

# ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΕΩΣ

Τοῦ κ. ΓΩΑΝΝΟΥ Α. ΛΕΒΕΝΤΑΚΗ

## 1. Ἡ ἔννοια τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ἀναπτύξεως

Ἡ θεωρία τῆς οικονομικῆς ἀναπτύξεως, ἡ ὁποία διευτυπώθη κατὰ τὴν τελευταίαν 25ετίαν ὑπὸ μορφήν ὑποδειγμάτων, ἀφορᾷ κυρίως εἰς τὴν ἐπίτευξιν ἑνὸς σταθεροῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως ἐν ἰσορροπία (equilibrium steady growth), δηλαδή εἰς μίαν κατάστασιν δυναμικῆς ἰσορροπίας τῆς οἰκονομίας καθ' ἣν ὅλα τὰ μεγέθη τοῦ συστήματος αὐξάνονται κατὰ ἓνα σταθερὸν ρυθμὸν διὰ μέσου τοῦ χρόνου. Ἡ μέθοδος ἀναλύσεως τῆς δυναμικῆς ἰσορροπίας μὲ σταθερὸν ρυθμὸν ἀναπτύξεως παρουσιάζει ἀναλογίας ἐν σχέσει πρὸς τὴν μέθοδον ἀναλύσεως τῆς στατικῆς ἰσορροπίας κατὰ τοῦτο: ἐνῶ εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην αἱ τιμαὶ τῶν μεταβλητῶν λαμβάνονται ὡς σταθεραὶ ἐν τῷ χρόνῳ, εἰς τὴν δυναμικὴν ἀνάλυσιν ἰσορροπίας λαμβάνεται σταθερὸς ὁ ρυθμὸς ἀναπτύξεως.

Ἀναφορικῶς πρὸς τὴν ἀνάλυσιν τῆς δυναμικῆς ἰσορροπίας, μὲ σταθερὸν ρυθμὸν ἀναπτύξεως, γεννῶνται τὰ ἑξῆς κυρίως προβλήματα: Πρῶτον, τὸ πρόβλημα τῆς ὑπάρξεως ἑνὸς σταθεροῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως ἐν ἰσορροπία. Δεύτερον, τὸ πρόβλημα τοῦ προσδιορισμοῦ τῶν τιμῶν τῶν σχετικῶν μεταβλητῶν εἰς τὴν κατάστασιν ταύτην ἰσορροπίας. Τρίτον, τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος τοῦ ρυθμοῦ ἀνόδου ἰσορροπίας, δηλαδή κατὰ πόσον εἰς περίπτωσιν ἀποκλίσεως τοῦ οικονομικοῦ συστήματος ἀπὸ τὸν ρυθμὸν ἰσορροπίας θὰ ὑπάρξη τάσις πρὸς ἐπιστροφὴν τούτου πρὸς τὴν κατάστασιν ἰσορροπίας ἢ ὄχι.

Τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος τῆς ἰσορροπίας περιλαμβάνει δύο κατηγορίας προβλημάτων (1): προβλήματα δυναμικῆς ἰσορροπίας καὶ προβλήματα δυναμικῆς ἀνισορροπίας. Τὰ προβλήματα τῆς πρώτης κατηγορίας ἀφοροῦν εἰς τὴν μελέτην τῆς συμπεριφορᾶς τῆς πορείας τῆς ἰσορροπίας τοῦ οικονομικοῦ συστήματος διὰ μέσου τοῦ χρόνου, ἀνεξαρτήτως ἐὰν τοῦτο προσεγγίζη τὴν πορείαν τοῦ σταθεροῦ ρυθμοῦ ἀνόδου ἰσορροπίας ἢ ὄχι. Ἡ πορεία αὕτη τοῦ

1) F. H. Hahn and R.C.O. Matthews: «the Theory of Economic Growth: A Survey», εἰς *Economic Journal*, Δεκέμβριος 1964, σελ. 779-902.

σταθεροῦ ρυθμοῦ ἀνόδου εἶναι σταθερὰ ἐξ ἀπόψεως δυναμικῆς ἰσορροπίας ἐὰν οἰαδῆποτε πορεία ἰσορροπίας τοῦ συστήματος τείνη διὰ μέσου τοῦ χρόνου πρὸς τὴν πορείαν τῆς σταθερᾶς ἀναπτύξεως. Τὰ προβλήματα τῆς δευτέρας κατηγορίας ἐξετάζουν τὴν δυνατότητα προσεγγίσεως τοῦ συστήματος πρὸς τὴν πορείαν τῆς μακροχρονίου ἰσορροπίας ἀπὸ μίαν κατάστασιν ἀνισορροπίας. Μία πορεία ἰσορροπίας εἶναι σταθερὰ ἐξ ἀπόψεως δυναμικῆς ἀνισορροπίας ἐὰν οἰαδῆποτε πορεία ἀνισορροπίας τοῦ συστήματος τείνη διὰ μέσου τοῦ χρόνου πρὸς τὴν πορείαν τῆς ἰσορροπίας.

Ἡ ἔννοια τῆς σταθερότητος ἢ ὁποία κυρίως ἐνδιαφέρει εἰς τὰ ὑποδείγματα τῆς οικονομικῆς ἀναπτύξεως εἶναι ἡ ἔννοια τῆς σχετικῆς σταθερότητος, καθ' ἣν ἡ σχέσης μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν τοῦ οικονομικοῦ συστήματος προσεγγίζει διὰ μέσου τοῦ χρόνου ὠρισμένον ὄριον (1). Ἐπὶ παραδείγματι, ἐὰν ἡ σχέσης μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν διαφόρων κλάδων μιᾶς οικονομίας προσεγγίξῃ ὠρισμένον ὄριον διὰ μέσου τοῦ χρόνου, τότε ἔχομεν σχετικὴν σταθερότητα. Ἡ ἔννοια αὕτη τῆς σχετικῆς σταθερότητος δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι συμπίπτει πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς σταθερότητος τοῦ πρώτου εἴδους κατὰ Samuelson (2).

Εἰς τὴν περίπτωσιν ἐνὸς ὑποδείγματος ἀναπτύξεως πολλῶν τομέων (multi-sector) ἡ ἔννοια τῆς σχετικῆς σταθερότητος εἶναι προφανής. Ἐρώτημα ἐν τούτοις γεννᾶται ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς σχετικῆς σταθερότητος προκειμένου περὶ ἀθροιστικῶν (aggregates) ὑποδειγμάτων; Διὰ νὰ δοθῇ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο πρέπει νὰ καταστή σαφῆς ἡ σχέσης μεταξὺ σταθερότητος τῆς ἀναλογίας τῶν στοιχείων τοῦ συστήματος καὶ σταθερότητος τοῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως. Ὁ Jorgenson (3) δεικνύει ὅτι ὁ ρυθμὸς ἀναπτύξεως συνδέεται μετὰ τῆς μεγαλυτέρας ἀριθμητικῶς ρίζης (the dominant root) ἐνὸς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων διαφορῶν. Ἡ ρίζα αὕτη προσδιορίζει τὸν ρυθμὸν ἀναπτύξεως εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὡς σχετικὴ σταθερότης θεωρεῖται ἡ σταθερότης τῆς πορείας τῆς μεταβλητῆς διὰ μέσου τοῦ χρόνου, ἢ ὁποία προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς μεγαλυτέρας ἀριθμητικῶς ρίζης τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως. Ὡς παράδειγμα δύναται νὰ ἀναφερθῇ τὸ σύστημα Harrod. Ὁ ρυθμὸς ἀνόδου ἰσορροπίας, ὁ ὁποῖος προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν

1) D. W. Jorgenson, «On stability in the sense of Harrod», εἰς *Economica* Αὐγούστος 1960, σελ. 245.

2) Ὁ Samuelson διακρίνει δύο εἶδη Σταθερότητος: σταθερότητα πρώτου εἴδους, ὅταν ἡ μεταβλητὴ τείνη διὰ μέσου τοῦ χρόνου πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας, καὶ σταθερότητα δευτέρου εἴδους, ὅταν ἡ μεταβλητὴ κυμαίνεται πέριξ τοῦ σημείου ἰσορροπίας. Οὗτος διακρίνει ἐπίσης μεταξὺ τελείας σταθερότητος, εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ὑπάρχει τάσις πρὸς ἐπιστροφήν τῆς μεταβλητῆς πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας ἀνεξαρτήτως τοῦ μεγέθους τῆς ἀποκλίσεως ἀπὸ τῆς ἰσορροπίας, καὶ περιορισμένης σταθερότητος, ὅταν ἡ τάσις ἐπιστροφῆς πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας παρατηρεῖται μόνον ἐπὶ μικρῶν ἀποκλίσεων. Βλέπε σχετικῶς: P. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947, σελ. 261-262.

3) \*Ἐνθ. ἀνωτ. σελ. 247.

λύσιν τῆς βασικῆς ἐξισώσεως τοῦ συστήματος Harrod, ἀποτελεῖ τὸν ἡγγυη-  
 μένον ρυθμὸν. Ἐὰν ἡ οἰκονομία ἀναπτύσσεται κατὰ τὸν ρυθμὸν τοῦτον, ἡ  
 σχέσις μεταξύ κεφαλαίου καὶ προϊόντος παραμένει σταθερὰ διὰ μέσου τοῦ χρό-  
 νου καὶ τὸ σύστημα εἶναι σχετικῶς σταθερὸν. Ἡ σταθερότης ὅμως τῆς ἀνα-  
 λογίας μεταξύ κεφαλαίου καὶ προϊόντος εἶναι δυνατὸν νὰ διατηρηθῆται ἐὰν ἀμφό-  
 τερα τὰ ἀνωτέρω μεγέθη αὐξάνωνται κατὰ τὸν αὐτὸν ρυθμὸν ἀνεξαρτήτως ἐὰν  
 οὗτος ἀποτελῆ τὸν ἡγγυημένον ρυθμὸν ἢ ὄχι. Συμπεῶς, ἡ σχετικὴ σταθερό-  
 της προϋποθέτει ὅτι αἱ μεταβληταὶ τοῦ συστήματος θὰ πρέπει νὰ αὐξάνων-  
 ται διὰ μέσου τοῦ χρόνου κατὰ τὸν αὐτὸν ρυθμὸν (1).

Ἡ ἔννοια τῆς σχετικῆς σταθερότητος ἀντιδιαστέλλεται τόσον ἀπὸ τὴν  
 ἔννοιαν τῆς τοπικῆς σταθερότητος (local stability), ὅσον καὶ ἀπὸ τὴν ἔννοιαν  
 τῆς συνολικῆς σταθερότητος (global stability) (2). Μία πορεία ἰσορροπίας  
 εἶναι τοπικῶς σταθερὰ ἐὰν τὸ σύστημα, ἐκκινουῦν ἐκ σημείου κειμένου πλησίον  
 τῆς πορείας ἰσορροπίας, τείνῃ νὰ ἐπιστρέψῃ πρὸς αὐτήν. Ἡ πορεία αὕτη, ἐξ  
 ἄλλου, εἶναι συνολικῶς σταθερὰ ὅταν τὸ σύστημα ἔχῃ τὴν τάσιν ἐπιστροφῆς  
 πρὸς τὴν πορείαν ἰσορροπίας ἀνεξαρτήτως τοῦ σημείου ἐκκινήσεως αὐτοῦ.

Ἡ ἀνάλυσις τῆς σταθερότητος ἐνὸς ὑποδείγματος οἰκονομικῆς ἀναπτύ-  
 ξεως ἀφορᾷ τόσον εἰς τὰς συνθήκας αἱ ὁποῖαι δεόν νὰ πληροῦνται διὰ τὴν  
 ἐπίτευξιν ἐνὸς σταθεροῦ ρυθμοῦ οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως μακροχρονίως, ὅσον  
 καὶ εἰς τὴν διαδικασίαν προσαρμογῆς τοῦ συστήματος πρὸς τὴν κατάστα-  
 σιν τῆς μακροχρονίου ἰσορροπίας εἰς περίπτωσιν ἀποκλίσεως αὐτοῦ ἀπὸ τὴν  
 πορείαν τῆς ἰσορροπίας. Ὁ Samuelson (3) παρατηρεῖ ὅτι ἡ ἐξέτασις τῆς στα-  
 θερότητος ἐνὸς συστήματος δὲν εἶναι δυνατὴ χωρὶς τὴν ἀνάλυσιν τῆς δυναμι-  
 κῆς διαδικασίας προσαρμογῆς αὐτοῦ, διότι ἐν σύστημα εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι  
 σταθερὸν κατὰ μίαν ὠρισμένην διαδικασίαν προσαρμογῆς καὶ ἀσταθὲς κατὰ  
 μίαν ἄλλην. Μόνον διὰ τῆς ἐξετάσεως τῆς πορείας τοῦ οἰκονομικοῦ συστήμα-  
 τος διὰ μέσου τοῦ χρόνου θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξακριβωθῆ κατὰ πόσον τοῦτο  
 εἶναι σταθερὸν ἢ ἀσταθές. Ἡ ἐξέτασις δὲ τῆς πορείας ταύτης ἀποτελεῖ ἀντι-  
 κείμενον δυναμικῆς ἀναλύσεως (4).

