}{y^2} = -9/y^3.$$

Ἀσκήσεις

Ἄσκησις 1η) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη καὶ δευτέρα παράγωγος ἑκάστης τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1) $y = 5x^2 + 6x + 7$
2) $y = 1/7\, x^2 + 4x\sqrt{x}$
3) $y = \dfrac{4}{3 - x}$
4) $y = \dfrac{5 - x}{3x - 4}$
5) $y = \sqrt{9 - x^2}$
6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
7) $y = \dfrac{3}{x^3 + 1}$
8) $y = \dfrac{\alpha x}{\beta x + \gamma}$

Ἄσκησις 2α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς συναρτήσεως y ὁριζομένης ὑπὸ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

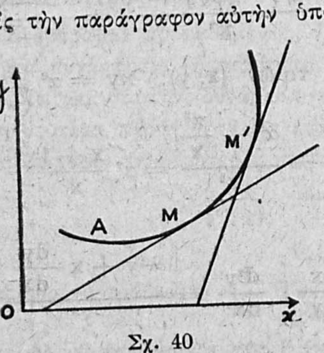
1) $y^2 = 12x$
2) $y^2 - x^2 = \alpha^2$
3) $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$
4) $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$
5) $4x^2 + 9y^2 = 36$
6) $xy + y = x - 4$
7) $x^{1/2} + y^{1/2} = \alpha^{1/2}$
8) $x^{2/3} + y^{2/3} = \alpha^{2/3}$
9) $y^2 = \dfrac{4 - x}{x}$
10) $y = \dfrac{x^3}{2\alpha - x}$

Ἄσκησις 3η) Νὰ εὑρεθοῦν ἡ πρώτη καὶ δευτέρα παράγωγος τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα.

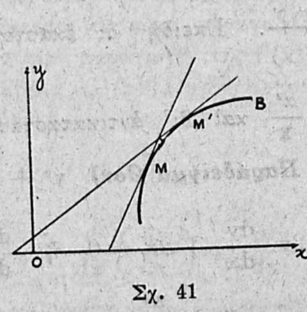
1) $x^2 + y^2 = 5x$ $(1,2)$ $(0,0)$
2) $x^2 + 7y = 64$ $(-1,3)$ $(1,-3)$
3) $x = 3y - 8y^2$ $(1/9,\ 1/3)$, $(-1/2,\ 1/2)$
4) $xy = 3x + y - 1$ $(0,1)$, $(-1,2)$, $(2,5)$

V. — 8. Χρῆσις τῶν παραγώγων εἰς τὴν χάραξιν γραφικῶν παραστάσεων

Εἰς τὴν παράγραφον αὐτὴν ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $y = f(x)$, τῆς



Σχ. 40



Σχ. 41

ὁποίας τὴν γραφικὴν παράστασιν ἐξετάζομεν, ἔχει παραγώγους μέχρι καὶ δευτέρας τάξεως.

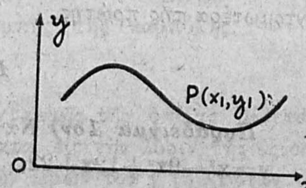
A) Περὶ τῶν κοίλων τῆς καμπύλης

Ὅταν τὸ σημεῖον M διαγράφῃ τὴν καμπύλην, ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης μεταβάλλεται μετὰ τοῦ σημείου. Ὅταν ἡ ἐφαπτομένη κεῖται ὑποκάτω τῆς καμπύλης, τότε λέγομεν ὅτι ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x. Ὅταν ἡ καμπύλη κεῖται ὑποκάτω τῆς ἐφαπτομένης, τότε λέγομεν ὅτι ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω. Οὕτω, εἰς τὸ σχῆμα 40, ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης, δηλαδὴ ἡ παράγωγος $f'(x)$ αὐξάνεται ὅταν τὸ M διαγράφῃ τὸ τόξον AM' ἐνῷ εἰς τὸ σχῆμα 41 ἡ $f'(x)$ εἶναι φθίνουσα, ὅταν τὸ M διαγράφῃ τὸ τόξον MB.

Ἑπομένως, ἡ δευτέρα παράγωγος $f''(x)$ εἶναι θετικὴ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ ἀρνητικὴ εἰς τὴν δευτέραν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $y = f(x)$ στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω μὲν ὅταν $f''(x)$ εἶναι θετική, πρὸς τὰ κάτω δὲ ὅταν $f''(x)$ εἶναι ἀρνητική.

B) Σημεῖα καμπῆς

Ἓν σημεῖον $P(x_1, y_1)$ ἐπὶ τῆς καμπύλης ὀνομάζεται σημεῖον καμπῆς ἐὰν ἡ διεύθυνσις τῶν κοίλων τῆς καμπύλης μεταβάλλεται εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου· δηλαδὴ ἐὰν $P(x_1, y_1)$ εἶναι σημεῖον καμπῆς ἐπὶ τῆς καμπύλης $y=f(x)$ καὶ ἡ καμπύλη στρέφῃ τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω διὰ τιμὰς τοῦ x κατά τι μικροτέρας τοῦ x, τότε διὰ τιμὰς κατά τι μεγαλυτέρας τοῦ x ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω. Δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος $f''(x)$ ὑπάρχῃ εἰς τὸ σημεῖον $P(x_1,y_1)$ τότε ἡ τιμή της εἶναι μηδέν. Διότι ἐὰν ἡ $f''(x)$ ἦτο θετικὴ (ἢ ἀρνητική), τότε ἡ καμπύλη θὰ ἔστρεφε τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω (ἢ πρὸς τὰ κάτω) τουλάχιστον ἐπὶ βραχὺ διάστημα εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου καὶ τὸ $P(x_1,y_1)$ δὲν θὰ ἦτο σημεῖον καμπῆς.



Σχ. 42

Ἑπομένως, τὸ σημεῖον $P(x_1, y_1)$ εἶναι σημεῖον καμπῆς ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι μηδὲν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος ἀλλάζει σημεῖον διὰ τιμὰς κατά τι μικροτέρας καὶ κατά τι μεγαλυτέρας τοῦ x_1. Τὸ σημεῖον $P(x_1, y_1)$ δὲν εἶναι σημεῖον καμπῆς ὅταν ἡ δευτέρα παράγωγος διατηρῇ τὸ σημεῖον της εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου.

Ὥστε διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν σημείων καμπῆς :

α) Εὑρίσκομεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $f''(x) = 0$, αἵτινες δίδουν τὰς τεταγμένας τῶν κρισίμων σημείων.

β) Ἐξετάζομεν ἐὰν τὸ σημεῖον (τὸ ἀλγεβρικὸν) τῆς δευτέρας παραγώγου μεταβάλλεται εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου.

Γ) Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον συναρτήσεως. Δευτέρα μέθοδος

Εἴδομεν ἤδη ὅτι αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $f'(x) = 0$ δίδουν τὰς τεταγμένας τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος $f''(x)$ εἶναι ἀρνητικὴ εἰς ἓν κρίσιμον σημεῖον, τότε ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω ἡ δὲ συνάρτησις ἔχει εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἓν σχετικὸν μέγιστον. Ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος $f''(x)$ εἶναι θετική, τότε ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω ἡ δὲ συνάρτησις εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔχει σχετικὸν ἐλάχιστον.

Ἐὰν $f''(x) = 0$ τότε τὸ κρίσιμον σημεῖον εἶναι ἓν σημεῖον καμπῆς μὲ ὁριζόντιον ἐφαπτομένην, ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς δευτέρας παραγώγου ἀλλάζῃ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου. Ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος δὲν ἀλλάζῃ σημεῖον, τότε ἔχομεν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος παραμένῃ ἀρνητικὴ ἢ θετικὴ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου.

Ἡ γενικὴ πορεία διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου μιᾶς συναρτήσεως δύναται νὰ συνοψισθῇ εἰς τὰ κάτωθι :

α) Εὑρίσκομεν τὰς πραγματικὰς ρίζας τῆς πρώτης παραγώγου τῆς συναρτήσεως.

