ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΩΝ ΠΡΟΕΡΧΟΜΕΝΩΝ ΕΚ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Τοῦ κ. ΦΩΤΙΟΥ Α. ΒΑΚΑΚΗ, Δρος Γεωργοοικονομολόγου

I. Ἀντικείμενον τῆς μελέτης

Ἡ συνεχῶς διευρυνομένη χρησιμοποίησις τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν κατέστησε λίαν εὐχερῆ τὴν χρησιμοποίησιν εἰς τὴν ἐφηρμοσμένην οἰκονομικὴν ἔρευναν καὶ τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως ὡς μεθόδου διαγνωστικῆς καὶ κανονιστικῆς μελέτης τῶν ἐπιχειρήσεων, εἴτε ὑπὸ τὴν κλασσικήν της μορφήν, τὴν στηριζομένην εἰς τὴν γνωστὴν ἐκ τῶν προτέρων συμπεριφορὰν τοῦ ὀρθολογικῶς σκεπτομένου "οἰκονομικοῦ ἀνθρώπου" εἰς περιβάλλον τελείου συναγωνισμοῦ, εἴτε ὑπὸ μορφὴν συνδυασμένης χρησιμοποιήσεώς της μετὰ τῆς θεωρίας τῶν πιθανοτήτων εἰς περιβάλλον ἀτελοῦς συναγωνισμοῦ καὶ ὑπὸ καθεστὼς ἀβεβαιότητος.

Ἡ ὁριακὴ ἀνάλυσις ὡς μέθοδος ἐφηρμοσμένης οἰκονομικῆς ἐρεύνης στηρίζεται εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς καὶ εἰς τὴν χρησιμοποίησιν αὐτῆς τῆς ἐκτιμήσεως πρὸς διαγνωστικὴν καὶ κανονιστικὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐπιχειρήσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις ἀναφέρεται, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς λογικῆς τοῦ ὑποδείγματος τῆς θεωρίας τῆς παραγωγῆς.

Τὰ οἰκονομικὰ μεγέθη καὶ αἱ οἰκονομικαὶ σχέσεις, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς καὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων στηρίζεται ἡ οἰκονομικὴ ἀνάλυσις τῶν ἐπιχειρήσεων ἀφοροῦν: εἰς τὴν ὁριακὴν παραγωγικότητα τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἰς τὰς σχέσεις τεχνικῆς ὑποκαταστάσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς διὰ τὴν ἀπόκτησιν ὡρισμένης ποσότητος προϊόντος (καμπύλαι ἴσης ποσότητος), εἰς τὰς ἀναγκαίας καὶ ἐπαρκεῖς συνθήκας διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους εἰς τὴν συνάρτησιν προσφορᾶς τοῦ προϊόντος, εἰς τὰς συναρτήσεις ζητήσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, εἰς τὴν συνάρτησιν τοῦ μεγίστου κέρδους, εἰς τὴν συνάρτησιν τῶν δαπανῶν παραγωγῆς κλπ.

Αἱ προαναφερθεῖσαι οἰκονομικαὶ σχέσεις, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις παραγωγῆς περιλαμβάνει περισσοτέρας τῶν δύο μεταβλητῶν, ἐμφανίζουν πολύπλοκον ἀναλυτικὴν μορφήν, ἡ ὁποία καθίσταται πολυπλοκωτέρα, ὅταν ἀντὶ τῶν τιμῶν τῶν προϊόντων καὶ ἐκείνων τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς, χρησιμοποιοῦνται αἱ συναρτήσεις ζητήσεως τῶν πρώτων καὶ προσφορᾶς τῶν τελευταίων.

Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας εἶναι ἡ τυποποίησις τῶν οἰκονομικῶν αὐτῶν σχέσεων ἐπὶ τῇ βάσει συναρτήσεως παραγωγῆς περιλαμβανούσης n μεταβλητάς, εἰς τρόπον ὥστε, ἔχοντας τὰς ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς, νὰ δύναταί τις διὰ μιᾶς ἁπλῆς ἐφαρμογῆς τῶν τύπων, νὰ ὑπολογίζῃ, μέσῳ ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, τὰ οἰκονομικὰ μεγέθη ἐπὶ τῶν ὁποίων θὰ βασίσῃ τὴν περαιτέρω ἀνάλυσιν τῶν ἐπιχειρήσεων τοῦ χρησιμοποιουμένου ἑκάστοτε δείγματος. Ἡ τυποποίησις στηρίζεται εἰς τὴν συνήθως χρησιμοποιουμένην εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἔρευναν ἀναλυτικὴν μορφὴν συναρτήσεως παραγωγῆς τύπου Cobb - Douclas καὶ εἰς ἐκείνην τύπου S.M.A.C., ἡ ὁποία, παρ' ὅτι δὲν ἔτυχεν εἰσέτι εὐρείας ἐφαρμογῆς, λόγῳ τῶν δυσκολιῶν, τὰς ὁποίας παρουσιάζει ἡ ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων της, ἐμφανίζει εὐοίωνον προοπτικὴν ὡς ἐκ τῶν ἰδιαιτέρως ἐπιθυμητῶν ἰδιοτήτων της καὶ ὡς περιλαμβάνουσα τὴν συνάρτησιν τύπου Cobb - Douglas ὡς μερικὴν περίπτωσιν.

Εἰς τὴν θεωρητικὴν καὶ ἐφηρμοσμένην οἰκονομετρικὴν βιβλιογραφίαν ἀναφέρονται τυποποιημέναι μερικαὶ τῶν προαναφερθεισῶν οἰκονομικῶν σχέσεων, αὗται ὅμως ἀφοροῦν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως Cobb - Douglas μετὰ δύο μεταβλητῶν καὶ εἰς καθεστὼς τελείου συναγωνισμοῦ ([1]).

Ἡ παρουσιαζομένη εἰς τὴν συνέχειαν τῆς παρούσης ἐργασίας τυποποίησις, ὑπὸ γενικὴν μορφήν, τῶν ἐκ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς προερχομένων οἰκονομικῶν σχέσεων, ἀποτελεῖ, κατὰ συνέπειαν, πρωτότυπον συνθετικὴν ἐργασίαν ἐπὶ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς ὁριακῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν οἰκονομικὴν μελέτην τῶν ἐπιχειρήσεων.

Ἡ ὕλη τῆς παρούσης μελέτης ἀποτελεῖ κατ' οὐσίαν μαθηματικὴν διατύπωσιν ἐννοιῶν καὶ σχέσεων ὑποτιθεμένων γνωστῶν ἐκ τῆς στατιστικῆς, ἐκ τῆς θεωρίας τῆς παραγωγῆς καὶ ἐκ τῆς Οἰκονομικῆς Θεωρίας γενικώτερον. Οὕτω δὲν ἀναλύονται ([2]): ἡ διαδικασία μεταπτώσεως ἐκ τῆς μαθηματικῆς ἐκφράσεως τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς εἰς τὴν στατιστικὴν ἔκφρασίν της, αἱ συναντώμεναι οἰκονομικαὶ δυσχέρειαι εἰς τὴν ἐκτίμησιν τῶν παραμέτρων τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς, ἡ ἔννοια τῆς ἐλαστικότητος παραγωγῆς καὶ τῆς ἐλαστικότητος ὑποκαταστάσεως, ἡ ἔννοια τῶν καμπυλῶν ἴσης ποσότητος καὶ τῶν ἰσοκλινῶν καμπυλῶν, ἡ ἔννοια τῆς ὁριακῆς παραγωγικότητος καὶ ἡ λογικὴ τοῦ ὑποδείγματος τῆς θεωρίας τῆς παραγωγῆς ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζε-

---

1) Ὁ Yair Mundlak (βλ. 6 σελ. 138-140) δίδει μίαν γενικὴν ἔκφρασιν τῶν συναρτήσεων ζητήσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς καὶ τῆς συναρτήσεως προσφορᾶς τοῦ προϊόντος.

2) Δι' ἀνάλυσιν τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν, βλ. (3).

ται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ συνόλου τῶν τυποποιουμένων οἰκονομικῶν σχέσεων.