Σκοπὸς τῆς παρουσίας ἐργασίας εἶναι ἡ ἐπισκόπησις ὠρισμένων ὑποδει-  
 γμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ ἡ ἐξέτασις τοῦ προβλήματος τῆς σταθε-  
 ρότητος αὐτῶν. Εἰδικώτερον γίνεται ἀνάλυσις τῶν ὑποδειγμάτων τῶν Harrod,  
 Solow, Kaldor καὶ Leontief καὶ ἐξετάζεται τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος.

1) Βλ. σχ. R.G.D. Allen, *Macroeconomic Theory*, London 1967, σελ. 187.

2) Hahn καὶ Matthews, ἔνθ. ἄνωτ., σελ. 804.

3) Ἐνθ. ἄνωτ. σελ. 262.

4) Περὶ δυναμικῆς ἀναλύσεως βλέπε σχετικῶς: R. Frisch, «On the motion of equi-  
 librium and disequilibrium», εἰς *Review of Economic Studies*, Φεβρουάριος 1936.  
 Βλέπε ἐπίσης P. Samuelson, «Dynamic, statics an stationary states», εἰς *Review  
 of Economics and Statistics*, 1943, σελ. 58-68. Τοῦ ἰδίου, *Foundations of Economic  
 Analysis*, ἔνθ. ἄνωτ. σελ. 257 κ.ε. Βλ. καὶ παρ' ἡμῖν Κλ. Β. Μπανταλούκα, «Εἰσαγωγή  
 εἰς τὴν μεθοδολογίαν τῆς οἰκονομικῆς ἐρεῦνης». Πειραιεύς, 1969, περὶ ὑποδειγμάτων οἰκono-  
 μετρίας γενικώτερον, σσ. 37-66.

τοῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως ἰσορροπίας. Αἱ μελέται τῶν ἀνωτέρω συγγραφέων θεωροῦνται ἀντιπροσωπευτικά τῆς συγχρόνου θεωρίας τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, καλύπτουσαι σημαντικὸν μέρος τῆς πραγματοποιηθείσης μέχρι σήμερον συμβολῆς εἰς τὸ πεδῖον αὐτὸ τῆς οἰκονομικῆς θεωρίας.

## 2. Τὸ ὑπόδειγμα Harrod

Ἐπεχείρησε πρῶτος τὴν ἐργασίαν του «An essay in Dynamic Theory»<sup>(1)</sup>, ἐπεχείρησε πρῶτος τὴν δυναμικὴν ἀνάλυσιν μιᾶς προοδευτικῆς ἰσορροπίας τῆς οἰκονομίας, διὰ τοῦ συνδυασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ τοῦ ἐπιταχυντοῦ<sup>(2)</sup>. Ἡ θεωρία τοῦ Harrod, τροποποιηθεῖσα καὶ συμπληρωθεῖσα διὰ νεωτέρων δημοσιευμάτων, ἀπετέλεσε τὴν βᾶσιν τῆς συγχρόνου σκέψεως ἐπὶ τοῦ προβλήματος τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ὁ Harrod θεωρεῖ τὸ κεφάλαιον ὡς κύριον παράγοντα τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ ἐρευνᾷ τοὺς ὁρους ὑπὸ τοὺς ὁποίους δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ εἰς ἀδιατάρακτος ρυθμὸς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ὁ ρυθμὸς οὗτος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ροπὴν πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ τὸν λόγον κεφαλαίου—προϊόντος. Οὕτω, μὲ δεδομένον λόγον κεφαλαίου—προϊόντος, εἰς ὑψηλὴν ροπὴν πρὸς ἀποταμίευσιν ἀντιστοιχεῖ ὑψηλὸς ρυθμὸς ἀναπτύξεως καὶ ἀντιστρόφως. Ὁ ἀνωτέρω ρυθμὸς ἀναπτύξεως εἶναι ρυθμὸς ἰσορροπίας σταθερᾶς ἀνόδου τῆς οἰκονομίας. Τὸ βασικὸν πρόβλημα εἰς τὸ ὑπόδειγμα Harrod εἶναι τὸ πρόβλημα τῆς ἀσταθείας, τὸ ὁποῖον προκαλεῖται ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ πραγματικὸς ρυθμὸς ἀνόδου τῆς οἰκονομίας δὲν συμπίπτει ἀναγκαίως πρὸς τὸν ἠγγυημένον (warranted) ρυθμὸν. Τὸ πρόβλημα τοῦτο θὰ ἐξετάσωμεν ἀμέσως κατωτέρω.

### α. Περίπτωσης ἀσταθείας<sup>(3)</sup>

Ἡ πρώτη βασικὴ ὑπόθεσις τοῦ ὑποδείγματος Harrod εἶναι ὅτι ἡ ἀποταμίευσις τῆς περιόδου  $t$  εἶναι συνάρτησις τοῦ εἰσοδήματος τῆς προηγούμενης περιόδου, ἥτοι :

$$S_t = sY_{t-1} \quad (1)$$

ὅπου  $s$  ἡ μέση ροπὴ πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ  $Y_{t-1}$  τὸ εἰσόδημα τῆς προηγούμενης περιόδου.

1) R. F. Harrod: «An essay in dynamic theory», εἰς *Economic Journal*, Μάρτιος 1939. Τοῦ ἴδιου, *Towards a dynamic Economics*, London, 1949.

2) Ἀνάλογον θεωρίαν διετύπωσε καὶ ὁ Domar. στηριζόμενος, ὡς γράφει, εἰς τὸ ἔργον τῶν Keynes καὶ Hansen. Βλέπε σχετικῶς: E. Domar, *Essays in the Theory of Economic Growth*, New York 1957.

3) Περὶ τῆς ἀσταθείας τοῦ ὑποδείγματος Harrod βλέπε σχετικῶς: R. G. D. Allen, *Mathematical Economics*, London, 1957. Κεφ. 3. F. H. Hahn and R. C. O. Matthews: «The Theory of Economic Growth, A survey», εἰς *Economic Journal*, Δεκέμβριος 1964. J. W. Nevillie, «The Mathematical Formulation of Harrod's growth model», εἰς *Economic Journal*, 1962. A. W. Phillips «A simple model of employment, money and prices in a growing Economy», εἰς *Economica*, Νοέμβριος 1961.



Ἡ δευτέρα βασική ὑπόθεσις εἶναι ὅτι ὁ λόγος κεφαλαίου—προϊόντος παραμένει σταθερός. Οὕτως, αἱ ἀπαιτούμεναι ἐπενδύσεις τῆς περιόδου  $t$  εἶναι :

$$I_t^a = v_r (Y_t^a - Y_{t-1}) \quad (2)$$

ὅπου  $I_t^a$  ἡ ἐπένδυσις *ex ante*,  $Y_t^a$  τὸ προβλεπόμενον ἐπίπεδον εισοδήματος τῆς περιόδου  $t$  καὶ  $v_r$  ὁ ἀπαιτούμενος λόγος κεφαλαίου—προϊόντος.

Ἡ τρίτη βασική ὑπόθεσις τοῦ ὑποδείγματος Harrod ἀφορᾷ εἰς τὰς προβλέψεις ὡς πρὸς τὸν ρυθμὸν αὐξήσεως τοῦ εισοδήματος. Ἐν προκειμένῳ γίνε-ται ἡ ὑπόθεσις ὅτι ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ εισοδήματος τῆς τελευταίας περιόδου θὰ πραγματοποιηθῇ καὶ κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον, ἦτοι :

$$\begin{aligned} \frac{Y_t^a}{Y_{t-1}} &= \frac{Y_{t-1}}{Y_{t-2}} \\ Y_t^a &= \frac{(Y_{t-1})^2}{Y_{t-2}} \end{aligned} \quad (3)$$

Ὅσον ἀφορᾷ τὰς ἐπενδύσεις ἡ βασική ὑπόθεσις εἶναι ὅτι ἂν ἡ πραγμα-τική ζήτησις ἰσοῦται πρὸς τὴν προβλεπομένην, αἱ πραγματικαὶ ἐπενδύσεις θὰ ἰσοῦνται πρὸς τὰς προγραμματισθείσας. Ἀντιθέτως, ἂν ἡ πραγματικὴ ζή-τησις εἶναι μεγαλύτερα ἢ μικρότερα τῆς προβλεπομένης ζητήσεως, αἱ πρα-γματικαὶ ἐπενδύσεις θὰ εἶναι ἀναλόγως μικρότερα ἢ μεγαλύτερα τῶν προ-γραμματισθεισῶν. Οὕτως, ἡ ἀκουσία ἐπένδυσις, δηλαδή ἡ διαφορὰ μεταξύ *ex post* καὶ *ex ante* ἐπενδύσεως θὰ εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν διαφορὰν μεταξύ προβλεπομένου καὶ πραγματικοῦ εισοδήματος, ἦτοι <sup>(1)</sup> :

$$S_t - I_t^a = \alpha (Y_t^a - Y_t), \quad \delta\text{που } \alpha > 0 \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$\alpha Y_t - (v_r + \alpha) \frac{(Y_{t-1})^2}{Y_{t-2}} + (v_r + s) Y_{t-1} = 0 \quad (5)$$

Διαιροῦντες τὴν (5) διὰ  $Y_{t-1}$  καὶ θέτοντες  $\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = R_t$ , λαμβάνομεν :

$$\alpha R_t - (v_r + \alpha) R_{t-1} + (v_r + s) = 0 \quad (6)$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως ταύτης διαφορᾶς δίδει <sup>(2)</sup> :

$$R_t = 1 + \frac{s}{v_t} + A \left( \frac{v_r + \alpha}{\alpha} \right) \quad (7)$$

1) Neville, *ἔνθ.* ἄνωτ., σελ. 367.

2) Περὶ ἐξισώσεων διαφορᾶς βλέπε σχετικῶς : W. J. Baumol, *Economic Dynamics*, New York, 1963, ἔκδοσις 4η.

ὄπου  $A$  εἶναι σταθερὸν καὶ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν καὶ  $1 + \frac{S}{V_r} = 1 + G_w$  ἢ τιμὴ ἰσορροπίας.

Ἡ οἰκονομικὴ σημασία τῆς τιμῆς ταύτης ἰσορροπίας εἶναι ὅτι τὸ εἰσόδημα πρέπει νὰ αὐξάνη διὰ μέσου τοῦ χρόνου μὲ ρυθμὸν  $\frac{S}{V_r}$ , οὕτως ὥστε ἡ προκαλουμένη ἐπένδυσις νὰ εἶναι ἴση ἀκριβῶς πρὸς τὴν ἀποταμίευσιν, δεδομένης τῆς ροπῆς πρὸς ἀποταμίευσιν. Ἡ ρυθμὸς οὗτος ἐπομένως εἶναι ρυθμὸς ἀνόδου ἰσορροπίας ἐφ' ὅσον ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἰσορροπίαν τῆς προσφορᾶς καὶ τῆς ζητήσεως. Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ἐν λόγῳ ρυθμὸς προόδου ἤθελε πραγματοποιηθῆ οἱ ἐπιχειρηματίαι θὰ εἶναι ἱκανοποιημένοι ὅτι ἡ παραγωγή των ὑπῆρξεν ἐκείνη, τὴν ὅποιαν ἐπεδίωξαν καὶ ἐπομένως θὰ ὠθοῦνται εἰς συνέχισιν τῶν ἐπιδιώξεων, αἱ ὅποιαι ἠδηγοῦν εἰς τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ρυθμοῦ αὐτοῦ ἀναπτύξεως. Ἐπομένως, ὁ ἀνωτέρω ρυθμὸς ἀνόδου, ὁ ὁποῖος καλεῖται ἡγγυημένος ρυθμὸς, εἶναι ρυθμὸς ἰσορροπίας σταθερᾶς ἀνόδου.

Ἡ ἐξίσωσις (7) δύναται νὰ γραφῆ:

$$G = G_w + A \left( \frac{V_r}{\alpha} + \alpha \right)^t \quad (8)$$

ὄπου  $G$  ὁ πραγματικὸς ρυθμὸς προόδου καὶ  $G_w$  ὁ ἡγγυημένος ρυθμὸς.