β) Δι' ἑκάστην τῶν πραγματικῶν ριζῶν εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς δευτέρας παραγώγου. Ἐὰν τὸ σημεῖον εἶναι ἀρνητικὸν ἡ συνάρτησις ἔχει σχετικὸν μέγιστον· ἐὰν τὸ σημεῖον εἶναι θετικὸν ἡ συνάρτησις ἔχει σχετικὸν ἐλάχιστον.

Ἐὰν ἡ δευτέρα παράγωγος εἶναι μηδὲν εἰς ἓν κρίσιμον σημεῖον ἡ ἀνωτέρω μέθοδος δὲν ἰσχύει. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐφαρμόζομεν τὴν πρώτην μέθοδον. Ἡ δευτέρα μέθοδος, ὅταν ἡ εὕρεσις τῆς δευτέρας παραγώγου εἶναι εὔκολος, εἶναι συντομωτέρα τῆς πρώτης.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ον) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς συναρτήσεως : $y = x^3 - 9x^2 + 12x + 22$. Ἔχομεν $y' = 3x^2 - 18x + 12$, $y'' = 6x - 18$ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $y'' = 0$ λαμβάνομεν $6x - 18 = 0$ καὶ $x = 3$. Διὰ τιμὰς $x < 3$ ἔχομεν $y'' < 0$ καὶ διὰ τιμὰς $x > 3$ ἔχομεν $y'' > 0$. Ἑπομένως τὸ σημεῖον $P(4,3)$ εἶναι ἓν σημεῖον καμπῆς.

Παράδειγμα 2ον) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις $y = x^3 - 3x^2 + 9$ ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

α) $y' = 3x^2 - 6x$. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $3x^2 - 6x = 0$ εὑρίσκομεν $x_1 = 0$ καὶ $x_2 = 2$.

β) $y'' = 6x - 6$. Διὰ $x = 0$ ἡ y'' εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἑπομένως ἔχομεν μέγιστον. Διὰ $x = 2$ ἡ y'' εἶναι θετικὴ καὶ ἑπομένως ἔχομεν ἐλάχιστον. Τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα εἶναι $P_1(0,9)$ καὶ $P_2(2,5)$.

Παράδειγμα 3ον) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς καμπύλης $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ καθὼς καὶ τὸ σχετικὸν μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

α) Ἡ πρώτη παράγωγος εἶναι $y' = 3x^2 - 4x + 1$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 4x + 1 = 0$ εὑρίσκομεν τὰς ρίζας $x_1 = 1/3$ καὶ $x_2 = 1$.

β) $y'' = 6x - 4$

$y''\rfloor_{x=1/3} = 2 - 4 = -2 < 0$ μέγιστον.

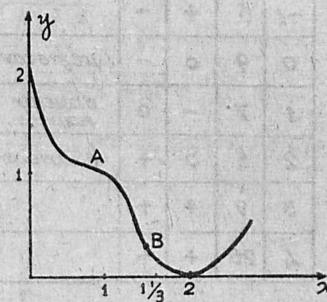
$y''\rfloor_{x=1} = 6 - 4 = 2 > 0$ ἐλάχιστον.

Διὰ τὰ σημεῖα καμπῆς $y'' = 0$, καὶ ἑπομένως $x = 2/3$. Ἐὰν γράψωμεν τὴν δευτέραν παράγωγον ὑπὸ τὴν μορφὴν $y''=6(x-{}^2/_3)$ διὰ $x>{}^2/_3$, $y''>0$ καὶ διὰ $x<{}^2/_3$, $y''<0$.

Ἄρα εἰς τὸ σημεῖον $P_1({}^1/_3, 3{}^4/_{27})$ ἔχομεν μέγιστον, εἰς τὸ σημεῖον $P_2(1,3)$ ἐλάχιστον καὶ τὸ σημεῖον $P_3({}^2/_3, 3{}^3/_{27})$ εἶναι σημεῖον καμπῆς.

Παράδειγμα 4ον) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα καμπῆς καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν κοίλων τῆς καμπύλης $f(x)=3x^4-16x^3+30x^2-24x+8$

$f''(x)=36x^2-96x+60=12(3x^2-8x+5)$. Ἐκ τῆς $3x^2-8x+5=0$ ἔχομεν $x_1=1$ καὶ $x_2=1{}^2/_3$. $f''(x)=36(x-1)(x-{}^5/_3)$. Διὰ $x<1$ σημ. $[f''(x)]=+$ διὰ $5/3>x>1$, σημ. $[f''(x)]=-$. Ἑπομένως, ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α (1, 1) καὶ πρὸς τὰ κάτω εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ Α. Ὅταν $0<x<1\ 2/3$ σημ. $f''(x)=-$ καὶ διὰ $x>5/3$ σημ. $f''(x)=+$. Ἄρα ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω ἀριστερὰ τοῦ Β καὶ πρὸς τὰ ἄνω δεξιὰ τοῦ Β. Ἄρα, ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πάντοτε πρὸς τὰ ἄνω δεξιὰ τοῦ Α, πρὸς τὰ κάτω μεταξὺ Α καὶ Β καὶ πρὸς τὰ ἄνω πάντοτε, δεξιὰ τοῦ Β. Τὰ σημεῖα Α (1, 1) καὶ Β (5/3, 11/27) εἶναι τὰ σημεῖα καμπῆς τῆς καμπύλης.



Σχ. 43

V.— 9. Χάραξις γραμμῶν

Ἡ στοιχειώδης μέθοδος πρὸς χάραξιν γραμμῆς τῆς ὁποίας δίδεται ἡ ἐξίσωσις εἰς ὀρθογωνίους συντεταγμένας, συνίσταται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς y (ἢ x), εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τοῦ y (ἢ x) ὅταν τὸ x (ἢ y) λαμβάνῃ αὐθαιρέτους τιμάς, εἰς τὴν τοποθέτησιν τῶν σημείων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὴν χάραξιν μιᾶς ὁμαλῆς γραμμῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων. Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι ἀρκετὰ κοπιώδης καὶ ἐνίοτε ἀνεφάρμοστος, δεδομένου ὅτι ἐνδέχεται ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις νὰ εἶναι βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου ἢ δὲ λύσις νὰ εἶναι ἀδύνατος διὰ στοιχειωδῶν μεθόδων ὡς πρὸς x ἢ y. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς πρώτης καὶ δευτέρας παραγώγου δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σχῆμα τῆς καμπύλης ἀκολουθοῦντες τὴν ἑξῆς πορείαν :

α) Εὑρίσκομεν τὴν πρώτην παράγωγον, ἐξισώνομεν τὴν παράγωγον μὲ μηδὲν καὶ εὑρίσκομεν τὰς τεταγμένας τῶν σημείων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

β) Εὑρίσκομεν τὴν δευτέραν παράγωγον, ἐξισώνομεν αὐτὴν μὲ μηδὲν καὶ εὑρίσκομεν τὰς τεταγμένας τῶν σημείων καμπῆς, ἐὰν ὑπάρχουν.

γ) Εὑρίσκομεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων τῶν ὁποίων τὰς τεταγμένας γνωρίζομεν ἐκ τῶν (α) καὶ (β), ὡς ἐπίσης καὶ ἄλλα σημεῖα ὅσα εἶναι ἀρκετὰ νὰ δώσουν καλὴν ἰδέαν τοῦ σχήματος τῆς καμπύλης.

δ) Σχηματίζομεν πίνακα τῶν σημείων αὐτῶν καὶ τὰ τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Κατόπιν χαράσσομεν τὴν καμπύλην συμφώνως μὲ τὸν σχηματισθέντα πίνακα.

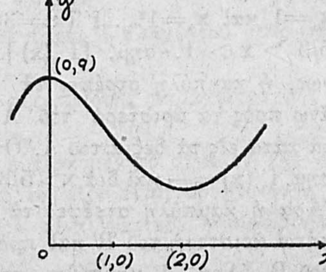
Παράδειγμα 1ον). Νὰ χαραχθῇ ἡ καμπύλη $y = x^3 - 3x^2 + 9$ συμφώνως μὲ τὴν ἀνωτέρω πορείαν.