Διὰ τὴν διατύπωσιν τῶν μαθηματικῶν σχέσεων ἐγένετο χρῆσις τοῦ ἐν συνεχείᾳ παρατιθεμένου συμβολισμοῦ.

X_o = Ποσότης προϊόντος

X_o^* = Ἀναμενομένη ἢ δεδομένη ποσότης προϊόντος

X_j = Χρησιμοποιουμένη ποσότης τοῦ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ j $(j = 1, 2, \ldots, \eta)$

X_j^* = Δεδομένη ποσότης τοῦ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ j

A, α_j = Παράμετροι συναρτήσεως παραγωγῆς

τ_j = Τιμὴ προϊόντος $(j = 0)$ καὶ τιμαὶ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν $(j = 1, 2, \ldots, \eta)$

$Y_j = X_j \tau_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, \eta)$

ε = Συντελεστὴς πληθοπαραγωγῆς (ἐλαστικότης συναρτήσεως παραγωγῆς ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν σχετικὴν μεταβολὴν τοῦ συνόλου τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν της) $= \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j$ (διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς τύπου Cobb - Douglas)

$\sigma_{\kappa\lambda}$ = Ἐλαστικότης τεχνικῆς ὑποκαταστάσεως μεταξὺ τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν κ καὶ λ

φ_j = Παράγωγος τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν j (ὁριακὴ παραγωγικότης τοῦ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ j)

φ_{ji} = Παράγωγος τῆς συναρτήσεως φ_j ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν ι.

P = Κέρδος

b_j = Παράμετροι συναρτήσεως προσφορᾶς τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν $(j = 1, 2, \ldots \eta)$ καὶ ζητήσεως τοῦ προϊόντος $(j = 0)$

n_j = Ἐλαστικότης τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ παραγωγῆς j ὡς πρὸς τὴν προσφερομένην ποσότητά του $(j = 1, 2, \ldots, \eta)$ καὶ τῆς τιμῆς τοῦ προϊόντος ὡς πρὸς τὴν ζητουμένην ποσότητα $(j = 0)$

Δ_μ = Μεταβληταὶ δαπάναι παραγωγῆς

Ἐξ ἄλλου διὰ τὴν συνοπτικωτέραν ἐμφάνισιν τῶν τύπων ἐγένετο χρῆσις τῶν κάτωθι συμβόλων ἀντὶ τῶν ἔναντι ἑνὸς ἑκάστου ἀλγεβρικῶν παραστάσεων :

$$D = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$\beta_j = 1 + \eta_j$$

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho} = $$ ἐλαστικότης τεχνικῆς ὑποκαταστάσεως τῶν συντελεστῶν παραγωγῆς (περίπτωσις συναρτήσεως S.M.A.C.)

$$D' = \frac{1}{1-\varepsilon^{\prime}}$$

$$\varepsilon' = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\beta_o \alpha_j}{\beta_j}$$

$$\varepsilon'' = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\alpha_j}{\beta_j} = \frac{\varepsilon'}{\beta_o}$$

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{\alpha_j}{\beta_j}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \alpha_i + \beta_i \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{\varepsilon}' = \bar{\varepsilon} + \frac{\alpha_i}{\beta_i}$$

Οἱ ὑπολογισθέντες διὰ τῆς παρούσης ἐργασίας τύποι, καίτοι φαίνονται πολύπλοκοι, καθίστανται λίαν εὔχρηστοι τῇ βοηθείᾳ ἠλεκρονικῶν ὑπολογιστῶν. Διὰ τιμὰς τῶν γραμμάτων των ἐκπεφρασμένας εἰς ἀριθμοὺς τῶν πέντε δεκαδικῶν ψηφίων, ὑπολογίζεται ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυπλοκωτέρου ἐκ τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ κείμενον τύπων ἐντὸς ἐλαχίστων δευτερολέπτων. Ἐπὶ τῇ βάσει αὐτῆς τῆς εὐχερείας, ἡ τυποποίησις τῶν ἐκ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς προερχομένων οἰκονομικῶν μεγεθῶν συνιστᾷ οὐσιώδη συμβολὴν εἰς τὴν οἰκονομικὴν ἀνάλυσιν τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος τῶν ἐπιχειρήσεων.

II. Ἡ συνάρτησις Cobb - Douglas

1. — *Ἡ ἀναλυτικὴ μορφὴ*

Ἡ ἀναλυτικὴ μορφὴ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς τύπου Cobb - Douglas εἶναι [1]:

$$\boxed{X_0 = A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j}} \qquad (1)$$

ἐνῷ ἡ στατιστική της ἔκφρασις [2]:

$$X_o^{r} = A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j}\ ,\ X_o' = X_o^{\bullet} V_o \qquad (2)$$

εἰς τὴν ὁποίαν V_o εἶναι μία τυχαία μεταβλητὴ ἑρμηνεύουσα τὸ μέρος τῆς διακυμάνσεως τῆς X_o', τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἑρμηνευθῇ ὑπὸ τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν X_j .

Ἡ ἐκτίμησις τῆς (2) λαμβάνει τὴν μορφὴν [3] :

$$\hat{X}_o' = \hat{A}' \prod_{j=1}^{\eta} \hat{X}_j^{\alpha_j} \qquad (3)$$

καὶ ὁ προσδιορισμός της εἰς τὸ χρησιμοποιούμενον ἑκάστοτε δεῖγμα δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως :

---

1) Ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ X_0, διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς τῆς γεωργικῆς ἐπιχειρήσεως, ἐκφράζεται κατὰ κανόνα εἰς ἀξίαν. Διὰ τὴν γενικὴν ὅμως ἐμφάνισιν ὡρισμένων οἰκονομικῶν σχέσεων, παραδεχόμεθα ὅτι αὕτη ἔχει ἐκφρασθῆ εἰς φυσικὰς μονάδας (ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων τῶν προϊόντων) καὶ συνοδεύεται ἀπὸ μίαν τιμὴν ἴσην πρὸς τὴν μέσην σταθμικὴν τιμὴν ὅλων τῶν προϊόντων τῆς ἐπιχειρήσεως :

$$\tau_o = \frac{1}{X_o} \sum_{s=1}^{S} X_{os} X_o\ ,\ \tau_{os} = \sum_{s=1}^{S} X_{os}\ ,$$

S = ἀριθμὸς προϊόντων, X_{os} = ποσότης τοῦ προϊόντος s καὶ τ_{os} ἡ ἀντίστοιχος τιμή του.

Ἐκ τῶν γενικῶν σχέσεων, διὰ $\tau_j = 1$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, \eta$) προκύπτουν αἱ σχέσεις αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ὅλαι αἱ μεταβληταὶ ἔχουν ἐκφρασθῆ εἰς ἀξίαν.

2) Διὰ τοῦ τόνου δηλοῦται ὅτι ὁ συμβολισμὸς ἀναφέρεται εἰς μίαν τυχαίαν μεταβλητήν.

3) Διὰ τοῦ Λ δηλοῦται ἡ ἐκτίμησις τῆς τιμῆς τῆς συμβολιζομένης τυχαίας μεταβλητῆς.

$$\boxed{\hat{X} = \hat{A} \prod_{j=1}^{\eta} \hat{X}_j^{\alpha_j}} \qquad (4)$$

Ἡ μορφὴ (4) εἶναι ἡ βάσις τῶν ὑπολογισμῶν διὰ τὴν ἀπόκτησιν τῶν μεγεθῶν καὶ τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς, διότι ἀποτελεῖ τὴν μόνην γνωστὴν σχέσιν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἐργασίας ἐκτιμήσεως τῶν παραμέτρων τῆς (2).

Ἐπειδὴ ἡ (4) ἔχει τὴν αὐτὴν συγκρότησιν πρὸς τὴν (1), μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητὴ καὶ αἱ παράμετροι εἰς μὲν τὴν πρώτην εἶναι ἐκτιμήσεις εἰς δὲ τὴν δευτέραν εἶναι αἱ θεωρητικῶς ἀληθεῖς τιμαί, εἰς τὴν συνέχειαν τῆς παρούσης ἐργασίας χρησιμοποιεῖται ἡ μορφὴ (1), ἡ ὁποία εἶναι ἁπλουστέρα ὡς πρὸς τὴν γραφήν της.