Ἐὰν  $G = G_w$ , τότε  $A = 0$ . Ἐξ ἄλλου, ἐὰν  $G \neq G_w$ , καὶ ἐφ' ὅσον  $V_r + \alpha > 0$ , ὁ πραγματικὸς ρυθμὸς ἀνόδου, καθὼς ὁ χρόνος θὰ παρέρχεται, θὰ τείνη συνεχῶς νὰ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸν ἡγγυημένον ρυθμὸν. Οὕτω, πραγματικὸς ρυθμὸς ἀνόδου ὑψηλότερος τοῦ ἡγγυημένου θὰ σημαίνει αὐξήσιν τῆς ζητήσεως ὑπερβαίνουσαν τὴν αὐξήσιν τῆς παραγωγῆς. Ἡ ἱκανοποίησις τῆς ὑπερβαλλούσης ζητήσεως θὰ ἐπιτευχθῆ διὰ πίεσεως ἐπὶ τῶν ἀποθεμάτων καὶ ἐπὶ τοῦ παραγωγικοῦ δυναμικοῦ τῆς οἰκονομίας. Τοῦτο ὁμως ἰσοδυναμεῖ εἰς λόγον κεφαλαίου—προϊόντος χαμηλότερον τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ τὴν ἰσορροπίαν τῆς οἰκονομίας. Ἐπομένως τὸ παραχθὲν κεφάλαιον ἦτο μικρότερον τοῦ ἀπαιτουμένου. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ οἰκονομία θὰ τείνη νὰ καλύψῃ τὴν προκύψασαν ἔλλειψιν δι' αὐξήσεως τῶν παραγγελιῶν πρὸς ἀναπλήρωσιν τῶν μειωθέντων ἀποθεμάτων καὶ πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ ἀνεπαρκοῦς παραγωγικοῦ δυναμικοῦ. Κατὰ συνέπειαν ὁ πραγματικὸς ρυθμὸς ἀνόδου θὰ τείνη νὰ ἀπομακρυνθῆ ἔτι περαιτέρω τοῦ ἡγγυημένου.

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ πραγματικὸς ρυθμὸς ἀνόδου εἶναι χαμηλότερος τοῦ ἡγγυημένου, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ παραγωγή ὑπῆρξε μεγαλυτέρα, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ζήτησιν, θὰ προκύψῃ λόγος κεφαλαίου—προϊόντος μεγαλύτερος τοῦ ἀπαιτουμένου. Τοῦτο ὁμως θὰ ἐπηρεάσῃ πτωτικῶς τὰ σχέδια τῶν ἐπιχειρηματιῶν πρὸς αὐξήσιν τῆς παραγωγῆς καὶ θὰ σημειωθῆ οὕτω περαιτέρω μείωσις τοῦ πραγματικοῦ ρυθμοῦ ἀνόδου κ.ο.κ.

Ἡ ἐξίσωσις (2), ἡ ὁποία δίδει τὴν ἐπένδυσιν *ex ante*, δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν τὴν τυχὸν ὑφισταμένην ἔλλειψιν κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ κατὰ τὸ

τέλος τῆς περιόδου  $t-1$  καθ' ἣν λαμβάνονται αἱ ἀποφάσεις διὰ τὰς ἐπενδύσεις τῆς νέας περιόδου. Ἡ ἔλλειψις αὕτη, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφοράν μεταξὺ ὑφισταμένου καὶ ἀπαιτούμενου κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ κατὰ τὸ τέλος τῆς περιόδου  $t-1$ , εἶναι δυνατόν νὰ ὀφείλεται εἰς δύο λόγους: Πρῶτον, εἰς τὴν ἀρνητικὴν ἀσχεδιάστον ἐπένδυσιν τὴν προκαλουμένην ἐκ τῆς διαστάσεως μεταξύ προβλεπομένης καὶ πραγματικῆς παραγωγῆς κατὰ τὴν προηγούμενην περίοδον. Δεύτερον, εἰς τὸ γεγονός ὅτι οἱ ἐπιχειρηματῆαι δὲν ὑπελόγισαν ὀρθῶς τὸν ἀπαιτούμενον λόγον κεφαλαίου-προϊόντος κατὰ τὴν περίοδον  $t-1$ . Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ὑφισταμένην ἔλλειψιν τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ κατὰ τὴν τελευταίαν περίοδον καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἀρνητικὴ ἐπένδυσις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν διαφοράν μεταξύ προβλεπομένης καὶ πραγματικῆς παραγωγῆς τῆς περιόδου  $t-1$ , ἡ (2) γίνεται (1):

$$I_t^\alpha = v_r (Y_t^\alpha - Y_{t-1}) - \alpha (Y_{t-1}^\alpha - Y_{t-1}) + v_r (Y_{t-1} - Y_{t-1}^\alpha) \quad (2\alpha)$$

Ἐκ τῶν (1), (2α), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$\alpha Y_t - (v_r + \alpha) \frac{(Y_{t-1})^2}{Y_{t-2}} + (v_r + \alpha) \frac{(Y_{t-2})^2}{Y_{t-3}} + (s - \alpha) Y_{t-1} = 0 \quad (9)$$

Διαιροῦντες τὴν (9) διὰ  $Y_{t-1}$  καὶ θέτοντες  $\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = R_t$ , λαμβάνομεν:

$$\alpha R_t - (v_r + \alpha) R_{t-1} + (v_r + \alpha) \frac{R_{t-2}}{R_{t-1}} + (s - \alpha) = 0 \quad (10)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (10)  $R = R_t = R_{t-1} = R_{t-2}$ , λαμβάνομεν:

$$R = 1 + \frac{s}{v_r} = 1 + G_w \quad (11)$$

Ἡ (11) ἀποτελεῖ τὴν τιμὴν ἰσορροπίας τῆς ἀξισώσεως διαφορᾶς (10), ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῆ ὡς ἀκολούθως:

$$R_t = R_{t-1} + \frac{v_r}{\alpha} \left[ R_{t-1} - \left( 1 + \frac{s}{v_r} \right) \right] + \left( \frac{v_r}{\alpha} + 1 \right) \left( 1 - \frac{R_{t-2}}{R_{t-1}} \right) \quad (12)$$

Ἐὰν ὑποτεθῆ ὅτι  $R_{t-1} > R_{t-2} \geq 1 + \frac{s}{v_r}$ , οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι τῆς ἐξισώσεως (12) εἶναι θετικοὶ καὶ κατὰ συνέπειαν  $R_t > R_{t-1}$ . Ἀντιθέτως, ἐὰν  $R_{t-1} < R_{t-2} \leq 1 + \frac{s}{v_r}$ , οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι τῆς (12) εἶναι ἀρνητικοὶ καὶ  $R_t < R_{t-1}$ . Συνεπῶς δὲν ὑφίσταται τάσις ἐπιστροφῆς τοῦ πραγματικοῦ ρυ-

θμοῦ ἀνόδου πρὸς τὸν ρυθμὸν ἰσορροπίας. Ἀντιθέτως, κεντρόφυγες δυνάμεις τείνουν νὰ ἀπομακρύνουν διὰ μέσου τοῦ χρόνου διαρκῶς καὶ περισσότερον τὸν πραγματικὸν ρυθμὸν ἀνόδου ἀπὸ τὸν ἠγγυημένον ρυθμὸν. Συνεπῶς, τὸ σύστημα Harrod εἶναι ἀσταθές (1).

### β. Περίπτωσις σταθερότητος

Τὸ πρόβλημα τῆς ἀσταθείας τοῦ ὑποδείγματος Harrod ἀπετέλεσεν ἀντικείμενον σοβαρᾶς ἀμφισβητήσεως ὑπὸ ὠρισμένων οἰκονομολόγων (2). Ἡ ἀστάθεια τοῦ ὑποδείγματος προκύπτει ἐκ τῶν ἐξῆς δύο βασικῶν ὑποθέσεων: (α) Ἐὰν ὁ πραγματικὸς ρυθμὸς ἀνόδου εἶναι χαμηλότερος τοῦ ἠγγυημένου, αἱ πραγματικαὶ ἐπενδύσεις θὰ εἶναι μικρότεραι τῶν ἀπαιτουμένων. (β) Ἐὰν ἡ ὑπερβάλλουσα ζήτησις τῆς τελευταίας περιόδου εἶναι θετική, αἱ παραγγελίαι τῶν ἐπιχειρηματιῶν πρέπει νὰ αὐξηθοῦν κατὰ τὴν ἐπομένην περίοδον. Ὁ Jorgenson διετύπωσε τὴν παρατήρησιν ὅτι αἱ ἀνωτέρω ὑποθέσεις δὲν εἶναι ἐπαρκεῖς ἵνα τὸ σύστημα Harrod εἶναι ἀσταθές. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ὁ ἐν λόγω συγγραφεὺς χρησιμοποιεῖ τὴν ὑπόθεσιν περὶ μηχανισμοῦ ἀνισορροπίας.

Ἄν ὑποθεθῆ ὅτι ἡ ἀποταμίευσις τῆς περιόδου  $t$  ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐπένδυσιν *ex post*, θὰ ἔχωμεν:

$$S_t = sY_{t-1} = v(Y_t - Y_{t-1}) \quad (13)$$

ὅπου  $v$  ὁ πραγματικὸς λόγος κεφαλαίου-προϊόντος.

Ἐκ τῆς (13) λαμβάνομεν τὸν πραγματικὸν ρυθμὸν ἀνόδου, ἥτοι:

$$G = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{s}{v} \quad (14)$$

Ἐξ ἄλλου, ἡ ἰσότης *ex post* καὶ *ex ante* ἐπενδύσεων δίδει:

$$sY_{t-1} = v_r(Y_t - Y_{t-1}) \quad (15)$$

ἐξ ἧς προκύπτει ὁ ἠγγυημένος ρυθμὸς ἀνόδου:

$$G_w = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{s}{v_r} \quad (16)$$

1) Τὴν ἀστάθειαν τοῦ συστήματος Harrod ἀποδεικνύουν καὶ οἱ Hahn καὶ Matthews. Οὗτοι μετροῦν τὴν ἀπόκλισιν τοῦ πραγματικοῦ ρυθμοῦ ἀνόδου  $G_t$  ἀπὸ τὸν ἠγγυημένον ρυθμὸν  $G_w$  διὰ τῆς ἐξισώσεως  $M_t = (G_t - G_w)^2$  καὶ δεικνύουν ὅτι, καθὼς ὁ χρόνος θὰ παρέρχεται, ἡ τιμὴ τοῦ  $M_t$  θὰ τείνη νὰ αὐξάνη. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ πραγματικὸς ρυθμὸς ἀνόδου θὰ τείνη νὰ ἀπομακρύνεται συνεχῶς ἀπὸ τὸν ἠγγυημένον ρυθμὸν, δηλαδή τὸ σύστημα εἶναι ἀσταθές. Βλέπε σχετικῶς: Hahn and Matthews, ἐνθ. ἀνωτ., σελ. 806-807.

2) Βλ. σχ. D.W. Jorgenson, «On stability in the sense of Harrod», εἰς *Economica*, Αὐγούστος, 1960. H. Rose, «The possibility of warranted growth», εἰς *Economic Journal*, Ἰούνιος, 1959.



Ο Jorgenson (1) όρίζει την υπερβάλλουσαν ζήτησιν ως διαφοράν μεταξύ ex post και ex ante επενδύσεων:

$$E_t = v_t (Y_t - Y_{t-1}) - v (Y_t - Y_{t-1}) \quad (17)$$

όπου  $E_t$  ή υπερβάλλουσα ζήτησις διά κεφαλαιουχικά άγαθά τής περιόδου  $t$ . Έάν ή υπερβάλλουσα αύτη ζήτησις είναι θετική, οί επιχειρηματίαι θα πραγματοποιήσουν τοιαύτα επίπεδα παραγωγής, ώστε να αύξήσουν την υπερβάλλουσαν ζήτησιν κατά την έπομένην περίοδον. Άντιθέτως, εάν ή υπερβάλλουσα ζήτησις είναι άρνητική, ή συμπεριφορά τών επιχειρηματιών θα όδηγήσῃ εις μείωσιν τής εν λόγω ζητήσεως κατά την έπομένην περίοδον.

Ο μηχανισμός άνισορροπίας, τόν όποίον χρησιμοποιεί ό Jorgenson διά να άποδείξη ότι τό υπόδειγμα Harrod δέν είναι άναγκαιώς άσταθές, έχει ως άκολουθως:

$$E_t - E_{t-1} = kE_{t-1}, \text{ όπου } k > 0 \quad (18)$$

Η (18) δηλοϊ ότι ή διαφορά μεταξύ υπερβαλλούσης ζητήσεως τής περιόδου  $t$  και έκείνης τής περιόδου  $t-1$  είναι άνάλογος προς την υπερβάλλουσαν ζήτησιν τής περιόδου  $t-1$ . Ο παράγων δέ τής άναλογικότητας είναι μία σταθερά και δεικνύει τόν ρυθμόν αύξήσεως ή μειώσεως τής υπερβαλλούσης ζητήσεως.