α) $y' = 3x^2 - 6x\,, \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad x_1 = 0\,, \quad x_2 = 2$

β) $y'' = 6x - 6\,, \quad 6x - 6 = 0 \quad x = 1$

γ) τὰ χρησιμοποιούμενα σημεῖα φαίνονται εἰς τὸν πίνακα :

x	y	y'	y''	Παρατηρήσεις	Διεύθυνσις τῆς καμπύλης
−1	6	+	−		
0	9	0	−	μέγιστον	τά κοῖλα
1	7	−	0	σημεῖον καμπῆς	πρός τά κάτω
2	5	0	+	ἐλάχιστον	τά κοῖλα
3	9	+	+		πρός τά ἄνω
4	25	+	+		



Σχ. 44

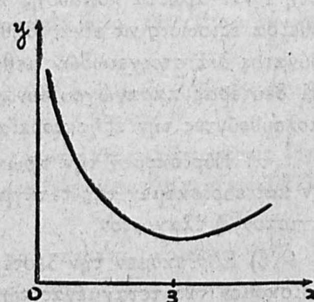
Παράδειγμα 2ον) Νὰ χαραχθῇ ἡ καμπύλη $y = x^2 + \frac{54}{x}$ διὰ θετικὰς τιμὰς τοῦ x.

α) $y' = 2x - \frac{54}{x^2}\,, \quad 2x - \frac{54}{x^2} = 0 \quad x = 3$

β) $y'' = 2 + \frac{108}{x^3}\,, \quad 2 + \frac{108}{x^3} > 0 \quad$ διὰ $x > 0$

γ) Σχηματίζομεν τὸν πίνακα

x	y	y'	y''	Παρατηρήσεις	Διεύθυνσις κοίλων τῆς καταστ.
0	$\to\infty$	$\to-\infty$	$\to\infty$		
1	55	−	+		στρέφει
2	31	−	+		τά κοῖλα πρός τά
3	27	0	+	ἐλάχιστον	ἄνω
4	29.5	+	+		



Σχ. 45

Προβλήματα

Πρόβλημα 1ον) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἑκάστη τῶν κάτωθι συναρτήσεων ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ νὰ χαραχθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι καμπύλαι.

1) $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

2) $y=6x-x^3$

3) $y=x^3-3x^2-9x$

4) $4y=3x^4+4x^3-12x^2-4$

5) $y=2+12x+3x^2-2x^3$

6) $y={}^1/_2x^2+\dfrac{8}{x}$

7) $y=x^2-\dfrac{\alpha^4}{x^2}$

8) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

9) $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$

10) $y=x^2\sqrt{24-x^3}$

11) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

12) $y=\dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)}$

Πρόβλημα 2ον) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα καμπῆς καὶ ἡ διεύθυνσις τῶν καμπυλῶν.

1) $y=x^2$

2) $y=24x^2-x^4$

3) $y=x^3$

4) $y=x+1/x$

5) $y=x^4$

6) $y=x^2+1/x$.

Πρόβλημα 3ον) Ἑταιρία τις αὐτοκινήτων πρόκειται νὰ μεταφέρῃ 100 ἐκδρομεῖς ἢ ὀλιγωτέρους μὲ τιμὴν εἰσιτηρίου 12 δραχμῶν. Ἐὰν ὑπάρχουν περισσότεροι τῶν 100 ἐκδρομέων ἡ ἑταιρία συμφωνεῖ νὰ ὑποβιβάζῃ τὸ εἰσιτήριον κατὰ 5 λεπτὰ δι' ἕκαστον ἐπιβάτην ἐπὶ πλέον τῶν ἑκατὸν (π.χ. ἐὰν οἱ ἐπιβάται εἶναι 102 ἡ τιμὴ τοῦ εἰσιτηρίου εἶναι 11,90). Ποῖος ἀριθμὸς ἐπιβατῶν θὰ δώσῃ εἰς τὴν ἑταιρίαν τὴν μεγίστην εἴσπραξιν ;

Πρόβλημα 4ον) Τηλεφωνικὴ ἑταιρία διαθέτει 10 000 τηλεφωνικὰς συσκευάς, τὰς ὁποίας ἐκμισθεῖ πρὸς 4 δραχμὰς κατὰ μῆνα. Ἡ διεύθυνσις τῆς ἑταιρίας ὑπολογίζει ὅτι ἐὰν ἐλαττώσῃ τὴν τιμήν, ὁ ἀριθμὸς τῶν τηλεφώνων θὰ αὐξηθῇ. Ἐὰν ἡ ἑταιρία ἐγγράφῃ 200 νέους συνδρομητὰς ὅταν ἐλαττώνῃ τὴν μηνιαίαν συνδρομὴν κατὰ 5 λεπτά, ποία μηνιαία συνδρομὴ θὰ δώσῃ τὴν μεγαλυτέραν πρόσοδον εἰς τὴν ἑταιρίαν ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτῆς ;

Πρόβλημα 5ον) Ποία εἶναι ἡ πλέον εὐνοϊκὴ συνδρομὴ διὰ τὴν ἑταιρίαν εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι δι' ἕκαστον νέον τηλέφωνον τὰ ἔξοδα τῆς ἑταιρίας αὐξάνωνται πρὸς 20 λεπτὰ κατὰ μῆνα ;

Πρόβλημα 6ον) Ἑταιρία ραδιοφώνων δύναται νὰ πωλῇ x ραδιόφωνα τὴν ἑβδομάδα πρὸς p δρ. ἕκαστον. Ἡ ἀξία τῆς παραγωγῆς τῶν ραδιοφώνων δίδεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $(500+15x+1/5x^2)$ δρχ. Ἐὰν ἡ συνάρτησις τῆς ζητήσεως εἶναι $5x=315-3p$ δείξατε ὅτι ἡ ἑταιρία ἔχει τὸ μεγαλύτερον κέρδος ὅταν παράγῃ περίπου 30 ραδιόφωνα καθ' ἑβδομάδα.

Πρόβλημα 7ον) Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἐὰν $x=100-20\sqrt{p/5}$ πόσα ραδιόφωνα πρέπει νὰ παράγῃ ἡ ἑταιρία ;

Πρόβλημα 8ον) Νὰ ἐξετασθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα ὅταν $x^2=2\,500-20p$.

Πρόβλημα 9ον) Εἰς τὸ πρόβλημα (6) ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Κράτος προσθέτει φόρον τ δραχμῶν ἐφ' ἑκάστου ραδιοφώνου. Ἡ ἑταιρία προσθέτει τὸν φόρον εἰς τὰ ἔξοδα παραγωγῆς καὶ προσδιορίζει τὴν παραγωγὴν καὶ τὴν τιμὴν πωλήσεως ὑπὸ τοὺς νέους ὅρους.

α) Δείξατε ὅτι ἡ τιμὴ αὐξάνει κατά τι ὀλιγώτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ φόρου.

β) Ἐκφράσετε τὸ φορολογικὸν εἰσόδημα μὲ ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τ καὶ προσδιορίσατε τὴν τιμὴν τοῦ φόρου διὰ νὰ ἔχῃ τὸ Κράτος τὴν μεγίστην πρόσοδον.

γ) Ἀφοῦ προσδιορίσετε τὸν φόρον σύμφωνα μὲ τὸ (β) δείξατε ὅτι ἡ τιμὴ αὐξάνει κατὰ 33 %.

Πρόβλημα 10ον) Ἐργοστάσιον σιδήρου παράγει x τόννους χαμηλῆς περιεκτικότητος καὶ y τόννους ὑψηλῆς περιεκτικότητος σιδήρου. Ἐὰν ἡ συνδετικὴ συνάρτησις εἶναι $y = \frac{40-5x}{10-x}$ καὶ ἡ τιμὴ τῆς χαμηλῆς περιεκτικότητος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑψηλῆς, δείξατε ὅτι περίπου μὲ $5\frac{1}{2}$ τόννους παραγωγῆς χαμηλῆς περιεκτικότητος τὴν ἡμέραν, τὸ ἐργοστάσιον ἔχει τὴν μεγίστην πρόσοδον.

Πρόβλημα 11ον) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα γραφικῶς.