2. — Ὡρισμέναι ἰδιότητες τῆς συναρτήσεως

2. 1. — Εἶναι ὁμοιογενὴς βαθμοῦ $\varepsilon = \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j$. Πράγματι ἐκ τῆς (1) προκύπτει :

$$A \prod_{j=1}^{\eta} (\rho X_j)^{\alpha_j} = A\rho^{\varepsilon} \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j} = \rho^{\varepsilon} X_o \qquad (5)$$

2. 2. — Ἔχει ἐλαστικότητα παραγωγῆς ὡς πρὸς τὰς συνολικὰς μεταβλητὰς δαπάνας καὶ ὡς πρὸς τὴν χρησιμοποιουμένην ποσότητα ἑνὸς ἑκάστου τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν σταθεράν, ἀνεξάρτητον τοῦ ἐπιπέδου χρησιμοποιήσεώς των καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς παραγωγῆς. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐλαστικότητος συνάγεται ὅτι:

$$\varepsilon_j = \frac{dX_o}{dX_j} \cdot \frac{X_j}{X_o} = \alpha_j \frac{X_o}{X_j} \cdot \frac{X_j}{X_o} = \alpha_j \qquad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{dX_o}{d\Delta_\mu} \cdot \frac{\Delta_\mu}{X_0} \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{\eta} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j \qquad (7)$$

2. 3. — Ἡ ἐλαστικότης τεχνικῆς ὑποκαταστάσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς 1, ἀνεξάρτητος τῶν ἐπιπέδων χρησιμοποιήσεώς των καὶ τοῦ ἐπιπέδου παραγωγῆς.

Ἡ ἐλαστικότης τεχνικῆς ὑποκαταστάσεως μεταξὺ δύο τυχόντων παραγωγικῶν συντελεστῶν δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

---

1) Βλ. (3) σελ. 15.

$$\sigma_{\kappa\lambda} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{\eta} \varphi_j X_j}{X_\kappa X_\lambda} \cdot \frac{F_{\kappa\lambda}}{F} \qquad (8)$$

εἰς τὴν ὁποίαν : $F = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_j \\ \varphi_j & \varphi_{ij} \end{vmatrix} \quad i, j = 1, 2, \ldots, \eta$

καὶ $F_{\kappa\lambda}$ εἶναι τὸ ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου $\varphi_{\kappa\lambda}$ τῆς F.

Ἐπειδή :(1) $F = (-1)^{\eta} \prod\limits_{j=1}^{\eta} \varphi_j \sum\limits_{j=1}^{\eta} \varphi_j X_j \cdot \left(\prod\limits_{j=1}^{\eta} X_j\right)^{-1}$ (α) καὶ

$$F_{\kappa\lambda} = (-1)^{\eta} \prod_{j=1}^{\eta} \varphi_j \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\kappa\neq\lambda}}^{\eta} X_j\right)^{-1} \qquad (\beta)$$

ἡ σχέσις (8) διὰ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν (α) καὶ (β) δίδει :

$$\boxed{\sigma_{\kappa\lambda} = 1} \qquad (9)$$

3. — *Οἰκονομικαὶ σχέσεις*

3. 1. – Ὁριακὴ παραγωγικότης

$$\varphi_j {}^{(2)} = \frac{\vartheta X_o}{\vartheta X_j} = \alpha_j A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j - 1} \Longrightarrow \boxed{\varphi_j = \alpha_j X_o X_j^{-1}} \qquad (10)$$

(j=1, 2,..., η)

---

1) Βλ. (7) σελ 234.

2) Αἱ δεύτεροι παράγωγοι τῆς συναρτήσεως εἶναι :

α) $$\varphi_{ji} = \frac{\vartheta^2 X_o}{\vartheta X_j\, \vartheta X_i} = \frac{\vartheta}{\vartheta X_i}\left(\alpha_j X_o X_j^{-1}\right) =$$

$$= \alpha_j \alpha_i X_o (X_j X_i)^{-1} = \varphi_i \varphi_j X_o^{-1} \qquad (10\,\alpha)$$

β) $$\varphi_{jj} = \frac{\vartheta}{\vartheta X_j}\left(\alpha_j X_o X_j^{-1}\right) = X_j^{-2} X_o \alpha_j (\alpha_j - 1) =$$

$$= \varphi_j \left(\frac{\varphi_j}{X_o} - \frac{1}{X_j} \right) \qquad (10\,\beta)$$

3. 2. — Καμπύλαι ἴσης ποσότητος καὶ ἰσοκλινεῖς καμπύλαι

Δεδομένον ἐπίπεδον παραγωγῆς, X_o^*, δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ὑφ' ἑνὸς πλήθους συνδυασμῶν τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν, προσδιοριζομένων ἐκ τῆς σχέσεως :

$$X_o^* = A X_i^{\alpha_i} X_\kappa^{\alpha_\kappa} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i \neq \kappa}}^{\eta} X_j^{*\alpha_j} \Rightarrow X_\kappa = \left[X_o^* (A \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i \neq \kappa}}^{\eta} X_j^{*\alpha_j})^{-1} \right]^{\frac{1}{\alpha_\kappa}} \cdot \left[X_i^{-\frac{\alpha_i}{\alpha_\kappa}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X_\kappa = S_{i\kappa}^* X_i^{-\frac{\alpha_i}{\alpha_\kappa}}} \quad \left(\substack{i=1,\, 2,\, \ldots,\, \eta \\ i \neq \kappa} \right) \tag{11}$$

Αἱ ἰσολινεῖς καμπύλαι ὁρίζονται ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\frac{dX_\kappa}{dX_i} = - \frac{\vartheta X_o / \vartheta X_i}{\vartheta X_o / \vartheta X_\kappa} = - \frac{\alpha_i X_\kappa}{\alpha_\kappa X_i} = - \xi \Rightarrow \boxed{X_\kappa = \frac{\alpha_\kappa \xi}{\alpha_i} \cdot X_i} \tag{12}$$

$$\left(\substack{i=1,\, 2,\, \ldots,\, \eta \\ i \neq \kappa} \right)$$

3. 3. — Συνθῆκαι πρώτου καὶ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους

3. 3. 1. — Ὑπὸ συνθήκας τελείου συναγωνισμοῦ

Ἡ συνάρτησις τοῦ κέρδους εἶναι :

$$P = X_o^* \tau_o - \sum_{j=1}^{\eta} X_j \tau_j = A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j} \tau_o - \sum_{j=1}^{\eta} X_j \tau_j \tag{13}$$

Συνθῆκαι πρώτου βαθμοῦ (1) :

$$\frac{\vartheta P}{\vartheta X_j} = \alpha_j \frac{X_o^*}{X_j} \cdot \tau_o - \tau_j = 0 \Rightarrow \varphi_j \tau_o - \tau_j = 0 \Rightarrow$$

γ) Γενικὴ ἔκφρασις :

$$\boxed{\varphi_{ji} = \alpha_i (\alpha_j - \delta_{ij}) X_o (X_i X_j)^{-1} = \varphi_i (\varphi_j X_o^{-1} - \delta_{ij} X_i^{-1})} \tag{10γ}$$

$$\left(\begin{array}{l} i,\, j,\, = 1,\, 2,\, \ldots,\, \eta \\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{διὰ } i = j \\ 0 & \text{διὰ } i \neq j \end{cases} \end{array} \right)$$

1) Ἡ στατιστικὴ ἔκφρασις αὐτῶν εἶναι :

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \varphi_j \, \tau_o = \tau_j & \text{ἤ} \\ \alpha_j \dfrac{Y^*_o}{Y_j} = 1 & \text{ἤ} \\ \alpha_j = \dfrac{Y_j}{Y_o} & \end{array}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \eta) \qquad (14)$$

Συνθῆκαι δευτέρου βαθμοῦ :

$$d^2 P < 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\eta} \sum_{i=1}^{\eta} P_{ij}\, dX_i\, dX_j < 0 \Rightarrow (^1)\ (-1)^{\eta}\, |P_{ij}| > 0 \qquad (15)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς προκύπτει :

$$P_{jj} < 0 \Rightarrow \alpha_j \ (\alpha_j - 1)\, X^*_o X_j^{-2} < 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_j < 1} \ (j=1, 2, \ldots, \eta) \qquad (15\,\alpha)$$