Έκ τών (13) και (17) λαμβάνομεν:

$$E_t = (Y_t - Y_{t-1}) - sY_{t-1} \quad (19)$$

έξ ης:

$$Y_t = (1 + \frac{s}{v_r}) \cdot Y_{t-1} + \frac{1}{v_r} E_t \quad (20)$$

Λαμβάνοντες ύπ' όψιν τας έξισώσεις (16) και (18), ή 20 γίνεται:

$$Y_t = (1 + G_w) Y_{t-1} + \frac{1 + K}{v_r} E_{t-1} \quad (21)$$

Η έξισωσις (21) δηλοϊ ότι τό εισόδημα τής περιόδου  $t$  είναι συνάρτησις του εισοδήματος τής περιόδου  $t-1$  και τής υπερβαλλούσης ζητήσεως διά κεφαλαιουχικά άγαθά τής αύτης περιόδου. Υποθέτοντες ότι ή υπερβάλλουσα ζήτησις τής περιόδου  $t-1$  ίσοϋται προς τό μηδέν, ή (21) γίνεται:

$$Y_t = (1 + G_w) Y_{t-1} \quad (22)$$

έκ τής όποίας προκύπτει ότι τό εισόδημα θα αύξάνη διά μέσου του χρόνου κατά τόν ήγγυημένον ρυθμόν άνόδου. Συνεπώς δέν ύφίσταται διάστασις μεταξύ πραγματικού ρυθμού άνόδου και ήγγυημένου.

Αί έξισώσεις (18) και (21) άποτελοϋν εν σύστημα έξισώσεων διαφορών, τό όποίον έχει ως άκολουθως:

1) Ένθ. άνωτ., σελ. 24.

$$Y_t = (1 + G_w) Y_{t-1} + \frac{1+k}{v_r} E_{t-1} \quad (23)$$

$$E_t = (1 + k) E_{t-1} \quad (24)$$

Ἐκ τῶν (23) καὶ (24) λαμβάνομεν :

$$Y_t = [(1 + G_w) + (1 + k)] Y_{t-1} + (1 + G_w) (1 + k) Y_{t-2} = 0 \quad (25)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι μία ἐξίσωσις διαφορᾶς δευτέρου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ χαρακτηριστικαὶ ρίζαι εἶναι  $1 + G_w$  καὶ  $1 + k$ . Ἡ λύσις τῆς ἐξίσωσως (25) δίδει :

$$Y_t = A (1 + G_w)^t + B (1 + k)^t \quad (26)$$

ὅπου  $A$  καὶ  $B$  καθορίζονται ἐκ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν.

Ἐὰν  $1 + G_w$  ἀποτελῆ τὴν μεγαλύτεραν ἀριθμητικῶς ρίζαν, τὸ εἰσόδημα θὰ αὐξάνη διὰ μέσου τοῦ χρόνου κατὰ τὸν ἠγγυημένον ρυθμὸν προόδου. Ἀντιθέτως ἐὰν  $1 + k$  εἶναι ἡ μεγαλύτερα ἀριθμητικῶς ρίζα, ἡ πορεία τοῦ εἰσοδήματος διὰ μέσου τοῦ χρόνου ἐξαρτᾶται βασικῶς ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ  $k$ . Διὰ νὰ ὑπάρξη ἐπομένως σταθερότης τοῦ συστήματος Harrod θὰ πρέπει ἡ τιμὴ τοῦ  $k$  νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς τιμῆς τοῦ  $G_w$ . Ἄλλὰ ἡ μόνη ὑπόθεσις ἡ ὁποία ἐγένετο ἀναφορικῶς πρὸς τὴν συμπεριφορὰν τοῦ  $k$  εἶναι ἡ ὑπόθεσις περὶ θετικότητας, ἡ ὁποία δὲν ἀποκλείει τὴν περίπτωσιν  $k < G_w$ . Συνεπῶς, ἐὰν εἰς τὴν (26) ἡ τιμὴ  $G_w$  εἶναι μεγαλύτερα τῆς τιμῆς  $k$ , τὸ εἰσόδημα θὰ αὐξάνη κατὰ τὸν ρυθμὸν ἰσορροπίας καὶ τὸ σύστημα θὰ εἶναι σχετικῶς σταθερόν.

Ἀνάλογον εἶναι τὸ συμπέρασμα εἰς τὸ ὁποῖον καταλήγει καὶ ὁ Rose (1). Οὗτος ἐκκινῶν ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὑφίσταται ἀνεπάρκεια κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ κατὰ τὴν περίοδον  $t$  καὶ ὅτι οἱ παραγωγοὶ ἐπιδιώκουν νὰ καλύψουν ταύτην μετὰ τὴν παρέλευσιν  $T$  περιόδων ἀπὸ σήμερον, δεικνύει ὅτι, καθὼς ὁ χρόνος θὰ παρέρχεται, ὁ σχηματισμὸς κεφαλαίου θὰ τείνη νὰ προσαρμωσθῆ πρὸς τὰς ἀπαιτουμένας ἀνάγκας εἰς κεφάλαιον. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ πραγματικὸς ρυθμὸς ἀνόδου  $G$  θὰ τείνη διὰ μέσου τοῦ χρόνου πρὸς τὸν ἠγγυημένον ρυθμὸν. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο βασίζεται ἐπὶ τῶν ἐξῆς ὑποθέσεων : α) ὅτι ἡ παραγωγή θὰ αὐξάνη κατὰ τὸν ἠγγυημένον ρυθμὸν ἀνόδου, καὶ β) ὅτι ἡ ἐπένδυσις *ex post* θὰ ἰσοῦται πάντοτε πρὸς τὴν ἐπένδυσιν *ex ante*. Ὑπάρχουν δύο ἐρωτήματα ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ὑποθέσεων : Πρῶτον, ποῖον ἐπίπεδον παραγωγῆς προβλέπεται νὰ αὐξάνη διὰ μέσου τοῦ χρόνου κατὰ τὸν ἠγγυημένον ρυθμὸν ἀνόδου. Δεύτερον, τὸ ἐρώτημα ἐὰν εἶναι ρεαλιστικὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ἐπένδυσις *ex post* θὰ ἰσοῦται πάντοτε πρὸς τὴν ἐπένδυσιν *ex ante*.

Τὸ γενικὸν συμπέρασμα εἰς τὸ ὁποῖον ὁδηγεῖ ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις εἶναι ὅτι ἡ σταθερότης ἢ ἡ ἀστάθεια τοῦ συστήματος Harrod ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν ὑποθέσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς τὰς προβλέψεις ἀναφορικῶς πρὸς τὴν μελ-

1) Βλ. σχ. Rose, ἐνθ. ἀνωτ., σελ. 317 κ.έ.

λονταικήν εξέλιξιν διαφόρων οικονομικῶν μεγεθῶν ὡς καὶ εἰς τὸν μηχανισμόν προσαρμογῆς εἰς περίπτωσιν διαστάσεως μεταξύ *ex post* καὶ *ex ante* ἐπενδύσεων. Οὕτω κατὰ τὴν ὑπόθεσιν Neville (πρόβλεψις ὡς πρὸς τὰς ἐπενδύσεις καὶ τὸν ρυθμὸν αὐξήσεως τοῦ εἰσοδήματος) τὸ σύστημα εἶναι ἀσταθές. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν Jorgenson (ὑπόθεσις περὶ μηχανισμοῦ ἀνισορροπίας) τὸ σύστημα εἶναι σχετικῶς σταθερὸν. Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν Rose (ὑπόθεσις ἀναφορικῶς πρὸς τὰς ἐπενδύσεις καὶ τὴν αὐξήσιν τοῦ εἰσοδήματος) τὸ σύστημα εἶναι σταθερὸν κ.ο.κ.

### 3. Τὸ νεοκλασσικὸν ὑπόδειγμα

Οἱ νεοκλασσικοὶ συγγραφεῖς Meade, Solow, Swan καὶ ἄλλοι (1) θεωροῦν τὸ κεφάλαιον ὡς κύριον παράγοντα τῆς οικονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ ἐρευνοῦν τοὺς ὅρους ὑπὸ τοὺς ὁποίους δύναται νὰ πραγματοποιηθῆ εἰς σταθερὸς ρυθμὸς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Κατὰ τοὺς ἀνωτέρω συγγραφεῖς, ἡ ἐξασφάλισις ἑνὸς ἀδιακόπου ρυθμοῦ αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου καὶ τοῦ προϊόντος ἐξαρτᾶται ἀπὸ ὠρισμένα ἐξωγενῆ στοιχεῖα. Μὲ τὴν ἔννοιαν δὲ τῶν ἐξωγενῶν στοιχείων λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ὡς παράγοντες τῆς οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως ἡ αὐξήσις τοῦ πληθυσμοῦ καὶ ἡ τεχνολογικὴ πρόοδος, ἐκ τῶν ὁποίων διαγράφονται εὐρύτερα ἢ στενότερα ὅρια εἰς τὴν εξέλιξιν τοῦ ἐκάστοτε τρέχοντος ἐνδογενοῦς δυναμικοῦ τῆς οἰκονομίας πρὸς ἀνάπτυξιν. Οἱ ἀνωτέρω συγγραφεῖς ἀντιμετωπίζουν τὴν ἀνάπτυξιν ὡς διαδικασίαν προερχομένην ἀπὸ τὴν πλευρὰν τῆς προσφορᾶς καὶ τὸ βασικὸν τῶν ἐρωτήμα ἀφορᾷ τὴν συμπεριφορὰν τῆς προσφορᾶς.

Τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν τοῦ νεοκλασσικοῦ ὑποδείματος εἶναι ἡ δυνατότης ὑποκαταστάσεως μεταξύ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν εἰς μίαν συνάρτησιν παραγωγῆς μὲ σταθερὰς ἀποδόσεις κλίμακος. Συνήθως γίνεται ἡ ὑπόθεσις ὅτι ὑπάρχουν εἰς τὴν οἰκονομίαν δύο μόνον συντελεσταὶ παραγωγῆς : κεφάλαιον καὶ ἐργασία καὶ ὅτι ἡ ἐργασία αὐξάνει κατὰ σταθερὸν ρυθμὸν, ἐξωγενῶς προσδιοριζόμενον. Τὸ κεφάλαιον συσσωρεύεται μέσῳ τῆς διαδικασίας ἀναπτύξεως διὰ τὴν ἐξασφάλισιν ἑνὸς σταθεροῦ ρυθμοῦ ἀνόδου τῆς οἰκονομίας. Ἡ ἀνάλυσις τοῦ νεοκλασσικοῦ ὑποδείματος ἀναφέρεται εἰς μίαν κατάστασιν ἀνταγωνιστικῆς οἰκονομίας μὲ πλήρη κινητικότητα τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, ἀπουσίαν οἰωνδῆποτε τριβῶν καὶ μὲ τὰς τιμὰς τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς διαμορφουμένας εἰς ἐπίπεδα ἐξασφαλίζοντα τὴν πλήρη ἀπασχόλησιν αὐτῶν.

1) J. Meade, *The Neoclassical Theory of Economic Growth*, London 1962. R. Solow, «A Contribution to the Theory of Economic Growth», εἰς *Quarterly Journal of Economics*, 1956. T.W. Swan, «Economic growth and Capital accumulation», *Economic Record*, 1956.

*α. Διατύπωση του υποδείγματος*

Το παραγόμενον προϊόν  $Y_t$  κατά την περίοδο  $t$  είναι συνάρτησις τῶν διαθέσιμων ποσοτήτων τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν κεφαλαίου  $K_t$  καὶ ἐργασίας  $L_t$ , ἥτοι :

$$Y_t = F(k_t, L_t) \quad (1)$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὁμοιογενῆς πρώτου βαθμοῦ.

Ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ ἐξ ὑποθέσεως παραμένει σταθερὸς διὰ μέσου τοῦ χρόνου. Οὕτως ἔχομεν :

$$L_t = L_0 e^{nt} \quad (2)$$

ὅπου  $L_0$  ἡ ποσότης τῆς ἐργασίας κατὰ τὴν περίοδον 0 καὶ  $n$  ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως αὐτῆς. Ἐφ' ὅσον τὸ  $n$  θεωρεῖται ὡς μία παράμετρος τοῦ υποδείγματος, τὸ παραγόμενον προϊόν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ διαθέσιμου κεφαλαίου. Τὸ κεφάλαιον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς ἐν ἱστορικὸν δεδομένον, οἰαδήποτε δὲ μεταβολὴ αὐτοῦ προκύπτει μέσῳ τῶν τρεχουσῶν ἀποταμιεύσεων.