Πρόβλημα 12ον) Τὸ κόστος βιομηχανοποιήσεως μονάδος τινος ὡρισμένου ἀγαθοῦ εἶναι α δρχ. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μονάδων αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ πωληθοῦν μεταβάλλεται ἀντιστρόφως τῆς νυοστῆς δυνάμεως τῆς τιμῆς πωλήσεως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ πωλήσεως διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν τὸ μέγιστον καθαρὸν κέρδος.

Πρόβλημα 13ον) Ὁ ἀριθμὸς τῶν καταναλισκομένων ὀκάδων ἀγαθοῦ τινος εἶναι ἀνάλογος τῆς ὑποβιβάσεως τοῦ φόρου ἐφ' ἑκάστης ὀκάδος. Ἐὰν ἡ κατανάλωσις εἶναι μ ὀκάδες ὅταν τὸ ἀγαθὸν εἶναι ἀφορολόγητον καὶ ν ὀκάδες ὅταν ὁ φόρος εἶναι τ δραχμ. κατ' ὀκᾶν, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ φόρου διὰ τὴν ὁποίαν τὸ Κράτος ἔχει τὰς μεγαλυτέρας εἰσπράξεις.

Πρόβλημα 14ον) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διάμετρος κυλινδρικοῦ δοχείου ἐκ κασσιτέρου, τὸ ὁποῖον θὰ δύναται νὰ χωρέσῃ 58 κυβ. μέτρα, ὥστε νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἐλαχίστη ποσότης κασσιτέρου : α) Ἐὰν εἶναι ἀνοικτὸν εἰς τὴν κορυφήν. β) Ἐὰν εἶναι κεκαλυμένον.

Πρόβλημα 15ον) Τὸ κόστος κατασκευῆς οἰκοδομῆς τινος εἶναι 50 000 δραχμαὶ διὰ τὸν πρῶτον ὄροφον, 52 500 διὰ τὸν δεύτερον, 55 000 δρ. διὰ τὸν τρίτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Τὰ ἄλλα ἔξοδα (οἰκόπεδον, ἔξοδα σχεδίων, ὑπόγειον κ.λ.) εἶναι 35 000 δρχ. Ἐὰν τὸ καθαρὸν ἐτήσιον εἰσόδημα ἀπὸ ἕκαστον ὄροφον εἶναι 5 000 δρχ., πόσους ὀρόφους πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ οἰκοδομὴ διὰ νὰ ἔχωμεν τὸν μέγιστον λόγον τοῦ κέρδους εἰς τὴν προκειμένην ἐπένδυσιν ;

Πρόβλημα 16ον) Ἡ ὁλικὴ ἀξία παραγωγῆς x μονάδων καθ' ἑβδομάδα ἐξ ἀγαθοῦ τινος εἶναι $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ δραχμαί. Ἡ τιμὴ πωλήσεως μιᾶς μονάδος ἐκ τοῦ ἀγαθοῦ $p = \delta - \epsilon x^2$. Δείξατε ὅτι ἡ Ἑταιρία ἡ παράγουσα τὸ ἀγαθὸν ἔχει τὸ μέγιστον κέρδος ὅταν $x = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 3\alpha(\delta - \beta)} - \alpha}{3\epsilon}$.

Πρόβλημα 17ον) Τὸ ὁλικὸν κόστος παραγωγῆς x μονάδων ἐξ ἀγαθοῦ τινος ἑβδομαδιαίως εἶναι $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ δρχ. τὸ δὲ Κράτος προσθέτει φόρον τ δραχμῶν κατὰ μονάδα : Ἡ τιμὴ p εἰς τὴν ὁποίαν δύναται νὰ πωληθῇ ἑκάστη μονὰς εἶναι $p = \delta - \epsilon x$. Δείξατε ὅτι ὁ φόρος $\tau = \frac{1}{2}(\delta - 6)$ δίδει τὰς μεγαλυτέρας εἰσπράξεις εἰς τὸ Κράτος καὶ ὅτι ἡ αὔξησις τῆς τιμῆς τοῦ ἀγαθοῦ κατὰ μονάδα εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ φόρου.

Σημείωσις: Εἰς τὰ δύο ἀνωτέρω προβλήματα α, 6, γ, δ, ε εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Πρόβλημα 18ον) Ἐὰν $f'(x)$ εἶναι ἡ συνάρτησις τοῦ ὁλικοῦ κόστους, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ καμπύλη τοῦ διαφορικοῦ κόστους τέμνει τὴν καμπύλην τοῦ μέσου κόστους εἰς τὸ κατώτερον σημεῖον της. Γενικώτερον, ἐὰν $f(x)$ εἶναι μονότιμος συνάρτησις ὁριζομένη εἰς τὸ πρῶτον τεταρτημόριον, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ καμπύλη ἡ παριστῶσα τὴν $f(x)$ τέμνει τὴν καμπύλην τὴν παριστῶσαν τὴν $\frac{f(x)}{x}$ εἰς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΣ ΚΑΙ Η ΑΓΟΡΑ

VI.—1. Ἡ ἔννοια τοῦ σημείου ἰσορροπίας ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ

Ἡ χρησιμοποίησις τῆς μαθηματικῆς μεθόδου εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς θέσεως καὶ τοῦ ρόλου τῆς ἐπιχειρήσεως ἐν τῇ ἀγορᾷ ἀποτελεῖ ἴσως τὴν πλέον συγκεκριμένην ἀπόδειξιν τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μαθηματικὴ ἐπεξεργασία εἶναι ἀπαραίτητος εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν. Πρὶν ἢ ἀναλύσωμεν τὸν ρόλον καὶ τὴν θέσιν τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἀγοράν, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γίνῃ σύντομος ἀνασκόπησις τῆς ἐξελίξεως τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ.

Ἡ «νεοκλασικὴ» σχολὴ τοῦ A. Mavshall χρησιμοποιεῖ ὡς ἀρχικὸν σημεῖον τῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως τὴν ἐπιχείρησιν, καὶ κυρίως ἐξετάζει τὴν θέσιν καὶ τὸν ρόλον αὐτῆς εἰς τὴν ἀγορὰν ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ. Αἱ ὑποθέσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων βασίζεται τὸ θεωρητικὸν πρότυπον «μοντέλο» τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἀπετέλεσαν τὸν μαγνητικὸν πόλον τῆς οἰκονομικῆς σκέψεως κατὰ τὸ διάστημα τῶν πρώτων τριάκοντα ἐτῶν τοῦ αἰῶνος μας. Συμφώνως μὲ τὰς κυριωτέρας ἐξ αὐτῶν ἡ ἀγορὰ λειτουργεῖ ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου συναγωνισμοῦ ὅταν:

1. Ὑπάρχουν πολλαὶ ἐπιχειρήσεις εἰς τὴν ἀγορὰν αὐτήν.
2. Τὸ ὑπὸ τῶν ἐπιχειρήσεων πωλούμενον προϊὸν ἢ προϊόντα εἶναι ὁμοιογενῆ.
3. Οἱονδήποτε ἄτομον ἢ ἄτομα δύνανται ἀνὰ πᾶσαν στιγμὴν νὰ δημιουργήσουν ὁμοίαν ἐπιχείρησιν εἰς τὴν ἰδίαν ἀγοράν, ἢ νὰ κλείσουν τὴν ἐπιχείρησιν αὐτῶν ἀποχωροῦντες τῆς ἀγορᾶς ταύτης.
4. Ἡ τιμὴ εἰς τὴν ὁποίαν ὅλαι αἱ ἐπιχειρήσεις προσφέρουν τὸ προϊὸν ἢ προϊόντα των εἶναι ἡ ἰδία. Αὔξησις ἢ μείωσις τῆς τιμῆς ὑπὸ μιᾶς τῶν ἐπιχειρήσεων συνεπάγεται καὶ τὴν ἔξοδον αὐτῆς ἀπὸ τὴν ἀγοράν. Αἱ ἐπιχειρήσεις εἶναι τόσον μικραὶ καὶ πολυάριθμοι ὥστε νὰ μὴ δύνανται νὰ ἀσκήσουν οὐδένα ἀποκλειστικῶς ἔλεγχον ἐπὶ τῆς τιμῆς, ἥτις καθορίζεται αὐτομάτως ἀπὸ τὸν νόμον τῆς προσφορᾶς καὶ τῆς ζητήσεως.