Συνθῆκαι θετικότητος τοῦ κέρδους (²) :

$$\varepsilon < 1 \Rightarrow (\text{λόγῳ τῆς } 7) \Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j < 1} \qquad (16)$$

3. 3. 2. — *Ὑπὸ συνθήκας ἀτελοῦς συναγωνισμοῦ*

Ἐὰν ὑποτέθῇ ὅτι εἶναι :

$$\tau_j = f_j \ (X_j) = b_j \, X_j^{\eta_j} \ (j = 0, 1, 2, \ldots, \eta)\ (^3) \qquad (17)$$

$$\alpha_j \frac{X^*_o \tau_o}{X_j} = \tau_j V_j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_j \, \tau_o = \tau_j V_j & \text{ἤ} \\ \alpha_j \cdot \dfrac{Y^*_o}{Y_j} = V_j & \text{ἤ} \\ \alpha_j = \dfrac{Y_j}{Y^*_o} \cdot V_j & \text{ἤ} \end{array} \right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, \eta) \qquad (14\,\alpha)$$

1) Βλ. (3) σελ. 13.
2) Βλ. (3) σελ. 25.
3) α) Ἡ συνάρτησις ζητήσεως $\tau_o = b \cdot X_o^{\eta_\sigma}$, ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς ἐν ἀρχῇ τοῦ παρόντος παραρτήματος ὑποσημειώσεως, ἀναφέρεται εἰς τὴν ζήτησιν τοῦ συνόλου τῶν προϊόντων τῆς γεωργικῆς ἐπιχειρήσεως.
β) Διὰ $\eta_j = 0 \Rightarrow \tau_j = b_j =$ σταθερὸν $\Rightarrow$ συνθῆκαι τελείου συναγωνισμοῦ.

ἡ συνάρτησις τοῦ κέρδους (13) γίνεται :

$$P = X_o^{*1+\eta_o} b_o - \sum_{j=1}^{\eta} X_j^{1+\eta_j} b_j \tag{18}$$

Συνθῆκαι πρώτου βαθμοῦ :

$$\frac{\vartheta P}{\vartheta X_j} = b_o (1 + n_o) \cdot X_o^{*\eta_o} \varphi_j - (1 + \eta_j) b_j X_j^{n_j} =$$

$$= 0 \Longrightarrow (1 + \eta_o) \varphi_j \tau_o = (1 + \eta_j) \tau_j$$

ἐκ τῆς ὁποίας :

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi_j \tau_o = \dfrac{1 + \eta_j}{1 + \eta_o} \cdot \tau_j \qquad \text{ἢ} \\[2ex] \alpha_j \dfrac{Y_o^*}{Y_j} = \dfrac{1 + \eta_j}{1 + \eta_o} \text{ ἢ } \alpha_j = \dfrac{1 + \eta_j}{1 + \eta_o} \cdot \dfrac{Y_j}{Y_o^*} \end{array}} \tag{19}$$

$$(j = 1, 2, \ldots , \eta)$$

Αἱ συνθῆκαι δευτέρου βαθμοῦ, διδόμεναι ἐκ τῆς (15), ἀπαιτοῦν ὅπως :

$$P_{jj} < 0 \Longrightarrow \frac{\vartheta^2 P}{\vartheta X_j^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta X_j} \left[b_o (1 + \eta_o) \alpha_j X_o^{*\eta_o + 1} X_j^{-1} - (1 + \eta_j) b_j X_j^{n_j} \right] =$$

$$= \left[(1 + \eta_o)^2 b_o \alpha_j X_o^{*n_o} \cdot \alpha_j X_o^* X_j^{-1} \cdot X_j - b_o (1 + n_o) X^{*n_o + 1} \alpha_j \right] X_j^{-2} -$$

$$- (1 + n_j) n_j b_j X_j^{n_j - 1} = \left[(1 + \eta_o)^2 \tau_o \alpha_j^2 X_o^* - (1 + \eta_o) \alpha_j \tau_o X_o^* \right] X_j^{-2} -$$

$$- \eta_j (1 + \eta_j) \tau_j X_j^{-1} = (1 + \eta_o) \alpha_j Y_o^* \left[(1 + \eta_o) \alpha_j - 1 \right] X_j^{-2} -$$

$$- \eta_j (1 + \eta_j) Y_j X_j^{-2} = \text{(εἰσάγεται ἡ τιμὴ τοῦ } Y_j \text{ ἐκ τῆς 19)} =$$

$$= Y_o^* \alpha_j X_j^{-2} (1 + \eta_o) \cdot \left[(1 + \eta_o) \alpha_j - \eta_j - 1 \right] < 0 \Longrightarrow \text{(διὰ } | \eta_o | < 1,$$

$$\alpha_j > 0) \Longrightarrow \boxed{\alpha_j < \frac{1 + \eta_j}{1 + \eta_o} \quad \text{ἢ} \quad \alpha_j \cdot \frac{1 + \eta_o}{1 + \eta_j} < 1} \tag{20}$$

$$(j = 1, 2, \ldots , \eta)$$

Συνθῆκαι θετικότητος τοῦ κέρδους :

$$\boxed{\varepsilon < 1 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j \cdot \frac{1+\eta_o}{1+\eta_j} < 1} \quad (21)$$

3. 4. — Ἡ συνάρτησις προσφορᾶς τοῦ προϊόντος καὶ αἱ συναρτήσεις ζητήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν

3. 4. 1. — Ὑπὸ συνθήκας τελείου συναγωνισμοῦ

Αἱ συνθῆκαι πρώτου βαθμοῦ διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους (σχέσεις 14) καὶ ἡ συνάρτησις παραγωγῆς (σχέσις 1) συνιστοῦν τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} X_j &= \alpha_j X_o^* \tau_o \tau_j^{-1} \\ X_o^* &= A \prod_{j=1}^{\eta} X^{\alpha_j} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν X_j εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς προκύπτει ἡ συνάρτησις προσφορᾶς τοῦ προϊόντος :

$$X_o^* = A \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j X_o^* \tau_o \tau_j^{-1})^{\alpha_j} \Longrightarrow X_o^{*1-\varepsilon} = A \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \tau_o \tau_j^{-1})^{\alpha_j} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_o^* = \left[A \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \tau_o \tau_j^{-1})^{\alpha_j} \right]^D \Longrightarrow \boxed{A^D \tau_o^{\varepsilon D} \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \tau_j^{-1})^{\alpha_j D} = X_o^*} \quad (22)$$ [1]

---

1) α) Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς προκύπτει :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_o}{dA} \cdot \frac{A}{X_o} &= D \\ \frac{dX_o}{d\tau_o} \cdot \frac{\tau_o}{X_o} &= \varepsilon \cdot D \\ \frac{dX_o}{d\tau_j} \cdot \frac{\tau_j}{X_o} &= -\alpha_j D \end{aligned}\right\} \quad \text{Ἐλαστικότητες τῆς παραγωγῆς ὡς πρὸς } A,\ \tau_o,\ \tau_j .$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \eta)$$

β) Ἡ στατιστικὴ ἔκφρασις τῆς σχέσεως αὐτῆς, ὑπολογιζομένη βάσει τῶν

Ἐὰν εἰς τὰς πρώτας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (α), ἀντικατασταθῆ ἡ τιμὴ τοῦ X_o^* ἐκ τῆς (22), προκύπτουν αἱ συναρτήσεις ζητήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν :

$$X_j = \alpha_j \, \tau_j^{-1} \, \tau_o^{1+D\varepsilon} \, A^D \left[\prod_{j=1}^{\eta} \alpha_j \, \tau_j^{-1} \right]^{\alpha_j D} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{X_j = (\alpha_j \, \tau_j^{-1}) \; (\tau_o A)^D \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \, \tau_j^{-1})^{\alpha_j D}} \qquad (23)\ [1]$$

3·4.2. — Ὑπὸ συνθήκας ἀτελοῦς συναγωνισμοῦ.