Ἡ συνάρτησις ἀποταμιεύσεων εἶναι :

$$I = \frac{dk}{dt} = sY_t \quad (3)$$

ὅπου  $I$  = ἐπένδυσις = ἀποταμιεύσις καὶ  $s$  = ἡ μέση ροπή πρὸς ἀποταμίευσιν.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$\frac{dk}{dt} = sF(k_t, L_t) \quad (4)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν (2) εἰς τὴν (4), ἔχομεν :

$$\frac{dk}{dt} = sF(k_t, L_0 e^{nt}) \quad (5)$$

Ἡ ἐξίσωσις (5) εἶναι μία διαφορική ἐξίσωσις ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν  $k_t$  τῆς ὁποίας ἡ λύσις δίδει τὴν ἀπαιτουμένην συσσώρευσιν κεφαλαίου διὰ τὴν πλήρη ἀπασχόλησιν τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ.

Δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι ὁμοιογενῆς πρώτου βαθμοῦ, ἡ (5) δύναται νὰ γραφῆ ὡς ἀκολούθως :

$$\frac{dk}{dt} = sL_0 e^{nt} F\left(\frac{k_t}{L_0 e^{nt}}, 1\right) \quad (6)$$

$$\dot{k} = sL_0 e^{nt} F(r, 1) \quad (7)$$

$$\text{ὅπου } r = \frac{k_t}{L_0 e^{nt}} \quad (8)$$



$$\text{Εξ ἧς: } k_t = rLoe^{nt} \quad (9)$$

Διαφορίζοντες ταύτην ὡς πρὸς  $t$ , λαμβάνομεν :

$$\frac{dk}{dt} = Loe^{nt} \frac{dr}{dt} + nrLoe^{nt} \quad (10)$$

Ἐκ τῶν (7) καὶ (9) λαμβάνομεν :

$$\frac{dr}{dt} = sF(r, 1) - nr \quad (11)$$

Ἡ ἐξίσωσις (10) ἀποτελεῖ τὴν θεμελιώδη ἐξίσωσιν τοῦ ὑποδείγματος Solow. Ὁ ρυθμὸς ἰσορροπίας σταθερᾶς ἀναπτύξεως τῆς οἰκονομίας πραγματοποιεῖται ὅταν  $\frac{dr}{dt}$  ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν. Ἐὰν ὁμῶς  $\frac{dr}{dt} = 0$ , τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸν ρυθμὸν αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου. Συνεπῶς, ἡ ἐπίτευξις ρυθμοῦ ἰσορροπίας σταθερᾶς ἀνόδου τῆς οἰκονομίας προϋποθέτει ὅτι τὸ κεφάλαιον καὶ ἡ ἐργασία αὐξάνονται διὰ μέσου τοῦ χρόνου κατὰ τὸν αὐτὸν ρυθμὸν.

### β. Ἡ σταθερότης τοῦ ὑποδείγματος

Ἡ συνάρτησις  $F(r, 1)$  διδὲν τὸ προϊόν κατὰ ἐργάτην ὡς συνάρτησιν τῆς σχέσεως κεφαλαίου—ἐργασίας. Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι :

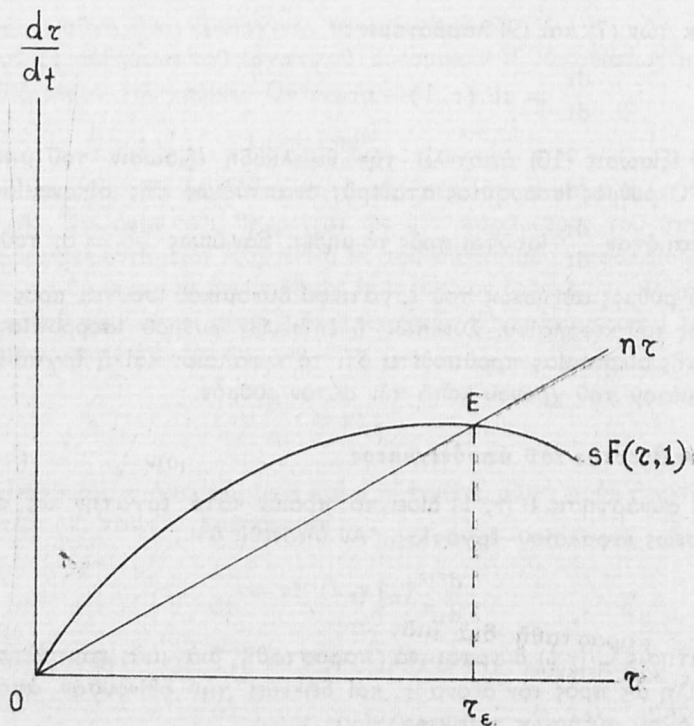
$$\frac{d^2F}{dr^2} < 0$$

ἡ συνάρτησις  $sF(r, 1)$  δύναται νὰ παρασταθῇ διὰ μιᾶς καμπύλης, ἡ ὅποια εἶναι κοίλη ὡς πρὸς τὸν ἄξονα  $r$ , καὶ δεικνύει τὴν φθίνουσαν ἀπόδοσιν τῆς δυσαναλόγου αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου.

Ἐπὶ τοῦ κατακόρυφου ἄξονος τοῦ διαγράμματος  $1$  μετροῦμεν τὴν μεταβολὴν τῆς σχέσεως κεφαλαίου—ἐργασίας ὡς πρὸς τὸν χρόνον καὶ ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου τὴν σχέσιν κεφαλαίου—ἐργασίας.

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ παριστῶσα τὴν συνάρτησιν  $nr$  διέρχεται μέσῳ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καὶ τέμνει τὴν καμπύλην  $sF(r, 1)$  εἰς τὸ σημεῖον  $E$ . Τὸ σημεῖον τοῦτο, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου ἰσοῦται πρὸς τὸν ρυθμὸν αὐξήσεως τῆς ἐργασίας, ἀποτελεῖ σημεῖον σταθεροῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως ἐν ἰσορροπίᾳ. Ὁ ρυθμὸς οὗτος ἰσορροπίας εἶναι σταθερὸς ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐὰν ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου εἶναι ὑψηλότερος ἢ χαμηλότερος τοῦ ρυθμοῦ ἰσορροπίας θὰ λειτουργήσουν δυνάμεις αἱ ὁποῖαι θὰ τείνουν νὰ ἐπαναφέρουν τὸ σύστημα πρὸς τὸ σημεῖον ἰσορροπίας  $E$ . Οὕτως, ἐὰν ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου εἶναι ὑψηλότερος τοῦ ρυθμοῦ ἰσορροπίας, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι  $r > r_e$ , ὅπου  $r_e$  ἡ σχέσις κεφαλαίου—ἐργασίας ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸν ρυθμὸν ἰσορροπίας σταθερᾶς ἀναπτύξεως, τότε  $nr > sF(r, 1)$ , καὶ συμφῶνως πρὸς τὴν (10), ἡ σχέσις κεφαλαίου—ἐργασίας τείνει νὰ μειωθῇ

προσεγγίζουσα τήν τιμήν ἰσορροπίας  $r_e$ . Ἀντιθέτως, ἐάν  $r_e < r$ , τότε  $\pi r < sF(r, 1)$  καί ἡ σχέσις κεφαλαίου—ἐργασίας θά αὐξηθῆ τείνουσα πρὸς τήν τιμήν ἰσορροπίας. Ἡ προσέγγισις αὕτη τῆς σχέσεως κεφαλαίου—ἐργασίας πρὸς τήν τιμήν ἰσορροπίας πραγματοποιεῖται μέσῳ μεταβολῶν τῶν σχετικῶν τιμῶν τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς κεφαλαίου καὶ ἐργασίας (1).



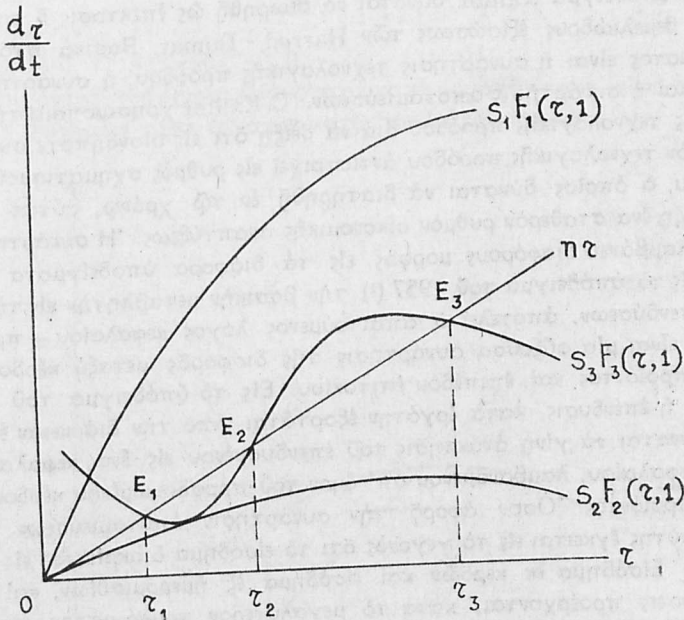
Διάγραμμα 1

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι ἡ σταθερότης τήν ὁποίαν δεικνύει τὸ νεοκλασσικὸν ὑπόδειγμα εἶναι συνέπεια τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης τῆς παριστώσης τῆς συνάρτησις παραγωγῆς. Εἶναι δυνατὸν ὁμως νά ὑπάρξουν συναρτήσεις παραγωγῆς τοιαύτης μορφῆς, ὥστε ἀναλόγως τῆς θέσεως τῆς συναρτήσεως  $\pi r$

1) Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις παραγωγῆς εἶναι ὁμοιογενὴς πρώτου βαθμοῦ, τὸ ὄριακὸν προϊόν ἐκάστου παραγωγικοῦ συντελεστοῦ εἶναι συνάρτησις μηδενικοῦ βαθμοῦ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ὄριακὸν προϊόν ἐκάστου συντελεστοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἀναλογίας καθ' ἃς χρησιμοποιοῦνται οἱ συντελεσταὶ παραγωγῆς εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν. Ἐὰν ὑποθεθῆ ὅτι οἱ παραγωγικοὶ συντελεσταὶ κεφάλαιον καὶ ἐργασία αὐξάνονται μὲ τὸν αὐτὸν ρυθμὸν, αἱ τιμαὶ τῶν ἐν λόγῳ συντελεστῶν, ἐξισοῦμεναι πρὸς τὰ ὄριακά προϊόντα αὐτῶν, θά παραμένουν σταθεραί. Ἐὰν ὁμως ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ κεφαλαίου εἶναι ὑψηλότερος ἐκείνου τῆς ἐργασίας, τὸ ὄριακὸν προϊόν τοῦ κεφαλαίου καὶ συνεπῶς καὶ ἡ τιμὴ τοῦ κεφαλαίου πρέπει νά μειωθῆ, ἐνῶ τὸ ὄριακὸν προϊόν τῆς ἐργασίας πρέπει νά αὐξηθῆ.

να μη ύφίσταται σημείον ἰσορροπίας ἢ ἡ ἰσορροπία νὰ εἶναι ἀσταθής.

Οὕτως, ἐὰν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς λαμβάνη τὰς μορφὰς 1 καὶ 2, διάγραμμα 2, τότε εἶναι προφανές ὅτι δὲν ύφίσταται ἰσορροπία σταθερᾶς ἀναπτύξεως.



Διάγραμμα 2

Ἡ συνάρτησις παραγωγῆς τῆς μορφῆς 1 ὑποδηλοῖ μιαν τοιαύτην αὐξῆσιν τῆς παραγωγικότητος καὶ τοῦ κεφαλαίου, ὥστε ἡ προσφορά ἐργασίας οὐδέποτε δύναται νὰ ἱκανοποιήσῃ τὴν ζήτησιν ἐργασίας, με συνέπειαν τὴν συνεχῆ αὐξῆσιν τοῦ ἐργατικοῦ μισθοῦ. Τὰ ἀντίθετα θὰ λάβουν χώραν εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς λαμβάνει τὴν μορφήν 2. Δηλαδή τὸ προϊόν καὶ τὸ κεφάλαιον θὰ αὐξάνουν με βραδύν ρυθμόν, ἐνῶ ἡ προσφορά ἐργασίας θὰ αὐξάνῃ τόσον ταχέως, οὕτως ὥστε θὰ προκαληθῆται συνεχῆς κάμψις τοῦ ἐργατικοῦ μισθοῦ (').