5. Ἕκαστος τῶν ἐπιχειρηματιῶν προσπαθεῖ νὰ ἐπιτύχῃ τὸ μέγιστον δυνατὸν κέρδος.

6. Αἱ προβλέψεις τῶν ἐπιχειρηματιῶν διὰ τὰ ἔξοδα καὶ τὰς τιμάς των εἶναι πάντοτε ὀρθαί. Τοιουτοτρόπως, οἱ ἐπιχειρηματίαι προσαρμόζουν τὴν παραγωγὴν ἢ τὴν προμήθειάν των εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἀποφέρει τὸ μεγαλύτερον δυνατὸν κέρδος.

7. Τεχνικαὶ ἢ ἄλλου εἴδους ἀλλαγαὶ κοινωνικοοικονομικῆς φύσεως, αἵτινες θὰ ἐπέφερον τὴν ἀλλαγὴν τοῦ σημείου τῆς ἰσορροπίας, δὲν ὑπολογίζονται ὡς ἀντικειμενικῶς ὑπαρκταί.

Αἱ ἀνωτέρω ὑποθέσεις ἀπετέλεσαν τὴν βάσιν ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐστηρίζετο ἡ σχολὴ τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ νὰ οἰκοδομηθῇ μία θεωρία ἐπὶ τῇ βάσει μόνον τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων εἶναι ζήτημα μᾶλλον ἀπίθανον. Ἡ λειτουργία τῆς ἐπιχειρήσεως ἐξαρτᾶται ἀπὸ πολλοὺς καὶ ἀλληλοσυνδεομένους παράγοντας, ἤτοι, ἀπὸ τὴν ζήτησιν διὰ τὸ προϊόν, τὴν ζήτησιν τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος, τὴν προσφοράν, τὴν προσφορὰν τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ προϊόντος κλπ. Εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις ἑκάστη ἐπιχείρησις δὲν παράγει καὶ δὲν πωλεῖ ἓν μόνον ἐμπόρευμα· ἑπομένως τὸ πρόβλημα γίνεται ἀκόμη δυσκολώτερον, διότι τότε ὑπάρχει ἀλληλεξάρτησις εἰς τὴν ἀγορὰν τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς καὶ ἀλληλεξάρτησις εἰς τὴν διανομὴν τούτων διὰ τὴν παραγωγὴν τῶν δύο ἢ περισσοτέρων προϊόντων. Οἱαδήποτε ἀλλαγὴ εἰς ἓν καὶ μόνον σημεῖον λ.χ. εἰς τὴν ζήτησιν δι' ἓν προϊὸν ἐπιχειρήσεώς τινος εἶναι φυσικὸν νὰ ἐπηρεάσῃ ὅλους τοὺς ὑπολοίπους παράγοντας οἵτινες συντελοῦν εἰς τὴν παραγωγὴν ὡρισμένης ποσότητος α τοῦ ἀγαθοῦ Χ. Πρὶν ἢ ἀκόμη ἡ παραγωγὴ καὶ ἡ προσφορὰ ἐπιχειρήσεώς τινος δι' ἓν ἢ περισσότερα προϊόντα προσανατολισθῇ συμφώνως μὲ τὴν ἐπελθοῦσαν ἀλλαγὴν εἰς τὴν ζήτησιν, ἄλλη τις ἐνδεχομένη ἀλλαγὴ εἰς ἄλλο σημεῖον λ.χ. εἰς τὴν προσφορὰν τῆς ἐργατικῆς δυνάμεως, θὰ ἐπηρεάσῃ ἐκ νέου ὅλους τοὺς ὑπολοίπους παράγοντας τοὺς συντελοῦντας εἰς τὴν παραγωγὴν π.χ. τῆς α ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ Χ καὶ τῆς β ποσότητος τοῦ ἀγαθοῦ Ψ κ.ο.κ. Διὰ νὰ ἀναλύσῃ τις πάντας τοὺς παράγοντας τούτους μαζί, τὰς τάσεις των, τὴν συνεισφορὰν αὐτῶν εἰς τὴν κατασκευὴν ἀγαθοῦ τινος κλπ. εἶναι πρᾶγμα ἀπίθανον. Διὰ νὰ ἀναλύσῃ τις τὸν ρόλον τῶν παραγόντων αὐτῶν τμηματικῶς ἀπομονώνων τὸν ἕνα ἐκ τοῦ ἄλλου, θὰ ἐμπλακῇ εἰς στατικὴν ἀνάλυσιν ἥτις δὲν δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς συγκεκριμένον ἀποτέλεσμα. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο οἱ ἱδρυταὶ τῆς νεοκλασικῆς σχολῆς καὶ ὀπαδοὶ τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος ἔδωσαν τὴν λύσιν των.

Ἡ ἀνάλυσις τῆς θέσεως καὶ τοῦ ρόλου τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν ὑπὸ τῶν «νεοκλασικῶν» ἐβασίσθη ἐπὶ σπουδαιοτέρας ἀκόμη ὑποθέσεως. Οἱ νεοκλασικοὶ ὑπέθεσαν ὅτι ὅλαι αἱ δυνάμεις, ὅλοι οἱ παράγοντες οἱ συντελοῦντες εἰς τὴν λειτουργίαν ἐπιχειρήσεώς τινος δύνανται νὰ ἀναλυθοῦν, ὁ δὲ ρόλος καὶ αἱ σχέσεις των νὰ καθορισθοῦν, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει ἓν σταθερὸν σημεῖον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνουν ὅλοι ὁμοῦ καὶ ὁ καθεὶς χωριστά, ἤτοι ***τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως***. Τοιουτοτρόπως, κυρίως διὰ τοὺς νεοκλασικούς, τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἔγινε ὁ ἄξων ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐστηρίχθη ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις καὶ γενικώτερον ἡ ἐξέλιξις τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας. Ἡ ἔννοια τῆς ἰσορροπίας, συνέπεια τῆς ἐπιρροῆς τὴν ὁποίαν εἶχον ἡ νευτώνιος φυσικὴ καὶ ὁ ρασιοναλισμὸς ἐπὶ τῶν οἰκονομικῶν καὶ κοινωνικῶν ἐν γένει ἐπιστημῶν εἶναι στατικὴ καὶ ἀφηρημένη.

Ἡ ἔννοια τῆς ἰσορροπίας τῆς ἐπιχειρήσεως ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἀπετέλεσε τὸ ἀρχικὸν καὶ κύριον μέρος τῆς νεοκλασικῆς οἰκονομικῆς ἀναλύσεως καὶ διὰ τὴν ἐπιχείρησιν ἀλλὰ καὶ δι᾽ ὁλόκληρον τὴν οἰκονομίαν. Μία ἐπιχείρησις, λέγομεν ὅτι ἰσορροπεῖ, ὅταν παράγει καὶ πωλεῖ εἰς ὡρισμένην τιμήν, ὡρισμένην ποσότητα ἀγαθῶν, ἡ ὁποία εἶναι ἴση ἀκριβῶς μὲ τὴν ποσότητα ἐκείνην τὴν ὁποίαν οἱ καταναλωταὶ εἶναι διατεθειμένοι νὰ ἀγοράσουν.

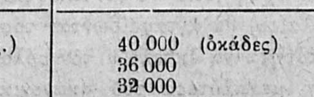
Συμφώνως πρὸς τὴν ἀνάλυσιν τῆς ὁριακῆς χρησιμότητος, διὰ ἀγορὰν λειτουργοῦσαν ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ, λέγομεν ὅτι ἰσορροπεῖ, ὅταν ἡ τιμὴ εἰς τὴν ὁποίαν προσφέρεται τὸ σύνολον ὡρισμένου προϊόντος ἰσοῦται μὲ τὸ σύνολον εἰς τὸ ὁποῖον θέλουν νὰ ἀγοράσουν οἱ καταναλωταὶ εἰς τὴν τοιαύτην τιμήν. Τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας εἴς τινα ἀγορὰν δεικνύομεν διὰ τοῦ κατωτέρου πίνακος καὶ διαγράμματος.