Ἐκ τῶν συνθηκῶν (19) καὶ τῆς συναρτήσεως παραγωγῆς (2), προκύπτει τὸ σύστημα :

(14 α) καὶ (2), εἶναι :

$$\boxed{X_o' = A^D \, \tau_o^{\varepsilon D} \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \, \tau_j^{-1} \, V_j^{-1})^{\alpha_j D} \, V_o} \qquad (22\,\alpha)$$

1) Ἐκ τῆς (23) προκύπτει :

α)

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dX_j}{dA} \cdot \dfrac{A}{X_j} = D = \dfrac{dX_j}{d\tau_o} \cdot \dfrac{\tau_o}{X_j} \\
\qquad\qquad (j = 1, 2, \dots, \eta) \\[2ex]
\dfrac{dX_j}{d\tau_j} \cdot \dfrac{\tau_j}{X_j} = -\alpha_j D - 1 = -(1 + \alpha_j D) \\
\qquad\qquad (j = 1, 2, \dots, \eta) \\[2ex]
\dfrac{dX_j}{d\tau_i} \cdot \dfrac{\tau_i}{X_j} = -\alpha_i D \\
\qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, \eta \,,\; i \neq j)
\end{array}\right\}$$

Ἐλαστικότητες ζητήσεως τοῦ παραγωγικοῦ συντελεστοῦ j ὡς πρὸς A, τ_o, τ_j, τ_i.

β) Ἡ στατιστικὴ ἔκφρασις τῆς σχέσεως αὐτῆς προκύπτει δι' ἀντικαταστάσεως τῆς (22 α) εἰς τὰς πρώτας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (α) ὑπ' ὄψιν καὶ τοῦ ὅτι $X_o = X^* \cdot V_o$

$$\boxed{X_j' = (\alpha_j \, \tau_j^{-1} \, V_j^{-1}) \; (\tau_o A)^D \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \, \tau_j^{-1} \, V_j^{-1})^{\alpha_j D}} \qquad (23\,\alpha)$$

ἤτοι ἡ ποσότης X_j' εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τυχαίας μεταβλητῆς V_o (λόγῳ τῆς ὑποθέσεως 2).

$$\left.\begin{aligned} X_j &= \beta_o \alpha_j \tau_o X_o^* \tau_j^{-1} \beta_j^{-1} \\ X_o^* &= A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha') \text{ ὅπου } \beta_j = 1 + \eta_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, \eta)$$

Ἐκ τῶν πρώτων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (α'), διὰ ἀντικαταστάσεως τῶν τ_j ἐκ τῆς (17) προκύπτει :

$$X_j = \beta_o \alpha_j b_o X_o^{*\eta_o} X_o^* b_j^{-1} X_j^{-\eta_j} \beta_j^{-1} \Rightarrow X_j =$$

$$= (\beta_o b_o \beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{1/\beta_j} X_o^{*\beta_o/\beta_j} \tag{24}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντας τὴν τιμὴν αὐτὴν τῶν X_j εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ αὐτοῦ συστήματος προκύπτει ἡ συνάρτησις προσφορᾶς τοῦ προϊόντος :

$$X_o^* = A \prod_{j=1}^{\eta} (\beta_o b_o \beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{\alpha_j / \beta_j} \cdot X_o^{*\alpha_j \beta_o / \beta_j} =$$

$$= A X_o^{*\varepsilon'} (\beta_o b_o)^{\varepsilon''} \prod_{j=1}^{\eta} (\beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{\alpha_j / \beta_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X_o^* = A^{D'} \cdot (\beta_o b_o)^{\varepsilon'' D'} \prod_{j=1}^{\eta} (\beta_j^{-1} b^{-1} \alpha_j)^{D' \alpha_j / \beta_j}} \tag{25}$$

Εἰσάγοντας τὴν τιμὴν τοῦ X_o^* εἰς τὴν (24) προκύπτουν αἱ συναρτήσεις ζητήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν :

$$X_j = (\beta_o b_o)^{1/\beta_j} (\beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{1/\beta_j} A^{D' \beta_o / \beta_j} \cdot$$

$$\cdot (\beta_o b_o)^{\varepsilon'' D' \beta_o / \beta_j} \prod_{j=1}^{\eta} (\beta_j^{-1} b_{j\alpha_j}^{-1})^{D' \beta_o \alpha_j / \beta^2{}_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{X_j = A^{D'\beta_o / \beta_j} (\beta_o b_o)^{D'/\beta_j} (\beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{1/\beta_j} \prod_{j=1}^{\eta} (\beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{D'\beta_o \alpha_j / \beta^2{}_j}} \tag{26}$$

Αἱ σχέσεις (25) καὶ (26) διὰ $\beta_j = 1$ ($\Rightarrow \eta = 0 \Rightarrow \tau_j = b_j \Rightarrow$ συνθῆκαι τελείου συναγωνισμοῦ) συμπίπτουν μὲ τὰς σχέσεις (22) καὶ (23)

3. 5. — Ἡ συνάρτησις τοῦ μεγίστου κέρδους

3. 5. 1. — *Ὑπὸ συνθήκας τελείου συναγωνισμοῦ*

Ἡ συνάρτησις τοῦ κέρδους εἶναι :

$$P = X_o^* \tau_o - \sum_{j=1}^{\eta} X_j \tau_j$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν X_o^* καὶ X_j ἐκ τῶν (22) καὶ (23), προκύπτει :

$$P = A^D \tau^{\varepsilon D+1} \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \tau_j^{-1})^{\alpha_j D} - \sum_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \tau_j^{-1}) (\tau_o A)^D \prod_{j=1}^{\eta} \alpha_j \tau_j^{-})^{\alpha_j D} \tau_j =$$

$$= (\tau_o A)^D \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \tau_j^{-1})^{\alpha_j D} \left[1 - \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j \tau_j^{-1} \tau_j \right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{P = (\tau_o A)^D \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \tau_j^{-1})^{\alpha_j D} (1 - \varepsilon)} \qquad (27)\ (^1)$$

3. 5. 2. — *Ὑπὸ συνθήκας ἀτελοῦς συναγωνισμοῦ :*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ συνάρτησις τοῦ κέρδους λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$P = X_o^* \tau_o - \sum_{j=1}^{\eta} X_j \tau_j = X_o^* b_o X_o^{*\eta_o} - \sum_{j=1}^{\eta} X_j b_j X_j^{\eta_j} = b_o X_o^{*\beta_o} - \sum_{j=1}^{\eta} b_j X_j^{\beta_j}$$

Ἀντικαθιστῶντας εἰς αὐτὴν τὰς τιμὰς τῶν X_o^* καὶ X_j ἐκ τῶν (25) καὶ (26), προκύπτει :

$$P = b_o \cdot A^{D'\beta_o} (\beta_o b_o)^{\beta_o \varepsilon'' D'} \prod_{j=1}^{\eta} (\beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{D'\beta_o \alpha_j / \beta_j} -$$

$$- \sum_{j-1}^{\eta} \left[b_j A^{D'\beta_o} (\beta_o b_o)^{D'} \cdot (\beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j) \cdot \prod_{j=1}^{\eta} (\beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{D \beta_o \alpha_j / \beta_j} \right] \Longrightarrow$$

---

1) Ἡ στατιστικὴ ἔκφρασις τῆς σχέσεως αὐτῆς ὑπολογιζομένης μέσῳ τῶν (22 α) καὶ (23 α) εἶναι :

$$\boxed{P' = (\tau_o A)^D \prod_{j=1}^{\eta} (\alpha_j \tau_j^{-1} V_j^{-1})^{\alpha_j D} (V_o - \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j V_j^{-1})} \qquad (27\ \alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{P = A^{D'\beta_0} (b_o \beta_o)^{D'} \prod_{j=1}^{\eta} (\beta_j^{-1} b_j^{-1} \alpha_j)^{D'\beta_0 \alpha_j / \beta_j} \left[\beta_o^{D'(\varepsilon'-1)} - \sum_{j=1}^{\eta} \beta_j^{-1} \alpha_j \right]} \tag{28}$$

Ἡ συνάρτησις (28) διὰ $\beta_j = 1$ (συνθῆκαι τελείου ἀνταγωνισμοῦ) συμπίπτει μὲ τὴν (27).