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς λαμβάνει τὴν μορφήν 3, ἔχομεν τρία σημεία ἰσορροπίας, τὰ  $E_1$ ,  $E_2$  καὶ  $E_3$ . Οἱ ρυθμοὶ ἀναπτύξεως εἰς τὰ σημεία  $E_1$  καὶ  $E_3$  εἶναι σταθεροὶ καὶ διαφέρουν μόνον ὡς πρὸς τὴν τιμὴν ἰσορροπίας τῆς σχέσεως κεφαλαίου-ἐργασίας. Ὁ ρυθμὸς ἀνόδου, ἐξ ἄλλου, εἰς τὸ σημείον  $E_2$  εἶναι ἀσταθής, διότι ἐὰν ἡ οἰκονομία κινήθῃ πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ τὰ

1) T. Iwand, «Models of Capital Accumulation, and Instability», εἰς Review of Economics and Statistics, 1961, σελ. 58.

άριστερά του  $E_2$ , το σύστημα θα τείνη να απομακρυνθῆ περαιτέρω από το σημείον Ισοροπίας.

#### 4. Τὸ ὑπόδειγμα Kaldor

Τὸ ὑπόδειγμα Kaldor δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς ἐπέκτασις ἢ τροποποίησις τῆς θεμελιώδους ἐξισώσεως τῶν Harrod - Domar. Βασικὰ στοιχεῖα τοῦ ὑποδείγματος εἶναι ἡ συνάρτησις τεχνολογικῆς προόδου, ἡ συνάρτησις ἐπενδύσεων καὶ ἡ συνάρτησις ἀποταμιεύσεων. Ὁ Kaldor χρησιμοποιεῖ τὴν συνάρτησιν τῆς τεχνολογικῆς προόδου διὰ νὰ δείξη ὅτι εἰς οἰονδήποτε συγκεκριμένον ρυθμὸν τεχνολογικῆς προόδου ἀντιστοιχεῖ εἰς ρυθμὸς σχηματισμοῦ παγίου κεφαλαίου, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ διατηρηθῆ ἐν τῷ χρόνῳ, οὕτως ὥστε νὰ ἐξασφαλίζη ἕνα σταθερὸν ρυθμὸν οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως. Ἡ συνάρτησις ἐπενδύσεων λαμβάνει διαφόρους μορφάς εἰς τὰ διάφορα ὑποδείγματα Kaldor. Οὕτως, εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ 1957 (1) τὴν βασικὴν μεταβλητὴν εἰς τὴν συνάρτησιν ἐπενδύσεων ἀποτελεῖ ὁ ἀπαιτούμενος λόγος κεφαλαίου - προϊόντος, ὁ ὁποῖος εἶναι μία αὐξουσα συνάρτησις τῆς διαφορᾶς μεταξὺ κέρδους κατὰ μονάδα προϊόντος καὶ ἐπιπέδου ἐπιτοκίου. Εἰς τὸ ὑπόδειγμα τοῦ 1962 (2) ἔξ ἄλλου, ἡ ἐπένδυσις κατὰ ἐργάτην ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διάρκειαν ἐντὸς τῆς ὁποίας δύναται νὰ γίνῃ ἀνάκτησις τοῦ ἐπενδυομένου εἰς ἕνα κεφαλαιουχικὸν ἀγαθὸν κεφαλαίου, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ προσδοκωμένου κέρδους κατὰ μονάδα προϊόντος. Ὅσον ἀφορᾷ τὴν συνάρτησιν ἀποταμιεύσεων ἡ ἰδιομορφία ταύτης ἔγκειται εἰς τὸ γεγονός ὅτι τὸ εἰσόδημα διακρίνεται εἰς δύο κατηγορίας: Εἰσόδημα ἐκ κερδῶν καὶ εἰσόδημα ἐξ ἡμερομισθίων, καὶ ὅτι αἱ ἀποταμιεύσεις προέρχονται, κατὰ τὸ μεγαλύτερον τουλάχιστον ποσοστὸν, ἐκ κερδῶν.

Χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τοῦ ὑποδείγματος Kaldor εἶναι ὅτι μόνον ὑπὸ συνθήκας πλήρους ἀπασχολήσεως κατὰ τὴν Κεῦνσιανὴν ἔννοιαν, καθ' ἣν ἡ αὐξήσις τοῦ προϊόντος περιορίζεται ἀπὸ τὴν ἀνεπάρκειαν ὄχι τῆς ἐνεργοῦ ζητήσεως ἀλλὰ τῶν διαθέσιμων ποσοτήτων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίτευξις δυναμικῆς ἰσοροπίας.

Κατωτέρω θὰ ἐπιχειρήσωμεν τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ὑποδείγματος τοῦ 1962 (Kaldor - Mirrless), ἐν συνεχείᾳ δὲ θὰ διερευνήσωμεν τὴν σταθερότητα τοῦ ὑποδείγματος εἰς τὴν κατάστασιν τῆς σταθερᾶς ἀνόδου ἐν ἰσοροπίᾳ.

##### α. Βασικαὶ σχέσεις καὶ ἐξισώσεις

Καινοτομία τοῦ ὑποδείγματος Kaldor, ἐναντι τῶν ὑποδειγμάτων ἀναπτύξεως ἄλλων συγγραφέων, εἶναι ἡ συνάρτησις τῆς τεχνολογικῆς προόδου

1) H. Kaldor, «A Model of Economic Growth», εἰς *Economic Journal*. σελ. 591 - 624.

2) N. Kaldor καὶ J. A. Mirrless, «A New Model of Economic Growth», εἰς *Review of Economic Studies*, Ἰούνιος 1962, σελ. 174 - 192.

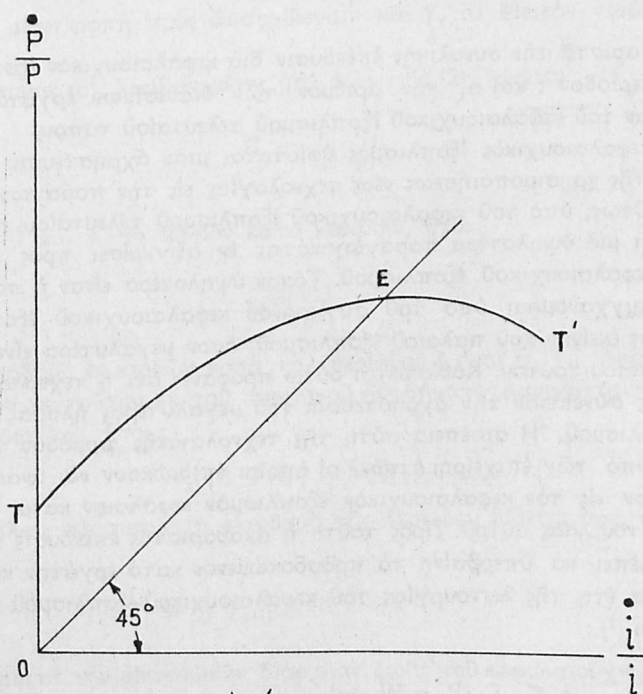


δι' ἧς παρίσταται ἡ ἐπίδρασις τοῦ ρυθμοῦ αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων κατὰ ἐργάτην ἐπὶ τοῦ ρυθμοῦ αὐξήσεως τῆς κατὰ κεφαλὴν παραγωγικότητος. Ἡ συνάρτησις αὕτη ἔχει ὡς ἀκολούθως :

$$\frac{dP_t}{dt} \cdot \frac{1}{P_t} = f \left( \frac{di_t}{dt} \cdot \frac{1}{i_t} \right) \quad (1)$$

ὅπου  $f(0) > 0$ ,  $f' > 0$  καὶ  $f'' < 0$

ὅπου  $P_t$  παριστᾷ τὴν παραγωγικότητα κατὰ ἐργάτην κατὰ τὴν περίοδον  $t$  καὶ  $i_t$  τὴν ἐπένδυσις κατὰ ἐργάτην κατὰ τὴν αὐτὴν περίοδον.



Διάγραμμα 3

Εἰς τὸ ἀνωτέρω διάγραμμα ἡ καμπύλη  $TT'$  παριστᾷ τὴν συνάρτησις τῆς τεχνολογικῆς προόδου. Ἡ θέσις τῆς ἐν λόγω καμπύλης ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ δυναμικοῦ τῆς κοινωνίας πρὸς συνεχῆ ἐπινόησιν καὶ ἐφαρμογὴν νέας τεχνολογίας εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν. Ἡ κυρτότης, ἐξ ἄλλου, τῆς ἀνωτέρω καμπύλης ἐκφράζει τὸ γεγονός ὅτι ἡ αὐξήσις τῆς συσσωρεύσεως τοῦ κεφαλαίου πέραν ἑνὸς ὀρισμένου σημείου (E) συνοδεύεται μὲ μικροτέραν αὐξήσιν τοῦ προϊόντος. Τὸ σημεῖον τοῦτο, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος κατὰ ἐργάτην ἰσοῦται πρὸς τὸν ρυθμὸν αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων κατὰ ἐργάτην, ἀποτελεῖ σημεῖον σταθερῆς ἀναπτύξεως ἐν ἰσορροπία.

Ἡ τεχνολογική πρόοδος, ἡ ὁποία ἐκφράζεται διὰ τοῦ ρυθμοῦ αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος κατὰ ἐργάτην, ὑποτίθεται ὅτι κατανέμεται ἐξ ἴσου μεταξὺ τῶν διαφόρων τομέων τῆς οἰκονομίας. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη εἶναι ἀναγκαία ἵνα αἱ τιμαὶ τῶν κεφαλαιουχικῶν ἀγαθῶν διατηροῦνται σταθεραὶ ἐν σχέσει πρὸς τὰς τιμὰς τῶν ἀγαθῶν ἐργατικῆς καταταλώσεως (wage goods). Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὸ ὑπόδειγμα Kaldor - Mirrless τόσον τὸ προϊόν ὅσον καὶ ἡ ἐπένδυσις ἐκφράζονται εἰς τιμὰς τῶν ἀγαθῶν ἐργατικῆς καταναλώσεως.

Ἡ ἀκαθάριστος ἐπένδυσις κατὰ ἐργάτην κατὰ τὴν περίοδον  $t$  προσδιορίζεται ὡς ἀκολούθως :

$$i_t = \frac{I_t}{n_t} \quad (2)$$

ὅπου  $I_t$  παριστᾷ τὴν συνολικὴν ἐπένδυσιν διὰ κεφαλαιουχικὸν ἐξοπλισμὸν κατὰ τὴν περίοδον  $t$  καὶ  $n_t$  τὸν ἀριθμὸν τῶν διαθέσιμων ἐργατῶν διὰ τὴν λειτουργίαν τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τελευταίου τύπου.

Ὁ κεφαλαιουχικὸς ἐξοπλισμὸς ὑφίσταται μιὰν ἀχρήστευσιν ἐν τῷ χρόνῳ λόγῳ τῆς χρησιμοποίησεως νέας τεχνολογίας εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν. Οὕτως, ὑπὸ τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τελευταίου τύπου ἐπιτυγχάνεται μιὰ ὑψηλότερα παραγωγικότης ἐν συγκρίσει πρὸς ἐκείνην τοῦ παλαιοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ. Τόσον ὑψηλότερα εἶναι ἡ παραγωγικότης ἢ ἐπιτυγχανομένη ὑπὸ τοῦ συγχρόνου κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ ἐν σχέσει πρὸς ἐκείνην τοῦ παλαιοῦ ἐξοπλισμοῦ, ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ τελευταίου τούτου. Καθίσταται οὕτω προφανές ὅτι ἡ τεχνολογική πρόοδος ἔχει ὡς συνέπειαν τὴν ἀχρήστευσιν τοῦ μεγαλυτέρας ἡλικίας κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ. Ἡ συνέπεια αὕτη τῆς τεχνολογικῆς προόδου λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὑπὸ τῶν ἐπιχειρηματιῶν, οἱ ὅποιοι ἐπιδιώκουν νὰ ἀνακτήσουν τὸ ἐπενδυόμενον εἰς τὸν κεφαλαιουχικὸν ἐξοπλισμὸν κεφάλαιον κατὰ τὰ πρῶτα ἔτη τῆς λειτουργίας αὐτοῦ. Πρὸς τοῦτο ἡ ἀκαθάριστος ἐπένδυσις κατὰ ἐργάτην δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνει τὸ προσδοκώμενον κατὰ ἐργάτην κέρδος κατὰ τὰ  $h$  πρῶτα ἔτη τῆς λειτουργίας τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τελευταίου τύπου, ἥτοι (1) :

$$i_t \leq \int_t^{t+h} (P_t - W_t) dt \quad (3)$$

ὅπου  $W_t$  παριστᾷ τὸν προβλεπόμενον ἐργατικὸν μισθόν.