Πίναξ 10

Ζήτησις καὶ προσφορὰ διὰ τὸ ἐμπόρευμα «Α»

Προσφερόμενον σύνολον	Τιμὴ	Ζητούμενον
10 000 (ὀκάδες)	1 (δεκ. ἑκατ. δραχ.)	40 000 (ὀκάδες)
15 000	2	36 000
21 000	3	32 000
28 000	4	28 000
37 400	5	24 000
46 750	6	20 000
56 100	7	16 000

Ἡ τιμὴ εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πωλῆται τὸ ἐμπόρευμα Α διὰ νὰ τηρῆται ἡ ἀγορὰ εἰς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας εἶναι 4 ἑκατομ. δραχμῶν.



Σχ. 46
p=τιμὴ εἰς ἑκατ. δραχ.
q=ποσότης εἰς ὀκάδας

Οἰκονομία λειτουργοῦσα ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας της ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἀπολύτως οὐδεμία πιθανότης δι᾽ ἓν ἄτομον ἢ διά τινα ἐπιχείρησιν νὰ βελτιώσουν τὴν οἰκονομικήν των θέσιν μεταβάλλοντες τὸν ρόλον των εἰς τὴν οἰκονομίαν. Ἐπὶ παραδείγματι, ἀλαντοπωλεῖον πωλοῦν μόνον ἀλαντικὰ καὶ ἔχον πρόσοδον R δὲν θὰ ἔχῃ πρόσοδον μεγαλυτέραν τοῦ R ἐὰν οἱ διευθυνταὶ αὐτοῦ προσπαθήσουν νὰ τὸ μετατρέψουν καὶ εἰς τυροπωλεῖον ἢ εἰς μόνον τυροπωλεῖον. Ὁ ὁρισμὸς οὗτος τοῦ σημείου τῆς ἰσορροπίας τῆς οἰκονομίας εἶναι ἐπακόλουθον δύο ὑποθέσεων: α) ὅτι εἰς ὅλους τοὺς τομεῖς ὡρισμένης οἰκονομίας ἡ ζήτησις ἰσοῦται μὲ τὴν προσφορὰν καὶ 6) ὅτι ἡ οἰκονομία εἶναι σύνολον πολλῶν ἐπιχειρήσεων. Τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ συνόλου τῶν ἐπιχειρήσεων, δηλαδὴ τῆς οἰκονομίας, ὅταν αὕτη εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἰσορροπίας της ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

1. Ἑκάστη τῶν ἐπιχειρήσεων χρησιμοποιεῖ καὶ συνδυάζει τοὺς συντελεστὰς τῆς παραγωγῆς κατὰ τοιαύτην ποσότητα καὶ τοιοῦτον τρόπον ὥστε : α) Ἐὰν χρησιμοποιηθῇ μία ἐπιπρόσθετος μονὰς συντελεστοῦ τινος (ἔδαφος, κεφάλαιον, ἐργατικὴ δύναμις) ἡ ὁριακὴ τιμὴ τοῦ προϊόντος αὐτῆς δὲν θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ μέσον κόστος. 6) Ἐὰν περιορισθῇ τὸ χρησιμοποιούμενον σύνολον τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς ὁ περιορισμὸς τοῦ κόστους δὲν θὰ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν συνεπόμενον περιορισμὸν τῆς προσόδου. γ) Οὐδεμία διαφορετικὴ μέθοδος καὶ συνδυασμὸς χρησιμοποιήσεως τῶν συντελεστῶν τῆς παραγωγῆς θὰ ἐπιφέρῃ τὴν βελτίωσιν τῆς θέσεως τῆς ἐπιχειρήσεως.

2. Ὅταν ἐπιχείρησίς τις παράγῃ δύο ἢ περισσότερα προϊόντα : α) ἐὰν ἡ παραγωγὴ ἑνὸς τῶν προϊόντων αὐξηθῇ, τὸ ὁριακὸν κόστος αὐτοῦ δὲν θὰ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν τιμὴν τῆς πωλήσεώς του. 6) Ἐὰν ἡ παραγωγὴ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐλαττωθῇ, ὁ περιορισμὸς τοῦ κόστους θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ περιορισμοῦ τῆς προσόδου. γ) Οὐδεὶς διαφορετικὸς συνδυασμὸς τῆς παραγωγῆς τῶν δύο προϊόντων θὰ δύναται νὰ βελτιώσῃ οἰκονομικῶς τὴν θέσιν τῆς ἐπιχειρήσεως.

3. Δὲν θὰ ὑπάρχῃ ζημία ἢ κέρδος περισσότερον τοῦ κανονικοῦ, (¹) εἰς καμμίαν ἐπιχείρησιν. Οἱ συντελεσταὶ τῆς παραγωγῆς (συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ κεφαλαίου) θὰ ἀνταμείβωνται τόσον, ὅσον ἀκριβῶς ἀπαιτεῖται διὰ νὰ ἔχουν τὴν δυνατότητα νὰ ἐκτελοῦν τὸν ρόλον των. Αὐτὸ εἶναι ἀληθὲς διότι ἐν ὅσῳ ὑπάρχουν κέρδη μεγαλύτερα τοῦ «κανονικοῦ» δημιουργοῦνται νέαι ἐπιχειρήσεις εἰς τὴν ἰδίαν βιομηχανίαν μὲ ἀποτέλεσμα τὴν πτῶσιν τῶν τιμῶν καὶ τὴν ἄνοδον τῶν ἐξόδων. Ἀντιθέτως, ὅταν εἴς τινα βιομηχανίαν αἱ ἐπιχειρήσεις ζημιοῦνται, πολλαὶ ἐξ αὐτῶν ἐξαφανίζονται, ἕως ὅτου ἡ βιομηχανία φθάσῃ ἐκ νέου εἰς τὸ σημεῖον τοῦ «κανονικοῦ κέρδους».

4. Ὅλοι οἱ καταναλωταὶ οἵτινες θέλουν νὰ ἀγοράσουν ἀγαθὰ εἰς τὴν ὑπάρχουσαν τιμὴν παραμένουν ἀπολύτως ἱκανοποιημένοι. Οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ καλυτερεύσῃ τὴν θέσιν του ἀγοράζων μεγαλυτέραν ποσότητα ἐκ τοῦ ἑνὸς ἐμπορεύματος καὶ μικροτέραν ἀπὸ τὴν τοῦ ἄλλου. Μὲ ἄλλους λόγους, ἡ ὁριακὴ χρησιμότης 1 δραχμῆς ἐξοδευομένης διὰ τὸ ἐμπόρευμα Χ ἰσοῦται μὲ τὴν ὁριακὴν χρησιμότητα τῆς ἐξοδευομένης δραχμῆς διὰ τὸ ἐμπόρευμα Ψ.

5. Οὐδεὶς ἐκ τῶν πωλητῶν τῶν παραγωγικῶν ὑπηρεσιῶν, προσφέρων παραγωγικὰς ὑπηρεσίας εἰς τὴν ὑπὸ τῆς ἀγορᾶς καθοριζομένην τιμήν, θὰ ἔχῃ μεγαλυτέραν πρόσοδον ἐὰν πωλήσῃ τὰς ἰδίας ὑπηρεσίας διὰ διαφορετικὴν χρῆσιν. Ἑπομένως, ἡ τιμὴ τὴν ὁποίαν λαμβάνει ἕκαστος τῶν πωλητῶν διὰ τὴν ὑπ' αὐτοῦ πωλουμένην παραγωγικὴν ὑπηρεσίαν ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴν τοῦ ὁριακοῦ προϊόντος τῆς ὑπηρεσίας ταύτης εἰς τὴν πλέον ἀποδοτικὴν χρησιμοποίησιν αὐτῆς.

Κανονικὸν κέρδος. Τὸ κέρδος εἴς τινα οἰκονομίαν ἢ εἰς οἰκονομικὸν τομέα εἶναι εἰς τὸ κανονικόν του ἐπίπεδον ὅταν δὲν παρατηρῆται δημιουργία νέων ἐπιχειρήσεων ἢ ἀποχώρησις τοιούτων ἀπὸ τὴν οἰκονομίαν ἢ ἀπὸ τὸν οἰκονομικὸν τομέα.