3. 6. — Ἡ συνάρτησις τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν

3. 6. 1. — *Ὑπὸ συνθήκας τελείου συναγωνισμοῦ :*

Ἡ συνάρτησις τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν προσδιορίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν συνθηκῶν πρώτου βαθμοῦ διὰ τὴν ἐλαχιστοποίησιν των. Αἱ συνθῆκαι αὗται ὑπολογίζονται εἰς τὰς σχέσεις :

$$\text{Minimum } Z = \sum_{j=1}^{\eta} X_j \tau_j + \lambda \left[X_o^* - A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j} \right]$$

ὡς ἀκολούθως :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vartheta Z}{\vartheta X_j} &= \tau_j - \lambda \alpha_j \frac{X_o^*}{X_j} = 0 \\ \frac{\vartheta Z}{\vartheta \lambda} &= X_o^* - A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\tau_j}{\tau_i} &= \frac{\alpha_j X_i}{\alpha_i X_j} \\ X_o^* &= A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} X_j &= \frac{\alpha_j \tau_i}{\alpha_i \tau_j} X_i \\ X_o^* &= A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(j = 1, 1, \ldots, \eta) \\ &(j \neq i) \end{aligned} \tag{29}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (29) προκύπτει :

$$X_o^* = A \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \left(\frac{\alpha_j \tau_i}{\alpha_i \tau_j} \right)^{\alpha_j} . X_i^{\alpha_i} = A \left(\frac{\tau_i}{\alpha_i} \right)^{\varepsilon - \alpha_i} . X_i^{\varepsilon} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \left(\frac{\alpha_j}{\tau_j} \right)^{\alpha_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_i = X_o^{*1/\varepsilon} . A^{-1/\varepsilon} . \left(\frac{\tau_i}{\alpha_i} \right)^{\frac{\alpha_i - \varepsilon}{\varepsilon}} . \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \left(\frac{\alpha_j}{\tau_j} \right)^{-\frac{\alpha_j}{\varepsilon}} \tag{30}$$

Βάσει τῆς προκυψάσης τιμῆς τοῦ X_i καὶ τῶν πρώτων ἐξισώσεων τοῦ σμστήματος (29) ἡ συνάρτησις τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν γίνεται :

$$\Delta_\mu = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\eta} X_j \tau_j + \tau_i X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\eta} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \frac{\tau_i}{\tau_j} X_i \tau_j + X_i \tau_i =$$

$$= \frac{X_i \tau_i}{\alpha_i} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{\eta} \alpha_j + \alpha_i \right) = \frac{\tau_i}{\alpha_i} \varepsilon X_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta_\mu = \left[\frac{X_o^*}{A} \prod_{j=1}^{\eta} \left(\frac{\tau_j}{\alpha_j} \right)^{\alpha_j} \right]^{1/\varepsilon} \cdot \varepsilon} \qquad (31)\ [1]$$

3. 6. 2. — *Ὑπὸ συνθήκας ἀτελοῦς συναγωνισμοῦ*

$$\text{Minimun } Z = \sum_{j=1}^{\eta} X_j \tau_j + \lambda \left(X_o^* - A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\eta} b_j X_j^{\beta_j} + \lambda \left(X_o^* - A \prod^{\eta} X_j^{\alpha_j} \right) \Longrightarrow \frac{\vartheta Z}{\vartheta X_j} = b_j \beta_j X_j^{\eta_j} - \lambda \alpha_j \frac{X_o^*}{X_j} =$$

$$= 0 \Longrightarrow \frac{b_j \beta_j X_j^{\eta_j}}{b_i \beta_i X_i^{\eta_i}} = \frac{\alpha_j X_i}{\alpha_i X_j} \Longrightarrow X_j^{\beta_j} = \frac{\alpha_j b_i \beta_i}{b_j \beta_j \alpha_i} X_j^{\beta_j} \qquad (32) \quad \substack{i = 1, 2, \ldots, \eta \\ j \neq i}$$

---

1) Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς προκύπτει :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Delta_\mu}{dA} \cdot \frac{A}{\Delta_\mu} = -1/\varepsilon < 0 \\ &\frac{d\Delta_\mu}{dX_o} \cdot \frac{X_o}{\Delta_\mu} = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \\ &\frac{d\Delta_\mu}{d\tau_j} \cdot \frac{\tau_i}{\Delta_\mu} = \frac{\alpha_j}{\varepsilon} > 0 \quad (j=1, 2, \ldots, \eta) \end{aligned}\right\} \text{Ἐλαστικότητες τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν ὡς πρὸς } A,\ X_o \text{ καὶ } \tau_i.$$

Διὰ $\frac{d\Delta_\mu}{dX_o} = \tau_o$ (συνθήκη πρώτου βαθμοῦ διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους) προκύπτει ἡ συνάρτησις προσφορᾶς τοῦ προϊόντος, ἤτοι ἡ σχέσις (22).

Ἀντικαθιστῶντας τὰς (32) εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς προκύπτει :

$$X_o^* = A \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \left(\frac{\alpha_j\, b_i\, \beta_i}{b_j\, \beta_j\, \alpha_i} X_j^{\beta_j} \right)^{\alpha_j / \beta_j} \cdot X_i^{\alpha_i} = A \left(\frac{b_i\, \beta_i}{\alpha_i} \right)^{\varepsilon} \cdot$$

$$\cdot\, X_i^{\tilde{\varepsilon}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \left(\frac{\alpha_j}{b_j\, \beta_j} \right)^{\alpha_j / \beta_j} \Longrightarrow X_i = A^{-1/\tilde{\varepsilon}} \left(\frac{b_i\, \beta_i}{\alpha_i} \right)^{-\varepsilon / \tilde{\varepsilon}} X_o^{*\, 1/\tilde{\varepsilon}} \,.$$

$$\cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \left(\frac{\alpha_j}{b_j\, \beta_j} \right)^{-\alpha_j / \beta_j \tilde{\varepsilon}} \qquad (33)$$

Βάσει τῶν (32) ἡ συνάρτησις τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν λαμβάνει τὴν μορφὴν :

$$\Delta_\mu = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} X_j\, \tau_j + X_i\, \tau_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} b_j\, X_j^{\beta_j} + b_i\, X_i^{\beta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} b_j \,\cdot$$

$$\cdot\, \frac{\alpha_j\, b_i\, \beta_i}{b_j\, \beta_j\, \alpha_i} X_i^{\beta_i} + b_i\, X_i^{\beta_i} = \frac{X_i^{\beta_i}\, b_i\, \beta_i}{\alpha_i} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \frac{\alpha_j}{\beta_j} + \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) = X_i^{\beta_i} \cdot \frac{b_i\, \beta_i}{\alpha_i} \cdot \bar{\varepsilon}' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta_\mu = \left[\left(\frac{X_o^*}{A} \right)^{\beta_i} \left(\frac{b_i\, \beta_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\eta} \left(\frac{b_j\, \beta_j}{\alpha_j} \right)^{\frac{\alpha_j\, \beta_j}{\beta_j}} \right]^{\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}} \cdot\, \bar{\varepsilon}'} \qquad (34)$$

Ἡ (34) διὰ $\beta_j = 1$ ($\Longrightarrow \eta_j = 0 \Longrightarrow \tau_j = b_j$ συνθῆκαι τελείου συναγωνισμοῦ) συμπίπτει πρὸς τὴν (31).

III. Ἡ Συνάρτησις S.M.A.C. ἢ C.E.S. (¹), (²)

Ἡ συνάρτησις S.M.A.C. προετάθη τὸ ἔτος 1961 ὑπὸ μιᾶς τετράδος ἐρευνητῶν τῶν Solow, Minhas, Arrow, Chenery κατὰ τὴν παρουσίασιν τῆς ἐργασίας των : Capital labor substitution and economic efficiency(²).

1) Βλ. (2) τεῦχος 7, σελ. 222 – 229, (4) σελ. 28 – 29, (5), (7) σελ. 233–236.
2) Βλ. (1) σελ. 225 – 250.