Οἱ Kaldor καὶ Mirrless ὑποθέτουν ὅτι ὁ ἐργατικὸς μισθὸς κατὰ τὴν μελλοντικὴν περίοδον  $T$  θὰ αὐξάνη κατὰ τὸν ρυθμὸν καθ' ὃν ηὔξανετο οὗτος κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν  $k$  τελευταίων περιόδων, ἥτοι :

$$\bar{W}_T = W_t \left( \frac{W_t}{W_{t-k}} \right)^{\frac{T-t}{k}} \quad (4)$$

Εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας τὸ κέρδος τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῶν παλαιῶν

1) Kaldor καὶ Mirrless, ἐνθ. ἀνωτ., σελ. 178.

κεφαλαιουχικών αγαθών τα όποια εύρισκονται εισέτι έν ζωή, ίσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, ἦτοι :

$$P_{t-T} = W_t \quad (5)$$

Ἄν ὑποτεθῆ ὅτι αἱ ἀποταμίεύσεις, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν χρηματοδότησιν τοῦ σχηματισμοῦ κεφαλαίου, προέρχονται ἀποκλειστικῶς ἐκ κερδῶν καὶ παρασταθῆ τὸ ποσοστὸν συμμετοχῆς τῶν τελευταίων εἰς τὸ σύνολον τοῦ ἔθνικοῦ εισοδήματος διὰ  $\Pi_t$ , θὰ ἔχωμεν :

$$\Pi_t = \frac{1}{s} \frac{I_t}{Y_t} \quad (6)$$

ὅπου  $s$  = ἡ μέση ροπή πρὸς ἀποταμίευσιν καὶ  $Y_t$  τὸ ἔθνικὸν εἰσόδημα τῆς περιόδου  $t$ .

Ἡ ἐξίσωσις (6), λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς (2), γίνεται :

$$\Pi_t = \frac{r}{s} \frac{i_t}{y_t} \quad (6\alpha)$$

ὅπου  $r = \frac{n_t}{N_t}$  καὶ  $y_t$  τὸ προϊόν κατὰ κεφαλὴν, ἦτοι :

$$y_t = \frac{Y_t}{N_t}$$

Τὸ εἰσόδημα ἐκ κερδῶν κατὰ τὴν περίοδον  $t$  εἶναι  $\Pi_t Y_t$ . Ἀφαιρουμένον τοῦ εἰσοδήματος τούτου ἐκ τοῦ συνολικοῦ εἰσοδήματος λαμβάνεται τὸ εἰσόδημα ἐξ ἡμερομισθίων, ἦτοι :

$$Y_t (1 - \Pi_t) = N_t W_t \quad (7)$$

Ἐξ ἄλλου, τὸ συνολικὸν εἰσόδημα τῆς περιόδου δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσεως :

$$Y_t = \int_{t-T}^t P_t n_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau \quad (8)$$

ὅπου  $T$  παριστᾷ τὴν οικονομικὴν διάρκειαν ζωῆς τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ καὶ  $\delta$  τὸν ρυθμὸν ἀποσβέσεως αὐτοῦ.

Τὸ σύνολον τοῦ ἐργατικοῦ δυναμικοῦ  $N$ , τοῦ ἀπασχολουμένου εἰς τὴν οικονομίαν κατὰ τὴν περίοδον  $t$ , προσδιορίζεται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσεως :

$$N_t = \int_{t-T}^t n e_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau \quad (9)$$

Ὅσον ἀφορᾷ τὸν πληθυσμὸν οἱ Kaldor καὶ Mirrless ὑποθέτουν ὅτι οὗτος αὐξάνει κατὰ ἓνα σταθερὸν ποσοστὸν ἐτησίως, προσδιοριζόμενον ἐξωγενῶς, ἦτοι :

$$\frac{dN_t}{dt} = \lambda N_t \quad (10)$$

Τὸ ὑπόδειγμα τῶν Kaldor καὶ Mirrless ὑπόκειται εἰς τοὺς ἑξῆς περιορισμούς :

$$W_t \geq W_{\min} \quad (11)$$

$$\Pi_t \geq m \quad (12)$$

Ἡ ἀνισότης (11) δηλοῖ ὅτι ὁ ἐργατικὸς μισθὸς κατὰ τὸν χρόνον  $t$  πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἢ τουλάχιστον ἴσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον μισθὸν συντηρήσεως. Ἡ ἀνισότης (12) ἐξ ἄλλου σημαίνει ὅτι τὸ ποσοστὸν συμμετοχῆς τῶν κερδῶν εἰς τὸ ἐθνικὸν εἰσόδημα δὲν πρέπει νὰ εἶναι μικρότερον ὠρισμένου ἐλαχίστου ποσοστοῦ. Τὸ ἐλάχιστον τοῦτο ποσοστὸν, κατὰ τὴν ἀποψιν τοῦ Kaldor, δεικνύει τὸν βαθμὸν μονοπωλίου (degree of monopoly) (1).

### β. Περὶ τῆς σταθερότητος τοῦ ὑποδείγματος

Τὸ σύστημα Kaldor καὶ Mirrless ἀποτελεῖται ἐκ δέκα μεταβλητῶν ( $i_t, I_t, n_t, P_t, W_t, \bar{W}, \Pi_t, y_t, N_t, T$ ) καὶ δέκα ἐξισώσεων : (1), (2), (3), (4), (5), (6α), (7), (8), (9) καὶ (10) καὶ κατὰ συνέπειαν δύναται νὰ προσδιορισθῆ ἡ λύσις αὐτοῦ. Τὸ ἐρώτημα τὸ ὁποῖον τίθεται ἐν προκειμένῳ εἶναι ἐὰν ὑφίσταται εἰς σταθερὸς ρυθμὸς ἀναπτύξεως ἐν ἰσορροπία, δηλαδή μία κατάσταση ἰσορροπίας ὅπου τὸ κατὰ κεφαλὴν προϊόν, ἡ παραγωγικότης κατὰ ἐργάτην τοῦ κεφαλαιουχικοῦ ἐξοπλισμοῦ τελευταίου τύπου, ἡ ἀκαθάριστος ἐπένδυσις κατὰ ἐργάτην καὶ ὁ ἐργατικὸς μισθὸς αὐξάνονται διὰ μέσου τοῦ χρόνου κατὰ τὸν αὐτὸν ρυθμὸν.

Ἐκ τοῦ διαγράμματος 1 προκύπτει ὅτι ἡ ἰσορροπία ἐπιτυγχάνεται εἰς τὸ σημεῖον  $E$ , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ καμπύλη  $TT$ , ἡ παριστῶσα τὴν τεχνολογικὴν πρόοδον τέμνει τὴν διχοτόμον τῶν  $45^\circ$ . Τὸ σημεῖον τοῦτο ἀποτελεῖ σημεῖον ἰσορροπίας μίᾳ σταθερᾷ ἀναπτύξεως, ὅπου ἡ παραγωγικότης κατὰ ἐργάτην καὶ ἡ ἐπένδυσις κατὰ ἐργάτην αὐξάνουν κατὰ τὸν αὐτὸν ρυθμὸν. Ἐὰν ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος εἶναι χαμηλότερος τοῦ ρυθμοῦ ἰσορροπίας σταθερᾷ ἀνόδου, θὰ πραγματοποιηθῆ εἰς ρυθμὸς αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων κατὰ ἐργάτην, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ ἀποδίδῃ ἕνα ὑψηλότερον ρυθμὸν αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος. Ἀντιθέτως, ἐὰν ὁ ρυθμὸς αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος εἶναι ὑψηλότερος τοῦ ρυθμοῦ ἰσορροπίας, θὰ λάβουν χώραν τὰ ἀντίθετα. Δηλαδή θὰ πραγματοποιηθῆ εἰς ρυθμὸς αὐξήσεως τῶν ἐπενδύσεων, εἰς τὸν ὁποῖον θὰ ἀντιστοιχῆ εἰς μικρότερος ρυθμὸς αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος, ἡ διαδικασία δὲ αὕτη θὰ συνεχισθῆ μέχρις ὅτου ἐπιτευχθῆ σύμπτωση τοῦ ρυθμοῦ αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος καὶ τοῦ ρυθμοῦ ἰσορροπίας.

Οὕτως, ἡ σταθερότης τοῦ ὑποδείγματος Kaldor ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως καὶ τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης τῆς τεχνολογικῆς προόδου. Ἡ θέσις τῆς ἐν

1) Βλ. σχ. N. Kaldor, «Capital accumulation and Economic Growth», εἰς the Theory of Capital, Proceedings of International Economic Association Conference, Edited by F.A. Lutz and D.C. Hague, London, 1961, σελ. 201.



λόγω καμπύλης, ως ήδη ἐλέχθη, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς προθυμίας τῆς κοινωνίας διὰ τὴν βελτίωσιν τῶν τεχνικῶν μεθόδων παραγωγῆς. Οὐσιώδης δὲ παράγων ἐπηρεάζων τὴν προθυμίαν τῶν ἐπιχειρηματιῶν διὰ τὴν ἐφεύρεσιν καὶ ἐφαρμογὴν νέας τεχνολογίας εἰς τὴν παραγωγικὴν διαδικασίαν καὶ συνεπῶς καὶ τὴν θέσιν τῆς καμπύλης τῆς τεχνολογικῆς προόδου εἶναι τὸ προσδοκώμενον κέρδος κατὰ μονάδα προϊόντος. Τὸ κέρδος τοῦτο εἶναι συνάρτησις τῶν προβλέψεων ὡς πρὸς τὴν μελλοντικὴν ἐξέλιξιν τῆς παραγωγικότητος καὶ τοῦ ἐργατικοῦ μισθοῦ. Ἐὰν ὁ προβλεπόμενος ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ ἐργατικοῦ μισθοῦ εἶναι ὑψηλότερος ἐκείνου τῆς παραγωγικότητος, οἱ ἐπιχειρηματίαι θὰ πρέπει νὰ μειώσουν σημαντικῶς τὰς ἐπενδύσεις εἰς ὠρισμένον μελλοντικὸν χρονικὸν σημεῖον διὰ νὰ ἀποφύγουν τὴν πραγματοποίησιν ζημιῶν. Τοῦτο ὁμως θὰ ἐξηγῶς συνέπειαν τὴν μετατόπισιν πρὸς τὰ κάτω τῆς καμπύλης τῆς τεχνολογικῆς προόδου, μὲ περαιτέρω πιθανὴν συνέπειαν τὴν ἐπίτευξιν ἀσταθοῦς ἰσορροπίας. Ἀντιθέτως, ἐὰν ὁ προβλεπόμενος ρυθμὸς αὐξήσεως τοῦ ἐργατικοῦ μισθοῦ εἶναι μικρότερος ἐν συγκρίσει πρὸς τὸν ρυθμὸν αὐξήσεως τῆς παραγωγικότητος, τὸ σύστημα ὀδηγεῖ πρὸς τὴν μὴ ἀποδεκτὴν λύσιν, ἐν σχέσει πρὸς τὴν (11), καθ' ἣν τὸ ποσοστὸν συμμετοχῆς τῶν κερδῶν εἰς τὸ σύνολον τοῦ ἔθνικοῦ εἰσοδήματος τείνει πρὸς τὴν μονάδα.

## 5. Τὸ δυναμικὸν σύστημα Leontief

Διὰ τοῦ στατικοῦ συστήματος Leontief <sup>(1)</sup> προσδιορίζονται τὰ ἐπίπεδα παραγωγῆς τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων, τὰ ὅποια εἶναι ἀναγκαῖα διὰ τὴν ἱκανοποίησιν δοθείσης τελικῆς ζήτησεως, ἀλλὰ δὲν εἶναι δυνατὴ ἢ παρακολούθησις τοῦ σχηματισμοῦ κεφαλαίου. Τὸ πρόβλημα τοῦ σχηματισμοῦ κεφαλαίου, τὸ ὅποιον ἀποτελεῖ κατ' οὐσίαν πρόβλημα οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως, πρέπει νὰ ἀντιμετωπίζεται δυναμικῶς διὰ τῆς παρακολούθησεως τῆς διαχρονικῆς μεταβολῆς τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν παραγωγικῶν κλάδων. Τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ διὰ τοῦ δυναμικοῦ συστήματος Leontief.