Ἡ ἔννοια τοῦ σημείου τῆς ἰσορροπίας ὑπὸ συνθήκας ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ εἶχε πρακτικὴν ἀξίαν διὰ τοὺς νεοκλασικούς, διὰ τοὺς κατωτέρω λόγους:

α) Ἀπετέλεσε τὸ ἀρχικὸν σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον οἱ οἰκονομολόγοι ἠδυνήθησαν νὰ ἐπεξεργαστοῦν οἰκονομικὰ φαινόμενα ἀντίθετα τῶν ὑποθέσεών των.

β) Ἀπετέλεσε τὸ ἀξίωμα ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁποίου οἱ νεοκλασικοὶ ἠδυνήθησαν νὰ ἀναλύσουν, συμφώνως μὲ τὴν θεωρίαν των, φαινόμενα ἅτινα ὠφείλοντο εἰς μεταβολὴν ἑνὸς ἢ δύο παραγόντων, π. χ. (τὴν ζήτησιν, τὴν προσφοράν, τὸ κόστος παραγωγῆς κ.λ.π.).

Εἶναι περιττὸν νὰ τονίσωμεν ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἰσορροπίας διά τινα οἰκονομίαν ἢ διά τινα ἐπιχείρησιν εἰδικῶς, εἶναι ἀπολύτως στατικὴ καὶ δὲν ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν ἀντικειμενικῶς ὑπάρχουσαν πραγματικότητα.

VI. 2.—Ἡ ἐξέλιξις τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας

Ἡ μεγάλη κεφαλαιοκρατικὴ οἰκονομικὴ κρίσις τοῦ 1930 ἔπεισε τοὺς οἰκονομολόγους τῆς ἐποχῆς ὅτι αἱ ὑποθέσεις τῶν ὀπαδῶν τοῦ Μάρσαλλ καὶ ἡ μέθοδος τῶν «ἐξωτερικῶν οἰκονομιῶν» διὰ τῆς ὁποίας οὗτος εἶχε προσπαθήσει νὰ στηρίξῃ τὸ ὁλοὲν περισσότερον ἀμφισβητούμενον δόγμα τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ ἦσαν ἐντελῶς ἀβάσιμοι καὶ οὐσιαστικῶς ἄχρηστοι εἰς τὴν μελέτην τῆς οἰκονομικῆς πραγματικότητος.

Ὁ κεϋνσισμὸς καὶ ἡ σχολὴ τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ εἶναι συνέπεια τῆς χαώδους καταστάσεως ποὺ ἐπεκράτησε ἐπί τι χρονικὸν διάστημα κατὰ τὰ πρῶτα ἔτη τῆς παγκοσμίου δυσπραγίας τοῦ 1930. Ἡ ἔκτασις τοῦ παρόντος δὲν ἐπιτρέπει νὰ πραγματευθῶμεν, εἰμὴ συνοπτικῶς μόνον περὶ τῆς σχολῆς τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ.

Αἱ συνθῆκαι αἱ περιβάλλουσαι τὸ μονοπώλιον καὶ τὸν ρόλον αὐτοῦ ἐν τῇ ἀγορᾷ ἀπετέλεσαν ἀπὸ τὰ τέλη τοῦ 1929 ἕως τὰ τελευταῖα προπολεμικὰ ἔτη, μαζὶ μὲ τὸ θέμα τῆς πλήρους ἀπασχολήσεως (κεϋνσισμός), τὰ κεντρικὰ ἀντικείμενα ἐρεύνης τῆς οἰκονομικῆς ἐπιστήμης. Μόνον ἀπὸ τὰ τέλη τοῦ 1929 ἕως τὸ 1933 ἐγράφησαν τὰ κατωτέρω σημαντικὰ συγγράμματα:

F. Zeuthen, Problems of Monopol and economic Warface (1930),
Sckeider, Reine Theorie monopolisticher Wirtschaftsformen (1932),
E. H. Chamberlin, Theory of monopolistic Competition (1933),
J. Robinson, Economics of imperfect Competition (1933).

Εἶναι γεγονὸς ὅτι τὸ μονοπώλιον καὶ ὁ μονοπωλιακὸς ἀνταγωνισμός, φαινόμενα τὰ ὁποῖα ἤρχισαν νὰ μελετῶνται συστηματικῶς ὑπὸ τῆς γενεᾶς τῶν οἰκομολόγων τοῦ 1930, δὲν εἶναι νέα οὔτε εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μεγάλων κεφαλαιοκρατικῶν βιομηχανικῶν οἰκονομιῶν, οὔτε ἀκόμη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὑποαναπτυγμένων οἰκονομιῶν. Καὶ παλαιότεροι οἰκονομολόγοι, ὡς οἱ Cairnez καὶ Wicksell ἐνδιέτριψαν ἐπὶ τοῦ θέματος, πανταχόθεν δ' ἀνομολογεῖται πόσον τὸ ἄρθρον τοῦ καθηγητοῦ P. Sraffa «The Laws of Returns under competitive Conditions», συνετέλεσε σοβαρῶς εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ.

Ἡ ἀνάπτυξις τῆς θεωρίας τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ καὶ ἡ πλέον ἐμπεριστατωμένη ἔρευνα διὰ τὴν θέσιν καὶ τὸν ρόλον τῶν μονοπωλίων εἴς τινα ἀγοράν, καθυπαγορευόμεναι ἀπὸ τὴν θλιβερὰν οἰκονομικὴν πραγματικότητα τοῦ 1930, συνετέλεσαν σοβαρῶς εἰς τὴν σημερινὴν ἀνάπτυξιν τῶν μαθηματικῶν οἰκονομικῶν. Καὶ τοῦτο, διότι μόνον διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μαθηματικῆς μεθόδου δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν ἐπακριβῶς τὴν θέσιν καὶ τὸν ρόλον τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἀγοράν. Τοιουτοτρόπως ἐξηγεῖται καὶ ἡ ἐπιστροφὴ εἰς τὸν Cournot, τὸν ἱδρυτὴν τῶν μαθηματικῶν οἰκονομικῶν, ὁ ὁποῖος πρῶτος ἠσχολήθη μὲ τὸν ρόλον τοῦ μονοπωλίου εἰς τὴν ἀγοράν, χρησιμοποιῶν τὴν μαθηματικὴν μέθοδον.

Εἰς τὴν μεταπολεμικὴν περίοδον, καίτοι ἡ διδασκομένη οἰκονομικὴ ἀνάλυσις βασίζεται κυρίως ἐπὶ τῶν ὑποθέσεων τῆς σχολῆς τοῦ μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ, ἡ ἔμφασις ἐπὶ τῆς θέσεως καὶ τοῦ ρόλου τῶν μεγάλων καὶ μονοπωλιακῶν ἐπιχειρήσεων εἰς τὴν ἀγορὰν ἔχει κάπως ἐκλείψει. Τουναντίον ὑπάρχουν ὡρισμέναι τάσεις διὰ τὴν ἐξύμνησιν τοῦ ρόλου τῶν μονοπωλίων λ. χ. τὸ τελευταῖον βιβλίον τοῦ Carr «The New Society».

Νομίζομεν ὅτι ἡ προσεκτικὴ καὶ ἐμπεριστατωμένη ἀνάλυσις ἐπὶ τῶν μονοπωλίων καὶ τῶν μεγάλων ἐπιχειρήσεων διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μαθηματικῆς μεθόδου πολὺ θὰ ὠφελήσῃ τὴν οἰκονομικὴν ἐπιστήμην καὶ θὰ τὴν ὁδηγήσῃ εἰς νέα, πλέον συγκεκριμένα καὶ ἁπλούστερα συμπεράσματα.

VI. 3.—Ὁρισμοὶ

Προτοῦ ἐξετάσωμεν τὸ θέμα τοῦ ρόλου καὶ τῆς θέσεως τῆς ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν ἀγορὰν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ διαχωρίσωμεν ὡρισμένας κατηγορίας μεγάλων ἐπιχειρήσεων, βασιζόμενοι ἐπὶ μερικῶν ἐκ τῶν κυρίων χαρακτηριστικῶν των:

Ἁπλοῦν μονοπώλιον. Ὅταν ἐπιχείρησίς τις εἶναι ὁ μόνος παραγωγὸς ὡρισμένου ἐμπορεύματος καὶ ὅταν δὲν παράγονται ὑπὸ ἄλλης ἐπιχειρήσεως ἐμπορεύματα τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς ὑποκατάστατα τοῦ ὑπὸ τῆς ἐν λόγῳ ἐπιχειρήσεως παραγομένου, τότε ἡ ἐπιχείρησις αὐτὴ ὀνομάζεται ***ἁπλοῦν μονοπώλιον***.