Δὲν θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν μαθηματικὴν καὶ οἰκονομικὴν θεμελίωσιν τῆς προελεύσεως τῆς μορφῆς αὐτῆς, ἀλλὰ ἁπλῶς μὲ τὴν ὑπογράμμισιν ὡρισμένων ἰδιοτήτων της καὶ μὲ τὸν μαθηματικὸν χειρισμόν της πρὸς ἀπόκτησιν τῶν διαφόρων οἰκονομικῶν σχέσεων. Ἡ συνάρτησις ὑπὸ τὴν γενικήν της μορφὴν ἐμφανίζεται ὡς ἀκολούθως :

$$\boxed{X_o = A \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j X_j^{-\rho} \right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}}, \quad \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j = 1} \qquad (35)\ (1)$$

1. — *Ἡ συνάρτησις (35) εἶναι ὁμοιογενὴς βαθμοῦ ε.*

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντες τὰς μεταβλητὰς X_j ἐπὶ $\lambda \neq 0$, ἔχομεν :

---

1) Ἡ συνάρτησις αὐτὴ διὰ $\rho \to 0$ συμπίπτει πρὸς ἐκείνην τῆς μορφῆς Cobb-Douglas. Πράγματι ἐκ τῆς (35) προκύπτει κατὰ σειράν :

$$\left(\frac{X_o}{A} \right)^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} = \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j X_j^{-\rho} \Longrightarrow - \frac{\rho}{\varepsilon} \log \left(\frac{X_o}{A} \right) = - \rho \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j \log X_j \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow e^{-\frac{\rho}{\varepsilon} \log \frac{X_0}{A}} = \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j\, e^{-\rho \log X_j}$$

Ἀναπτύσσοντας εἰς σειρὰς Mac Laurin τὰς συναρτήσεις $e^{f(\rho)}$ καὶ θεωροῦντες ἱκανοποιητικὴν τὴν προσέγγισιν μέχρι καὶ τοῦ δευτέρου ὅρου ($e^x = 1 + X + \frac{X^2}{2'} + \dots$) ἔχομεν :

$$1 - \frac{\rho}{\varepsilon} \log \frac{X_o}{A} + \frac{\rho^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{X_o}{A} \right)^2}{2'.} = \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j \left(1 - \rho \mathrm{Log} X_j \right) +$$

$$+ \frac{\rho^2 \left(\mathrm{Log} X_j \right)^2}{2'.} \Longrightarrow - \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Log} \frac{X_o}{A} + \frac{\rho \left(\frac{1}{\varepsilon} \mathrm{Log} \frac{X_o}{A} \right)^2}{2'.} =$$

$$= - \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j \mathrm{Log} X_j + \frac{\rho \left(\mathrm{Log} X_j \right)^2}{2'.}$$

Ὑπολογίζοντας τὸ ὅριον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος $\rho \to 0$, προκύπτει :

$$\log \frac{X_o}{A} = \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j\, \varepsilon \log X_j = \log \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j \varepsilon} \Longrightarrow X_o = A \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{\alpha_j \varepsilon}$$

$$A\left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j (\lambda X_j)^{-\rho}\right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}} = A\left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j X_j^{-\rho}\right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}} \cdot \lambda^{\varepsilon} = X_o \lambda^{\varepsilon}$$

2. — Ἡ ὁριακὴ παραγωγικότης λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\varphi_j \equiv \frac{\vartheta X_o}{\vartheta X_j} = -\frac{\varepsilon}{\rho} A\left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j X_j^{-\rho}\right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}-1} (-\rho) \cdot \alpha_j X_j^{-\rho-1} =$$

$$= \varepsilon A \left[\left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j X_j^{-\rho}\right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}}\right]^{(1+\frac{\rho}{\varepsilon})} \cdot$$

$$\cdot\ \alpha_j X_j^{-(\rho+1)} = \varepsilon . A . A^{-(1+\frac{\rho}{\varepsilon})} X_o^{1+\frac{\rho}{\varepsilon}} \alpha_j X_j^{-(\rho+1)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi_j = \varepsilon \cdot A^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} \alpha_j X_o^{1+\frac{\rho}{\varepsilon}} X_j^{-(\rho+1)}} \qquad (36)$$

3. — Συνθῆκαι μεγιστοποιήσσεως τοῦ κέρδους :

$$\frac{\vartheta X_o}{\vartheta X_j} \cdot \tau_o = \tau_j \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varepsilon \cdot A^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} \alpha_j X_o^{1+\frac{\rho}{\varepsilon}} X_o^{-(\rho+1)} \cdot \tau_o = \tau_j} \qquad (37)$$

4. — Ἐλαστικότης τῆς παραγωγῆς ὡς πρὸς ἕνα ἕκαστον τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν :

$$\varepsilon_j = \frac{\vartheta X_o}{\vartheta X_j} \cdot \frac{X_j}{X_o} = \varepsilon A^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} \alpha_j X_o^{\frac{\rho}{\varepsilon}} \cdot X_j^{-\rho} \qquad (38)$$

$$\sum_{j=1}^{\eta} \varepsilon_j = \varepsilon A^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j X_j^{-\rho} \cdot X_o^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} = \varepsilon A^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} \left(\frac{X_o}{A}\right)^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} \cdot X_o^{\frac{\rho}{\varepsilon}} = \varepsilon \qquad (39)$$

5. — *Ἐλαστικότης τεχνικῆς ὑποκαταστάσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν.* Ὁ τύπος (8) διά : (1)

$$F = (-1)^{\eta} \prod_{j=1}^{\eta} \varphi_j \sum_{j=1}^{\eta} \varphi_j X_j (1+\rho)^{\eta-1} \prod_{j=1}^{\eta} X_j^{-1}$$

$$F_{\kappa\lambda} = (-1)^{\eta} \prod_{j=1}^{\eta} \varphi_j (1+\rho)^{\eta-2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\kappa\neq\lambda}}^{\eta} (X_j^{-1})$$

λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\boxed{\sigma_{\kappa\lambda} = (1+\rho)^{-1} = \frac{1}{1+\rho} = \sigma} \tag{40}$$

6. — *Συνάρτησις προσφορᾶς τοῦ προϊόντος καὶ συναρτήσεις ζητήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν.*

Ἐκ τῶν συνθηκῶν πρώτου βαθμοῦ διὰ τὴν μεγιστοποίησιν τοῦ κέρδους - σχέσεις 37 - προκύπτει :

$$X_j^{(\rho+1)} = \varepsilon A^{-\frac{\rho}{\varepsilon}} \alpha_j X_o^{1+\frac{\rho}{\varepsilon}} \tau_o \tau_j^{-1} \Longrightarrow X_j = A^{-\frac{\rho\sigma}{\varepsilon}} \cdot (\varepsilon\alpha_j \tau_o \tau_j^{-1})^{\sigma} X_o^{\sigma(1+\frac{\rho}{\varepsilon})} \tag{41}$$

Εἰσάγοντας ἤδη τὴν τιμὴν τῶν X_j ἐκ τῆς (41) εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς (35) προσδιορίζεται ἡ συνάρτησις προσφορᾶς τοῦ προϊόντος ὡς ἀκολούθως :

$$X_o = A \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j \left[A^{-\frac{\rho\sigma}{\varepsilon}} (\varepsilon\alpha_j \tau_o \tau_j^{-1})^{\sigma} X_o^{\sigma(1+\frac{\rho}{\varepsilon})} \right]^{-\rho} \right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_o^{1-(-\rho).\sigma(1+\frac{\rho}{\varepsilon}).(-\frac{\varepsilon}{\rho})} = A^{1+(-\frac{\rho\sigma}{\varepsilon}).(-\rho).(-\frac{\varepsilon}{\rho})} \cdot (\varepsilon\tau_o)^{-\sigma\rho(-\frac{\varepsilon}{\rho})} .$$

$$\cdot \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j (\alpha_j \tau_j^{-1})^{-\sigma\rho} \right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}} \Longrightarrow X_o^{(1-\varepsilon)\sigma} =$$

1) Βλ. (7) σελ. 234.

$$= A^{\sigma} \cdot (\varepsilon\tau_o)^{\sigma\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j (\alpha_j \tau_j^{-1})^{-\sigma\rho} \right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{X_o = A^D \cdot (\varepsilon\tau_o)^{\varepsilon D} \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j (\alpha_j \tau_j^{-1})^{-\sigma\rho} \right]^{-\frac{\varepsilon D}{\rho\sigma}}} \qquad (42)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τικῆς τοῦ X_o ἐκ τῆς (42) εἰς τὴν (41) προκύπτουν αἱ συναρτήσεις ζητήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν:

$$X_j = A^{-\frac{\rho\sigma}{\varepsilon}} \cdot (\varepsilon\alpha_j \tau_o \tau_j^{-1})^{\sigma} \cdot A^{D\sigma(1+\frac{\rho}{\varepsilon})} \cdot$$

$$\cdot (\varepsilon\tau_o)^{\varepsilon D.\sigma(1+\frac{\rho}{\varepsilon})} \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j (\alpha_j \tau_j^{-1})^{-\sigma\rho} \right]^{-\frac{\varepsilon D}{\rho\sigma}\sigma(1+\frac{\rho}{\varepsilon})} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{X_j = A^D \cdot (\varepsilon\tau_o)^D \cdot (\alpha_j \tau_j^{-1})^{\sigma} \left[\sum_{j-1}^{\eta} \alpha_j (\alpha_j \tau_j^{-1})^{-\sigma\rho} \right]^{-\frac{D}{\rho}(\varepsilon+\rho)}} \qquad (43)$$