Ἡ θεμελιώδης ἐξίσωσις τοῦ συστήματος Leontief ἔχει ὡς ἀκόλουθως :

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{dX_j}{dt} + Y_i(t) \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

ὅπου  $X_i(t)$  παριστᾷ τὸ συνολικὸν προϊόν τοῦ παραγωγικοῦ κλάδου  $i$  κατὰ τὸν χρόνον  $t$ ,  $\alpha_{ij}$  τὸν συντελεστὴν εἰσορῆς καὶ δεικνύει τὴν ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ  $i$  τὴν ἀπαιτουμένην διὰ τὴν παραγωγήν μιᾶς μονάδος προϊόντος τοῦ κλάδου  $j$ ,  $b_{ij}$  τὸν συντελεστὴν κεφαλαίου καὶ δεικνύει τὴν ποσότητα προϊόντος τοῦ κλάδου  $i$ , τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ ὡς ὑλικὸν κεφάλαιον ὁ κλάδος  $j$  διὰ τὴν

1) W. Leontief, *Studies in the Structure of the American Economy*, N. York, 1953.

αύξησιν τῆς παραγωγῆς τοῦ τελευταίου κατὰ μίαν μονάδα καὶ  $Y_i(t)$  τὴν ποσότητα τοῦ προϊόντος τοῦ κλάδου  $i$  τὴν ἀπορροφουμένην ὑπὸ τῆς τελικῆς ζητήσεως.

Τὸ σύστημα ἐξισώσεων (1) δεικνύει ὅτι τὸ συνολικὸν προϊόν ἐκάστου παραγωγικοῦ κλάδου κατανέμεται μεταξὺ τῶν λοιπῶν κλάδων (διὰ τὰ χρησιμοποιηθῆ εἰς τὴν τρέχουσαν παραγωγὴν καὶ τὸν σχηματισμὸν κεφαλαίου) καὶ τῆς τελικῆς ζητήσεως.

Ἡ βασικὴ ὑπόθεσις τοῦ συστήματος εἶναι ὑπόθεσις ὅτι οἱ συντελεσταὶ εἰσορῆς  $a_{ij}$  καὶ οἱ συντελεσταὶ κεφαλαίου  $b_{ij}$  παραμένουν σταθεροὶ ἀνεξαρτήτως χρόνου καὶ ἐπιπέδου παραγωγῆς. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς ὑπόθεσις τῶν σταθερῶν ἀναλογιῶν. Ἐτέρα βασικὴ ὑπόθεσις τοῦ συστήματος εἶναι ὅτι ἕκαστος κλάδος παράγει ἓν μόνον προϊόν καὶ καθ' ὠρισμένην μέθodon παραγωγῆς. Ἐξ ἄλλου, διὰ τὴν ὑπαρξίν οικονομικῆς λύσεως τοῦ συστήματος Leontief οἱ τεχνολογικοὶ συντελεσταὶ  $a_{ij}$  πρέπει νὰ πληροῦν τὴν συνθήκην τῶν Hawkins καὶ Simon (<sup>1</sup>). Ἡ οικονομικὴ ἔννοια τῆς συνθήκης ταύτης συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ἡ συνολικὴ ποσότης προϊόντος τοῦ κλάδου  $i$  ἢ ὁποία χρησιμοποιεῖται ἀμέσως καὶ ἐμμέσως πρὸς παραγωγὴν μιᾶς μονάδος προϊόντος τοῦ ἀγαθοῦ  $i$  πρέπει νὰ εἶναι μικρότερα τῆς μονάδος.

Ὑπὸ μορφήν μήτρας ἡ (1) γράφεται :

$$X(t) = AX(t) + BX(t) + Y(t) \quad (2)$$

ὅπου  $X(t)$  τὸ διάνυσμα τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν  $n$  κλάδων τῆς οἰκονομίας,  $Y(t)$  τὸ διάνυσμα τῆς τελικῆς ζητήσεως,  $A$  ἡ τεχνολογικὴ μήτρα καὶ  $B$  ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν κεφαλαίου.

Δεδομένου τοῦ διανύσματος τῆς τελικῆς ζητήσεως, ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (2) εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῆ ἡ διαχρονικὴ συμπεριφορὰ (time path) τῶν ἐπιπέδων παραγωγῆς τῶν διαφόρων παραγωγικῶν κλάδων, ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν βεβαίως ὅτι κατὰ τὴν λύσιν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν αἱ ἀρχικαὶ συνθήκαι (initial conditions). Ἐπὶ πλέον δύνανται νὰ καθορισθοῦν αἱ εἰσοραὶ τρεχούσης παραγωγῆς καὶ αἱ ἀνάγκαι ὑλικοῦ κεφαλαίου διαφόρων τύπων ἐκάστου κλάδου.

### *Ἡ σταθερότης τοῦ συστήματος*

Ἄναφορικῶς πρὸς τὴν σταθερότητα τοῦ δυναμικοῦ συστήματος Leontief, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

Πρῶτον, τὴν περίπτωσιν τῆς σχετικῆς σταθερότητος, ἢ ὁποία συμπίπτει κατ' οὐσίαν πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς σταθερότητος κατὰ Harrod. Οὕτως, ἐὰν λάβωμεν τὸ κλειστὸν σύστημα Leontief, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ τελικὴ ζήτησις ἰσοῦται πρὸς τὸ μηδέν, καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι παράγεται ἓν

<sup>1</sup> D. Hawkins and H.A. Simon, «Some conditions of macroeconomic stability», εἰς *Econometrica*, Ὀκτώβριος, 1949.

μόνον αγαθόν εις την οικονομίαν, λαμβάνομεν την θεμελιώδη εξίσωσιν τών Harrod - Domar. Εις τὸ τροποποιημένον τοῦτο σύστημα Leontief ἢ μήτρα τών συντελεστῶν εισροῆς A ἀντιστοιχεί πρὸς τὴν ὀριακὴν ροπήν πρὸς κατανάλωσιν, ἐνῶ ἡ μήτρα τών κεφαλαιακῶν συντελεστῶν B πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ ἐπιταχυντοῦ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ δυναμικὸν σύστημα Leontief δεικνύει τὴν αὐτὴν ἀστάθειαν ὡς καὶ τὸ ὑπόδειγμα Harrod.

Δεύτερον, τὴν περίπτωσιν τῆς σταθερότητος κατὰ Sargan (1). Ὁ ἐν λόγῳ συγγραφεὺς διατυπώνει τὴν παρατήρησιν ὅτι τὸ δυναμικὸν σύστημα ἰσορροπίας τοῦ Leontief δὲν δύναται νὰ ἐρμηνεύσῃ τὴν πορείαν τῆς οἰκονομίας διὰ μέσου τοῦ χρόνου. Τὸ σύστημα τοῦτο τότε μόνον θὰ ἠδύνατο νὰ θεωρηθῆ ὅτι ἀποτελεῖ μίαν προσέγγισιν πρὸς τὴν πραγματικότητα: α) ἐὰν διατυπωθῆ ἕν νέον σύστημα ἀνισορροπίας διὰ τῆς εισαγωγῆς καταλλήλων χρονικῶν ὑπερῆσεων εἰς τὸ σύστημα ἰσορροπίας τοῦ Leontief καὶ β) ἐὰν ἡ πορεία τών μεταβλητῶν διὰ μέσου τοῦ χρόνου τοῦ νέου τούτου συστήματος ἀνισορροπίας προσεγγίξῃ πρὸς τὴν ἠγγυημένην πορείαν ἰσορροπίας (the warranted path). Ὁ Sargan χρησιμοποιοῖ τὴν ὑπόθεσιν περὶ μηχανισμοῦ ἀνισορροπίας εἰς περίπτωσιν ἀσυμφωνίας μεταξὺ προσφορᾶς καὶ ζητήσεως καὶ δεικνύει ὅτι: 1) εἴτε ἡ συμπεριφορὰ τοῦ συστήματος ἀνισορροπίας εἶναι τελείως διάφορος ἐκείνης τοῦ συστήματος ἰσορροπίας τοῦ Leontief, 2) εἴτε ἡ πορεία τών μεταβλητῶν διὰ μέσου τοῦ χρόνου τοῦ συστήματος ἀνισορροπίας τείνει νὰ ἀπομακρύνεται διαρκῶς καὶ περισσότερο ἀπὸ τὴν ἠγγυημένην πορείαν. Καὶ καταλήγει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ δυναμικὸν σύστημα Leontief εἶναι ἀσταθές (2).

Τρίτον, τὴν περίπτωσιν τῆς δυαδικῆς σταθερότητος τοῦ συστήματος Leontief. Ἡ ἔννοια τῆς δυαδικῆς σταθερότητος, ἡ ὁποία ἐξητάσθη ὑπὸ τοῦ Jorgenson (3), ἀφορᾷ εἰς τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ συστήματος ποσοτήτων καὶ τοῦ συστήματος τιμῶν τοῦ Leontief. Ὁ Jorgenson δεικνύει ὅτι ἐὰν τὸ δυναμικὸν σύστημα ποσοτήτων τοῦ Leontief εἶναι σταθερόν, τὸ σύστημα τιμῶν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἐν λόγῳ σύστημα ποσοτήτων εἶναι σχετικῶς ἀσταθές καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο δὲν ἰσχύει εἰς περίπτωσιν καθ' ἕν ὁ ἀριθμὸς τών παραγωγικῶν κλάδων εἶναι περιττός καὶ ὅλαι αἱ ρίζαι τών εξισώσεων τοῦ συστήματος, πλὴν ἐκείνης ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν λύσιν τῆς σταθερᾶς ἀναπτύξεως, εἶναι μικταί, ἡ ἀριθμητικὴ δὲ τιμὴ τοῦ πραγματικοῦ μέρους ἐκάστης μικτῆς ρίζης εἶναι μικροτέρα τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τῆς πραγματικῆς ρίζης (4).

1) J. D. Sargan, «The instability of the Leontief dynamic Model», εἰς *Econometrica*, Ἰούλιος 1958, σελ. 381 - 392.

2) Sargan, ἐνθ. ἄνωτ., σελ. 387.

3) D. Jorgenson, «A dual stability theorem», εἰς *Econometrica*, Ὀκτώβριος 1960.

4) Jorgenson, ἐνθ. ἄνωτ., σελ. 895.

## 6. Τελικαὶ παρατηρήσεις

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ἐξητάσθη τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος, τῆς ἰσορροπίας διὰ μέσου τοῦ χρόνου ὠρισμένων ὑποδειγμάτων οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καὶ ὑπὸ ὠρισμένης προϋποθέσεως. Εἰδικώτερον ἐξητάσθη τὸ πρόβλημα τῆς σταθερότητος τοῦ σταθεροῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως ἰσορροπίας, καθ' ὃν ὅλαι αἱ μεταβληταὶ τοῦ συστήματος αὐξάνονται διὰ μέσου τοῦ χρόνου κατὰ τὸν αὐτὸν ρυθμόν. Εἶναι αὐτονόητον ὅμως ὅτι ἡ ἐξέτασις τῆς σταθερότητος τοῦ σταθεροῦ ρυθμοῦ ἀναπτύξεως ἰσορροπίας δὲν ἐξαντλεῖ τὸ πρόβλημα τῆς γενικῆς σταθερότητος ἐνὸς οἰκονομικοῦ συστήματος. Ἡ προσέγγισις πάντως θὰ εἶναι πάντοτε ἡ αὐτή, ἥτοι : α) ἡ ἐξέτασις ἐὰν πράγματι ὑπάρχη, μία πορεία μακροχρονίου ἰσορροπίας καὶ β) ἡ ἐξέτασις ἐὰν δοθείσης ἀποκλίσεως τινὸς τοῦ οἰκονομικοῦ συστήματος ἀπὸ τῆς πορείας ταύτης, ὑπάρχη τάσις προσεγγίσεώς της διὰ μέσου τοῦ χρόνου.

Ἡ ἀνάλυσις τῆς σταθερότητος ἐνὸς ὑποδείγματος οἰκονομικῆς ἀναπτύξεως καθιστᾷ δυνατὴν τὴν ἐξαγωγήν χρησίμων συμπερασμάτων ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν διαδικασίαν ἀναπτύξεως ἐν τῇ πορείᾳ τοῦ χρόνου. Ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἐπιτρέπει ὄχι μόνον τὴν ἐξέτασιν τῆς διαδικασίας προσαρμογῆς τοῦ συστήματος πρὸς τὴν πορείαν τῆς μακροχρονίου ἰσορροπίας, ἀλλ' ἐπίσης, λόγῳ τῶν ἰδιοτήτων τὰς ὁποίας συνεπάγεται ἡ σταθερότης αὐτοῦ, καθιστᾷ δυνατὸν τὸν προσδιορισμὸν τῆς διαχρονικῆς ἐξελίξεως τῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος εἰς περίπτωσιν ἀποκλίσεώς του ἀπὸ τὴν πορείαν τῆς μακροχρονίου ἰσορροπίας.