Ἀποκλειστικὸς ἔλεγχος τῆς παραγωγῆς προϊόντος τινος ὑπὸ μιᾶς καὶ μόνης ἐπιχειρήσεως δύναται νὰ ἐπέλθῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ἀλλὰ καὶ ὅταν μία μόνον ἐπιχείρησις ἐλέγχῃ ἄνω τῶν 80% τῆς παραγωγῆς ὡρισμένου ἐμπορεύματος, τότε ὁ ρόλος καὶ ἡ θέσις τῆς ἐπιχειρήσεως ταύτης δὲν διαφέρει οὐσιωδῶς ἀπὸ τὴν μονοπωλιακήν.

Αἱ περιπτώσεις ἁπλοῦ μονοπωλίου παρουσιάζονται κυρίως εἰς βιομηχανίας ὅπου μία μεγάλη ἐπιχείρησις δύναται διὰ διαφόρων μεθόδων νὰ ἀποκλείσῃ τὴν εἴσοδον εἰς τὴν ἀγορὰν ἄλλης τοιαύτης. Ἐὰν π. χ. μία μεγάλη ἐπιχείρησις ἔχῃ ἀποκλειστικὸν προνόμιον ἐκμεταλλεύσεως ἐφευρέσεώς τινος ὡρισμένου μηχανισμοῦ τῆς παραγωγῆς, τότε εἶναι εὔκολον διὰ τὴν ἐπιχείρησιν αὐτὴν νὰ αὐξήσῃ τὴν παραγωγικότητά της, νὰ σμικρύνῃ ἑπομένως τὸ κόστος τῆς παραγωγῆς τοῦ ἐμπορεύματος καὶ τελικῶς νὰ μείνῃ ὁ μοναδικὸς κυρίαρχος τῆς ἀγορᾶς.

Ἄλλος τρόπος ἐγκαθιδρύσεως ἁπλοῦ μονοπωλίου εἰς τὴν ἀγορὰν εἶναι ὅταν μία μεγάλη ἐπιχείρησις ἀποκτᾷ ἀποκλειστικὸν ἔλεγχον εἰς ὅλας τὰς πλουτοπαραγωγικὰς πηγὰς τῶν ὁποίων ἡ χρησιμοποίησις εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ὑπ᾽ αὐτῆς παραγομένου προϊόντος. Ὁ πλέον ὅμως συνήθης τρόπος τῆς μονοπωλήσεως τῆς ἀγορᾶς εἶναι ὅταν ὡρισμέναι μεγάλαι ἐπιχειρήσεις εἴς τινα βιομηχανίαν συγχωνεύωνται ἢ ἑνοποιοῦνται εἰς ἕνα κοινὸν συνασπισμόν, ἀκολουθοῦσαι ἑνιαίαν πολιτικὴν τιμῆς. Ἡ κυριαρχία εἰς τὴν ἀγορὰν τῶν τοιούτου εἴδους μονοπωλίων δύναται νὰ καταστῇ ἀπόλυτος ὅταν αἱ ἐπιχειρήσεις, διὰ τῆς ἐκμεταλλεύσεως τῆς ἐπιρροῆς τὴν ὁποίαν ἀσκοῦν ἐπὶ τῶν τραπεζῶν, ἐπὶ τῆς μεταφορᾶς καὶ ἐπὶ τῆς τιμῆς τοῦ προϊόντος, παρεμποδίζουν συστηματικῶς τὴν εἴσοδον ἄλλης ἐπιχειρήσεως εἰς τὴν βιομηχανίαν (*).

Διμερὲς μονοπώλιον. Ὅταν ἓν ἁπλοῦν μονοπώλιον πωλῇ τὸ προϊὸν αὐτοῦ εἰς ἄλλο ἁπλοῦν μονοπώλιον, τότε ἔχομεν τὴν περίπτωσιν διμεροῦς μονοπωλίου. Τοῦτο συμβαίνει συνήθως ὅταν μία μεγάλη ἐπιχείρησις ἐλέγχῃ ἀπολύτως ἀκατεργάστους ὕλας (π. χ. ὀρυχεῖα) ἀπαραιτήτους διὰ τὴν κατασκευὴν δοθέντος προϊόντος (π. χ. μηχανὰς παραγομένου ὑπὸ ἄλλου ἁπλοῦ μονοπωλίου).

Δυοπώλιον. Δυοπώλιον ὑπάρχει εἰς μίαν ἀγορὰν ὅταν ἡ ἀγορὰ αὕτη α) ἔχῃ μόνον δύο ἐπιχειρήσεις αἱ ὁποῖαι προσφέρουν τὸ ἴδιον ἐμπόρευμα (ἢ τὴν ἰδίαν ὑπηρεσίαν), καὶ β) ὅταν δὲν ὑπάρχουν ἄλλαι ἐπιχειρήσεις προσφέρουσαι τὸ ἴδιον ἐμπόρευμα, ἢ οἱονδήποτε ἄλλο ἐμπόρευμα δυνάμενον νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς ὑποκατάστατον ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν.

Μονοπωλιακὸς ἀνταγωνισμός. Ἀγορά τις λέγεται λειτουργοῦσα ὑπὸ συνθήκας μονοπωλιακοῦ ἀνταγωνισμοῦ ὅταν ὑπάρχουν εἰς αὐτὴν ἐπιχειρήσεις πωλοῦσαι προϊόντα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ὡς ὑποκατάστατα ὑπὸ τῶν καταναλωτῶν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν πωλητῶν εἶναι τόσον μεγάλος ὥστε οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ ἀσκήσῃ ἐπαρκῆ ἔλεγχον ἐπὶ τῆς ἀγορᾶς καὶ νὰ ἐπηρεάσῃ τὰς πωλήσεις τοῦ ἄλλου ἐπιχειρηματίου. Τοιουτοτρόπως, δὲν ὑπάρχει ἀποδεδειγμένη ἀλληλοεξάρτησις μεταξὺ τῶν πωλητῶν καὶ τῆς τιμῆς εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος ἐξ αὐτῶν πωλεῖ τὸ προϊόν του. Ἕκαστος πωλητὴς δύναται νὰ αὐξήσῃ ἢ νὰ ἐλαττώσῃ τὴν τιμὴν τοῦ προϊόντος του, χωρὶς ἡ πρᾶξις αὐτοῦ νὰ δημιουργήσῃ τὴν ἀντίδρασιν ἄλλου πωλητοῦ. Ἀσφαλῶς, ὅμως, αἱ ἀποφάσεις καὶ ἡ πολιτικὴ τῆς τιμῆς τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ ἕκαστος τῶν ἐπιχειρηματιῶν θὰ ἐπηρεάσῃ τὸν ἄλλον, ὄχι ὅμως ἀπ' εὐθείας ἀλλ' ἐμμέσως, διὰ τῶν ἀντιδράσεων αἱ ὁποῖαι δημιουργοῦνται εἰς τοὺς καταναλωτὰς ἀπὸ τὰς ἀποφάσεις τοῦ α ἢ β ἐπιχειρηματίου (**).

(Συνεχίζεται)

(*) Ὡς τονίζει καὶ ὁ καθηγητὴς κ. Ξ. Ζολώτας: «Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν πραγματικότητα αἱ ἀνωτέρω μορφαὶ πλήρους μονοπωλίου σπανίζουν, ἀπαντῶνται δὲ περισσότερον τὰ ἀτελῆ μονοπώλια», Ξ. Ζολώτα: Θεωρητικὴ Οἰκονομική, σελ. 402.

(**) Διὰ λεπτομερεστέραν ἀνάλυσιν βλέπε Ξ. Ζολώτα: Θεωρητικὴ Οἰκονομικὴ σελ. 403—427.