7. — ***Συνάρτησις τοῦ μεγίστου κέρδους.***

'Αντικαθιστῶντας εἰς τὴν συνάρτησιν τοῦ κέρδους:

$P = X_o \tau_o - \sum_{\text{[}=1}^{\eta} X_j \tau_j$ τὰς τιμὰς τῶν X_o καὶ X_j ἐκ τῶν (42) καὶ (43) προκύπτει:

$$P = A^D \cdot \varepsilon^{\varepsilon D} \cdot \tau_o^{1+D\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j (\alpha_j \tau_j^{-1})^{-\sigma\rho} \right]^{-\frac{\varepsilon D}{\rho\sigma}} - \sum_{j=1}^{\eta} A^D (\varepsilon\tau_o)^D . (\alpha_j \tau_j^{-1})^{\sigma} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j (\alpha_j \tau_j^{-1})^{-\sigma\rho} \right]^{-\frac{D}{\rho}(\varepsilon+\rho)} \cdot \tau_j \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} P = (A\tau_o\,\varepsilon)^{D}\cdot \Bigg[& \varepsilon^{D(\varepsilon-1)} \left[\sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j\,(\alpha_j\,\tau_j^{-1})^{\sigma\rho}\right]^{-\frac{\varepsilon D}{\rho\sigma}} - \\ & - \sum_{j=1}^{\eta}(\alpha_j\,\tau_j^{-1})\left[\sum_{j=1}^{\eta}\alpha_j\,(\alpha_j\,\tau_j^{-1})^{-\sigma\rho}\right]^{-\frac{D}{\rho}(\varepsilon+\rho)}\cdot\tau_j\Bigg]\end{aligned}} \qquad (44)$$

8. — *Συνάρτησις τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν* :

Ἡ συνάρτησις τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν προσδιορίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν συνθηκῶν τῆς ἐλαχιστοποιήσεών των.

Αἱ συνθῆκαι αὐταὶ εἶναι :

$$\frac{dX_i}{dX_j} = \frac{\dfrac{\partial X_o}{\partial X_j}}{\dfrac{\partial X_o}{\partial X_i}} = -\,\frac{\tau_j}{\tau_i} \Rightarrow \frac{\alpha_j\,X_i^{(1+\rho)}}{\alpha_i\,X_j^{(1+\rho)}} = \frac{\tau_j}{\tau_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_i = (\tau_j\,\alpha_i\,\tau_i^{-1}\,\alpha_j^{-1})^{\sigma}\cdot X_j\ (i = 1, 2, \ldots, \eta) \quad (i \neq j) \qquad (45)$$

Εἰσάγοντας τὴν τιμὴν αὐτὴς τῶν X_i εἰς τὴν συνάρτησιν παραγωγῆς (35) προκύπτει :

$$X_o = A\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\eta} \alpha_i\,(\tau_j\,\alpha_i\,\tau_i^{-1}\,\alpha_j^{-1})^{-\sigma\rho}\,X_j^{-\rho} + \alpha_j\,X_j^{-\rho}\right]^{-\frac{\varepsilon}{\rho}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_j = \left(\frac{X_o}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left[\sum_{\substack{i=1\\ j\neq j}}^{\eta}\alpha_i\,(\alpha_i\,\tau_i^{-1})^{-\sigma\rho}\,(\tau_j\,\alpha_j^{-1})^{-\sigma\rho} + \alpha_j\right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad (46)$$

Βάσει τῶν σχέσεων (45) καὶ (46), ἡ συνάρτησις τῶν παραγωγικῶν δαπανῶν γίνεται :

$$\Delta_\mu = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\eta} X_i\,\tau_i + X_j\,\tau_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\eta}(\tau_j\,\alpha_i\,\tau_i^{-1}\,\alpha_j^{-1})^{\sigma}X_j\cdot\tau_i + X_j\,\tau_j =$$

$$= X_j \tau_j^{\sigma} \alpha_j^{-\sigma} \sum_{i=1}^{\eta} (\alpha_i \tau_i^{-1})^{\sigma} \cdot \tau_i = \left(\frac{X_o}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\eta} \alpha_i (\alpha_i \tau_i^{-1})^{-\sigma\rho} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (\tau_j \alpha_j^{-1})^{-\sigma\rho} + \alpha_j \right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot (\tau_j \alpha_j^{-1})^{\sigma} \cdot \sum_{i=1}^{\eta} (\alpha_i \tau_i^{-1})^{\sigma} \cdot \tau_i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta_\mu = \left(\frac{X_o}{A}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \left[\sum_{i=1}^{\eta} c_i (\alpha_i \tau_i^{-1})^{-\sigma\rho} \right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \sum_{i=1}^{\eta} (\alpha_i \tau_i^{-1})^{\sigma} \cdot \tau_i \quad (47)}$$

IV. Εὑρετήριον τῶν κυριωτέρων τύπων

Περιγραφὴ τῶν τύπων	Ἀριθμὸς τύπου βάσει συναρτήσεως παραγωγῆς: Cobb - Douglas — Συνθῆκαι τελείου συναγωνισμοῦ	Cobb - Douglas — Συνθῆκαι ἀτελοῦς συναγωνισμοῦ	S.M.A.C. Συνθῆκαι τελείου συναγωνισμοῦ
Μαθηματικὴ μορφὴ συναρτήσεως παραγωγῆς	1	–	35
Ὁριακὴ παραγωγικότης	10	–	36
Καμπύλαι ἴσης ποσότητος	11	–	–
Ἰσοκλινεῖς καμπύλαι	12	–	–
Συνθῆκαι μεγιστοπ. κέρδους : 1ου βαθμοῦ	14	19	37
2ου βαθμοῦ	15	20	–
Συνθῆκαι θετικότητος κέρδους	16	21	–
Ἐλαστικότης τεχνικῆς ὑποκαταστάσεως τῶν συντελ. παραγωγῆς	9	–	40
Συνάρτησις προσφορᾶς τοῦ προϊόντος	22	25	42
» ζητήσεως τῶν παραγωγικῶν συντελεστῶν	23	26	43
Συνάρτησις μεγίστου κέρδους	27	28	44
Συνάρτησις παραγωγικῶν δαπανῶν	31	34	47

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. *Arrow K. J, Solow R. M, Minhas B. S, Chenery H.B.* (1961) Capital - Labor Substitution and Economic Efficiency. Rev. of Econ. and Statistics, τόμος 43, σελ. 225 - 250.

2. ***Βακάκη Φωτίου*** (1967). 'Ανέκδοτοι σημειώσεις Οἰκονομίας Γεωργικῆς Παραγωγῆς.

3. » (1969). Αἱ συναρτήσεις παραγωγῆς ὡς μέσον Οἰκονομικῆς ἀναλύσεως καὶ ἀναδιαρθρώσεως τῶν γεωργικῶν ἐπιχειρήσεων. Διδακτορικὴ διατριβή.

4. ***Δρακάχου Κ.*** (1964). Συναρτήσεις παραγωγῆς 'Ελληνικῆς Βιομηχανίας.

5. *Quirino Paris* (1966). Estimation of Indivitual Firm Production Functions University of California, Berkeley.

6. ***Mundlak** Yair* (1963). Estimation of Producrion and Behavioral Functions, Frow A Combination of Gross - Section and Time - Series Data Measurement in Economics. Stanford, California.

7. *Mukerji V.* (1963). A Generalized S.M.A.C. Functions with Constant Ratios of Elasticity of Substitution. The Rev. of Fcon. Studies, ἀριθ. 84, σελ. 233 - 236.